



الرياضيات

الفصل الدراسي الأول

كتاب الطالب

الفرع الأدبي

11

فريق التأليف

إضافة إلى جهود فريق التأليف، فقد جاء هذا الكتاب ثمرة جهود وطنية مشتركة من لجان مراجعة وتقييم علمية وتربوية ولغوية، ومجموعات مُركّزة من المعلمين والمُشرفين التربويين، وملاحظات مجتمعية من وسائل التواصل الاجتماعي، وإسهامات أساسية دقيقة من المجلس التنفيذي والمجلس الأعلى في المركز، ومجلس التربية والتعليم ولجانه المتخصصة.

الناشر: المركز الوطني لتطوير المناهج

يسر المركز الوطني لتطوير المناهج استقبال آرائكم وملحوظاتكم على هذا الكتاب عن طريق العناوين الآتية:

☎ 06-5376262 / 237 🏠 06-5376266 ✉ P.O.Box: 2088 Amman 11941

📌 @nccdjor 📧 feedback@nccd.gov.jo 🌐 www.nccd.gov.jo

قرّرت وزارة التربية والتعليم تدرّيس هذا الكتاب في مدارس المملكة الأردنية الهاشمية جميعها، بناءً على قرار المجلس الأعلى للمركز الوطني لتطوير المناهج في جلسته رقم (2020/4)، تاريخ 2020/6/11 م، وقرار مجلس التربية والتعليم رقم (2020/56) تاريخ 2020/6/24 م بدءاً من العام الدراسي 2020 / 2021 م.

© Harper Collins Publishers Limited 2020.

- Prepared Originally in English for the National Center for Curriculum Development. Amman - Jordan
- Translated to Arabic, adapted, customised and published by the National Center for Curriculum Development. Amman - Jordan

ISBN: 978 - 9923 - 41 - 045 - 5

المملكة الأردنية الهاشمية
رقم الإيداع لدى دائرة المكتبة الوطنية
(2020/8/2970)

373,19

الأردن. المركز الوطني لتطوير المناهج

الرياضيات: كتاب الطالب (الصف الحادي عشر)/ الفرع الأدبي / المركز الوطني لتطوير المناهج - عمان: المركز، 2020

ج1(144) ص.

ر.إ.: 2020/8/2970

الواصفات: / الرياضيات // التعليم الاعدادي // المناهج/

يتحمل المؤلف كامل المسؤولية القانونية عن محتوى مصنفه ولا يعبّر هذا المصنف عن رأي دائرة المكتبة الوطنية.

All rights reserved. No part of this publication may be reproduced, sorted in retrieval system, or transmitted in any form by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording or otherwise, without the prior written permission of the publisher or a license permitting restricted copying in the United Kingdom issued by the Copyright Licensing Agency Ltd, Barnard's Inn, 86 Fetter Lane, London, EC4A 1EN.

British Library Cataloguing -in- Publication Data

A catalogue record for this publication is available from the Library.

1441 هـ - 2020 م

2021 م

الطبعة الأولى (التجريبية)

أعيدت طباعته

المقدمة

انطلاقاً من إيمان المملكة الأردنية الهاشمية الراسخ بأهمية تنمية قدرات الإنسان الأردني، وتسليحه بالعلم والمعرفة؛ سعى المركز الوطني لتطوير المناهج، بالتعاون مع وزارة التربية والتعليم، إلى تحديث المناهج الدراسية وتطويرها، لتكون معيّنًا للطلبة على الارتقاء بمستواهم المعرفي، ومجاراة أقرانهم في الدول المتقدمة. ولما كانت الرياضيات إحدى أهمّ المواد الدراسية التي تنمّي لدى الطلبة مهارات التفكير وحلّ المشكلات، فقد أولى المركز هذا المبحث عنايةً كبيرةً، وحرص على إعداد كتب الرياضيات وفق أفضل الطرائق المُتبَّعة عالمياً على يد خبراء أردنيين؛ لضمان انسجامها مع القيم الوطنية الراسخة، وتلبيتها لاحتياجات أبنائنا الطلبة والمُعَلِّمين.

روعي في إعداد كتب الرياضيات تقديم المحتوى بصورة سلسلة، ضمن سياقات حياتية شائقة، تزيد رغبة الطلبة في التعلّم، ووظّفت فيها التكنولوجيا لجلب التسهيلات في جعل الطلبة أكثر تفاعلاً مع المفاهيم المُقدّمة لهم. وقد احتوت الكتب على مشروع لكل وحدة؛ لتعزيز تعلّم الطلبة للمفاهيم والمهارات الواردة فيها وإثرائها. ولأنّ التدرّب المكثّف على حلّ المسائل يُعدّ إحدى أهمّ طرائق ترسيخ المفاهيم الرياضية وزيادة الطلاقة الإجرائية لدى الطلبة؛ فقد أُعدّ كتاب التمارين على نحوٍ يُقدّم للطلبة ورقة عمل في كل درس، تُحلّ بوصفها واجباً منزلياً، أو داخل الغرفة الصفية إن توافر الوقت الكافي. ولأنّنا ندرك جيداً حرص المعلم الأردني على تقديم أفضل ما لديه للطلبة؛ فقد جاء كتاب التمارين أداةً مساعدة تُوفّر عليه جهد إعداد أوراق العمل وطباعتها.

من المعلوم أنّ الأرقام العربية تُستخدم في معظم مصادر تعليم الرياضيات العالمية، ولا سيّما على شبكة الإنترنت، التي أصبحت أداةً تعليميةً مهمّةً؛ لما تزخر به من صفحات تُقدّم محتوىً تعليمياً تفاعلياً ذا فائدة كبيرة. وحرصاً منا على ألا يفوت أبنائنا الطلبة أيّ فرصة، فقد استعملنا في هذا الكتاب الأرقام العربية؛ لجسر الهوة بين طلبتنا والمحتوى الرقمي العلمي، الذي ينمو بتسارع في عالم يخطو نحو التعليم الرقمي بوتيرة متسارعة.

ونحن إذ نُقدّم هذا الكتاب، نأمل أن ينال إعجاب أبنائنا الطلبة ومعلّميهم، ويجعل تعليم الرياضيات وتعلّمها أكثر متعةً وسهولةً، ونعدهم بأن نستمرّ في تحسين هذا الكتاب في ضوء ما يصلنا من ملاحظات.

المركز الوطني لتطوير المناهج

قائمة المحتويات

6	الوحدة 1 البرمجة الخطية
8	الدرس 1 حل المتباينة الخطية بمتغيرين بيانياً
15	الدرس 2 حل نظام مُكوّن من متباينات خطية بمتغيرين بيانياً
23	معمل برمجة جبراً: تمثيل نظام متباينات خطية بمتغيرين بيانياً
25	الدرس 3 البرمجة الخطية
33	اختبار نهاية الوحدة

36	الوحدة 2 مبدأ العد والتباديل والتوافيق
38	الدرس 1 مبدأ العد الأساسي
44	الدرس 2 مضروب العدد
48	الدرس 3 التباديل
54	الدرس 4 التوافيق
59	اختبار نهاية الوحدة

قائمة المحتويات

62	الوحدة 3 الاحتمالات
64	الدرس 1 الاحتمال بالتبادل والتوافق
72	الدرس 2 المتغيرات العشوائية
76	الدرس 3 احتمال المتغير العشوائي
84	الدرس 4 توقع المتغير العشوائي
91	اختبار نهاية الوحدة

Gate

06

18

32

14

09

27

20

ما أهمية هذه الوحدة؟

طُوِّرت نظرية البرمجة الخطية في بداية الحرب العالمية الثانية عام 1939م، واستُعملت لتقليل التكلفة وزيادة الإنتاجية في كثير من المجالات، وقد استفادت منها الشركات التجارية لزيادة الأرباح وتقليل الخسائر، وكذلك جدولة رحلات الطيران، وإنشاء خطوط الهاتف. سأتعرّف في هذه الوحدة البرمجية الخطية، وبعض تطبيقاتها الحياتية.

سأتعلّم في هذه الوحدة:

- ◀ تمثيل متباينة خطية بمتغيرين بيانياً.
- ◀ حلّ نظام مُكوّن من متباينات خطية بمتغيرين بيانياً.
- ◀ حلّ نظام مُكوّن من متباينات خطية بمتغيرين باستعمال برمجة جيو جبرا.
- ◀ حلّ مسائل حياتية عن البرمجة الخطية.

تعلمت سابقاً:

- ✓ حلّ متباينة خطية بمتغير واحد، وتمثيلها على خط الأعداد.
- ✓ تمثيل متباينة خطية بمتغيرين على المستوى الإحداثي.
- ✓ حلّ نظام مُكوّن من معادلتين خطيتين بمتغيرين.
- ✓ تمثيل نظام مُكوّن من معادلتين خطيتين بمتغيرين بيانياً.

حل المتباينة الخطية بمتغيرين بيانياً

Solving linear inequality in two variables

حل متباينة خطية بمتغيرين بيانياً.

فكرة الدرس



منطقة الحلول الممكنة، المستقيم الحدودي.

المصطلحات



مسألة اليوم



تصنع نهى أساور وأطواقاً من الخرز، وتستعمل 10 حبات من الخرز لصنع السوار الواحد، و45 حبة لصنع الطوق الواحد. كم سواراً وطوقاً يمكنها أن تصنع من 214 حبة خرز؟

تعلمت سابقاً أن المتباينة الخطية جملة رياضية تحوي الرمز \geq ، أو \leq ، أو $<$ ، أو $>$ ، وأنها قد تحتوي على متغير واحد أو متغيرين. من الأمثلة على المتباينات الخطية بمتغيرين:

$$2x + y \leq 1$$

$$3x + 2y > 2$$

$$x - 4y < -1$$

يكون الزوج المرتب (a, b) حلاً للمتباينة الخطية بمتغيرين إذا كان الناتج صحيحاً عند تعويض إحداثيه في المتباينة.

مثال 1

أحدّد إذا كان الزوج المرتب يُمثّل حلاً للمتباينة: $x - y \leq 3$ ، في كلٍّ مما يأتي:

1 (1, 2)

$$x - y \leq 3$$

المتباينة الخطية

$$1 - 2 \stackrel{?}{\leq} 3$$

بالتعويض

$$-1 \leq 3$$

الناتج صحيح

ألاحظ أنه عند تعويض الزوج المرتب في المتباينة، فإن الناتج يكون صحيحاً. إذن، (1, 2) يُمثّل حلاً لها.

أذكر

تكون جميع الأعداد الحقيقية التي تزيد على العدد a حلاً للمتباينة: $x > a$ ، وتكون جميع الأعداد التي تزيد على (أو تساوي) العدد a حلاً للمتباينة: $x \geq a$.

أذكر

يتغير اتجاه إشارة المتباينة عند ضرب طرفيها في عدد سالب، أو قسمتهما عليه. فمثلاً، $-x > a$ تصبح $x < -a$ بعد ضرب طرفيها في العدد -1 ، حيث a عدد حقيقي.

2 (7, 3)

أعوّض الزوج المُرتَّب (7, 3) في المتباينة:

$$x - y \leq 3$$

المتباينة الخطية

$$7 - 3 \stackrel{?}{\leq} 3$$

بالتعويض

$$4 \not\leq 3$$

النتيجة غير صحيحة

ألاحظ أنه عند تعويض الزوج المُرتَّب في المتباينة، فإنَّ الناتج لا يكون صحيحًا. إذن، (7, 3) لا يُمثِّل حَلًّا لها.

2 (2, -1)

أعوّض الزوج المُرتَّب (2, -1) في المتباينة:

$$x - y \leq 3$$

المتباينة الخطية

$$2 - (-1) \stackrel{?}{\leq} 3$$

بالتعويض

$$3 \leq 3$$

النتيجة صحيحة

ألاحظ أنه عند تعويض الزوج المُرتَّب في المتباينة، فإنَّ الناتج يكون صحيحًا. إذن، (2, -1) يُمثِّل حَلًّا لها.

أتحقق من فهمي 

أحدّد إذا كان الزوج المُرتَّب يُمثِّل حَلًّا للمتباينة: $x + 2y > 1$ ، في كلِّ ممّا يأتي:

a) (2, 3)

b) (1, -2)

c) (1, 0)

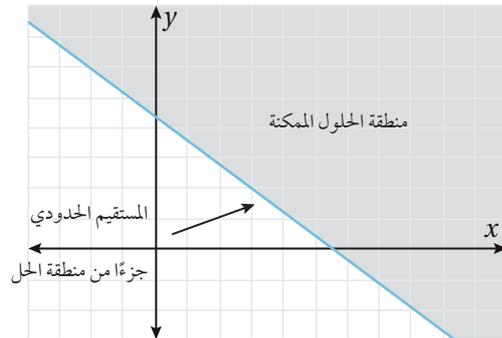
لغة الرياضيات

يمكن استعمال عدة رموز للدلالة على عدم تحقق المتباينة فمثلاً للتعبير عن عدم تحقق (أقل أو يساوي) يمكن استعمال احد الرموز الآتية:

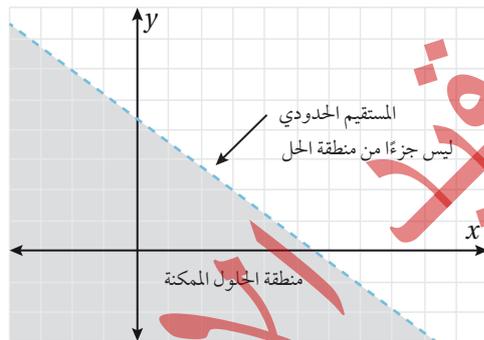
\nlessgtr \nlessgtr \nlessgtr

عند تمثيل المتباينة الخطية بيانياً على المستوى الإحداثي، فإنَّ النقاط التي تُمثِّل جميع حلولها المُمكنة تُسمّى **منطقة الحلول المُمكنة** (feasible region). لتمثيل المتباينة بيانياً، أبدأ برسم مستقيم المعادلة المُرفّقة بالمتباينة بعد استبدال رمز التباين (\leq , $<$, $>$, \geq) برمز المساواة (=)، حيث تُمثِّل المعادلة الناتجة مستقيماً يُسمّى **المستقيم الحدودي** (boundary line)؛ وهو مستقيم يُقسِّم المستوى الإحداثي إلى جزأين، أحدهما منطقة الحلول المُمكنة.

قد يكون المستقيم الحدودي جزءاً من منطقة الحلول المُمكنة إذا تضمَّنت المتباينة الرمز \geq أو الرمز \leq ، عندئذٍ يُرسم المستقيم الحدودي متصلًا كما في الشكل الآتي.



وقد لا يكون المستقيم الحدودي جزءاً من منطقة الحلول المُمكنة إذا تضمَّنت المتباينة الرمز $>$ أو الرمز $<$ ، عندئذٍ يُرسم المستقيم الحدودي مُتقطَّعًا كما في الشكل الآتي.



لتحديد أيّ المنطقتين على جانبي المستقيم الحدودي هي منطقة الحلول المُمكنة، أختار النقطة (a, b) التي لا تقع على المستقيم الحدودي، ثم أعوضها في المتباينة الخطية، فإذا كانت تُحقِّقها (أي ينجم عنها نتيجة صحيحة)، أُظلل الجزء من المستوى الإحداثي الذي تقع فيه تلك النقطة، وإلا أُظلل الجزء الآخر الذي لا تقع فيه تلك النقطة.

مثال 2

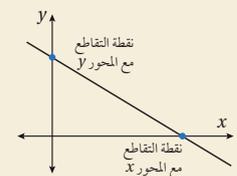
أمثل المتباينة الخطية: $2x + 3y < 6$ على المستوى الإحداثي.

الخطوة 1: تمثيل المستقيم الحدودي.

أمثل المستقيم الحدودي: $2x + 3y = 6$ ، ثم أنشئ جدول قيم يُبين نقاط تقاطع المستقيم مع

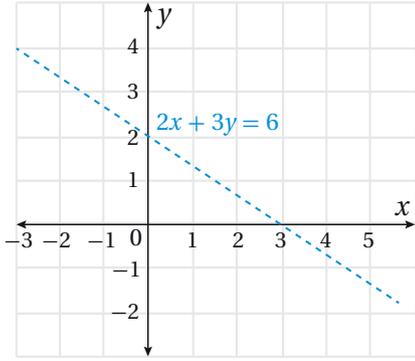
x	0	3
y	2	0

المحورين:



أندكر

لتمثيل معادلة خطية بمتغيرين على المستوى الإحداثي، أجد نقطة تقاطع المستقيم مع المحور x بتعويض $y=0$ في المعادلة، ثم أجد نقطة تقاطعه مع المحور y بتعويض $x=0$ في المعادلة، ثم أصل بين نقطتي التقاطع بمستقيم كما في الشكل المجاور.



أعيّن النقطتين $(0, 2)$ و $(3, 0)$ على المستوى الإحداثي، ثم أرسم مستقيمًا يمر بهما. وبما أنه لا توجد مساواة في رمز المتباينة فإنه يُرسم متقطعًا كما في الشكل المجاور.

الخطوة 2: تحديد منطقة الحلول المُمكنة.

أختار نقطة لا تقع على المستقيم الحدودي، مثل $(1, -2)$ ، ثم أتحرّق إذا كان الناتج صحيحًا أم لا عند تعويضها في المتباينة:

$$2x + 3y < 6$$

$$2(1) + 3(-2) < 6$$

$$-4 < 6$$

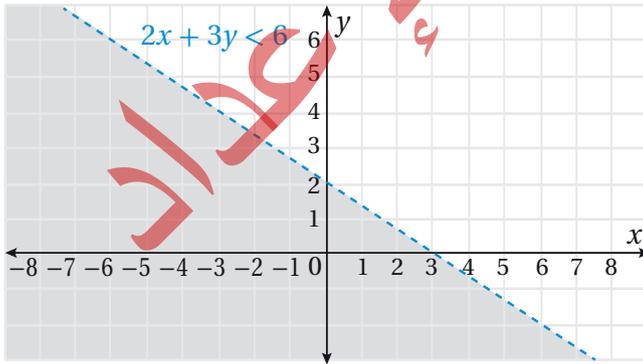
المتباينة الخطية

بالتعويض

الناتج صحيح

الخطوة 3: تظليل منطقة الحلول المُمكنة.

بما أن النقطة $(1, -2)$ أفضت إلى ناتج صحيح للمتباينة، فإنني أظلل الجزء من المستوى الذي تقع فيه هذه النقطة كما في الشكل الآتي.



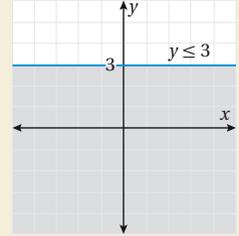
أتحقق من فهمي

أمثل المتباينة الخطية: $4x - 5y \geq 2$ على المستوى الإحداثي.

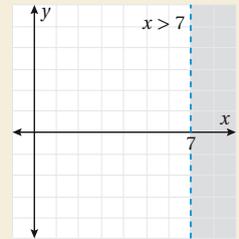
للمتباينات استعمالات كثيرة في المواقف العلمية والحياتية؛ إذ تساعدنا على اتخاذ القرار الأنسب المُتعلّق بتحديد القيم المُمكنة ضمن شروط مُحدّدة.

أذكر

تُمثّل المتباينة الخطية ذات المتغير الواحد، مثل $y \leq 3$ ، كما في الشكل الآتي.



في حين تُمثّل المتباينة الخطية ذات المتغير الواحد، مثل $x > 7$ ، كما في الشكل الآتي.



مثال 3 : من الحياة



مواقف: موقف سيّارات تبلغ مساحته 1400 m^2 ، ويتسع لعدد x من السيّارات الصغيرة، وعدد y من السيّارات الكبيرة. إذا كانت المساحة التي تقف عليها السيّارة الصغيرة 14 m^2 ، والمساحة التي تقف عليها السيّارة الكبيرة 35 m^2 ، فأجد عدد السيّارات الصغيرة والكبيرة التي يمكن أن يتسع لها هذا الموقف.

الخطوة 1: التعبير عن المسألة جبرياً بمتباينة خطية.

$$14x + 35y \leq 1400$$

الخطوة 2: تمثيل المتباينة بيانياً.

أمثل بيانياً المستقيم الحدودي: $14x + 35y = 1400$ ، وبما أنه توجد مساواة في رمز المتباينة، فإنّ المستقيم يُرسم متصلًا.

أختار أي نقطة، مثل $(20, 30)$ ، ثم أتحقق إذا كان الناتج صحيحاً أم لا عند تعويضها في المتباينة:

$$14x + 35y \leq 1400$$

$$14(20) + 35(30) \stackrel{?}{\leq} 1400$$

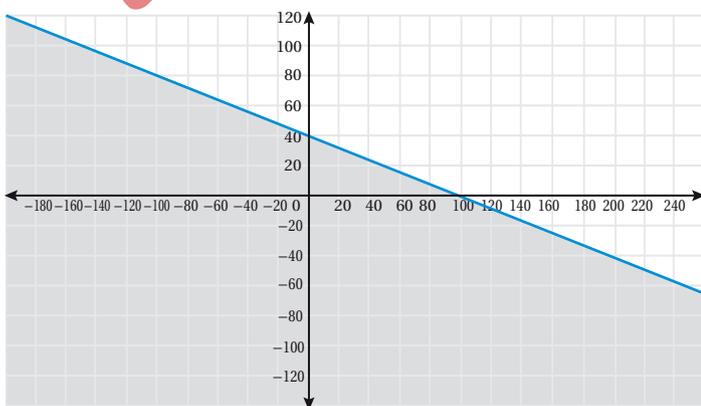
$$1330 \leq 1400$$

المتباينة الخطية

بالتعويض

الناتج صحيح

بما أنّ النقطة $(20, 30)$ أفضل إلى ناتج صحيح للمتباينة، فإنني أظلل الجزء من المستوى الذي تقع فيه هذه النقطة كما في الشكل الآتي.



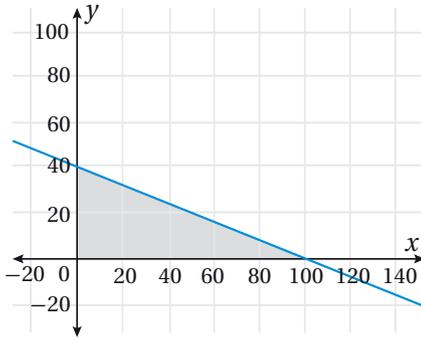
معلومة

تعد مواقف السيارات من أهم الحلول لمشكلة تزايد عدد السيارات المتسارع وحاجتها الى مواقف.

ومن أشكال مواقف السيارات المسطحة والطابقية والالكتروتية وغيرها.

الخطوة 3: تحديد حلّ المسألة.

ألاحظ أنّ قيم x و y يجب أن تكون صحيحة وموجبة؛ لأنها تُمثّل أعداد سيارات؛ ما يُقلّص



منطقة الحلول المُمكنة كما في الشكل المجاور.

ألاحظ أيضًا أنّ أيّ نقطة إحداثياتها عددان صحيحان

موجبان، وتقع على المستقيم الحدودي، أو ضمن

المنطقة المُظلّلة التي تظهر كمثلث تُعدّ حلًّا.

فمثلًا، النقطة $(40, 20)$ تُمثّل حلًّا للمتباينة؛ لأنّ

المساحة التي تشغلها 40 سيارة صغيرة و 20 سيارة

كبيرة 1260 m^2 ، وهي أقل من مساحة موقف السيارات البالغة 1400 m^2 .

أنتحقق من فهمي

مطاعم، مطعم مساحة صالته 64 m^2 ، وهي تتسع لعدد x من الطاولات الصغيرة، وعدد y من

الطاولات الكبيرة. تشغل الطاولة الصغيرة مساحة 2.5 m^2 ، وتشغل الطاولة الكبيرة مساحة

4 m^2 . أجد عدد الطاولات الصغيرة والكبيرة التي يُمكن وضعها في صالة المطعم.

أتدرب وأحل المسائل

أحدّد إذا كان كل زوج مُرتّب مما يأتي يُمثّل حلًّا للمتباينة: $x - 3y \geq 5$:

1 $(1, -2)$

2 $(5, 0)$

3 $(-4, 1)$

4 $(-3, -4)$

5 $(-4, 0)$

6 $(5, 2)$

أحدّد إذا كان كل زوج مُرتّب مما يأتي يُمثّل حلًّا للمتباينة: $5x - 2y < 6$:

7 $(0, 0)$

8 $(2, 2)$

9 $(4, 1)$

10 $(-2, -1)$

11 $(-2, -8)$

12 $(-1, -6)$

أمثّل كلّ من المتباينات الخطية الآتية على المستوى الإحداثي:

13 $8y + 3x < 2$

14 $4x \leq 8$

15 $2x - 9y \geq -3$

16 $5y - 8x \geq 1$

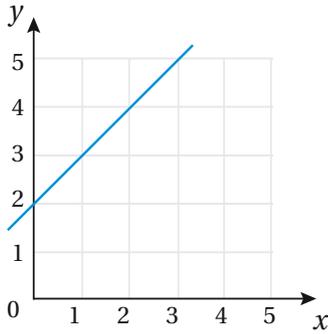
17 $-3y < 12$

18 $6x + 3y > -5$

19 **اختبارات:** تُمثل المتباينة: $3x + 2y \geq 93$ عدد أسئلة الاختيار من مُتعدّد (x) ، وأسئلة ملء الفراغ (y) التي يتعيّن على منى الإجابة عنها بصورة صحيحة لنيل درجة A في اختبار التربية الإسلامية. إذا أجابت إجابة صحيحة عن 20 سؤالاً من أسئلة الاختيار من مُتعدّد، وعن 18 سؤالاً من أسئلة ملء الفراغ، فهل ستنال درجة A في الاختبار؟

20 **شاحنات:** تستطيع شاحنة حمل 4000 kg من صناديق البضائع. إذا كان يوجد عدد x من الصناديق التي كتلة كل منها 50 kg، وعدد y من الصناديق التي كتلة كل منها 95 kg، فما عدد الصناديق التي يُمكن للشاحنة حملها من كلا النوعين؟

21 أمثل بيانياً منطقة حلّ المتباينة من الصورة: $x + y < c$ ، حيث c عدد حقيقي موجب.



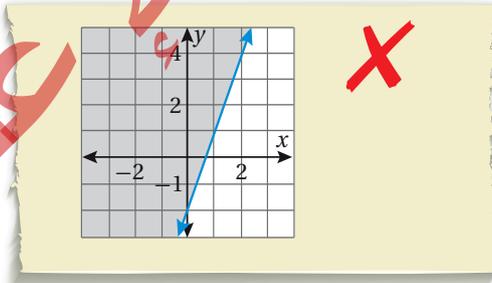
22 أيّ جهتي المستقيم في الشكل المجاور تُمثل منطقة حلّ المتباينة، مُبرّراً إجابتي؟

$$y \leq x + 2$$

23 أحلّ المسألة الواردة في بند (مسألة اليوم).

مهارات التفكير العليا

24 **أكتشف الخطأ:** مثل سفيان المتباينة: $y \leq 3x - 2$ بيانياً على النحو الآتي:



أكتشف الخطأ في تمثيل سفيان، ثم أصحّحه.

25 **تبرير:** عند تمثيل متباينة خطية بمتغيرين بيانياً، لماذا تُختار فقط نقطة اختبار لا تقع على المستقيم الحدودي؟ أبرّر إجابتي.

26 **تحدّ:** أكتب متباينة خطية بمتغيرين، بحيث تقع النقطتان $(-2, -5)$ و $(3, 5)$ على المستقيم الحدودي، وتقع النقطتان $(2, 3)$ و $(6, 5)$ في منطقة الحلول المُمكنة، ثم أمثل المتباينة بيانياً.

حلّ نظام مُكوّن من متباينات خطية بمتغيرين بيانياً

Solving system of linear inequalities in two variables

حلّ نظام مُكوّن من متباينات خطية بمتغيرين بيانياً.

فكرة الدرس



نظام المتباينات الخطية، مجموعة الحلّ.

المصطلحات



مسألة اليوم



تكلفة غسل السيّارة
الصغيرة ديناران

تكلفة غسل السيّارة
الكبيرة 3 دنانير

قدّم محلّ لتبديل زيوت السيّارات عرضاً مجانيّاً لغسل السيّارات. إذا كان الحد الأقصى لذلك هو غسل 30 سيّارة يوميّاً، بتكلفة لا تزيد على 75 دينار، فكم سيّارة كبيرة وصغيرة يُمكن غسلها يوميّاً بحسب هذا العرض؟

يتكوّن نظام المتباينات الخطية (system of linear inequalities) من متباينتين خطيتين أو أكثر. ويُطلَق على مجموعة الأزواج المُرتّبة التي تُحقِّق جميع المتباينات اسم **مجموعة الحلّ** (Solution set). فمثلاً، يتكوّن النظام الآتي من ثلاث متباينات:

$$x + y < 2$$

المتباينة الأولى

$$-2x + y > -1$$

المتباينة الثانية

$$x - 3y \leq -2$$

المتباينة الثالثة

يُمثّل الزوج المُرتّب $(-1, 2)$ أحد حلول هذا النظام؛ لأنّه يُحقِّق فيه المتباينات جميعها.

$$-1 + 2 = 1 < 2$$

الزوج المُرتّب يُحقِّق المتباينة الأولى

$$-2(-1) + 2 = 4 > -1$$

الزوج المُرتّب يُحقِّق المتباينة الثانية

$$-1 - 3(2) = -7 \leq -2$$

الزوج المُرتّب يُحقِّق المتباينة الثالثة

لحلّ نظام متباينات، أمثّل كل متباينة فيه بيانياً على المستوى الإحداثي نفسه، ثم أظلل المنطقة المشتركة بين مناطق حلّ المتباينات جميعها التي تُمثّل حلّ النظام.

أتعلّم

يوجد عدد لانهائي من الأزواج المُرتّبة التي تُحقِّق هذا النظام، وليس $(-1, 2)$ فقط.

لغة الرياضيات

تدل عبارة (الزوج المُرتّب يُحقِّق متباينة) على أنّ الناتج يكون صحيحاً عند تعويض هذا الزوج في المتباينة.

مثال 1

أمثل منطقة حلّ نظام المتباينات الآتي، ثم أتحرّق من صحة الحلّ:

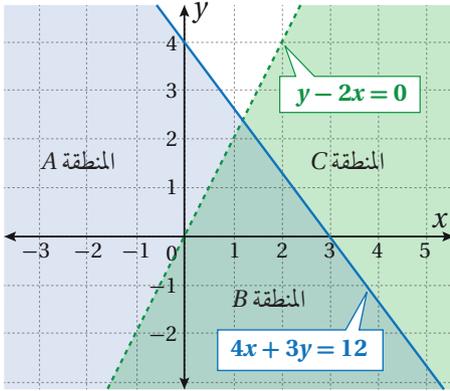
$$4x + 3y \leq 12$$

$$y - 2x < 0$$

الخطوة 1: تمثيل المستقيمين الحدوديين.

$$4x + 3y = 12$$

$$y - 2x = 0$$



أمثل بيانيًا المستقيمين الحدوديين على المستوى الإحداثي نفسه، وأستعمل لونين مختلفين لتظليل منطقتي الحلّ كما في الشكل المجاور.

أندكر

إذا تضمّنت المتباينة رمز < أو رمز >، فإنّ المستقيم الحدودي لا يدخل ضمن منطقة الحلّ، ويكون تمثيله بخط متقطع.

الخطوة 2: تحديد منطقة التقاطع بين حلّي المتباينتين.

ألاحظ أنّ حلّ المتباينة: $4x + 3y \leq 12$ هو المنطقتان A وB، وأنّ حلّ المتباينة: $y - 2x < 0$ هو المنطقتان B وC. إذن، المنطقة B المشتركة بين منطقتي حلّ المتباينتين هي منطقة حلّ نظام المتباينات.

الخطوة 3: التحرّق من صحة الحلّ.

أتحرّق من صحة الحلّ باختيار زوج مُرتّب يقع في منطقة حلّ النظام (المنطقة B)، مثل $(-1, 2)$ ، ثم أعرّضه في متباينات النظام جميعها:

$$4x + 3y \leq 12$$

$$4(2) + 3(-1) \stackrel{?}{\leq} 12$$

$$5 \leq 12$$

$$y - 2x < 0$$

$$-1 - 2(2) \stackrel{?}{<} 0$$

$$-5 < 3$$

المتباينة الأولى

بالتعويض

النتيجة صحيحة

المتباينة الثانية

بالتعويض

النتيجة صحيحة

أندكر

يجبُ تعويضُ الحلّ في جميع متباينات النظام؛ لكيلا يكون الحلّ غير صحيح، بحيث يُحرّق إحدى المتباينات من دون الأخريات.

أتحقق من فهمي

أمثل منطقة حلّ نظام المتباينات الآتي، ثم أتحقق من صحة الحلّ:

$$2x - 4y \geq -5$$

$$x + 7y < 7$$

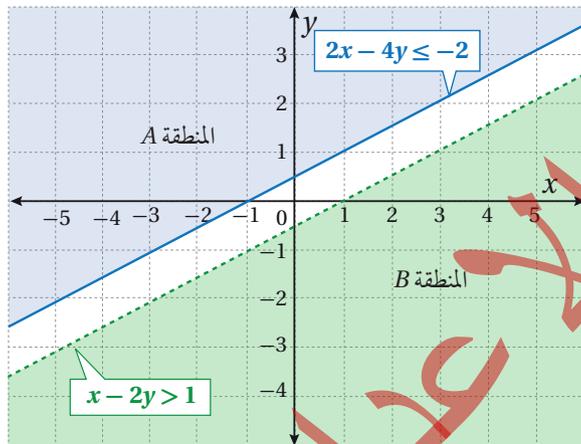
لا يكون لنظام المتباينات حلّ أحياناً؛ لعدم وجود منطقة مشتركة بين مناطق حلّ المتباينات المكوّنة له، عندئذٍ تكون مجموعة الحلّ هي المجموعة الخالية.

مثال 2

أمثل منطقة حلّ نظام المتباينات الآتي:

$$2x - 4y \leq -2$$

$$x - 2y > 1$$



أمثل بيانياً المستقيمين الحدوديين:

$$2x - 4y = -2$$

$$x - 2y = 1$$

على المستوى الإحداثي نفسه، وأستعمل لونين مختلفين لتظليل منطقتي الحلّ كما في الشكل المجاور.

ألاحظ أنّ حلّ المتباينة: $2x - 4y \leq -2$ هو المنطقة A، وأنّ حلّ المتباينة: $x - 2y > 1$ هو المنطقة B، وأنّه لا يوجد تقاطع بين منطقتي حلّ المتباينتين. إذن، حلّ النظام هو المجموعة الخالية \emptyset .

أتحقق من فهمي

أمثل منطقة حلّ نظام المتباينات الآتي:

$$5x - 2y < 3$$

$$2.5x - y \geq 2$$

أتذكّر

يُرمز إلى المجموعة الخالية بالرمز $\{\}$ ، أو الرمز \emptyset (تُقرأ: فاي)؛ وهي مجموعة لا يوجد فيها عناصر.

أتعلّم

ألاحظ في المثال 2 عدم وجود منطقة حلّ مشتركة؛ لأنّ المستقيمين الحدوديين متوازيان.

قد يحوي النظام أكثر من متباينتين، عندئذٍ تكون منطقة الحَل هي المنطقة المشتركة بين مناطق حَل المتباينات جميعها.

مثال 3

أمثل بيانياً منطقة حَل نظام المتباينات الآتي:

$$x - y \geq 0$$

$$x + y < 8$$

$$x > 2$$

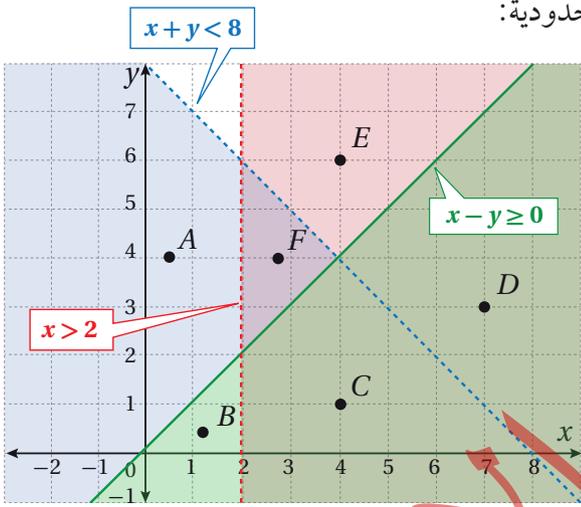
الخطوة 1: أمثل بيانياً المستقيمات الحدودية:

$$x - y = 0$$

$$x + y = 8$$

$$x = 2$$

على المستوى الإحداثي نفسه كما في الشكل المجاور.



الخطوة 2: تحديد منطقة الحَل.

أظلل منطقة حَل المتباينة: $x + y < 8$ باللون الأزرق، وهي المناطق: A, B, C, F .

أظلل منطقة حَل المتباينة: $x - y \geq 0$ باللون الأخضر، وهي المناطق: B, C, D .

أظلل منطقة حَل المتباينة: $x > 2$ باللون الأحمر، وهي المناطق: C, D, E, F .

ألاحظ أن المنطقة C هي المنطقة المشتركة بين مناطق حَل المتباينات الثلاث. إذن، هي منطقة حَل النظام.

أتحقق من فهمي

أمثل بيانياً منطقة حَل نظام المتباينات الآتي:

$$-3x + 4y \geq 9$$

$$x - 5y > 6$$

$$2x - 5y < -3$$

أتذكر

للتحقق من أن الزوج المرتب يُمثل حلاً لنظام المتباينات، يجب تعويضه فيها جميعاً.

تُستعمل أنظمة المتباينات الخطية في عديد من المجالات والتطبيقات الحياتية، ويُمكن بها تحديد القيم المُمكنة للمتغيرات وفق شروط مُحدَّدة.



مثال 4: من الحياة

كرة قدم: في دوري كرة القدم المدرسي، يحصل الفريق الفائز على 3 نقاط، ويحصل الفريق المتعادل على نقطة واحدة، ولا يحصل الفريق الخاسر على أي نقطة.

إذا فاز فريق مدرسة سلمان في x من المباريات، وتعادل في y من المباريات، وجمع منها 18 نقطة على الأكثر، وكان عدد مرّات فوزه أكثر من عدد مرّات تعادله، وتعادل مرّتين على الأقل؛ فأجد العدد المُمكن من المباريات التي فاز بها الفريق، والعدد المُمكن من المباريات التي تعادل فيها الفريق.

الخطوة 1: التعبير عن المسألة جبرياً بنظام من المتباينات الخطية.

أفترض أنّ عدد مرّات الفوز هو x ، وأنّ عدد مرّات التعادل هو y ، ثم أكتب نظام المتباينات الخطية المرتبط بالشروط الواردة في نص المسألة.

$$3x + y \leq 18$$

عدد نقاط الفوز والتعادل 18 على الأكثر

$$x > y$$

عدد مرّات الفوز أكثر من عدد مرّات التعادل

$$y \geq 2$$

تعادل الفريق مرّتين على الأقل

الخطوة 2: تمثيل نظام المتباينات الخطية بيانياً.

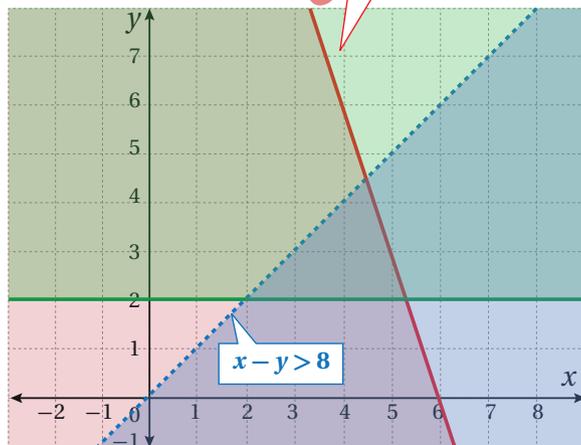
أمثل بيانياً المستقيمات الحدودية:

$$3x + y = 18$$

$$x - y = 0$$

$$y = 2$$

ثم أظلل منطقة الحّل لكل متباينة.



أقيمت أول بطولة لكأس العالم في كرة القدم بالأوروغواي عام 1930م، وتحديداً في مدينة مونتيفيدو.

ألاحظ أن مناطق الحل تتقاطع في منطقة على شكل مثلث، هي منطقة حل النظام، وأنه يمكن اختيار نقطة مثل (3, 4) ضمن هذه المنطقة، والتأكد أنها تحقق المتباينات جميعها على النحو الآتي:

$$3x + y \leq 18$$

المتباينة الخطية الأولى

$$3(4) + 3 \leq 18$$

بالتعويض

$$15 \leq 18$$

نتيجة صحيحة

$$x - y > 0$$

المتباينة الخطية الثانية

$$4 - 3 > 0$$

بالتعويض

$$1 > 0$$

نتيجة صحيحة

$$y \geq 2$$

المتباينة الخطية الثالثة

$$3 \geq 2$$

بتعويض قيمة y ، يكون الناتج صحيحاً

الخطوة 3: تحديد حل المسألة.

أي نقطة تقع في منطقة الحل تُعدّ حلاً لنظام المتباينات الخطية. وفي هذه الحالة، ولأن عدد المباريات يجب أن يكون صحيحاً؛ فإن النقطة (4, 3) تُمثّل أحد الحلول الممكنة؛ ما يعني أن الفريق فاز بـ 4 مباريات، وتعادل في 3 مباريات، وجمع 15 نقطة.

أتحقق من فهمي

محميات: يوجد في محمية للحيوانات مجموعة من الغزلان والأيائل، وقد أفاد الموظف الذي يُشرف على إطعامها والاعتناء بها أن:

- في المحمية 6 حيوانات على الأقل.
- عدد الحيوانات في المحمية لا يزيد على 12 حيواناً.
- عدد الغزلان في المحمية أقل من عدد الأيائل.
- في المحمية اثنان من الغزلان على الأقل.

(a) ما أقل عدد ممكن من الأيائل؟

(b) ما أكثر عدد ممكن من الغزلان؟

لغة الرياضيات

a على الأكثر تُكافئ
 $x \leq a$ و b على الأقل
تُكافئ $x \geq b$.

أفكر

أكتب قائمة تحوي جميع النقاط التي يمكن أن تكون حلولاً ممكنة لنظام المتباينات الخطية في المثال 4.



تقع محمية الغزلان في دبين ضمن إحدى أكبر المحميات الطبيعية في الأردن، وتمتد على مساحة 8.5 km^2 من أحراش عجلون، وقد تأسست عام 2001م.



أُمثّل منطقة حَلِّ كلِّ من أنظمة المتباينات الآتية:

1 $x + 3y > 1$

$5x - y \leq 2$

2 $-3x - 12y > -9$

$x + 4y \geq 5$

3 $x - 11y < 6$

$-2x + 22y > -12$

4 $3x + 5y \leq 1$

$3x + 5y \leq 3$

5 $2x - 7y > 2$

$2x - 7y \leq 2$

6 $13x - y < 11$

$x + y \geq 0$

7 $9x - y < 2$

$x + 3y > -1$

$x - y > -3$

8 $5x - 5y < 2$

$2x - 2y > 1$

$x \geq y$

9 $x \leq y$

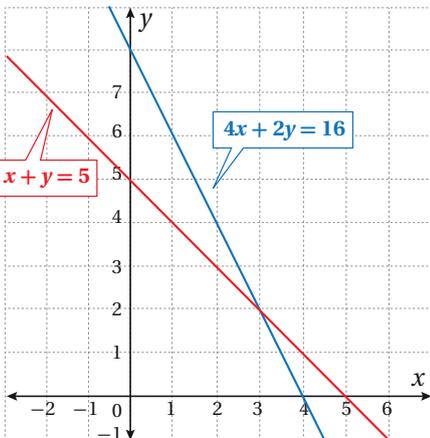
$x - 5y < 6$

$10x - y > 3$



10 **سياحة:** تبلغ تكلفة تذكرة ركوب قارب سياحي دينارين للبالغين، ودينارًا واحدًا للأطفال، ويتسع القارب لـ 10 أشخاص على الأكثر. إذا كانت x تُمثّل عدد البالغين، ولا تُمثّل عدد الأطفال، فما عدد البالغين والأطفال الذي قد يوجد على متن القارب، علمًا بأن ربيع بيع التذاكر أقل من 12 دينارًا.

11 **نقل جوي:** سعر تذكرة الدرجة السياحية للسفر بالطائرة بين مدينتي عمان والعقبة 25 دينارًا، وسعر تذكرة الدرجة الخاصة 50 دينارًا. إذا كان ربيع بيع التذاكر 1600 دينار على الأقل، ويبيع 50 تذكرة على الأكثر، فأجد عدد التذاكر الممكن لكل درجة.



12 أظلل منطقة حَلِّ النظام الآتي من المتباينات في الشكل المجاور، ثم أكتب جميع حلول النظام المُمكنة، علمًا بأن y ، أعداد صحيحة موجبة.

$x + y \geq 5$

$4x + 2y \leq 16$

- 13 **جامعات:** أرادت سامية الالتحاق بجامعة تشترط عقد امتحاني قبول لذلك؛ أحدهما في مبحث الرياضيات، والآخر في مبحث اللغة الإنجليزية، وإحراز ما بين 900 نقطة و1200 نقطة في الامتحانين معاً؛ بشرط ألا يقل المجموع في امتحان الرياضيات عن 600 نقطة، وألا يقل في امتحان اللغة الإنجليزية عن 200 نقطة. أجد عدد النقاط من مضاعفات المئة، التي يتعيّن على سامية إحرازها في كل امتحان لتُقبَل في الجامعة.

مهارات التفكير العليا



- 14 **تبرير:** أصِف منطقة حلّ نظام المتباينات الآتي من دون تمثيلها بيانياً:

$$2x + y \leq 7$$

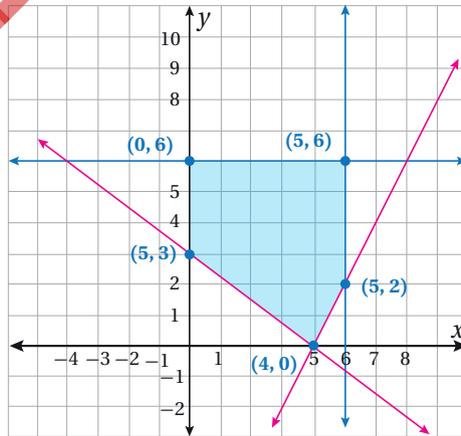
$$2x + y \geq 7$$

- مسألة مفتوحة: أكتب نظامين يتكوّن كلّ منهما من متباينتين خطيتين بمتغيرين، بحيث تكون مجموعة الحلّ:

- 15 مجموعة جزئية من الأعداد الحقيقية.

- 16 المجموعة الخالية.

- 17 **تحّد:** أكتب نظام المتباينات الذي منطقة حلّه هي المنطقة المُظَلَّلة في التمثيل البياني الآتي:



تمثيل نظام متباينات خطية بمتغيرين بيانياً

Graphing system of linear inequalities in two variables

يُمكنني استعمال برمجية جيوجبرا لتمثيل نظام المتباينات الخطية بيانياً على المستوى الإحداثي، وإيجاد منطقة الحلّ.

مثال 1

أمثّل بيانياً نظام المتباينات الخطية الآتي باستعمال برمجية جيوجبرا، ثمّ أحدّد منطقة الحلّ:

$$3x + 5y \leq 2$$

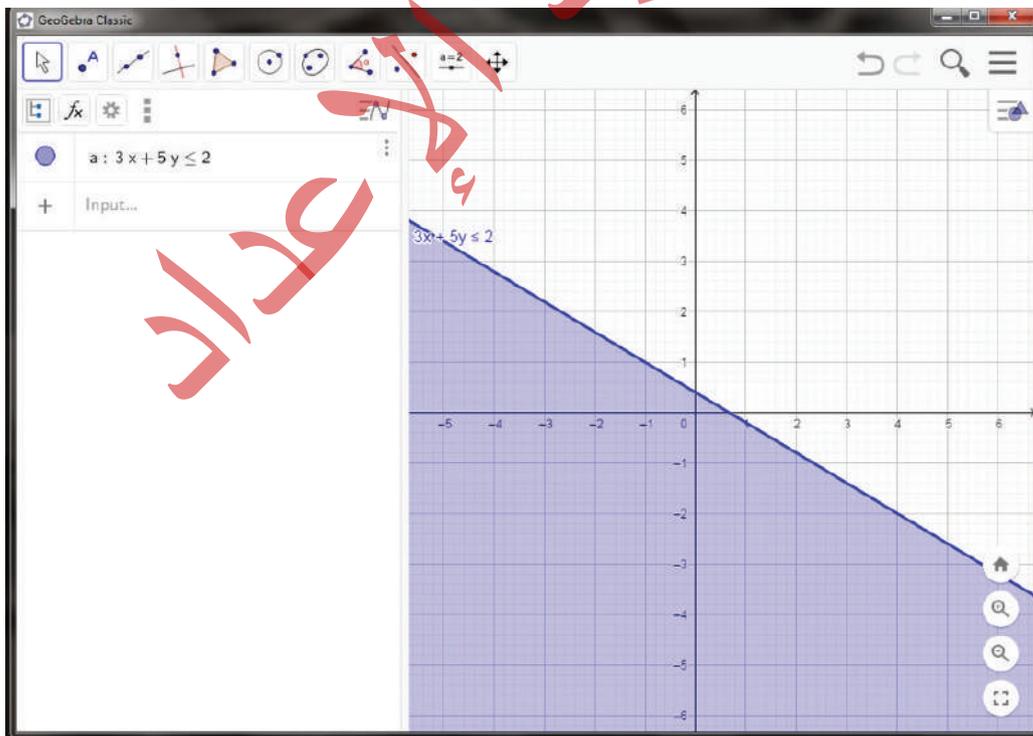
$$x + 5y > 4$$

الخطوة 1: تمثيل المتباينة الأولى بيانياً باتباع الآتي:

أكتب المتباينة الأولى في شريط الإدخال بنقر المفاتيح الآتية:

3 x + 5 y ≤ 2

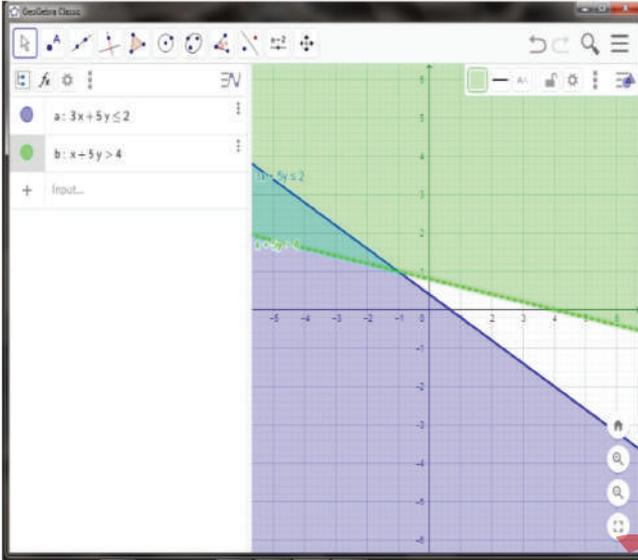
ألاحظ أنّ برمجية جيوجبرا قد حدّدت منطقة باللون الأزرق. ماذا تعني هذه المنطقة بالنسبة إلى المتباينة؟



الخطوة 2: تمثيل المتباينة الثانية بيانياً باتباع الآتي:

أكتب المتباينة الثانية في شريط الإدخال بنقر المفاتيح الآتية:

$$x + 5 > y + 4$$



الخطوة 3: تغيير اللون الأزرق الذي حدّدته برمجية جيو جبرا المنطقة أخرى؛ لتمييزها من منطقة الحّل الأولى.

أنقر المتباينة المراد تغيير لونها على يسار الشاشة، ولتكن المتباينة الثانية، ثم أنقر الرمز الذي بجانبها، وأختار (settings) ثم (color) من القائمة التي ظهرت يمين الشاشة، ومنها أختار لوناً آخر مثل الأخضر.

الخطوة 4: تفسير المناطق الظاهرة.

ألاحظ وجود أربع مناطق: الأولى باللون الأزرق، والثانية باللون الأخضر، والثالثة مزيج من اللونين معاً، والرابعة باللون الأبيض. ماذا تعني كل منطقة؟

أدرب 

أمثّل بيانياً كلاً من أنظمة المتباينات الخطية الآتية باستعمال برمجية جيو جبرا، ثم أحدّد منطقة الحّل:

1 $-5x - 2y \geq 3$

$$x + y < -3$$

2 $0.5x + 7y > -2$

$$x < y$$

3 $x - y \geq 0$

$$x + y \leq 0$$

4 $9x - 6y > 8$

$$27x - 18y < 1$$

البرمجة الخطية

Linear Programming

نمذجة مواقف حياتية بمسألة يُمكن حلُّها باستعمال طريقة البرمجة الخطية بيانياً. القيود، البرمجة الخطية، منطقة الحلول المُمكنة، الاقتران الهدف، الحُلُّ الأمثل.

فكرة الدرس



المصطلحات



مسألة اليوم



B	A	نوع شتلة البندورة:
0.3	0.2	الثلث بالدينار:
5 kg	4 kg	أقل إنتاج مُتوقَّع:

دخلت سلمى محلاً لبيع الأشتال، وأرادت شراء نوعين من شتلات البندورة، بما لا يزيد على 4 دنانير ثمنًا لـ 15 شتلة على الأكثر. وقد أظهرت اللوحة المجاورة المُعلَّقة داخل المحلِّ معلومات عن النوعين. كم شتلة ستشتري سلمى من كل نوع لإنتاج أكبر كمٍّ مُمكن من البندورة؟

البرمجة الخطية (linear programming) هي طريقة تعتمد التمثيل البياني على المستوى الإحداثي لإيجاد أكبر قيمة مُمكنة (قيمة عظمى)، أو أصغر قيمة مُمكنة (قيمة صغرى) لاقتران يُسمَّى **الاقتران الهدف (objective function)**، ضمن مجموعة **قيود (constraints)**، يُمثَّل كلٌّ منها متباينة خطية. فتمثيل المتباينات الخطية (القيود) تحدِّد منطقة حلٍّ مشتركة لها تُسمَّى **منطقة الحلول المُمكنة (feasible region)**، وفيها تتحقَّق أكبر قيمة مُمكنة، أو أصغر قيمة مُمكنة للاقتران الهدف عند رؤوس المصّلع الذي يُحدِّد منطقة الحلول المُمكنة. تُعرَّف البرمجة الخطية أيضًا بأنَّها طريقة البحث عن **الحلِّ الأمثل (optimal solution)**، وتتكوَّن مسألتهَا من:

1 **الاقتران الهدف:** يكون في صورة: $P = ax + by$ ، حيث:

P : اسم الاقتران (مثل الربح).

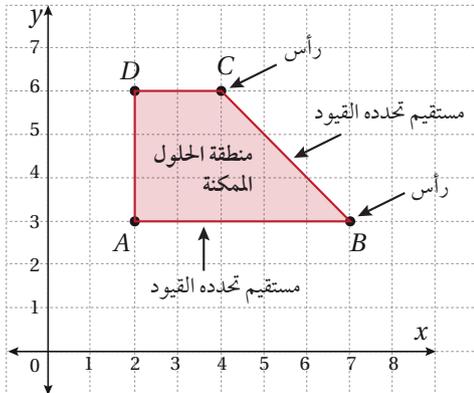
a, b : عدنان حقيقيان. x, y : متغيران.

2 **القيود:** نظام من المتباينات الخطية، وهي

تُكتب بدلالة المتغيرين x, y ، وتُحدِّد

منطقة الحلول المُمكنة كما في الشكل

المجاور.



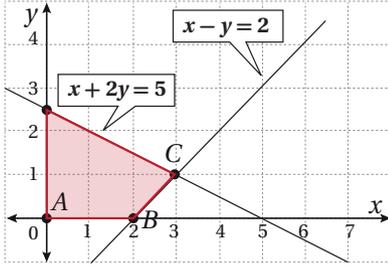
مفهوم أساسي

إذا وُجِدَت قيمة عظمى أو قيمة صغرى للاقتران الهدف، فإنّها تكون عند واحد أو أكثر من رؤوس منطقة الحلول المُمكنة.

مثال 1

أجد إحداثيي النقطة (x, y) التي تجعل الاقتران: $P = 2x + y$ أكبر ما يُمكن ضمن القيود الآتية:

$$\begin{aligned} x + 2y &\leq 5 \\ x - y &\leq 2 \\ x \geq 0, y &\geq 0 \end{aligned}$$



الخطوة 1: تمثيل القيود بيانياً.

أمثل نظام المتباينات الخطية (القيود) بيانياً، ثم أجد منطقة الحلول المُمكنة كما في الشكل المجاور.

الخطوة 2: تحديد رؤوس منطقة الحلول المُمكنة.

رؤوس منطقة الحلول المُمكنة	$P = 2x + y$
$A(0, 0)$	$P = 2(0) + 0 = 0$
$B(2, 0)$	$P = 2(2) + 0 = 4$
$C(3, 1)$	$P = 2(3) + 1 = 7$
$D(0, 2.5)$	$P = 2(0) + 2.5 = 2.5$

أعيّن إحداثيي كلٍّ من نقاط رؤوس منطقة الحلول المُمكنة، وهي: A, B, C, D ، ثم أضعها في جدول أحسب فيه قيمة الاقتران الهدف عند كلٍّ منها.

الخطوة 3: تحديد القيمة العظمى أو القيمة الصغرى.

ألاحظ أنّ أكبر قيمة للاقتران P هي 7، وأنّها تتحقّق عندما $x = 3, y = 1$.

أتحقّق من فهمي

أجد إحداثيي النقطة (x, y) التي تجعل الاقتران: $Q = 50x + 40y$ أكبر ما يُمكن ضمن القيود الآتية:

$$\begin{aligned} x + y &\leq 8 \\ 2x + y &\leq 10 \\ x \geq 0, y &\geq 0 \end{aligned}$$

أندكر

المستقيم $x = 0$ هو المحور y نفسه، والمستقيم $y = 0$ هو المحور x نفسه.

أتعلم

تُسمّى المتباينتان $x \geq 0, y \geq 0$ (أو شروط) عدم السالبة، وهما توجدان في مسائل البرمجة الخطية الحياتية بصورة ضمنية.

يُمكن حلُّ المسائل الحياتية التي تتضمن إيجاد أكبر ربح مُمكن بطريقة البرمجة الخطية، واتباع خطوات تُشبه الخطوات الواردة في المثال 1، ولكن يتعيَّن قبل ذلك تحديد متغيرين، مثل x, y ، وكتابة نظام متباينات خطية بدلالة كلٍّ منهما لتمثيل قيود المسألة، وكتابة اقتران الربح بدلالتيهما أيضًا.

مثال 2 : من الحياة

القمح	الذرة	
30 دينارًا	60 دينارًا	تكلفة تهيئة التربة لكل دونم
4 أيام	3 أيام	عدد أيام العمل في كل دونم
100 دينار	180 دينارًا	الربح المُتوقَّع من كل دونم

يمتلك مُزارع 50 دونمًا من الأرض، ويريد تهيئة التربة في جزء منها لزراعتها بالذرة، أو بالقمح، أو بكليهما كما في الجدول المجاور.

غير أنَّ المُزارع لا يُمكنه إنفاق أكثر من 1800 دينار على ذلك، ويتعيَّن عليه تهيئة التربة وزراعتها في 120 يومًا على الأكثر قبل بدء موسم الأمطار. كم دونمًا سيزرع من كل محصول لتحقيق أكبر ربح مُمكن؟

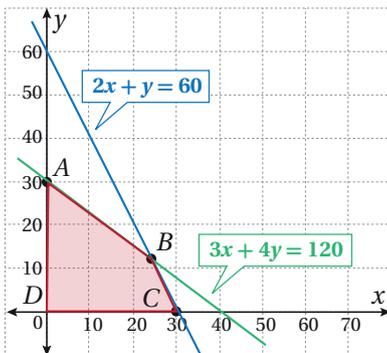
الخطوة 1: صياغة الفرضيات.

أفترض أنَّ عدد الدونمات التي ستُزرع ذرةً هو x ، وأنَّ عدد الدونمات التي ستُزرع قمحًا هو y . إذا افترضتُ أنَّ المُزارع سيبيع كل إنتاجه من المحصولين، فإنَّ الربح المُتوقَّع هو:

$$P = 180x + 100y$$

أراد المُزارع أن يكون الربح أكبر ما يُمكن ضمن القيود الآتية:

$$60x + 30y \leq 1800, 3x + 4y \leq 120, x \geq 0, y \geq 0$$



الخطوة 2: تمثيل القيود بيانيًا.

أمثّل نظام المتباينات الخطية، ثم أظلل منطقة الحلول المُمكنة كما في الشكل المجاور.

أتذكّر

لإيجاد إحداثيي النقطة B ، أحلُّ المعادلتين معًا بطريقة الحذف والتعويض، ويُمكن أيضًا استعمال برمجة جيو جبرا لإيجاد إحداثيي نقطة تقاطع المستقيمين.

الخطوة 3: تحديد رؤوس منطقة الحلول الممكنة.

أحدّد إحداثيي كلّ من النقاط: A, B, C, D ، ثم أجد قيمة الربح P عند كلّ منها كما في الجدول الآتي:

رؤوس منطقة الحلول الممكنة	$P = 180x + 100y$
$A(0, 30)$	$P = 180(0) + 100(30) = 3000$
$B(24, 12)$	$P = 180(24) + 100(12) = 5520$
$C(30, 0)$	$P = 180(30) + 100(0) = 5400$
$D(0, 0)$	$P = 180(0) + 100(0) = 0$

الخطوة 4: تحديد القيمة العظمى أو القيمة الصغرى.

ألاحظ من الجدول أنّ أكبر ربح ممكن هو 5520 ديناراً، وأنّه يتحقّق عند زراعة 24 دونماً بالذرة، و12 دونماً بالقمح.

أتحقق من فهمي

يُنتج مشغل للصناعات اليدوية معاطف وحقائب جلدية، ويتوافر لديه أسبوعياً 40 m^2 على الأكثر من الجلد الخام. يتطلّب صنع المعطف الواحد استعمال 2 m^2 من الجلد الخام، ويستغرق ساعتين عمل، ويحقّق ربحاً مقداره 5 دنانير، ويتطلّب صنع الحقيبة الواحدة استعمال 1 m^2 من الجلد الخام، ويستغرق 3 ساعات عمل، ويحقّق ربحاً مقداره 4 دنانير.

إذا كان عدد ساعات العمل في المصنع لا يزيد على 60 ساعة أسبوعياً، فما عدد كلّ من المعاطف والحقائب التي يتعيّن صنعها أسبوعياً ليحقّق المشغل أكبر ربح ممكن؟ (أفترض أنّ المشغل يبيع إنتاجه كاملاً)

ألاحظ من المثالين السابقين أنّ منطقة الحلول الممكنة التي تُحددها القيود كانت مغلقة؛ لأنّ هذه القيود فرضت ذلك، ولكنّ بعض المسائل الحياتية تتضمن إيجاد أقل تكلفة ممكنة، أو أقل كمية مُستهلكة، وغير ذلك، فتكون منطقة الحلول عندئذٍ مفتوحة؛ لأنّ قيودها تفرض ذلك.

مثال 3 : من الحياة



النوع A	النوع B	
JD 10	JD 12	تكلفة الكيس الواحد
40	30	عدد وحدات البروتينات
20	20	عدد وحدات المعادن
10	30	عدد وحدات الفيتامينات

يخلط بعض مُربي الماشية نوعين من العلف للحصول على مزيج ذي تكلفة أقل. ويبيّن الجدول التالي تكلفة الكيس الواحد من كل نوع، وعدد الوحدات التي يحويها من



يعتمد تسمين الماشية على تغذيتها بخليط مُعدّ بنسب مدروسة من الحبوب (مثل: الذرة الصفراء، والشعير)، والتبن، وقشور الفول، وملح الطعام، والفيتامينات، ويُعرف هذا الخليط بالعليقة.

البروتينات والمعادن والفيتامينات. إذا احتاجت الماشية يوميًا إلى 150 وحدة من البروتينات، و90 وحدة من المعادن، و60 وحدة من الفيتامينات على الأقل، فكم كيسًا من النوع A والنوع B معًا يُمكن أن تستهلكه الماشية بأقل تكلفة مُمكنة؟

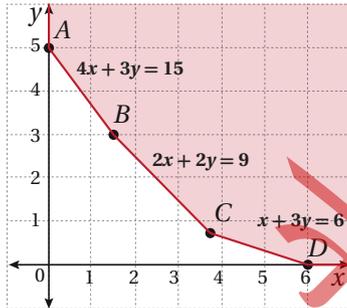
الخطوة 1: صياغة الفرضيات.

أفترض أن عدد الأكياس من النوع A هو x ، وأن عدد الأكياس من النوع B هو y . إذا افترضت أن هذه الماشية تستهلك كل ما يُقدّم لها من النوعين يوميًا، فإن التكلفة C هي:

$$C = 10x + 12y$$

المطلوب أن تكون التكلفة أقل ما يُمكن ضمن القيود الآتية:

$$40x + 30y \geq 150, 20x + 20y \geq 90, 10x + 30y \geq 60, x \geq 0, y \geq 0$$



الخطوة 2: تمثيل القيود بيانيًا.

أمثل نظام المتباينات الخطية، ثم أظلل منطقة الحلول المُمكنة كما في الشكل المجاور.

الخطوة 3: تحديد رؤوس منطقة الحلول المُمكنة.

أحدّد إحداثيي كلٍّ من النقاط: A, B, C, D ، ثم أجد قيمة التكلفة C عند كلٍّ منها كما في الجدول الآتي:

رؤوس منطقة الحلول المُمكنة	$C = 10x + 12y$
$A(0, 5)$	$C = 10(0) + 12(5) = 60$
$B(1.5, 3)$	$C = 10(1.5) + 12(3) = 51$
$C(3.75, 0.75)$	$C = 10(3.75) + 12(0.75) = 46.5$
$D(6, 0)$	$C = 10(6) + 12(0) = 60$

الخطوة 4: تحديد القيمة العظمى أو القيمة الصغرى.

ألاحظ من الجدول أن أقل تكلفة مُمكنة تساوي 46.5 دينارًا، وأنَّ الماشية تستهلك وقتًا 3.75 أكياس من العلف A ، و0.75 كيس من العلف B ، لتلبية الحد الأدنى الذي يلزمها من البروتينات والمعادن والفيتامينات.

أتحقق من فهمي



حمية غذائية: يشترط نظام للحمية

الغذائية توافر ما لا يقل عن 300

سعة حرارية، و36 وحدة من

فيتامين A ، و90 وحدة من فيتامين

C ، ضمن الجزء السائل من الوجبة

الغذائية. يُبين الجدول التالي تكلفة العلبة الواحدة من نوعين مختلفين من الألبان، وعدد السعرات الحرارية، ووحدة فيتامين A وفيتامين C التي تحويها العلبة الواحدة. كم علبة من كل نوع يُمكن أن يستهلكها يوميًا شخص يتبع نظام الحمية الغذائية، ويريد تحقيق شروطها بأقل تكلفة مالية مُمكنة؟

أثبت الباحثون أن عدد السعرات الحرارية (calories : cal) التي يحصل عليها الجسم من الغذاء يزداد بنحو 200 cal مع التقدّم في العمر عامًا بعد عام.

أدرب وأحل المسائل

أجد إحداثيي النقطة (x, y) التي تجعل اقتران الهدف أكبر ما يُمكن ضمن القيود المعطاة في كلِّ ممّا يأتي:

1 $P = 4x + 3y$

$$x + 2y \leq 4$$

$$x - y \leq 1$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

2 $R = 10x + 7y$

$$0 \leq x \leq 60$$

$$0 \leq y \leq 60$$

$$5x + 6y \leq 420$$

3 $Z = 1.5x + y$

$$x + 3y \leq 15$$

$$4x + y \leq 16$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

أجد إحداثيي النقطة (x, y) التي تجعل اقتران الهدف أصغر ما يُمكن ضمن القيود المعطاة في كلِّ ممّا يأتي:

4 $Q = 4x + 5y$

$$x + y \geq 8$$

$$3x + 5y \geq 30$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

5 $C = 8x + 4y$

$$x + 2y \geq 4$$

$$3x + y \geq 7$$

$$2y - x \geq 7$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

6 $K = 25x + 35y$

$$8x + 9y \leq 7200$$

$$8x + 9y \geq 3600$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

7 **صناعات:** يُنتج أحد المصانع شوكولاتة مُغطّاة بالفستق، ويجني ربحاً مقداره JD 1.5 عن كل علبه مبيعة، ويُنتج نوعاً آخر منها مُغطّي بالبندق، ويجني ربحاً مقداره JD 2 عن كل علبه مبيعة. وقد بيّنت دراسة أجراها قسم التسويق في المصنع بهدف زيادة الربح أنّ إنتاج كلا النوعين من الشوكولاتة يجب ألا يزيد على 1200 علبه شهرياً، وأنّ الطلب على علب الشوكولاتة المُغطّاة بالبندق لا يزيد على نصف الطلب على علب الشوكولاتة المُغطّاة بالفستق، وأنّ عدد علب الشوكولاتة المُغطّاة بالفستق يجب أن يكون أقل من (أو يساوي) 600 علبه، مضافاً إليها ثلاثة أمثال عدد علب الشوكولاتة المُغطّاة بالبندق شهرياً. كم علبه شوكولاتة من كل نوع يجب أن يُنتج المصنع شهرياً لتحقيق أكبر ربح مُمكن، مُفترضاً بيع الإنتاج كاملاً كل شهر؟

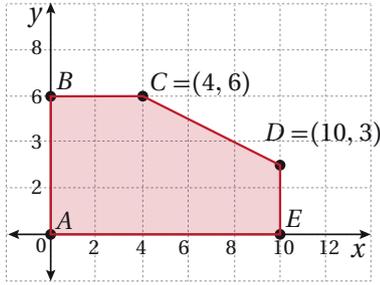


8 **رحلات:** تُخطّط لجنة الأنشطة في إحدى المدارس لاستئجار حافلات كبيرة وصغيرة، للذهاب برحلة ترفيهية مدرسية إلى قلعة الكرك. تحوي الحافلة الكبيرة 40 مقعداً عادياً، ومقعداً واحداً لذوي الحاجات الخاصة، وتبلغ تكلفة استئجارها 180 ديناراً، في حين تحوي الحافلة الصغيرة 8 مقاعد عادية، و3 مقاعد لذوي

الحاجات الخاصة، وتبلغ تكلفة استئجارها 100 دينار. إذا كانت اللجنة بحاجة إلى استئجار حافلات تحوي 320 مقعداً عادياً على الأقل، و36 مقعداً لذوي الحاجات الخاصة على الأقل، فكم حافلة من كل سعة يجب استئجارها بأقل تكلفة مُمكنة؟

9 **دعاية:** أراد صلاح طباعة كُتيّبات ونشرات دعائية لتسويق مُنتجات مزرعته من العسل الطبيعي، بحيث يحوي الكُتيّب الواحد 3 صفحات، وتحوي النشرة الواحدة صفحتين. تبلغ تكلفة طباعة الكُتيّب الواحد 0.2 من الدينار، وتكلفة طباعة النشرة الواحدة 0.1 من الدينار. وقد قرّر صلاح أنّه بحاجة إلى طباعة ما لا يزيد على 600 صفحة، مُمثّلة في 50 كُتيّباً على الأقل، و150 نشرة على الأقل. كم كُتيّباً ونشرة يجب طباعتها بحيث تكون التكلفة أقل ما يُمكن؟

10 أحلّ المسألة الواردة في بند (مسألة اليوم).



11 **تبرير:** يتحقق أحياناً أكبر ربح مُمكن عند نقطتين من رؤوس منطقة الحَلِّ. وفي هذه الحالة يُمكن إيجاد نقاط أخرى لتحقيق أكبر ربح عندها، بالرغم من أن قيمة الربح وحيدة. أجد أكبر قيمة مُمكنة للربح، ضمن منطقة الحلول المُمكنة المُمثَّلة في الشكل المجاور، $P = x + 2y$ مُبرِّراً إجابتي. ثم أجد نقاطاً أخرى ضمن منطقة الحَلِّ، يتحقق عندها أكبر قيمة مُمكنة للربح.

12 **تحَدُّ:** أجد الاقتران الهدف الذي صورته: $G = ax + by$ ، حيث a, b عدنان حقيقيان، وله أكبر قيمة عند النقطة $(2, 3)$ ، وهي 18، ضمن القيود الآتية:

$$x + 2y \leq 8$$

$$x + y \leq 5$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

13 **تحَدُّ:** أجد مجموعة قيم n (حيث n عدد صحيح موجب) التي تجعل للاقتران الهدف:

$$D = 3x + ny$$

أكبر قيمة مُمكنة عند النقطة $(3, 4)$ ، ضمن القيود الآتية:

$$x + 3y \leq 15$$

$$4x + y \leq 16$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

أحلُّ كلاً من أنظمة المتباينات الخطية الآتية:

$$\begin{aligned} 5 \quad x - 8y &\leq 9 & 6 \quad 12x + 10y &> 1 \\ 4x + 7y &> 3 & -5x - 8y &< 2 \\ & & 3x + y &\geq -6 \end{aligned}$$

تعليم: يعقد مصنع دورة تدريبية لطلبة الهندسة في إحدى الجامعات، بحيث يكون عدد الطالبات المُتدرِّبات x ، وعدد الطلاب المُتدرِّبين y ، ولا يقل العدد الإجمالي للطالبات والطلاب عن 5، ولا يزيد على 15، ولا يقل عدد الطلاب عن نصف عدد الطالبات:

$$\begin{aligned} 7 \quad &\text{أشرح بالكلمات معنى: } 2y \geq x. \\ 8 \quad &\text{إذا كان عدد الطالبات المُتدرِّبات 6، فما العدد المُمكن للطلاب المُتدرِّبين؟} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 9 \quad &\text{أجد جميع الحلول المُمكنة لنظام المتباينات الآتي، حيث } m \text{ و } n \text{ عدنان صحيحان موجبان:} \\ &m + n > 4 \\ &3m + 7n \leq 21 \end{aligned}$$

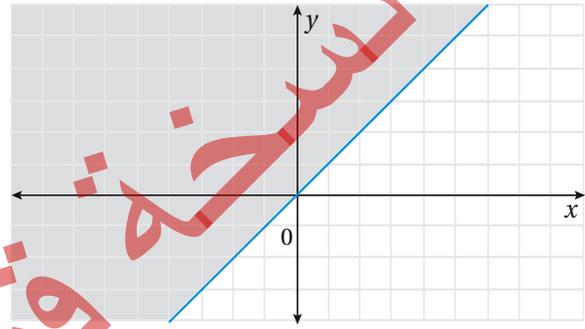
$$\begin{aligned} 10 \quad &\text{أجد أكبر قيمة للاقتران: } P = 4x + y, \text{ ضمن القيود الآتية:} \\ &x + y \leq 50 \\ &3x + y \leq 90 \\ &x \geq 0, y \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 11 \quad &\text{أجد أصغر قيمة للاقتران: } C = 200x + 500y, \text{ ضمن القيود الآتية:} \\ &x + 2y \geq 10 \\ &3x + 4y \leq 24 \\ &x \geq 0, y \geq 0 \end{aligned}$$

أضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة في كلِّ ممَّا يأتي:

$$\begin{aligned} 1 \quad &\text{الزوج الذي يُمثِّل حلاً للمتباينة: } 7y - 8x > -10, \text{ هو:} \\ &\text{a) } (3, 2) \quad \text{b) } (3, 1) \\ &\text{c) } (-4, -7) \quad \text{d) } (2, 5) \end{aligned}$$

2 المتباينة التي لها التمثيل البياني الآتي هي:



$$\begin{aligned} \text{a) } x - y &\leq 0 & \text{b) } x - y &\geq 0 \\ \text{c) } x + y &\leq 0 & \text{d) } x + y &\geq 0 \end{aligned}$$

3 المتباينة التي يكون الزوج المُرتَّب (1, 2) حلاً لها هي:

$$\begin{aligned} \text{a) } 2x + 7y &< 2 & \text{b) } x - 11y &\geq -2 \\ \text{c) } y - 13x &\leq -6 & \text{d) } 2y - x &> 9 \end{aligned}$$

4 الزوج الذي يُمثِّل حلاً لنظام المتباينات الآتي هو:

$$\begin{aligned} &y + 5x < 7 \\ &2x - y \geq -3 \\ \text{a) } (3, 2) & \quad \text{b) } (0, 0) \\ \text{c) } (-4, -2) & \quad \text{d) } (2, 8) \end{aligned}$$

تدريب على الاختبارات الدولية

14 إذا كان $y > 4$ ، فأَيُّ ممَّا يأتي يجب وضعه في المربع

لتكون $\frac{3y+2}{5} \square y$ صحيحة:

- a) $>$ b) $<$
c) \leq d) \geq

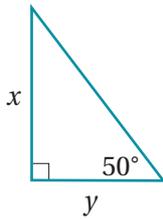
15 إذا كان $x < y < 0$ ، فأَيُّ ممَّا يأتي صحيح:

- a) $xy^2 < x$ b) $xy < y^2$
c) $xy < x^2$ d) $y - 1 < x$

16 إذا كانت $a < b < c$ ثلاثة أعداد فردية صحيحة

متتالية، وكان $x = a + b + 1$ ، وكان $y = b + c - 1$ ، فإن:

- a) $x > y$ b) $x < y$
c) $x = y$ d) $2x = y$



17 أيُّ ممَّا يأتي صحيح

اعتمادًا على المثلث المجاور:

- a) $x > y$ b) $x < y$
c) $x = y$ d) $2x = y$

18 إذا كانت $k < n < 0$ ، فأَيُّ ممَّا يأتي ناتجه عدد

موجب:

- a) $k - n$ b) kn
c) k^2n d) $k^2n + kn^2$

12 يُنتج مصنع نوعين من القطع المعدنية باستعمال الآلتين A و B معًا. ويُبيِّن الجدول التالي الزمن الذي تستغرقه معالجة القطعة الواحدة في كلٍّ من الآلتين، ومقدار ربح المصنع من بيع القطعة الواحدة من كل نوع. إذا كان عدد ساعات العمل اليومي للآلة A لا يزيد على 10 h، وعدد ساعات العمل اليومي للآلة B لا يزيد على 6 h، فكم قطعة من كل نوع يجب أن يُنتج المصنع يوميًا لتحقيق أكبر ربح مُمكن؟

القطعة الأولى	القطعة الثانية	
2 h	1 h	زمن المعالجة في الآلة A
1 h	1 h	زمن المعالجة في الآلة B
JD 20	JD 15	مقدار الربح

13 أراد خبير تغذية إعداد خليط غذائي باستعمال الطحين العادي وطحين الشوفان، بحيث يحتوي الخليط على 12 وحدة على الأقل من فيتامين A، و 10 وحدات على الأقل من فيتامين B، و 6 وحدات على الأقل من فيتامين C. يُبيِّن الجدول الآتي وحدات الفيتامين في نوعي الطحين، وسعر كل نوع:

طحين الشوفان	الطحين العادي	
JD 0.8 / kg	JD 0.5 / kg	السعر
4 وحدات لكل كيلوغرام	3 وحدات لكل كيلوغرام	فيتامين A
2 وحدتان لكل كيلوغرام	5 وحدات لكل كيلوغرام	فيتامين B
3 وحدات لكل كيلوغرام	1 وحدة لكل كيلوغرام	فيتامين C

كم كيلوغرامًا من نوعي الطحين يتعيَّن على خبير التغذية خلطه بحيث يحوي الخليط الحد الأدنى المطلوب من كل فيتامين وبأقل تكلفة؟

مبدأ العد والتباديل والتوافيق

Counting Principle, Permutations and Combinations

الوحدة 2

ما أهمية هذه الوحدة؟

يُسهم العدُّ بدور رئيس في كثير من العلوم، مثل: الإحصاء، والاحتمال، والحاسوب، ويتطلب أحياناً استعمال طرائق مُتطوّرة لإجرائه، ويُعدُّ مبدأ العدِّ والتباديل والتوافيق إحدى أهم الطرائق التي تُسهّل عملية العدِّ عند دراسة الاحتمال. سأتعرّف في هذه الوحدة بعض استعمالات طرائق العدِّ في المواقف الحياتية، مثل تنظيم مواعيد إقلاع الطائرات وهبوطها.

سأتعلّم في هذه الوحدة:

- ◀ ماهية مبدأ العدّ الأساسي، واستعماله في حلّ المسائل.
- ▶ ماهية مضروب العدد، واستعماله في حلّ المسائل.
- المسائل.

- ◀ ماهية التباديل، واستعمالها في حلّ المسائل.
- ◀ ماهية التوافيق، واستعمالها في حلّ المسائل.

تعلمت سابقاً:

- ✓ استعمال المخطط الشجري للعدّ.
- ✓ استعمال الجدول للعدّ.
- ✓ استعمال القوائم المنظمة للعدّ.
- ✓ حلّ مسائل حياتية عن طرائق العدّ.

Time	Flight	Destination	Gate
12:00	OD 001	TEHRAN	06
12:15	PN 0044	DOHA	08
12:20	T3 0529	DUBAI	32
12:30	PN 2415	RIYADH	14
12:50	GI 1872	SANA'A	09
12:55	T3 0944	DAMASCUS	27
13:20	SF 2778	AMMAN	20
13:45	OD 0061	BAGHDAD	31
13:50	BK 1532	MECCA	04
14:05	OD 3487	ABU DHABI	12
14:30	PN 0194	KUWAIT	03

مبدأ العد الأساسي

Fundamental Counting Principle

تعرف مبدأ العد الأساسي، واستعماله في حل المسائل.

فكرة الدرس



مبدأ العد الأساسي.

المصطلحات



بكم طريقة يمكن لرولا اختيار قطعة شوكولاتة من بين 3 أنواع منها،
وقطعة بسكويت من بين 6 أنواع منه في حفل التخرج في الجامعة؟

مسألة اليوم



يمكن بسهولة تحديد عدد الطرائق الممكنة لترتيب عناصر مجموعة صغيرة. فمثلاً، توجد طريقتان فقط لترتيب عناصر المجموعة $\{a, b\}$ ، هما: ab و ba ، ولكن إذا كان عدد عناصر المجموعة كبيراً، فإن حصر جميع الطرائق الممكنة وعدّها يصبح أمراً صعباً. تعلمت سابقاً بعض طرائق تحديد عناصر فضاء العينة لتجربة عشوائية، مثل: المخطط الشجري، والجداول، والقوائم المنظمة؛ لذا يمكن الاستفادة منها في تحديد عدد الطرائق الممكنة لإجراء تجربة ما.

مثال 1

أجد في ما يأتي عدد الطرائق الممكنة لتكوين رقم سري من منزلتين باستعمال الأرقام: 1, 2, 3، علماً بأنه يجوز تكرار الرقم في المنزلتين:

1 المخطط الشجري:

المرحلة الأولى	المرحلة الثانية	الناتج
1	1	11
	2	12
	3	13
2	1	21
	2	22
	3	23
3	1	31
	2	32
	3	33

أرسم شكل شجرة مكوّنة من مرحلتين؛ الأولى تُمثّل خيارات رقم منزلة العشرات، والثانية تُمثّل خيارات رقم منزلة الآحاد كما في الشكل المجاور.
بعد عدّ النواتج المحصورة، ألاحظ أنه يمكن تكوين رقم سري من منزلتين بـ 9 طرائق مختلفة.

أتعلم

تمثّل الأرقام السرية التسعة الناتجة عناصر فضاء العينة لتجربة تكوين رقم ذي منزلتين من الأرقام: 3, 2, 1

2 الجدول:

أعدُّ الطرائق المُمكنة لذلك بتنظيم الأرقام السرية التي يُمكن تكوينها باستعمال جدول على النحو الآتي:

	1	2	3
1	11	12	13
2	21	22	23
3	31	32	33

3 القائمة المنظمة:

أعدُّ الطرائق المُمكنة لذلك بكتابة قائمة منظمة، يقترن فيها كل رقم من منزلة العشرات بجميع الأرقام المُمكنة لمنزلة الآحاد في الرقم السري، على النحو الآتي:

11 12 13
 21 22 23
 31 32 33

أتحقق من فهمي

أجد في ما يأتي عدد الطرائق المُمكنة لتكوين رقم سري من منزلتين باستعمال الأرقام: 9, 7, 5, 3، علمًا بأنه يجوز تكرار الرقم في المنزلتين:

- (a) المخطط الشجري.
 (b) الجدول.
 (c) القائمة المنظمة.

في كثير من الحالات يكون الاهتمام بمعرفة عدد الطرائق التي يُمكن بها إجراء تجربة عشوائية مُكوّنة من مراحل عدّة، من دون الاهتمام بمعرفة النواتج نفسها، فيُستعمل مبدأ العدّ الأساسي Principle Counting Fundamental لإيجاد عدد الطرائق المُمكنة لإجراء التجربة؛ بضرب عدد الطرائق المُمكنة في كل مرحلة من مراحلها ببعضها.

أفكر

هل يمكن استعمال الجدول في المسائل التي تحتوي أكثر من مرحلتين؟

مبدأ العدّ الأساسي

مفهوم أساسي

أتعلم

يُطلق أيضًا على مبدأ العدّ الأساسي مصطلح قاعدة الضرب.

للتجربة العشوائية التي يُمكن تنفيذها في n مرحلة، إذا كان عدد الطرائق المُمكنة في المرحلة الأولى هو K_1 ، وعدد الطرائق المُمكنة في المرحلة الثانية هو K_2 ، ...، وعدد الطرائق المُمكنة في المرحلة الأخيرة n هو K_n ، فإنّ العدد الكلي للطرائق التي يُمكن تنفيذ التجربة بها هو $K_1 \times K_2 \times \dots \times K_n$

مثال 2: من الحياة

يحتوي جدول الحصص الأسبوعي لمنال على 7 مواد دراسية يوم الثلاثاء. أجد عدد الترتيب المُمكنة لأول 3 حصص، علمًا بأنّه لا توجد حصص مُكرّرة لأيّ مادة دراسية في هذا اليوم. يوجد للحصة (المرحلة) الأولى 7 خيارات (مواد دراسية)، في حين يوجد للحصة الثانية 6 خيارات؛ لأنّ منال لن تعيد دراسة مادة الحصة الأولى، أمّا الحصة الثالثة فلها 5 خيارات. باستعمال مبدأ العدّ الأساسي:

عدد طرائق اختيار مادة الحصة الأولى	7	×	عدد طرائق اختيار مادة الحصة الثانية	6	×	عدد طرائق اختيار مادة الحصة الثالثة	5	=	210
------------------------------------	---	---	-------------------------------------	---	---	-------------------------------------	---	---	-----

إذن، توجد 210 طرائق لترتيب المواد الدراسية في الحصص الثلاث الأولى من جدول منال يوم الثلاثاء، وألاحظ أنه يصعب كتابة هذه الطرائق لأنّ عددها كبير.

وجبة اليوم

الحساء	المقبلات
..... عدس فول
..... خضار مشكّلة حمص
..... فريكة سلطة خضار
..... شوفان	
الطبق الرئيس	
..... منسف	
..... مقلوبة	
..... كيسة	
..... كباب	
..... شيش هندي	

أتتحقق من فهمي

طعام: بكم طريقة مختلفة يُمكن لشخص اختيار وجبة غدائه المُكوّنة من طبق رئيس واحد، وطبق مقبلات واحد، وطبق حساء واحد، من قائمة وجبة اليوم التي يُقدّمها أحد المطاعم.

يتأثر العدد الكلي للنواتج المُمكنة للتجربة العشوائية بالشروط المُحدّدة لكيفية تنفيذ مراحلها، مثل: السماح بتكرار اختيار العناصر أو عدم السماح بذلك، وتثبيت بعض العناصر في مواضع مُعيّنة.

مثال 3

أجد في كلِّ من الحالات الآتية عدد الطرائق المُمكنة لتكوين كلمة (لها معنى، أو ليس لها معنى) من 3 أحرف، مُستعملًا الأحرف: أ، ب، ج، د، هـ:

1 إذا سُمح بتكرار الأحرف في الكلمة.

ألاحظ أنه يُمكن اختيار أيِّ من الأحرف الخمسة في كل مرحلة.

باستعمال مبدأ العدِّ الأساسي، فإنَّ:

عدد طرائق اختيار الحرف الأول	×	عدد طرائق اختيار الحرف الثاني	×	عدد طرائق اختيار الحرف الثالث	=	125
5		5		5		

إذن، يُمكن تكوين 125 كلمة.

2 إذا لم يُسمح بتكرار الأحرف في الكلمة.

ألاحظ أنَّ الحرف المُستعمل في الخيار الأول لا يجوز تكراره في الخيار الثاني، وكذلك الحرفان المُستعملان في الخيارين الأول والثاني، لا يجوز استعمالهما في الخيار الثالث.

باستعمال مبدأ العدِّ الأساسي، فإنَّ:

عدد طرائق اختيار الحرف الأول	×	عدد طرائق اختيار الحرف الثاني	×	عدد طرائق اختيار الحرف الثالث	=	60
5		4		3		

إذن، يُمكن تكوين 60 كلمة.

أفكر

لماذا نقص عدد الطرق عند إضافة شرط عدم السماح بالتكرار؟

3 إذا كان الحرف الأول من هذه الكلمات هو (ج)، ولا يُسمح بتكرار الأحرف.

ألاحظ أنه توجد طريقة واحدة لاختيار الحرف الأول (ج).

باستعمال مبدأ العدّ الأساسي، فإنّ:

عدد طرائق اختيار الحرف الأول	×	عدد طرائق اختيار الحرف الثاني	×	عدد طرائق اختيار الحرف الثالث	=	12
1		4		3		

إذن، يُمكن تكوين 12 كلمة.

أتتحقق من فهمي

أجد في كلٍّ من الحالات الآتية عدد الطرائق المُمكنة لتكوين رقم مركبة مُكوّن من 5 منازل، مُستعملًا الأرقام: 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1:

- (a) إذا سُمح بالتكرار.
(b) إذا لم يُسمح بالتكرار.
(c) إذا سُمح بالتكرار؛ شرط وضع الرقم 9 في أول منزلة من اليسار.

أتعلّم

أتعلم أكتب عناصر الفرع الثالث من المثال 3

أدرب وأحل المسائل

شراء: ترغب حنين في شراء هاتف محمول، فذهبت إلى أحد محالّ بيع الهواتف، ووجدت فيه 4 أنواع مختلفة من

الهواتف: H, I, S, N ، لكل نوع منها ثلاثة ألوان: أحمر: R ، وأسود: B ، وأبيض: W .

أجد عدد الطرائق المُمكنة لشراء حنين هاتفًا محمولًا باستعمال:

- 1 المخطط الشجري.
2 الجدول.
3 القائمة المنظمة.



4 طعام: يُعدُّ مطعمُ البيّزا باستعمال نوعين من العجينة، و8 خلطات مختلفة.

إذا كان لهذه البيّزا 3 حجوم، فكم عدد الخيارات المُمكنة لشراء بيّزا واحدة منها؟

5 يشترط موقع تعليمي في شبكة الإنترنت إنشاء المُستخدم حساباً محمياً بكلمة مرور تحوي 4 أحرف إنجليزية متبوعة بعدد مُكوّن من رقم واحد. ما عدد كلمات المرور المختلفة التي يُمكن إنشاؤها؟

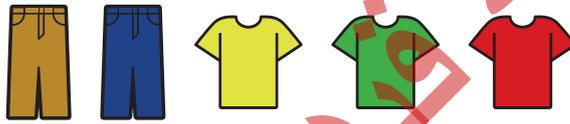
كرات: يحتوي صندوق على كرة حمراء، وكرة خضراء، وكرة بيضاء. أجد عدد الطرائق المُمكنة لسحب كرتين على التوالي في الحالتين الآتيتين:

6 إذا سُمح بإعادة الكرة المسحوبة الأولى.

7 إذا لم يُسمح بإعادة الكرة المسحوبة الأولى.

8 **مختبر:** تريد شيماء اختيار زميلتين لتكوين مجموعة ثلاثية تُنفذ تجربة في مختبر العلوم. بكم طريقة مختلفة يُمكنها تكوين مجموعتها، علماً بأن عدد طالبات الصف 21 طالبة؟

9 لدى حاتم ثلاثة قمصان باللوان مختلفة وبنطلونين بلونين مختلفين. أجد عدد الطرائق الممكنة لاختيار حاتم قميص وبنطال؟



10 أحلّ المسألة الواردة في بند (مسألة اليوم).

مهارات التفكير العليا

11 **تحّد:** يستطيع بشير استعمال 480 طريقة مختلفة لاختيار وجبة غدائه من بين المقبلات، والطبق الرئيس، والحلويات. إذا كان للمقبلات 6 خيارات، وللطبق الرئيس 10 خيارات، فما عدد الخيارات المُمكنة للحلويات؟

12 **تبرير:** كم عدداً من 4 منازل يقبل القسمة على 5، ويُمكن تكوينه باستعمال الأرقام: 1, 2, 3, 4, 5، مُبرراً إجابتي؟

13 **تحّد:** كم عدداً فردياً من 3 منازل يُمكن تكوينه باستعمال الأرقام (0-9)، علماً بأنه لا يُسمح بالترار؟

14 **أكتب:** كيف يستفاد من مبدأ العدّ الأساسي في إيجاد عدد الطرائق المختلفة لإجراء تجربة عشوائية مُتعددة المراحل؟

مضروب العدد Factorial

تعرف مضروب العدد الصحيح غير السالب، واستعماله في حل مسائل حياتية.
مضروب العدد.

فكرة الدرس



المصطلحات



مسألة اليوم



شاركت داليا في معرض فني بـ 5 لوحات، خصص لعرضها مساحة على الحائط. بكم طريقة مختلفة يمكن ترتيب لوحاتها على الحائط في صف واحد بجانب بعضها؟

يمكن التعبير عن $1 \times 2 \times 3$ باستعمال الرمز $3!$ الذي يُقرأ: **مضروب** factorial العدد ثلاثة.

مضروب العدد

مفهوم أساسي

بالكلمات: مضروب العدد الصحيح الموجب n هو حاصل ضرب الأعداد الصحيحة الموجبة التي هي أصغر من أو تساوي n .

بالرموز: $n! = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times 1$

أتعلم

بالتعريف، فإن:

$$0! = 1$$

$$1! = 1$$

أتعلم

يمكنني استعمال الآلة الحاسبة لإيجاد مضروب العدد. فمثلاً، لإيجاد مضروب العدد 7، أضغط على الأزرار الآتية من اليسار إلى اليمين:



مثال 1

أجد ناتج كل مما يأتي:

1 $6!$

$$\begin{aligned} 6! &= 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \\ &= 720 \end{aligned}$$

تعريف المضروب

الناتج

2 $(7-3)!$

$$\begin{aligned} (7-3)! &= 4! \\ &= 4 \times 3 \times 2 \times 1 \\ &= 24 \end{aligned}$$

بإيجاد ناتج الطرح

تعريف المضروب

الناتج

أفكر

هل $(7-3)! = 7! - 3!$

3 $\frac{8!}{5!}$

$$\frac{8!}{5!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5!}$$

$$= 8 \times 7 \times 6$$

$$= 336$$

تعريف المضروب

باختصار 5! من البسط والمقام

النتيجة

أتحقق من فهمي 

أجد ناتج كلِّ مما يأتي:

a) 7!

b) (4+1)!

c) 4! + 1!

d) $\frac{12!}{7!}$

أتعلم

$$5! = 5 \times 4! = 5 \times 24 = 120$$

بوجه عام، فإن:

$$n! = n(n-1)!$$

يُمكنني استعمال مضروب العدد لحلِّ المسائل بدلاً من استعمال مبدأ العدِّ الأساسي الذي درسته سابقاً.

مثال 2

تُخطِّط ماريا لزيارة بيت جدِّها، وبيت خالها، وبيت عمِّها أول أيام عيد الأضحى المبارك. بكم طريقة يُمكنها ترتيب مواعيد زيارتها؟

يُمكن تحديد عدد هذه الطرائق باستعمال مضروب العدد 3؛ لأنَّ ماريا تريد تنظيم 3 زيارات، لكلِّ منها عدد من البدائل من دون تكرار، فيكون عدد الطرائق مساوياً لمضروب العدد 3:

$$3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

أتحقق من فهمي 

شارك 7 طلبة في سباق، وارتدى كلُّ منهم قميصاً مُرقِّماً من 1 إلى 7، أجد عدد الطرائق المُمكنة لترتيب وصول الطلبة إلى خط النهاية.

يُمكنني أيضاً استعمال المضروب لإيجاد عدد طرائق ترتيب عناصر مجموعة؛ سواء أكانت بعض العناصر مُكرَّرة أم لا.

مثال 3

أجد عدد الطرائق المُمكنة لترتيب حروف كل كلمة مما يأتي:

1 JORDAN

ألاحظ أنَّ كلمة (JORDAN) تحوي 6 أحرف مختلفة غير مُكرّرة، وأنَّ عدد الطرائق المُمكنة لترتيب هذه الأحرف يساوي مضروب العدد 6:

$$6! = 720$$

إذن، يوجد 720 كلمة يُمكن تكوينها من ترتيبات مختلفة للأحرف الستة.

2 MOHAMMAD

ألاحظ أنَّ كلمة (MOHAMMAD) تحوي 8 أحرف، تكرر منها الأحرف الآتية:

$$M_1, M_2, M_3, A_1, A_2$$

لا يُؤثّر في الحَلّ ترتيب الأحرف المُكرّرة المتشابهة، مثل: تساوي $A_2 A_1$ و $A_1 A_2$ ؛ لذا تستثنى طرائق ترتيب الأحرف المُكرّرة عند عدّ الطرائق الكلية المُمكنة لترتيب أحرف الكلمة، وذلك بالقسمة على عدد طرائق ترتيب الأحرف المُكرّرة فيها.

$$8! = 40320 \quad \text{عدد طرائق ترتيب 8 أحرف مختلفة}$$

$$3! = 6 \quad \text{عدد طرائق ترتيب الحرف المُكرّر } M$$

$$2! = 2 \quad \text{عدد طرائق ترتيب الحرف المُكرّر } A$$

$$\frac{8!}{(3!) (2!) (2!)} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3!}{(3!) (2!) (2!)} \quad \text{باختصار عدد طرائق ترتيب الحرفين المُكرّرين}$$
$$= 3360$$

إذن، توجد 3360 طريقة لترتيب أحرف كلمة (MOHAMMAD).

أتتحقق من فهمي

أجد عدد الطرائق المُمكنة لترتيب حروف كل كلمة مما يأتي:

a) PETRA

b) AMMAN

أذكر

- عدد حروف اللغة العربية 28
- عدد حروف اللغة الإنجليزية 26



البترا مدينة نحتها الأبطال بالصخر منذ أكثر من 2000 عام، ولا يُمكن للزائر دخولها إلا بالسير في السيق؛ وهو شق طبيعي بين الجبال الصخرية، طوله 25.1 km تقريباً.



أجد ناتج كلِّ ممَّا يأتي دون استعمال الآلة الحاسبة:

1 $7!$

2 $(18-13)!$

3 $(4+3)!$

أجد ناتج كلِّ ممَّا يأتي باستعمال الآلة الحاسبة:

4 $\frac{17!}{11!}$

5 $\frac{10!}{4! \times 6!}$

6 $\frac{13!}{(6!)(13-6)!}$

7 **سياحة:** يريد سائح زيارة المعالم الأثرية الآتية:

جرش، أم قيس، البحر الميت، المُدرج الروماني، قلعة عجلون، بكم طريقة يمكنه ترتيب زيارة هذه المواقع الأثرية.

أجد عدد الطرائق المُمكنة لترتيب حروف كل كلمة ممَّا يأتي:

8 PALESTINE

9 AJLOUN

10 **زراعة:** يريد مروان زراعة 4 أشجار لوزيات من أنواع مختلفة في صفٍّ واحد بحديقة منزله. أجد عدد الطرائق المُمكنة لتنظيم زراعة هذه الأشجار.

11 **مدرسة:** تريد منال حلَّ الواجبات المدرسية للمواد الآتية:

الرياضيات، اللغة العربية، اللغة الإنجليزية، الثقافة العامة، الجغرافيا.

بكم طريقة يُمكنها ترتيب حلَّ هذه الواجبات؟

12 **مطالعة:** تريد داليا قراءة 5 كتب لديها. بكم طريقة يُمكنها ترتيب قراءة هذه الكتب؟



تحدُّ: يوجد في صفٍّ 8 طالبات، يتعيَّن عليهنَّ الجلوس في صفين كما في الشكل المجاور:

13 أجد عدد الطرائق المُمكنة لجلوس هؤلاء الطالبات.

14 إذا تعيَّن على نور وشمس الجلوس على مقعد إحدى الزوايا الأربع، فبكم طريقة يُمكن أن تجلس طالبات الصف؟

15 إذا قسَّمت المُعلِّمة طالبات الصف إلى مجموعتين، في كلِّ منهما 4 طالبات، فبكم طريقة يُمكن أن تجلس طالبات

الصف؛ شرط أن تكون المقاعد الأربعة في الصف الأول للمجموعة الأولى، والمقاعد الأربعة في الصف الثاني للمجموعة الثانية؟



التباديل Permutations

تعرف التباديل، واستعمالها في حل مسائل حياتية.

فكرة الدرس



التباديل.

المصطلحات



مسألة اليوم



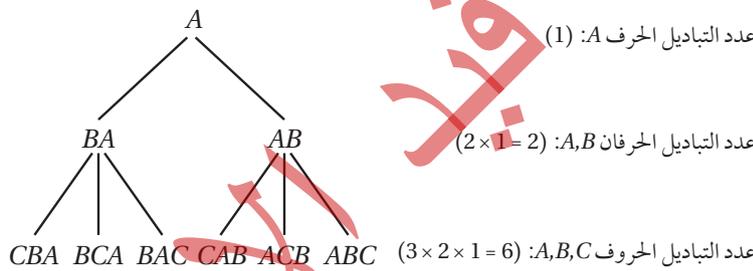
بكم طريقة يُمكن لثلاث أخوات من بين خمس الوقوف بجانب بعضهن لتلتقط سميرة صورة لهن؟

التباديل permutations هي عدد الطرائق المُمكنة لاختيار مجموعة من الأشياء، ومراعاة ترتيب اختيار هذه الأشياء.

توجد طريقة واحدة لترتيب اختيار العنصر (A)

يُمكن اختيار العنصر (B) قبل العنصر (A)، أو بعده

يُمكن اختيار العنصر (C) أولاً، أو ثانياً، أو ثالثاً



قد لا يلزم أحياناً إيجاد عدد طرائق الاختيار لعناصر المجموعة كلها. فمثلاً، إذا أردتُ تحديد عدد الطرائق المُمكنة لاختيار لجنة مكونة من 3 أشخاص (رئيس ومساعد وعضو)، وترتيبهم من مجموعة تحوي 7 أشخاص، فإنه يُمكنني استعمال مبدأ العدّ الأساسي كما يأتي:

عدد طرائق اختيار رئيس اللجنة

7

عدد طرائق اختيار مساعد اللجنة

6

عدد طرائق اختيار عضو اللجنة

5

= 210

إذن، يُمكنني اختيار 3 أشخاص، وترتيبهم من مجموعة تحوي 7 أشخاص باستعمال 210 طرائق.

يُمكنني أيضًا استعمال المضروب لإيجاد عدد الطرائق المُمكنة لاختيار الأشخاص الثلاثة، وذلك بإيجاد عدد الطرائق المُمكنة لاختيار الأشخاص السبعة جميعًا وترتيبهم، ثم اختصار عدد الطرائق المُمكنة لاختيار الأشخاص الأربعة الباقين باستعمال القسمة كما يأتي:

$$\frac{\text{طرائق اختيار سبعة أشخاص}}{\text{طرائق اختيار أربعة أشخاص}} = \frac{7!}{4!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$$

يُمكن تعميم هذه النتيجة في صورة قانون.

التباديل

مفهوم أساسي

بالكلمات: عدد تباديل n من العناصر، أُخذ منها r كل مرة، هو:

$${}_n P_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

حيث: r, n : عددان صحيحان موجبان و $r \leq n$

فمثلاً، عدد تباديل 5 عناصر، أُخذ منها 3 عناصر كل مرة، هو:

$${}_5 P_3 = \frac{5!}{(5-3)!} = 60$$

رموز رياضية

يمكن استعمال اي من الرموز الاتية للتعبير عن تباديل n من العناصر أُخذ منها r كل مرة
 ${}_n P_r, P(n, r)$

مثال 1

أجد قيمة كلِّ ممَّا يأتي:

1 ${}_{10} P_4$

$$\begin{aligned} {}_{10} P_4 &= \frac{10!}{(10-4)!} \\ &= \frac{(10)(9)(8)(7)(6) \overset{1}{\cancel{5!}}}{\cancel{6!}} \\ &= 5040 \end{aligned}$$

تعريف التباديل

باختصار $6!$ من البسط والمقام

بالضرب

أتعلم

ألاحظ أن:

$${}_{10} P_4 = 10 \times 9 \times 8 \times 7$$

أي إنَّ الضرب يبدأ من 10

نزولاً 4 مرّات.

بوجه عام، فإنَّ:

$${}_n P_r = n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)$$

$$2 \quad \frac{{}_{12}P_7}{{}_9P_4}$$

$$\begin{aligned} \frac{{}_{12}P_7}{{}_9P_4} &= \frac{12!}{(12-7)!} \times \frac{(9-4)!}{9!} \\ &= \frac{12!}{5!} \times \frac{5!}{9!} \\ &= \frac{(12)(11)(10)(9!)}{9!} \\ &= 1320 \end{aligned}$$

تعريف التباديل

بايجاد ناتج الطرح

باختصار 9! من البسط والمقام

الناتج

أتحقق من فهمي

أجد قيمة كلِّ ممَّا يأتي:

a) ${}_5P_5$

b) $\frac{{}_{13}P_3}{{}_{13}P_1}$

أتعلم

$$\begin{aligned} nP_n &= n! \\ nP_1 &= n \end{aligned}$$

يُمكنني إيجاد عدد طرائق الاختيار باستعمال التباديل في كثير من المواقف الحياتية التي يكون فيها الترتيب مهمًّا، مثل عدد طرائق ترتيب الجلوس على مقاعد لعدد من الأشخاص، أو عدد طرائق ترتيب مجموعة من الكتب المختلفة على رف.

يُعدُّ استعمال التباديل طريقة سهلة، مقارنةً بالطرائق التي تعلَّمْتُها سابقًا، مثل: مبدأ العدِّ الأساسي، والمُخطَّط الشجري، والجدول، والقوائم المنظمة.

مثال 2

أجد عدد الطرائق المُمكنة لاختيار طالبين عشوائيًا من الطلاب: محمود، وعلي، وحسن، ومعتز، وتعيين الأول مسؤولًا عن الإذاعة المدرسية، وتعيين الثاني رئيسًا لمجلس الطلبة.



يُمكنني استعمال الجدول لحصر الخيارات المُمكنة جميعها على النحو الآتي:

محمود	علي	حسن	معتز	مسؤول الإذاعة المدرسية
				رئيس المجلس
	(محمود، علي)	(محمود، حسن)	(محمود، معتز)	محمود
(علي، محمود)		(علي، حسن)	(علي، معتز)	علي
(حسن، محمود)	(حسن، علي)		(حسن، معتز)	حسن
(معتز، محمود)	(معتز، علي)	(معتز، حسن)		معتز

ألاحظ أن الترتيب مهم في هذه المسألة؛ فالاختيار (علي، حسن) يعني أن علياً هو مسؤول الإذاعة، وأن حسناً هو رئيس مجلس الطلبة. أما الاختيار (حسن، علي) فيعني أن حسناً هو مسؤول الإذاعة، وأن علياً هو رئيس مجلس الطلبة.

بناءً على الجدول، يُمكنني عدّ الخيارات المختلفة لتحديد عدد طرائق الاختيار، وهو 12 يُمكنني أيضاً استعمال مبدأ العدّ الأساسي لإيجاد عدد طرائق الاختيار، حيث:

عدد طرائق اختيار مسؤول الإذاعة المدرسية

عدد طرائق اختيار رئيس مجلس الطلبة

$$4 \times 3 = 12$$

أو استعمال التباديل لإيجاد عدد طرائق الاختيار:

أريد اختيار عنصرين من بين 4 عناصر، مراعيًا الترتيب

$${}_4P_2 = \frac{4!}{(4-2)!}$$

$$= 12$$

قانون التباديل

النتيجة

أتعلّم

يُمكنني استعمال الآلة الحاسبة لإيجاد التباديل. فمثلاً، لإيجاد ناتج ${}_4P_2$ ، أضغط على الأزرار الآتية:

$$1 \quad {}_nPr \quad 2 \quad =$$

أفكر

هل الترتيب مهم في مسألة أتحقق من فهمي المجاورة؟ لماذا؟

أتحقق من فهمي

بكم طريقة يُمكن أن تختار سلمي وروان ووزان 3 عيّات عشوائياً من بين 5 عيّات مختلفة متوافرة في مختبر العلوم لفحصها بالمجهر الضوئي؟



يُمكن استعمال التباديل أيضًا في التجارب التي تتطلب عدم تكرار العناصر المختارة عشوائيًا من بين مجموعة عناصر؛ لأن ذلك يمنح كل عنصر أهمية في الترتيب.

مثال 3

أجد عدد الكلمات الثلاثية (لها معنى، أو ليس لها معنى) التي يُمكن تكوينها من حروف اللغة العربية، بحيث لا تحوي أي كلمةً أحرفًا مُكرّرة.

عدد حروف اللغة العربية 28 حرفًا. ولأن التكرار غير مسموح به؛ فإن ترتيب الحروف مهم.

إذن، يُمكن استعمال التباديل لتحديد عدد طرائق اختيار 3 أحرف من بين 28 حرفًا:

$$\begin{aligned} {}_{28}P_3 &= \frac{28!}{(28-3)!} \\ &= 19656 \end{aligned}$$

قانون التباديل

النتائج باستعمال الآلة الحاسبة

أي يُمكن تكوين 19656 كلمة تتألف من ثلاثة أحرف.

أتحقق من فهمي

أجد عدد الكلمات الخماسية (لها معنى، أو ليس لها معنى) التي يُمكن تكوينها من حروف اللغة الإنجليزية، علمًا بأنه لا يُسمح بالتكرار.



معظم مفردات اللغة العربية أصلها ثلاثي، فرباعي، فخماسي.

أُتدرب وأحل المسائل

أجد قيمة كلٍّ مما يأتي دون استعمال الآلة الحاسبة:

1 ${}_9P_5$

2 ${}_7P_0$

3 ${}_{99}P_2$

أجد قيمة كلٍّ مما يأتي باستعمال الآلة الحاسبة:

4 $\frac{{}_{10}P_3}{{}_8P_2}$

5 $({}_{13}P_9) - ({}_7P_4)$

6 $({}_7P_3) \times ({}_4P_3)$

7 **مقاعد:** أجد عدد الطرائق المُمكنة لجلوس شخصين على 5 مقاعد موضوعة في صفٍّ واحد.

8 **محاضرات:** اعتمدت فيحاء جدولها الدراسي للفصل الأول في الجامعة، بحيث اختارت 4 مواد من بين 12 مادة مختلفة. أجد عدد الطرائق الممكنة لترتيب فيحاء مواد جدولها الدراسي.



9 **سياحة:** أعلنت شركة سياحية عن وجود رحلات إلى 8 مدن مختلفة. أجد عدد الطرائق الممكنة لاختيار شخص رحلتين إلى مدينتين مختلفتين.



10 **رياضة:** أجد عدد الطرائق الممكنة لاصطفاف 5 طلبة بجانب بعضهم قبيل انطلاقهم في مسابقة الجري.



11 **ترقيم:** أجد عدد المنازل التي يمكن ترقيمها باستعمال رموز تحوي 3 أرقام من 0 إلى 9؛ شرط ألا يحتوي رمز أي منزل على رقم مكرر.

12 **مقاعد:** أجد عدد الطرائق الممكنة لجلوس 6 طلاب على 6 مقاعد رُتبت في صف واحد.



13 **كتب:** اختار طلال 4 كتب من بين 6 كتب رياضيات (M) و 3 كتب من بين 5 كتب لغة انجليزية (E). أجد عدد الطرق الممكنة لترتيب الكتب السبعة على الشكل كلاتي $M E M E M E M$

14 **مركبات:** تقف سبعة سيارات في دورها امام مركز متخصص لصيانة السيارات من ضمنهما سيارتي فؤاد و غيث . أجد عدد الطرق الممكنة لاصطفاف سيارتي فؤاد و غيث في الدور.

مهارات التفكير العليا



15 **تحّد:** أجد قيمة r إذا كان ${}_{10}P_r = 5040$

16 **تحّد:** أثبت أن ${}_nP_n = n!$

التوافيق

Combinations

تعرف التوافيق، واستعمالها في حل مسائل حياتية.

فكرة الدرس



التوافيق.

المصطلحات



مسألة اليوم



نظمت الملكية الأردنية 12 رحلة إلى بعض الدول العربية في يوم واحد انطلاقاً من مطار الملكة علياء. بكم طريقة يمكن اختيار 3 رحلات منها لتتبع قبل ظهر ذلك اليوم من دون اهتمام بالترتيب؟

قد لا يكون مهمًا ترتيب العناصر المختارة عشوائياً في بعض المواقف. فمثلاً، اختيار شخصين a و b لتشكيل لجنة من مجموعة فيها n من الأشخاص، لا يتطلب اهتماماً بالترتيب؛ لأن الترتيب ab هو نفسه الترتيب ba ضمن اللجنة.

لكي أجد عدد طرائق الاختيار الممكنة في هذه الحالة؛ أقسم nP_2 على $2!$ ، مُهملاً التكرار، في ما يُعرف بالتوافيق combinations.

التوافيق

مفهوم أساسي

بالكلمات: عدد توافيق n من العناصر، أُخذ منها r كل مرة، هو:

$${}_n C_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

حيث: n, r : عددان صحيحان موجبان و $r \leq n$

فمثلاً، عدد توافيق 7 عناصر، أُخذ منها 3 عناصر كل مرة، هو:

$${}_7 C_3 = \frac{7!}{3!(7-3)!} = 35$$

أنعم

في التباديل يكون الترتيب abc مختلفاً عن الترتيب bac ، وعن الترتيب cba . أمّا في التوافيق فإن هذه الترتيب جميعها تكون متكافئة.

مثال 1

أجد قيمة كلِّ مما يأتي:

1 $({}_{10}C_7) - ({}_{8}C_3)$

$$\begin{aligned} ({}_{10}C_7) - ({}_{8}C_3) &= \frac{10!}{7!(10-7)!} - \frac{10!}{3!(10-3)!} \\ &= 120 - 56 \\ &= 64 \end{aligned}$$

تعريف التوافيق

بحساب التوافيق

الناتج

2 $({}_{9}C_6) \times ({}_{6}C_2)$

$$\begin{aligned} ({}_{9}C_6) \times ({}_{6}C_2) &= \frac{9!}{6!(9-6)!} \times \frac{6!}{2!(6-2)!} \\ &= (84)(15) \\ &= 1260 \end{aligned}$$

تعريف التوافيق

بحساب التوافيق

الناتج

أتحقق من فهمي 

أجد قيمة كلِّ مما يأتي:

a) $({}_{13}C_5) \times ({}_{8}C_8)$

b) $({}_{7}C_0) \times ({}_{7}C_7)$

إذا لم يكن مهمًّا ترتيب العناصر المختارة في تجربة عشوائية، فإنه يُمكن استعمال التوافيق لإيجاد عدد الطرائق التي تُختار بها تلك العناصر.

مثال 2

أجد عدد الطرائق التي يُمكن بها اختيار طالبين من بين 4 طلاب مُترشِّحين (علاء، فريد، يونس، ربيع) للعب في فريق كرة القدم الذي يُمثل المدرسة.

يُمكنني استعمال القائمة المنظمة لإيجاد عدد طرائق اختيار الطالبين على النحو الآتي:

(علاء، فريد) (علاء، يونس) (علاء، ربيع) (فريد، يونس) (فريد، ربيع) (يونس، ربيع).

إذن، توجد 6 طرائق لاختيار طالبين من بين المُترشِّحين الأربعة.

أتعلَّم

يُمكنني استعمال الآلة الحاسبة لإيجاد التوافيق. فمثلاً، لإيجاد ناتج ${}_{5}C_3$ ، أضغط على الأزرار الآتية:



أتعلَّم

$nC_0 = 1$

$nC_1 = n$

$nC_n = 1$

نظراً إلى عدم أهمية الترتيب في هذه المسألة، بحيث لا يوجد فرق في الاختيار بين (علاء، فريد) و(فريد، علاء)؛ أستعمل التوافق لإيجاد عدد طرائق اختيار طالبين من بين المترشحين الأربعة على النحو الآتي:

$${}^4C_2 = \frac{4!}{2!(4-2)!}$$

$$= 6$$

تعريف التوافق

النتيجة

أتحقق من فهمي

أجد عدد طرائق اختيار لجنة تُنظّم عملية دخول طالبات مدرسة، تضم 3 طالبات من بين 10 طالبات تطوَّعن لأداء هذه المهمة.

يُمكنني استعمال مبدأ العدّ الأساسي، والتباديل، والتوافق في المواقف التي تتطلب إيجاد عدد العناصر المُمكنة لفضاء العينة لتجربة عشوائية، أو إيجاد عدد العناصر التي يتكوّن منها حادث مُعيّن في تلك التجربة، حيث يكون عدد العناصر هو عدد طرائق الاختيار ضمن شروط مُحدّدة.

مثال 3

يحتوي صندوق على 5 كرات حمراء و4 كرات زرقاء جميعها مُتماثلة:

1 أجد عدد الطرائق المُمكنة لسحب 3 كرات حمراء عشوائياً من الصندوق إذا سُحبت الكرات دفعةً واحدة.

أفترض أنّ $n(A)$ عدد الطرائق التي يُمكن بها سحب 3 كرات حمراء. ولما كان العدد الكلي للكرات الحمراء في الصندوق 5، وترتيب سحب الكرات ليس مهماً، فإنّ:

$$n(A) = {}_5C_3$$

عدد طرائق سحب 3 عناصر من بين 5 عناصر

$$= \frac{5!}{3! \times (5-3)!}$$

بالتعويض في قانون التوافق

$$= \frac{5 \times 4 \times 3!}{3! \times 2!}$$

بايجاد ناتج الطرح

$$= 10$$

النتيجة

أتعلّم

سحب كرتان دفعه واحده
تكافئ سحب كره تلو
الاخري.

2 أجد عدد الطرائق المُمكنة لسحب كرتين حمراوين وكرة واحدة زرقاء عشوائياً من الصندوق إذا كان السحب على التوالي من دون إرجاع.

أفترض أن $n(B)$ عدد الطرائق التي يُمكن بها سحب كرتين حمراوين وكرة زرقاء.

ألاحظ أن الترتيب مهم في هذه المسألة. فمثلاً، سحب الكرات (حمراء، حمراء، زرقاء) يختلف عن سحب الكرات (حمراء، زرقاء، حمراء). ولما كان العدد الكلي للكرات الحمراء في الصندوق 5، والعدد الكلي للكرات الزرقاء في الصندوق 4، فإن:

$$n(B) = {}_5P_2 \times {}_4P_1$$

$$= \frac{5!}{(5-2)!} \times \frac{4!}{(4-1)!}$$

$$= 20 \times 4$$

$$= 80$$

اختيار عنصرين من بين 5 عناصر واختيار عنصر واحد من بين 4 عناصر

بالتعويض في قانون التباديل

بالتبسيط

النتيجة

أتعلم

أستعمل مبدأ العدّ الأساسي لإيجاد عدد الطرائق المُمكنة لسحب كرتين حمراوين وكرة واحدة زرقاء، وذلك بضرب ${}_5P_2$ في ${}_4P_1$

أتحقق من فهمي

مُعتمداً المثال 3، أجد ما يأتي:

- (a) عدد الطرائق المُمكنة لسحب كرتين زرقاوين عشوائياً من الصندوق إذا سُحبتا معاً.
- (b) عدد الطرائق المُمكنة لسحب كرتين زرقاوين وكرة واحدة حمراء عشوائياً من الصندوق إذا كان السحب على التوالي من دون إرجاع.

أدرب وأحل المسائل

أجد ناتج كلِّ ممّا يأتي دون استعمال الآلة الحاسبة:

1 ${}_{10}C_7$

2 ${}_9C_0$

3 ${}_7C_1 + {}_6C_3$

أجد ناتج كلِّ ممّا يأتي باستعمال الآلة الحاسبة:

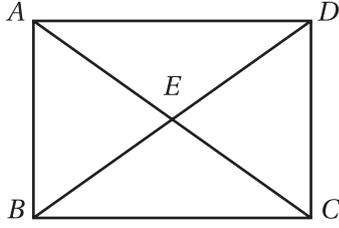
4 $({}_{12}C_5) \times ({}_5C_3)$

5 $\frac{{}_{10}C_6}{{}_8C_5}$

6 $\frac{{}_9C_5}{({}_8C_5) \times ({}_3C_2)}$

7 أجد عدد الطرائق المُمكنة لاختيار نوعي فاكهة من 7 أنواع متوافرة في محل لبيع الفواكه.

8 لدى قيس 8 كتب مختلفة، أراد إهداء 3 كتب منها إلى مكتبة المدرسة. أجد عدد الطرائق المُمكنة لاختيار الكتب المهداة.



9 هندسة: أجد عدد المثلثات في الشكل المجاور.

رياضة: أراد مُعلِّم التربية الرياضية اختيار طالبين من بين 15 طالبًا للمشاركة في المباريات المدرسية:

10 أجد عدد الطرائق المُمكنة لاختيار هذين الطالبين.

11 أجد عدد الطرائق المُمكنة لاختيار هذين الطالبين للمشاركة في المباريات، علمًا بأنَّ الأول سيشارك في مباراة كرة القدم، والثاني سيشارك في مباراة كرة السلة.

12 هدايا: أرادت إيمان شراء باقة ورد لأمها من أحد محالِّ بيع الورد. بكم طريقة يُمكن لإيمان شراء باقة فيها 5 وردات من بين 9 وردات ألوانها مختلفة؟

13 أجد عدد الطرائق المُمكنة التي يريد بها سمير شراء 4 أقلام من بين 10 أقلام مختلفة.

مهارات التفكير العليا

14 أكتشف الخطأ: وجد كلُّ من سعيد وهمام عدد الطرائق المُمكنة لاختيار 3 طلبة في الصف من بين 11 طالبًا للمشاركة في مشروع تصميم مُخطَّط هندسي لمدرستهم. أيُّهما إجابته صحيحة؟

همام

$${}_{11}P_3$$

سعيد

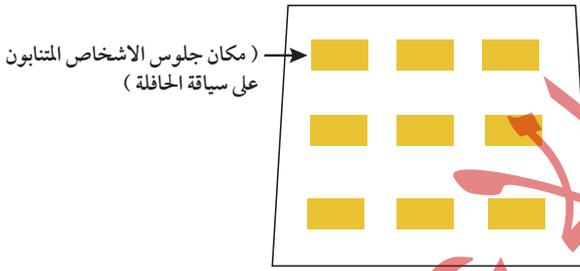
$${}_{11}C_3$$

15 تبرير: هل يُمكن أن يكون $nPr = nCr$ ، حيث n, r عددان صحيحان موجبان، و $r \leq n$ ؟
أبرر إجابتي.

16 تحد: اذا كان ${}_{10}C_7 = {}_{10}C_3$ فاجد صيغة عامه لهذه العلاقة.

7 **بناء:** في محل 25 نوعًا مختلفًا من بلاط الأرضيات، و36 نوعًا من بلاط الجدران. بكم طريقة يُمكن لمصطفى اختيار بلاط الأرضيات والجدران لمطبخ منزله؟

8 تُستعمل في جداول رحلات الطيران 3 أحرف من اسم المدينة. فمثلاً، يُكتب اسم (AMMAN) في الجدول بالرمز AMM. أجد عدد الطرائق التي يُمكن بها تكوين رموز للمدن باستعمال حروف اللغة الإنجليزية. سافر 9 أصدقاء، منهم وليد وخالد وسفيان، في حافلة صغيرة تحوي 9 مقاعد مُوزعة على 3 صفوف كما في الشكل المجاور:



9 بكم طريقة يُمكن أن يجلس الأصدقاء في الحافلة إذا تعيّن على وليد أو خالد أو سفيان سيارتها؟

10 بكم طريقة يُمكن أن يجلس الأصدقاء في الحافلة إذا تعيّن على وليد سيارتها، وجلس خالد في الصف الثاني من المقاعد، وجلس سفيان في الصف الثالث منها؟

أضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة في كلِّ ممّا يأتي:

1 ناتج 7C_6 هو:

- a) 1 b) 6
c) 7 d) 42

2 ناتج 9P_1 هو:

- a) 1 b) 9
c) 18 d) 27

3 ناتج $4!$ هو:

- a) 1 b) 4
c) 4C_4 d) 4P_4

4 ناتج nC_n ، حيث n عدد صحيح موجب، هو:

- a) 1 b) n
c) $2n$ d) n^2

5 ناتج nP_1 ، حيث n عدد صحيح موجب، هو:

- a) 1 b) n
c) $2n$ d) n^2

6 **زراعة:** في محل أشتال 6 ألوان مختلفة من الورد الجوري، و4 ألوان مختلفة من ورد القرنفل. أجد عدد الطرائق المُمكنة لشراء شتلة واحدة من الورد الجوري، وشتلة واحدة من ورد القرنفل.

تدريب على الاختبارات الدولية

15 رُسمت 8 نقاط على دائرة. عدد المثلثات التي يُمكن تكوينها من النقاط، بحيث تُمثل كل 3 نقاط رؤوس المثلث، هو:

- a) 40320 b) 336
c) 56 d) 8

16 يراد تكوين رقم من 3 منازل باستعمال الأرقام (0 - 9). عدد الأرقام التي يُمكن تكوينها من دون تكرار هو:

- a) 720 b) 120
c) 3628800 d) 648

17 لقوس قزح 7 ألوان. عدد الطرائق التي يُمكن أن يظهر فيها ترتيب ألوان قوس قزح، بافتراض أنه يُمكن إعادة ترتيب الألوان، هو:

- a) 1 b) 7 c) 49 d) 5040

رُقمت جمانة 9 بطاقات مُتماثلة بالأرقام من 1 إلى 9، بحيث حملت كل بطاقة رقمًا واحدًا:

18 بكم طريقة يُمكن لجمانة تكوين عدد من 5 منازل باستعمال هذه البطاقات؟

19 بكم طريقة يُمكن لجمانة تكوين عدد من 3 منازل، ويقبل القسمة على 5، باستعمال هذه البطاقات؟

11 متاحف: يراد توزيع 15 بطاقة دخول لمتحف الاردن بشكل عشوائي لصف يحوي 20 طالباً بحيث لا ياخذ الطالب اكثر من تذكره. أجد عدد الطرق الممكنة لذلك.

12 مدرسة: يراد اختيار طالبين من المرحلة الاساسية من بين 5 طلاب و 4 طلاب من المرحلة الثانوية من بين 6 طلاب للمشاركة بنشاط مدرسي. أجد عدد الطرق الممكنة لاختيار الطلبة.

13 قارب: يريد ستة أصدقاء الذهاب في رحلة بقارب يحوي ثمانية مقاعد. أجد عدد الطرق التي يمكن للأصدقاء الجلوس في القارب.



14 تمرير: يراد اختيار فريق تمارضي يتكون من 3 ممرضين من بين 7 ممرضين ذكور و 5 ممرضات من بين 10 ممرضات. أجد عدد الطرق الممكنة لاختيار الممرضين الثمانية.

ما أهمية هذه
الوحدة؟

صحيح أن الحوادث التي تقع مستقبلاً هي من علم الغيب، ولكن علماء الإحصاء والاحتمال وضعوا نظريات يُمكن تطبيقها لتقدير احتمالية وقوع بعض الحوادث ضمن مواقف حياتية. فمثلاً، شركات التأمين تعتمد الاحتمالات المحسوبة من طلبات التعويض عن الأضرار السابقة أساساً للتنبؤ باستحقاقات التعويض المستقبلية.

سأتعلّم في هذه الوحدة:

- ◀ استعمال مبدأ العَدِّ والتباديل والتوافيق لحساب الاحتمالات.
- ◀ تعرّف المتغير العشوائي لنواتج تجربة عشوائية، وتحديد قيم هذا المتغير.
- ◀ حساب الاحتمال لمتغير عشوائي في تجربة عشوائية.
- ◀ إيجاد التوقُّع والتباين لمتغير عشوائي في تجربة عشوائية.

تعلمت سابقاً:

- ✓ المبدأ الأساسي للعَدِّ لإيجاد عدد الطرائق الممكنة لإجراء تجربة عشوائية من مراحل عِدَّة.
- ✓ التباديل لإيجاد عدد الطرائق عندما يكون الترتيب مهمًا.
- ✓ التوافيق لإيجاد عدد الطرائق عندما لا يكون الترتيب مهمًا.
- ✓ استعمال مبدأ العَدِّ والتباديل والتوافيق لنمذجة مواقف حياتية، وحل مسائل عملية.

الاحتمال بالتباديل والتوافيق

Probability with Permutations and Combinations

استعمال مبدأ العدّ والتباديل والتوافيق لحساب احتمالات الحوادث في تجربة عشوائية.

فكرة الدرس



المصطلحات



مسألة اليوم



أراد خالد التقاط صورة لعائلته، فوقف الأب والأم والابن والابنة في صف واحد أمام الكاميرا. ما احتمال وقوع الابن والابنة بين الأبوين؟

تعلمت في الوحدة السابقة كيفية إيجاد عدد الطرائق الممكنة لإجراء تجربة عشوائية باستعمال مبدأ العدّ، ويُمكنني الآن الاستفادة من ذلك في حساب احتمال وقوع حادث معين ضمن تلك التجربة العشوائية.

مثال 1

رُتبت البطاقات المجاورة عشوائياً في صف واحد. ما احتمال أن يظهر الرقمان 3 و 4 متجاورين؟

3 4 2 5 1

الخطوة 1: أفترض أن الحادث A يعني ظهور الرقمين 3 و 4 متجاورين.

الخطوة 2: أحسب عدد عناصر Ω ؛ أي عدد طرائق ترتيب 5 عناصر (بطاقات) في صف واحد.

$$n(\Omega) = 5!$$

مبدأ العد الأساسي

$$= 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

تعريف مضروب العدد

$$= 120$$

بالتبسيط

الخطوة 3: أجد عدد عناصر الحادث A . أظهر الرقمين 3 و 4 متجاورين في إحدى صورتين: 43، أو 34، وأعامل كلاً منهما كأنها عنصر واحد، ثم أجد عدد طرائق ترتيب 4 عناصر.

$$n(A) = 2 \times 4!$$

مبدأ العد الأساسي

$$= 2 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

تعريف مضروب العدد

$$= 48$$

بالتبسيط

أذكر

الرمز Ω يُقرأ أوميغا ويدل على فضاء العينة للتجربة العشوائية

أتعلم

يُمكن تسهيل الاختصار

على النحو الآتي:

$$p(A) = \frac{2 \times 4!}{5 \times 4!} = \frac{2}{5}$$

الخطوة 4: أجد الاحتمال.

بالتعويض في صيغة الاحتمال

بالتبسيط

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{48}{120} = \frac{2}{5}$$

إذن، احتمال ظهور الرقمين 3 و4 متجاورين هو $\frac{2}{5}$

أتحقق من فهمي

كُتبت أحرف كلمة (تباديل) على 6 بطاقات مُتماثلة، ثم رُتبت البطاقات عشوائياً في صف واحد. ما احتمال أن يظهر الحرفان (ت) و(ي) متجاورين؟

عندما يكون الترتيب مهماً في تجربة اختيار مجموعة من العناصر في تجربة عشوائية، فإنه يُمكن استعمال التباديل لحساب احتمالات اختيار تلك العناصر.

مثال 2



يتكوّن مجلس الإدارة في إحدى الشركات من 7 أعضاء، بينهم سارة وحمزة. ما احتمال اختيار سارة رئيساً لمجلس الإدارة، وحمزة نائباً للرئيس إذا كانت عملية الاختيار عشوائية؟

الخطوة 1: أفترض أن A يعني اختيار سارة رئيساً، وحمزة نائباً للرئيس.

الخطوة 2: أجد عدد عناصر Ω .

الترتيب مهم في هذه الحالة؛ لذا فإن:

عدد طرائق اختيار عنصرين (ترتيهما مهم) من بين 7 عناصر

بالتعويض في قانون التباديل

مضروب العدد

بالتبسيط

$$\begin{aligned} n(\Omega) &= {}_7P_2 \\ &= \frac{7!}{(7-2)!} \\ &= \frac{7 \times 6 \times 5!}{5!} \\ &= 42 \end{aligned}$$

أذكر

$${}_nPr = \frac{n!}{(n-r)!}$$

حيث: n, r :

عددان صحيحان،

$$0 \leq r \leq n$$

الخطوة 3: أجد عدد عناصر الحادث A .

توجد حالة واحدة تكون فيها سارة رئيسًا، وحمزة نائبًا للرئيس؛ لذا فإن:

$$n(A) = 1$$

الخطوة 4: أجد الاحتمال.

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{1}{42}$$

بالتعويض في صيغة الاحتمال

إذن، احتمال اختيار سارة رئيسًا لمجلس الإدارة، وحمزة نائبًا للرئيس هو $\frac{1}{42}$

أتحقق من فهمي

فؤاد ومصطفى اثنان من 10 طلبة مشاركين في مسابقة الحساب الذهني. إذا كانت لجنة التحكيم تستدعي عشوائيًا الطلبة المشاركين الواحد تلو الآخر لخوض المسابقة، فما احتمال استدعاء فؤاد أولاً ومصطفى ثانيًا؟

عندما لا يكون الترتيب مهمًا في تجربة اختيار مجموعة من العناصر في تجربة عشوائية، فإنه يُمكن استعمال التوافيق لحساب احتمالات اختيار تلك العناصر.

مثال 3

يوجد في قسم التطوير بإحدى الشركات الزراعية 7 مهندسين زراعيين، منهم سعاد وحامد. ما احتمال اختيار سعاد وحامد لحضور ندوة عن المنتجات المعالجة وراثيًا إذا كانت عملية الاختيار عشوائية؟

الخطوة 1: أفترض أن A يعني اختيار سعاد وحامد لحضور الندوة.

الخطوة 2: أجد عدد عناصر Ω .

الترتيب بين سعاد وحامد غير مهم في هذه الحالة؛ لذا أستعمل التوافيق:

$$n(\Omega) = {}_7C_2$$

عدد طرائق اختيار عنصرين من بين 7 عناصر

$$= \frac{7!}{2! \times (7-2)!}$$

بالتعويض في قانون التوافيق

$$= \frac{7 \times 6 \times 5!}{2 \times 5!}$$

مضروب العدد

$$= 21$$

بالتبسيط

أتعلم

ألاحظ الفرق بين الموقف الذي يكون فيه الترتيب مهمًا والموقف الذي لا يكون فيه الترتيب مهمًا، بمقارنة المثال 2 بالمثال 3

أتذكر

$${}_nC_r = \frac{n!}{r! \times (n-r)!}$$

حيث: n, r :

عددان صحيحان،

$$0 \leq r \leq n$$

الخطوة 3: أجد عدد عناصر الحادث A.

توجد حالة واحدة لاختيار سعاد وحامد لحضور الندوة؛ لذا فإن:

$$n(A) = 1$$

الخطوة 4: أجد الاحتمال.

بالتعويض في صيغة الاحتمال

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{1}{21}$$

إذن، احتمال اختيار سعاد وحامد لحضور الندوة هو $\frac{1}{21}$

أتحقق من فهمي

صندوق فيه كرات مُتماثلة، كلٌّ منها يحمل رقمًا من بين الأعداد 0 إلى 15، إذا اخترت ثلاث كرات عشوائيًا دفعة واحدة، فما احتمال أن تحمل الكرات المختارة أعدادًا زوجية؟



النباتات المعالجة وراثيًا هي نباتات غيّرت خصائصها الوراثية عن طريق نقل الجينات من صنف إلى آخر؛ بُعِثَ زيادة الإنتاج، أو إنتاج محاصيل غريبة، وقد أثبتت كثير من الأبحاث خطورة ذلك على صحة الإنسان.

تتطلب بعض المواقف اختيار r_1 من بين n_1 من العناصر عشوائيًا في مرحلة أولى، و r_2 من بين n_2 من العناصر عشوائيًا في مرحلة ثانية، وتُمثّل $n_2 + n_1$ عدد العناصر الكلية، ويُمكن أن يتم اختيار r_1 أو r_2 مع مراعاة الترتيب (تبادل)، أو من دون مراعاة الترتيب (توافق).

مثال 4

شارك 14 طالبًا و16 طالبة من إحدى المدرسيات في مسابقة شعرية، اختير منهم 5 طلبة عشوائيًا لتمثيل لجنة تنظيمية. أجد كلاً مما يأتي:

1 احتمال اختيار 3 طلاب وطالبتين.

الخطوة 1: أفترض أن A يعني اختيار لجنة من 3 طلاب وطالبتين.

الخطوة 2: أجد عدد عناصر Ω .

الترتيب في هذه الحالة غير مهم؛ لذا أستعمل التوافق لحساب عدد طرائق اختيار 5 طلبة من بين 30 طالبًا وطالبة:

$$n(\Omega) = {}_{30}C_5$$

عدد طرائق اختيار 5 عناصر من بين 30 عنصرًا

$$= 142506$$

باستعمال الآلة الحاسبة

الخطوة 3: أجد عدد عناصر الحادث A .

أجد عدد طرائق اختيار 3 طلاب من بين 14 طالباً مضروباً في عدد طرائق اختيار طالبتين من بين 16 طالبةً.

الترتيب غير مهم في كلتا الحالتين. وبحسب مبدأ العدّ، فإنّ:

$$n(A) = {}_{14}C_3 \times {}_{16}C_2 \\ = 43680$$

مبدأ العد الأساسي

باستعمال الآلة الحاسبة

الخطوة 4: أجد الاحتمال.

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{43680}{142506} \\ \approx 0.31$$

بالتعويض في صيغة الاحتمال

بالتبسيط

2 احتمال أن يكون رئيس اللجنة ونائبه من الطالبات، والأعضاء الثلاثة الآخرون من الطلاب.

الخطوة 1: أفترض أن B يعني اختيار رئيس اللجنة ونائبه من الطالبات، واختيار الأعضاء الثلاثة الآخرين من الطلاب.

الخطوة 2: أجد عدد عناصر Ω .

الترتيب غير مهم لاختيار لجنة فيها 5 من بين 30؛ لذا فإنّ:

$$n(\Omega) = {}_{30}C_5 \\ = 142506$$

عدد طرائق اختيار 5 من بين 30

باستعمال الآلة الحاسبة

الخطوة 3: أجد عدد عناصر الحادث B .

أجد عدد طرائق اختيار طالبتين من بين 16 طالبةً (الترتيب مهم في هذه الحالة؛ لأنّ إحدى الطالبتين رئيس، والأخرى نائب للرئيس) مضروباً في عدد طرائق اختيار 3 طلاب من بين 14 طالباً (الترتيب غير مهم في هذه الحالة؛ لأنّ جميع الطلاب أعضاء في اللجنة):

$$n(B) = {}_{16}P_2 \times {}_{14}C_3$$

$$= 87360$$

مبدأ العدّ الأساسي

باستعمال الآلة الحاسبة

الخطوة 4: أجد الاحتمال.

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{87360}{142506}$$

$$\approx 0.61$$

بالتعويض في صيغة الاحتمال

بالتبسيط

رموز الرياضيات

الرمزان الآتيان متكافئان:

$$P(n,r) \cong {}_n P_r$$

$$\binom{n}{r} \cong {}_n C_r$$

أتحقق من فهمي



عائلة تضم 6 أولاد و3 بنات، أرادت الأم اختيار 4 منهم لتحضير وجبة العشاء. أجد احتمال كل ممّا يأتي:

1 اختيار 2 من الأولاد و2 من البنات.

2 اختيار ولد لإعداد الشاي، وولد لطهي الطعام، وبنيتين لتجهيز المائدة.

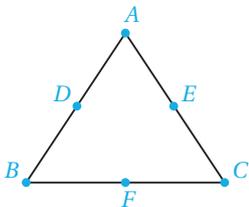
أدرب وأحل المسائل

1 مسرح: أرادت منار وحليمة حضور مسرحية، فاخترت كلٌّ منهما مقعداً في الصف الأمامي الذي يحوي 12 مقعداً. ما احتمال أن تجلسا على مقعدين متجاورين؟

2 لوحة مركبة: تتألف لوحة المركبة في الأردن من رمز خاص بإدارة ترخيص

الأردن 24
JORDAN 4 5 7 7 9

المركبات، مكوّن من رقمين يُكتبان أعلى اللوحة، ويُمثّلان رمزاً مشتركاً لمركبات عدّة، ومن 5 أرقام من بين الأرقام 0 إلى 9 خاصة بكل مركبة. إذا اختيرت مركبة عشوائياً، فما احتمال أن يكون رقمها 45779؟



3 هندسة: في الشكل المجاور، إذا اختيرت ثلاث نقاط عشوائياً، فما احتمال أن تكون

هذه النقاط على استقامة واحدة؟



4 علبة أقلام فيها 6 أقلام حبر أزرق، و4 أقلام حبر أحمر. إذا اختيرت من العلبة 4 أقلام الواحد تلو الآخر عشوائياً، فما احتمال اختيار قلّمي حبر أزرق وقلّمي حبر أحمر؟

5 ألعاب رياضية: وُزعت عشوائياً 6 جوائز على المشاركين في مسابقة رياضية. إذا شارك في المسابقة 10 ذكور و10 إناث، فما احتمال اختيار المشارك طلال ليحصل على الجائزة الأولى، والمشارك مهند ليحصل على الجائزة الثانية، وأن تكون بقية الجوائز من نصيب الإناث؟

6 أحلّ المسألة الواردة في بند (مسألة اليوم).



ورد: أرادت وفاء تزيين حديقة بيتها، فاختارت عشوائياً 4 شتلات ورد واحدة تلو الأخرى من بين 10 شتلات ورد جوري، و7 شتلات ورد قرنفل، و13 شتلة ورد فُلّ. ما احتمال أن تكون وفاء قد اختارت:

7 شتلات ورد جوري فقط؟

8 شتلات ليس من بينها ورد جوري؟

9 شتلة واحدة على الأقل من كل نوع؟

قُبّعات ملونة: في محل 6 قُبّعات مُتماثلة، منها 4 سوداء، وواحدة خضراء، وواحدة زرقاء، ربّتها صاحب المحل عشوائياً في صف واحد على أحد الرفوف. ما احتمال كلِّ ممّا يأتي:

10 أن تكون القُبّعات السود بعضها بجانب بعض؟

11 ألا تكون القُبّعة الخضراء والقُبّعة الزرقاء متجاورتين؟

12 أن تكون القُبّعتان على طرفي الصف سوداوين؟

13 أن تتوزع القُبّعات السود بالتساوي على طرفي الصف؟



14 مسألة مفتوحة: أكتب سؤالاً لتجربة عشوائية يكون فيه الاحتمال $\frac{1}{5C_2}$

15 **أكتشف الخطأ:** بلال وصالح لاعبان في فريق كرة القدم للصف الأول الثانوي الذي يضم 14 لاعباً. أراد مُعلِّم التربية الرياضية أن يُوزَّع عشوائياً على كل لاعب قميصاً رياضياً من القمصان المُرقَّمة من 1 إلى 14، وقد حسب كل من بلال وصالح احتمال حصول بلال على القميص رقم 9، وحصول صالح على القميص رقم 10 كما يلي:

$$\text{صالح}$$

$$p(A) = \frac{{}^{12}P_2}{{}^{14}P_2} = \frac{132}{182} = \frac{66}{91}$$

$$\text{بلال}$$

$$p(A) = \frac{{}^{12}C_2}{{}^{14}C_2} = \frac{66}{91}$$

أيُّهما حلُّه صحيح؟ أبرِّر إجابتي.

16 **تحذُّ:** يحتوي كيس على 20 كرة مُتماثلة، منها x كرة سوداء، و $2x$ كرة بيضاء، و 8 كرات حمراء، سُحِبَت من الكيس عشوائياً كرتان معاً. ما احتمال ألا تكون الكرتان المسحوبتان سوداوين؟

المتغيرات العشوائية Random Variables

إيجاد قيم متغير عشوائي في تجربة عشوائية.

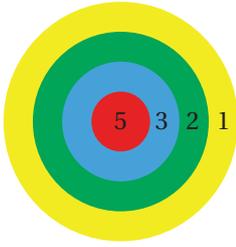
فكرة الدرس



المصطلحات



مسألة اليوم



في لعبة رمي السهام، رمى كلٌّ من إبراهيم ويوسف سهمين على لوحة السهام المجاورة. كم مجموعاً مختلفاً يمكن أن يسجله إبراهيم أو يوسف؟

يُطلق على المتغير الذي ترتبط قيمه بنتائج تجربة عشوائية اسم **المتغير العشوائي** *random variable*. ففي تجربة سحب كرة عشوائياً من كيس يحوي 3 كرات حمراء، و3 كرات صفراء، إذا كان المتغير X يمثّل عدد الكرات الحمراء في السحبة، فإنّ قيم المتغير X قد تكون 0 في حالة سحب كرة صفراء، أو 1 في حالة سحب كرة حمراء.

أنعم

إذا كانت مجموعة قيم المتغير العشوائي معدودة ومنتهية، فإنّه يُسمّى متغيراً عشوائياً منفصلاً. أمّا إذا كانت مجموعة قيم المتغير العشوائي غير معدودة ومنتهية، فإنّه يُسمّى متغيراً عشوائياً متصلاً.

مثال 1

في تجربة إلقاء قطعتي نقد عشوائياً، إذا دلّ المتغير العشوائي X على عدد مرّات ظهور الصورة، فأجد مجموعة قيم X .

أفترض أنّ H تعني صورة، وأنّ T تعني كتابة. وبذلك، فإنّ:

$$\Omega = \{(T, T), (T, H), (H, T), (H, H)\}$$

عناصر فضاء العينة للتجربة

$$X = \begin{matrix} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{matrix}$$

عدد الصور المرتبط بكل عنصر

إذن، مجموعة قيم المتغير العشوائي هي: $X = \{0, 1, 2\}$.

أتتحقق من فهمي

في تجربة إلقاء حجر نرد مرّة واحدة، إذا دلّ المتغير العشوائي X على العدد الظاهر، فأجد مجموعة قيم X .

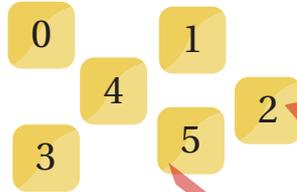
رموز الرياضيات

يُرمز إلى قيم المتغير العشوائي بالرمز X ، ويُرمز إلى المتغير العشوائي نفسه بالرمز X .

تتطلب بعض المواقف تحديد عناصر حادث مُعيَّن في فضاء العيِّنة، مرتبط بقيمة مُحدَّدة من قيم المتغير العشوائي في التجربة. ففي تجربة إلقاء قطعتي نقد مرَّة واحدة، إذا دلَّ المتغير العشوائي X على عدد مرَّات ظهور الصورة، فإنَّ عنصر الحادث $C = \{(H, T)\}$ يرتبط بالقيمة 1، وعنصر الحادث $D = \{(T, T)\}$ يرتبط بالقيمة 0، وعنصر الحادث $E = \{(H, H)\}$ يرتبط بالقيمة 2

مثال 3

في تجربة سحب بطاقتين عشوائياً على التوالي مع الإرجاع من صندوق يحوي 6 بطاقات مُتماثلة، كلُّ منها تحمل رقماً من 0 إلى 5 من دون تكرار، إذا دلَّ المتغير العشوائي X على مجموع العددين الظاهرين على البطاقتين المسحوبتين، فأجد الحادث الذي ترتبط جميع عناصره بالقيمة $X = 8$.



أفترض أنَّ الحادث المطلوب هو A ، فتكون عناصره هي الأزواج المُرتَّبة التي مجموع إحداثيها 8:

$$3 + 5 = 8, 5 + 3 = 8, 4 + 4 = 8 \quad \text{المجاميع الممكنة للعدد 8 باستعمال البطاقات}$$

$$A = \{(3, 5), (5, 3), (4, 4)\} \quad \text{عناصر الحادث } A$$

ألاحظ أنَّ المجموع $4 + 4$ ممكن؛ لأنَّ السحب مع الإرجاع.

أتتحقق من فهمي

في تجربة سحب بطاقتين عشوائياً على التوالي من دون إرجاع من صندوق يحوي 6 بطاقات مُتماثلة، كلُّ منها تحمل رقماً من 0 إلى 5 من دون تكرار، إذا دلَّ المتغير العشوائي X على مجموع العددين الظاهرين على البطاقتين المسحوبتين، فأجد الحادث الذي ترتبط جميع عناصره بالقيمة $X = 4$.

أندكر

السحب من دون إرجاع يعني عدم إمكانية ظهور المسحوب أولاً في السحبة التالية.



1

2

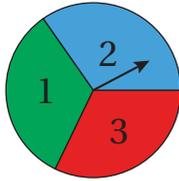
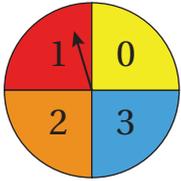
3

في تجربة سحب بطاقتين عشوائياً من البطاقات الظاهرة في الشكل المجاور، إذا دلَّ المتغير العشوائي X على حاصل ضرب العددين الظاهرين على البطاقتين المسحوبتين، فأجد مجموعة قيم X في الحالات الآتية:

1 السحب على التوالي مع الإرجاع.

2 السحب على التوالي من دون إرجاع.

3 سحب البطاقتين معاً.



إذا دُور مؤشراً القرصين عشوائياً في الشكل المجاور، وتوقف كل مؤشر عند أحد الأعداد، فأجد مجموعة قيم المتغير العشوائي X إذا دلَّ على:

4 مجموع العددين.

5 الفرق الموجب بين العددين.

6 حاصل ضرب العددين.

7 في تجربة سحب ثلاث كرات عشوائياً على التوالي مع الإرجاع من صندوق يحوي 3 كرات حمراء، و3 كرات صفراء، و4 كرات خضراء، جميعها مُتماثلة، إذا دلَّ المتغير العشوائي X على عدد الكرات الحمراء في السحبة، فأجد الحادث الذي ترتبط جميع عناصره بالقيمة $X = 2$.

8 أحل المسألة الواردة في بند (مسألة اليوم).



9 مسألة مفتوحة: أصف موقفاً تكون فيه قيم المتغير العشوائي X : 0, 1, 2

10 تبرير: في تجربة سحب بطاقتين عشوائياً على التوالي من صندوق يحوي 3 بطاقات مُتماثلة، كلُّ منها مُرقمة بأحد الأرقام: 1, 3, 5، إذا دلَّ المتغير العشوائي X على مجموع العددين الظاهرين على البطاقتين المسحوبتين، وكانت قيمه: 2, 4, 6, 8, 10، فأحدد إذا كان السحب مع الإرجاع، أو من دون إرجاع، مُبرراً إجابتي.

11 تحدّ: أصف موقفاً حياتياً تكون فيه بعض قيم المتغير العشوائي موجبة، وبعض قيمه الأخرى سالبة.

احتمال المتغير العشوائي

Probability of a Random Variable

إيجاد احتمالات قيم متغير عشوائي في تجربة عشوائية.

فكرة الدرس



التوزيع الاحتمالي.

المصطلحات



مسألة اليوم



عند إلقاء حجرين نرد متمايزين مرّة واحدة، وتسجيل مجموع العددين الظاهرين، ما المجموع الذي احتمالته أكبر؟

أتعلّم

مجال التوزيع الاحتمالي هو مجموعة قيم المتغير العشوائي، ومداه مجموعة قيم الاحتمالات المقابلة.

التوزيع الاحتمالي *probability distribution* للتجربة العشوائية هو اقتران يربط قيم المتغير العشوائي باحتمالات وقوعها في التجربة، ويُرمز إلى اقتران التوزيع الاحتمالي بالرمز $P(X)$ ، وقد يُكتَب في صورة $P(X = x)$.

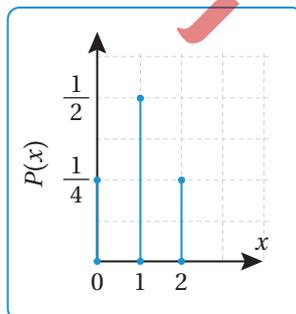
تعلّمتُ سابقاً أنّه عند إلقاء قطعتي نقد مرّة واحدة، فإنّ قيم المتغير العشوائي X الذي يدل على عدد مرّات ظهور الصورة قد تكون 0، أو 1، أو 2، حيث إنّ فضاء العيّنة لهذه التجربة هو:

$$\Omega = \{(H, H), (H, T), (T, H), (T, T)\}$$

وبذلك تكون قيم اقتران التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X هي:

$$P(X = 0) = \frac{1}{4}, P(X = 1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, P(X = 2) = \frac{1}{4}$$

يُمكن أيضًا التعبير عن اقتران التوزيع الاحتمالي بجدول، أو تمثيل بياني.



توزيع احتمالي

x	0	1	2
$P(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

ألاحظ أن مجموع قيم اقتران التوزيع الاحتمالي (الجدول، أو التمثيل البياني) هو 1، حيث:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1$$

مفهوم أساسي

بالكلمات: إذا كان X متغيراً عشوائياً، فإن مجموع قيم اقتران التوزيع الاحتمالي

$P(X)$ هو 1

بالرموز: إذا كان X متغيراً عشوائياً، فإن:

$$\sum P(X) = 1$$

أتعلم

يُطلق على التوزيع الاحتمالي الذي تكون فيه جميع الاحتمالات متساوية اسم التوزيع المنتظم

uniform distribution

مثال 1

في تجربة إلقاء حجر نرد مرة واحدة، إذا دلّ المتغير العشوائي X على العدد الظاهر، فأجد كلاً مما يأتي:

1 التوزيع الاحتمالي في صورة جدول.

الخطوة 1: أجد قيم المتغير العشوائي.

$$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

الخطوة 2: أجد احتمال كل قيمة من قيم المتغير العشوائي.

$$P(1) = \frac{1}{6}, P(2) = \frac{1}{6}, P(3) = \frac{1}{6}$$

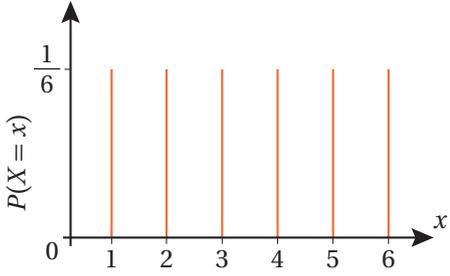
$$P(4) = \frac{1}{6}, P(5) = \frac{1}{6}, P(6) = \frac{1}{6}$$

الخطوة 3: أنشئ جدولاً من صفتين أنظّم فيه قيم المتغير العشوائي، والاحتمال المقابل لكلٍّ منها.

x	1	2	3	4	5	6
$P(x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

ألاحظ أن مجموع الاحتمالات هو 1:

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{6}{6} = 1$$



2 التوزيع الاحتمالي في صورة تمثيل بياني.

أضع قيم المتغير العشوائي على المحور الأفقي،
وقيم الاحتمال المقابلة لها على المحور الرأسي،
ثم أرسم الأعمدة البيانية كما في الشكل المجاور.

أتحقق من فهمي



في تجربة سحب بطاقتين معاً عشوائياً من صندوق يحوي بطاقتين
حمراوين وبتاقتين زرقاوين، إذا دلّ المتغير العشوائي X على عدد
البطاقات الزرقاء في السحبة، فأجد كلاً ممّا يأتي:

1 التوزيع الاحتمالي في صورة جدول.

2 التوزيع الاحتمالي في صورة تمثيل بياني.

إنّ معرفة مجموع احتمالات قيم المتغير العشوائي في تجربة عشوائية تساعد على إيجاد
احتمالات مجهولة، واحتمالات ضمن شروط محددة على قيم المتغير العشوائي.

مثال 2

في تجربة عشوائية، كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X كما في الجدول الآتي:

x	0	1	2	3	4
$P(x)$	0.1	a	0.3	a	0.1

1 أجد قيمة a .

$$0.1 + a + 0.3 + a + 0.1 = 1$$

$$2a + 0.5 = 1$$

$$2a = 0.5$$

$$a = 0.25$$

$$\sum P(x) = 1 \text{ لأن } 1$$

بتجميع الحدود المتشابهة

ب طرح 5.0 من طرفي المعادلة

بقسمة طرفي المعادلة على 2

2 أجد $P(1 \leq x < 3)$.

$$\begin{aligned}
 P(1 \leq x < 3) &= P(x = 1) + P(x = 2) && \text{بتحديد قيم المتغير العشوائي ضمن الشرط المُحدّد} \\
 &= 0.25 + 0.3 && \text{بتعويض قيم الاحتمالات} \\
 &= 0.55 && \text{بالجمع}
 \end{aligned}$$

أنتحَق من فهمي

في تجربة عشوائية، كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X كما في الجدول الآتي:

x	1	2	3	4
$P(x)$	0.2	b	0.2	$2b$

1 أجد قيمة b .

2 أجد $P(2 \leq x \leq 4)$.

يُمكن أيضًا تمثيل التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X في صورة مجموعة من الأزواج المُرتَّبة التي إحداثيات x لها مجموعة قيم المتغير العشوائي، وإحداثيات y لها مجموعة احتمالات الحوادث المرتبطة بقيم المتغير العشوائي.

مثال 3

في تجربة عشوائية، كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X مُعرَّفًا على النحو الآتي:

$$\{(1, 2k), (2, k), (3, k), (4, k)\}$$

1 أجد قيمة k .

$$2k + k + k + k = 1$$

$$5k = 1$$

$$k = 0.2$$

$$\sum P(x) = 1 \text{ لأن}$$

بتجميع الحدود المتشابهة

بقسمة طرفي المعادلة على 5

أتذكّر

لأيِّ حادث A في فضاء العيّنة لتجربة عشوائية، فإنَّ:

$$P(A) + P(A') = 1$$

2 أنشئ جدول التوزيع الاحتمالي.

x	1	2	3	4
$P(x)$	0.4	0.2	0.2	0.2

3 أجد $P(x \leq 3)$.

$$\begin{aligned} P(x \leq 3) &= P(x = 1) + P(x = 2) + P(x = 3) \\ &= 0.4 + 0.2 + 0.2 \\ &= 0.8 \end{aligned}$$

بتحديد قيم المتغير العشوائي ضمن الشرط المُحدّد

بتعويض قيم الاحتمالات

بالجمع

أتعلّم

$$\begin{aligned} P(x \leq 3) &= 1 - P(x = 4) \\ &= 1 - 0.2 \\ &= 0.8 \end{aligned}$$

أتدقّق من فهمي

في تجربة عشوائية، كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X مُعرّفًا على النحو الآتي:

$$\{(1, 2k), (2, 2k), (3, 3k), (4, 3k)\}$$

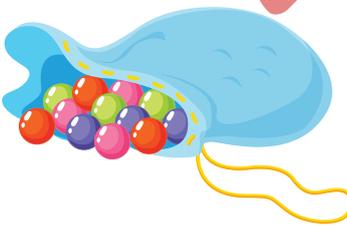
1 أجد قيمة k .

2 أنشئ جدول التوزيع الاحتمالي.

3 أجد $P(x \geq 3)$.

يُمكن حساب احتمالات قيم المتغير العشوائي باستعمال مبدأ العدّ، والتباديل، والتوافيق.

مثال 4



في تجربة سحب ثلاث كرات عشوائياً على التوالي من دون إرجاع من كيس فيه 3 كرات حمراء، و4 كرات خضراء، جميعها مُتماثلة، إذا دلّ المتغير العشوائي X على عدد الكرات الحمراء في السحبة، فأنشئ جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X .

الخطوة 1: أجد قيم المتغير العشوائي.

$$X = \{0, 1, 2, 3\}$$

الخطوة 2: أجد احتمالات قيم المتغير العشوائي.

$$P(x = 0) = \frac{{}^3C_0 \times {}^4C_3}{{}^7C_3} = \frac{4}{35}$$

0 كرة حمراء، و3 كرات خضراء

$$P(x = 1) = \frac{{}^3C_1 \times {}^4C_2}{{}^7C_3} = \frac{18}{35}$$

كرة حمراء واحدة، وكرتان خضراوان

$$P(x = 2) = \frac{{}^3C_2 \times {}^4C_1}{{}^7C_3} = \frac{12}{35}$$

كرتان حمراوان، وكرة خضراء واحدة

$$P(x = 3) = \frac{{}^3C_3 \times {}^4C_0}{{}^7C_3} = \frac{1}{35}$$

3 كرات حمراء، و0 كرة خضراء

الخطوة 3: أنشئ جدول التوزيع الاحتمالي.

x	0	1	2	3
$P(x)$	$\frac{4}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$

أتحقق من فهمي 

أحلُّ المثال 4 إذا كان السحب مع الإرجاع.

أدرب وأحل المسائل 

في تجربة إلقاء ثلاث قطع نقد عشوائياً، دلَّ المتغير العشوائي X على عدد مرّات ظهور الصورة:

1 أجد التوزيع الاحتمالي في صورة جدول.

2 أجد التوزيع الاحتمالي في صورة تمثيل بياني.

في تجربة عشوائية، كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X كما في الجدول الآتي:

x	0	1	2	3
$P(x)$	0.1	a	0.2	a

3 أجد قيمة a .

4 أجد $P(1 < x \leq 3)$.

في تجربة عشوائية، كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X مُعرَّفًا على النحو الآتي:

$$\{(0, 2k), (1, 0.5k), (2, 2k), (3, 0.5k)\}$$

5 أجد قيمة k .

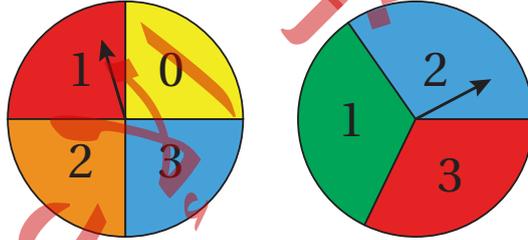
6 أنشئ جدول التوزيع الاحتمالي.

7 أجد $P(x \geq 2)$.

8 في تجربة سحب كرتين عشوائياً على التوالي من دون إرجاع من صندوق يحوي 3 كرات حمراء، و3 كرات خضراء، جميعها مُماثلة، إذا دلَّ المتغير العشوائي X على عدد الكرات الحمراء في السحبة، فأُنشئ جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X .

9 أحل المسألة الواردة في بند (مسألة اليوم).

دور مؤشر القرصين عشوائياً في الشكل المجاور، وتوقف كل مؤشر عند أحد الأعداد، ودلَّ المتغير العشوائي X على مجموع العددين:



10 أنشئ جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X .

11 أمثل بيانياً التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X .

12 أجد $P(1 \leq x \leq 4)$.

13 أجد $P(x > 5)$.



14 **مواعيد:** يُنظَّم محاضر جامعي مواعيد لأربعةٍ من طلبته المُتوقَّع تخرُّجهم في الساعة المُخصَّصة لعمله المكتبي كل يوم خميس. وبحسب خبرته، فإنَّ عدد مَنْ يتأخرون عن موعد الساعة المكتبية من هؤلاء الطلبة يُمكن تمثيله بمتغير عشوائي X ، وإنَّ التوزيع الاحتمالي لهذا المتغير العشوائي هو كما في الجدول الآتي:

x	0	1	2	3	4
$P(x)$	0.4	0.25	$4k$	$2k$	k

أجد احتمال تأخر اثنين من هؤلاء الطلبة - على الأقل - عن موعد الساعة المكتبية يوم الخميس.

مهارات التفكير العليا

15 **تحذُّ:** أجد قيمة k إذا كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X مُعرَّفًا على النحو الآتي:

$$\{(1, 0.1x), (2, 0.1x), (3, 0.1x), (4, k)\}$$

16 **تحذُّ:** أجد المنوال للتوزيع الاحتمالي إذا كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X كما في الجدول الآتي:

x	0	1	2	3	4
$P(x)$	0.1	a	0.3	a	0.1

17 **أكتب:** أيُّ طرائق التعبير عن التوزيع الاحتمالي أفضل؟ أبرِّر إجابتي.

توقُّع المتغير العشوائي

Expectation of a Random Variable

إيجاد التوقُّع والتباين لمتغير عشوائي في تجربة عشوائية.

فكرة الدرس



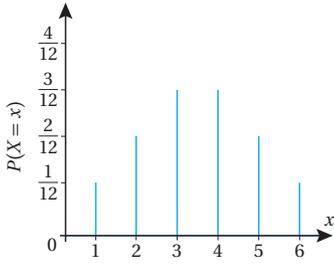
توقُّع المتغير العشوائي، تباين المتغير العشوائي.

المصطلحات



مثَّلت تغريد التوزيع الاحتمالي لتجربة عشوائية كما في الشكل المجاور، ثم أرادت إيجاد الوسط الحسابي والانحراف المعياري لهذا التوزيع، كيف يُمكنها ذلك؟

مسألة اليوم



تعلمت سابقاً إيجاد الوسط الحسابي (\bar{x}) لبيانات مُمثَّلة في جداول تكرارية؛ بقسمة مجموع حاصل ضرب القيم في تكراراتها ($\sum x.f$) على مجموع التكرارات ($\sum f$) باستعمال الصيغة الآتية:

$$\bar{x} = \frac{\sum x.f}{\sum f}$$

وبالمثل، يُمكن إيجاد الوسط الحسابي لتوزيع احتمالي؛ لأنَّ احتمالات قيم المتغير العشوائي X تُمثِّل تكرارات لتلك القيم (تكرارات نسبية؛ نظراً إلى قسمة كل تكرار على مجموع التكرارات). ولأنَّ مجموع احتمالات قيم المتغير العشوائي (التكرارات) هو 1، فإنَّ الوسط الحسابي هو $\sum x.P(x)$ ، في ما يُعرَّف باسم التوقُّع *expectation* للمتغير العشوائي X ، ويُرمز إليه بالرمز $E(x)$.

لغة الرياضيات

يُطلَق على التوقُّع للمتغير العشوائي في التوزيع الاحتمالي اسم الوسط الموزون.

مفهوم أساسي

بالكلمات: التوقُّع للمتغير العشوائي X في توزيع احتمالي لتجربة عشوائية يساوي مجموع حواصل ضرب كل قيمة للمتغير X في احتمال تلك القيمة.

بالرموز:

$$E(x) = \sum x.P(x)$$

مثال 1: من الحياة

في مسح عشوائي شمل 100 سيدة من ربّات البيوت لمعرفة عدد اللواتي لديهن أجهزة حاسوب، كانت نتيجة المسح كما في الجدول الآتي:

عدد الأجهزة (x)	0	1	2	3
عدد ربّات البيوت (التكرار f)	17	42	31	10

بافتراض أنّ المتغير العشوائي X يُمثّل عدد أجهزة الحاسوب

1 أنشئ جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X .
أقسم كل تكرار على مجموع التكرارات، ثم أنشئ جدولاً للتوزيع الاحتمالي:

x	0	1	2	3
$P(x)$	0.17	0.42	0.31	0.1

2 أجد التوقُّع للمتغير العشوائي X .

$$E(x) = \sum x.P(x) \quad \text{صيغة التوقُّع للمتغير العشوائي } X$$

$$= 0 \times 0.17 + 1 \times 0.42 + 2 \times 0.31 + 3 \times 0.1 \quad \text{مجاميع حاصل الضرب}$$

$$= 1.34 \quad \text{بالتبسيط}$$

أتحقق من فهمي

يُبيّن الجدول الآتي نتائج مسحٍ شمل 200 أسرة لمعرفة عدد حيواناتهم الأليفة:

عدد الحيوانات (x)	0	1	2	3
عدد الأسر (f)	44	96	52	8

بافتراض أنّ المتغير العشوائي X يُمثّل عدد الحيوانات الأليفة، أجد $E(x)$.

أذكّر

ينتج الاحتمال النسبي عن قسمة كل تكرار على المجموع الكلي للتكرارات



عدد القطط التي تعيش في منازل بعض الأردنيين يتراوح بين 4 آلاف قطعة و5 آلاف قطعة من مختلف الأنواع.

إذا عُلِّمت قيمة التوقع $E(x)$ للمتغير العشوائي X ، فإنه يُمكن تحديد قيم احتمالات مجهولة في التوزيع الاحتمالي؛ بتكوين نظام من المعادلات الخطية، ثم حله بطريقة الحذف والتعويض.

مثال 2

إذا كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X كما في الجدول الآتي:

x	1	2	3	4	5
$P(x)$	a	0.3	b	0.2	0.15

وكان $E(x) = 3$ ، فأجد قيمة كلٍّ من:

$$P(x = 1), P(x = 3).$$

$$E(x) = \sum x.P(x)$$

صيغة التوقع للمتغير العشوائي X

$$1 \times a + 2 \times 0.3 + 3 \times b + 4 \times 0.2 + 5 \times 0.15 = 3$$

لأن التوقع هو 3

$$a + 3b = 0.85 \dots\dots [1]$$

بالتبسيط

$$a + 0.3 + b + 0.2 + 0.15 = 1$$

مجموع الاحتمالات هو 1

$$a + b = 0.35 \dots\dots [2]$$

بالتبسيط

$$2b = 0.50$$

بطرح المعادلة [2] من المعادلة [1]

$$b = 0.25$$

بالقسمة على 2

$$a + 0.25 = 0.35$$

بالتعويض في المعادلة [2]

$$a = 0.10$$

بطرح 0.25 من طرفي المعادلة

أي إنَّ:

$$P(x = 1) = 0.10, P(x = 3) = 0.25$$

أتحقق من فهمي

إذا كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X كما في الجدول الآتي:

x	0	1	2	3	4
$P(x)$	0.1	a	b	0.2	0.3

وكان التوقع $E(x) = 2.5$ أجد قيمة كل من $P(x = 1)$, $P(x = 2)$.

التباين $Variance$ للمتغير العشوائي X هو مقياس لثبُت قيم المتغير عن وسطها الحسابي $E(x)$ ، ويُمكن إيجاده باستعمال الصيغة الآتية:

$$\sigma^2 = (\sum x^2 \cdot P(x)) - (E(x))^2$$

أذكّر

الانحراف المعياري σ هو الجذر التربيعي للتباين.

مفهوم أساسي

بالكلمات: التباين للمتغير العشوائي X في توزيع احتمالي لتجربة عشوائية يساوي مجموع حواصل ضرب مربعات قيم المتغير X في احتمال كل قيمة مطروحًا منه مربع التوقع للمتغير X .

بالرموز:

$$\sigma^2 = (\sum x^2 \cdot P(x)) - (E(x))^2$$

مثال 3

التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X كما في الجدول الآتي:

x	1	2	3	4
$P(x)$	0.2	0.35	0.3	0.15

1 أجد التوقع $E(x)$.

$$E(x) = \sum x.P(x)$$

$$= 1 \times 0.2 + 2 \times 0.35 + 3 \times 0.3 + 4 \times 0.15$$

$$= 2.4$$

صيغة التوقع للمتغير العشوائي X

بكتابة مجاميع حاصل الضرب

بالتبسيط

2 أجد التباين σ^2 .

$$\sigma^2 = (\sum x^2.P(x)) - (E(x))^2$$

$$= 1^2 \times 0.2 + 2^2 \times 0.35 + 3^2 \times 0.3 + 4^2 \times 0.15 - (2.4)^2$$

$$= 0.94$$

صيغة التباين للمتغير العشوائي X

بالتعويض

بالتبسيط

أتحقق من فهمي

إذا كان للمتغير العشوائي X التوزيع الاحتمالي الآتي:

x	0	1	2	3
$P(x)$	0.1	0.4	0.35	0.15

فأجد التوقع $E(x)$ ، والتباين σ^2 .

أدرب وأحل المسائل



1 يُبين الجدول الآتي نتائج مسحٍ شمل 50 طالبًا من إحدى المدارس لمعرفة عدد ساعات الدراسة في يوم الإجازة:

عدد الساعات (x)	1	2	3	4	5
عدد الطلبة (f)	4	12	20	8	6

بافتراض أن المتغير العشوائي X يُمثّل عدد الساعات، أجد $E(x)$.

2 إذا كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X كما في الجدول الآتي:

x	-2	-1	0	1	2	3
$P(x)$	0.13	0.27	a	b	0.22	a

وكان التوقع $E(x) = 0.39$ ، فأجد قيمة كل من:

$$P(x = 0), P(x = 1).$$

3 إذا كان للمتغير العشوائي X التوزيع الاحتمالي الآتي:

x	2	3	4	5
$P(x)$	0.25	0.4	0.25	0.1

فأجد التوقع $E(x)$ ، والتباين σ^2 .

4 أجد التباين للتوزيع الاحتمالي الآتي:

x	2	4	6	8
$P(x)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

يتكوّن مجلس الطلبة في إحدى الجامعات من 8 طلاب و12 طالبة، وقد اختاروا عشوائياً لجنة تضم اثنين منهم للاجتماع مع ممثلين عن رئاسة الجامعة. إذا دلّ المتغير العشوائي X على عدد الطالبات في اللجنة المختارة، فأجيب عن الأسئلة الآتية:

5 أنشئ جدول التوزيع الاحتمالي.

6 أجد التوقع لعدد الطالبات في اللجنة المختارة.

7 أجد التباين للتوزيع الاحتمالي.



أراد متعامل في سوق البورصة الاستثمار في أسهم الشركتين A ، B ، وقد علم أن استثماره في أسهم الشركة A سيكون عائده المالي 10% ، أو 25% ، أو 5% من قيمة السهم، واحتمالاتها: 0.15 ، 0.25 ، 0.6 على الترتيب. أما استثماره في أسهم الشركة B ، فسيكون عائده المالي 10% ، أو 50% ، أو 30% من قيمة السهم، واحتمالاتها: 0.2 ، 0.25 ، 0.55 على الترتيب.

بنمذجة العائد المالي بوصفه متغيراً عشوائياً:

8 أجد قيمة كل من: $E(A)$ ، $E(B)$.

9 أجد قيمة التباين في العائد المالي للشركتين: A ، B .

10 أبين كيف ستؤثر قيم التوقع والتباين في قرار المتعامل لتحديد أي الأسهم سيستثمر فيها.

11 أحل المسألة الواردة في بند (مسألة اليوم).

مهارات التفكير العليا

12 تحدّد: ما قيمة σ^2 للتوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X في الجدول الآتي إذا كان $E(x) = 5.95$ ؟

x	2	5	a	8
$P(x)$	0.1	b	0.2	0.35

13 تحدّد: إذا كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X مُعرّفاً على النحو الآتي:

$$\{(1, kx), (2, \frac{1}{8}), (3, \frac{1}{8}), (4, kx), (5, \frac{1}{8}), (6, \frac{1}{8})\}$$

فما قيمة التوقع للمتغير X ؟

14 أكتب: كيف تُؤثر قيمة التوقع للمتغير العشوائي في اتخاذ القرارات في حياتنا اليومية؟

إذا كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X كما في الجدول الآتي

x	1	2	3	5
$P(x)$	$2k$	k	k	k

5 قيمة k هي:

- a) 0.1 b) 0.2
c) 0.3 d) 0.4

6 قيمة $E(x)$ هي:

- a) 1.2 b) 1.4
c) 2.4 d) 1

7 قيمة σ^2 هي:

- a) 2.24 b) 2.4
c) 8 d) 5.76

8 قيمة $P(x < 3)$ هي:

- a) $\frac{1}{5}$ b) $\frac{2}{5}$
c) $\frac{3}{5}$ d) $\frac{4}{5}$

أضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة في كلِّ ممَّا يأتي:

1 رُتبت الأحرف: ر، ط، م عشوائياً في صف واحد. احتمال الحصول على كلمة (مطر) هو:

- a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{6}$
c) $\frac{1}{9}$ d) $\frac{1}{2}$

2 رُتبت الأحرف: R, E, D, E عشوائياً في صف واحد. احتمال الحصول على كلمة (DEER) هو:

- a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{6}$
c) $\frac{1}{12}$ d) $\frac{1}{24}$

3 احتمال اختيار 2 من الرجال و3 من النساء عشوائياً من بين 5 موظفين و5 موظفات في إحدى الشركات لحضور مؤتمر علمي هو:

- a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{10}$
c) $\frac{50}{63}$ d) $\frac{25}{63}$

4 سحب علي 4 كرات معاً عشوائياً من صندوق يحوي 3 كرات حمراء، و3 كرات زرقاء، و3 كرات صفراء، و3 كرات خضراء، وكانت جميع الكرات التي في الصندوق متماثلة. احتمال أن تكون 2 من الكرات المسحوبة من لون واحد، وبقية الكرات من لون آخر هو:

- a) $\frac{12}{55}$ b) $\frac{9}{55}$
c) $\frac{4}{55}$ d) $\frac{8}{55}$

تدريب على الاختبارات الدولية

يحتوي كيس على 8 كرات زجاجية حمراء، و4 كرات زجاجية خضراء، جميعها مُتماثلة، إذا سُحبت من الكيس 6 كرات عشوائياً الواحدة تلو الأخرى من دون إرجاع، فما احتمال:

13 أن تكون 4 من الكرات الزجاجية المسحوبة حمراء؟

14 أن تكون 4 على الأقل من الكرات الزجاجية المسحوبة حمراء؟

X متغير عشوائي، وله التوزيع الاحتمالي الآتي:

x	-2	3
$P(x)$	a	$1 - a$

15 أثبت أن $\sigma^2 = 25a(1-a)$.

16 إذا كان $E(x) = 2$ ، فما قيمة σ ؟

9 يُبين الجدول الآتي نتائج مسحٍ شمل 60 يوماً متتالياً، وقد دَوَّن قيس في كلٍّ منها عدد رسائل البريد الإلكتروني التي وصلته:

عدد الرسائل (x)	0	1	2	3	4
عدد الأيام (f)	8	12	10	18	12

بافتراض أن المتغير العشوائي X يُمثّل عدد الرسائل، أجد $E(x)$.

صندوق فيه 3 كرات زرقاء، و6 كرات خضراء، جميعها مُتماثلة، سُحبت منه 3 كرات على التوالي من دون إرجاع، وقد دلّ المتغير العشوائي X على عدد الكرات الزرقاء المسحوبة:

10 أنشئ جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X .

11 أجد احتمال سحب كرة زرقاء واحدة على الأقل.

12 يُبين الجدول الآتي التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X ، حيث $E(x) = \frac{5}{12}$. أجد قيمة كلٍّ من a, b .

x	-1	0	1	2
$P(x)$	a	$4b$	$2b$	a