المملكة الأردنية الهاشمية
وزارة التربية والتعليم
إدارة المناهج والكتب المدرسية

الرياضيات

الجزء الثاني

الصف الثامن ٨

قـرّرت وزارة التربيـة والتعليم تدريس هذا الكتاب في مدارس المملكـة الأردنية الهاشمية جميعها، بناءً على قرار مجلس التربية والتعليم رقم (٢٠١٦/٥٨)، تاريخ ٢٠١٦/٣/٦م ، بدءًا من العام الدراسي ٢٠١٦م /٢٠١٧م.

عمّان – الأردن / ص.ب: ١٩٣٠

رقم الإيداع لدى دائرة المكتبة الوطنية

(٢٠١٦/٣/١٢٠٠)

ISBN: 978 - 9957 - 84 -686- 2

أشرف على تأليف هذا الكتاب كل من:

أ.د. حسن زارع هديب (رئيسًا)

أ.د. أحمد عبد الله رحيل

أ. د. عبد الله محمد ربابعة

أ. د. ربى محمد مقدادي

د. معاذ محمود الشياب

وقام بتأليفه كل من:

نوار نور الدين الفتيحة

د. عمر سليمان العلي

نفين أحمد جوهر

رؤى سعود الخلاوي

التحرير العلمي: د. لانا كمال عرفة، نفين أحمد جوهر

التصميم : عمر أحمد أبو عليان

الرسم : فايزة فايز حداد

التحرير اللغوي: ميساء عمر الساريسي

المصور : أديب عطوان

التحرير الفني : نداء فؤاد أبو شنب

الإنتاج : علي محمد العويدات

دقق الطباعة : نفين أحمد جوهر

راجعها : د. لانا كمال عرفة

الطبعة الأولى (التجريبية)

١٤٣٧هـ/٢٠١٦م

قائمةُ المحتوياتِ

الموضوعُ	الصفحةُ

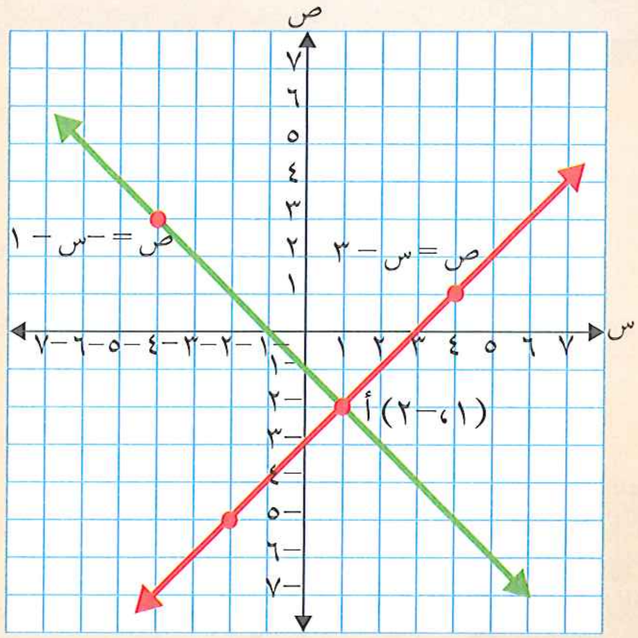
٥ الوحـــدةُ الخامسةُ

المعادلاتُ الخطيةُ بمتغيرينِ

المعادلاتُ موضوعٌ رياضيٌّ لهُ تطبيقاتٌ واسعةٌ في شتى مجالاتِ الحياةِ؛ فلا يكادُ يخلو مجالٌ منها.

وقدْ صنّفَ العالمُ لانُ ستيوارتُ Lan Stewart سبعَ عشرةَ معادلةً على أنّها المعادلاتُ التي غيَّرتِ العالمَ ، منْ بينِها مبرهنةُ فيثاغورسَ التي ستتعرفُ إليها في الوحدةِ السابعةِ.

للمعادلاتِ أنواعٌ عدةٌ، منها: الخطيةُ وَالتربيعيةُ وَالتكعيبيةُ، وقدْ تحتوي على متغيرٍ أوْ أكثرَ. وستتعرفُ في هذهِ الوحدةِ المعادلاتِ الخطيةَ بمتغيرينِ.



يتوقعُ منَ الطالبِ في نهايةِ هذهِ الوحدةِ أن يكونَ قادرًا على:

- تمييزِ أنظمةِ المعادلاتِ الخطيةِ بمتغيرينِ وتكوينِها.
- حلِّ نظامٍ مكونٍ من معادلتينِ خطيّتينِ بمتغيرينِ بطرائقَ مختلفةٍ؛ (بيانيًا، أو بالتعويضِ، أو بالحذفِ).
- توظيفِ حلِّ أنظمةِ المعادلاتِ الخطيةِ بمتغيرينِ في حلِّ مشكلاتٍ حياتيةٍ.

الدرس الأول

المعادلةُ الخطيةُ بمتغيرينِ

النتاجاتُ

- تتعرفُ المعادلةَ الخطيةَ بمتغيرينِ.
- تكوّنُ معادلةً خطيةً بمتغيرينِ.

تملكُ سعادُ محلًّا تجاريًّا، إذا كان مجموعُ أرباحِها في أولِ عامينِ ٨٩٧٦ دينارًا، فاكتبْ تعبيرًا جبريًّا يوضحُ مجموعَ أرباحِ سُعادَ في العامينِ، إذا كانَ مقدارُ ربحِها في العامِ الأولِ س، وفي العامِ الثاني ص.

يُسمى التعبيرُ الجبريُّ الذي توصلتَ إليهِ في المسألةِ السابقةِ **معادلةً خطيةً بمتغيرينِ**.

الصورةُ العامةُ للمعادلةِ الخطيةِ بمتغيرينِ س، ص هيَ:
أ س + ب ص + جـ = ٠ حيثُ أ، ب، جـ ∈ ح، أ ≠ صفرًا، ب ≠ صفرًا
أ معاملُ س، ب معاملُ ص، جـ الحدُّ المطلقُ أوِ الثابتُ.

مثالٌ (١)

اكتبْ كلًّا منَ المعادلاتِ الخطيةِ بمتغيرينِ في ما يأتي على صورتِها العامةِ:

١) س − ٤ ص = ٩

٢) −٣ل = ٢ ع − ٦ل + ٢١

٣) ٨م + $\sqrt{١٦}$ن = ٠

الحلُّ

١) س − ٤ص − ٩ = ٠ بطرحِ ٩ من طرفَيِ المعادلةِ (−٩)

٢) ٢ع − ٣ل + ٢١ = ٠ بإضافةِ ٣ ل إلى طرفي المعادلةِ وتجميعِ الحدودِ المتشابهةِ

٣) ٨م + $\sqrt{\text{١١}}$ن + ٠ = ٠ الحدُّ الثابتُ جـ = صفرًا

تدريبٌ (١)

اكتبْ كلًّا من المعادلاتِ الخطيةِ بمتغيرينِ في ما يأتي:

١) ٨ = ٣ص − ٢س

٢) ح = ط

٣) ٥ك = ٧,١ + ل

٤) $\frac{\text{٤م + ٣ن}}{\text{−٢}}$ = ١٠

فكِّرْ وناقشْ

طلبتِ المعلمةُ منَ الطالباتِ كتابةَ المعادلةِ −٢(هـ − و −٧) = ١٤ على الصورةِ العامةِ، فأجابتْ كلٌّ منْ سلمى وريمَ ورزانَ ولمى الإجاباتِ الآتيةَ على الترتيبِ:

−٢ هـ − ٢ و =٠

٢ هـ + ٢ و =٠

− هـ + و =٠

هـ − و =٠

أيُّهنَ أصابتْ؟ بررْ إجابتَكَ.

مثالٌ (٢)

أيُّ المعادلاتِ الآتيةِ خطيةٌ بمتغيرينِ، معَ ذكرِ السببِ:

١) ١٣س − ٢٥ = ص^{٢}

٢) ٣ع + ١ = ع + ٥

٣) ٢١ = ١٠م + ١١ن

٤) هـ − و = ٣٦هـ و + ٨

الحلُّ

المعادلةُ في الفرعِ (٣) معادلةٌ خطيةٌ بمتغيرينِ؛ لأنهُ يمكنُ كتابتُها على الصورةِ العامةِ أ س + ب ص + جـ = ٠، أما بقيةُ المعادلاتِ فهيَ ليستْ معادلاتٍ خطيةً بمتغيرينِ؛ لأنهُ لا يمكنُ كتابةُ أيٍّ منها على الصورةِ العامةِ للمعادلةِ الخطيةِ بمتغيرينِ؛ فالمعادلةُ في الفرعِ (١) أكبرُ قوةٍ فيها ٢، والمعادلةُ في الفرعِ (٢) بمتغيرٍ واحدٍ، والمعادلةُ في الفرعِ (٤) ليستْ خطيةً؛ لوجودِ حاصلِ ضربِ متغيرينِ.

تدريبٌ ٢

أيُّ المعادلاتِ الآتيةِ خطيةٌ بمتغيرينِ مع ذكرِ السببِ:

١) ٧ص + س = ٥٣

٢) − ٥ ع = ١١ل − ٥ ي

٣) ٤٤ − ك = ل^{2}

٤) ٢,٩١س = ٢,٩١ص

٥) ٤جـ + $\sqrt[3]{28}$ د = ١٧

٦) ع (١ − ل) = ٠

فكِّرْ وناقشْ

- لماذا يشترَطُ في الصورةِ العامةِ للمعادلةِ الخطيةِ بمتغيرينِ ألَّا يكونَ معاملُ س فيها صفرًا، كذلكَ ألَّا يكونَ معاملُ ص فيها صفرًا؟
- بالعودةِ إلى المسألةِ في مقدمةِ الدرسِ؛ أجبْ عن كلٍّ مما يأتي:

أ) هلْ يمثلُ المقدارُ الجبريُّ الذي حصلتَ عليهِ معادلةً خطيةً بمتغيرينِ؟

ب) اقترحْ زوجًا مرتبًا يمثل ربحَ سعادَ في كلٍّ من العامينِ. مبررًا إجابتَكَ.

جـ) ما عددُ الأزواجِ المرتبةِ التي تمثلُ حلًّا للمعادلةِ؟ قارنْ إجابتَكَ مع زملائِكَ.

يُسمى الزوجُ المرتبُ منَ الأعدادِ الحقيقيَّةِ الذي يحققُ المعادلةَ الخطيةَ بمتغيرينِ **حلًّا للمعادلةِ**، وَمجموعةُ حلِّ المعادلةِ الخطيةِ بمتغيرينِ هيَ مجموعةٌ غيرُ منتهيةٍ منَ الأزواجِ المرتبةِ.

مثالٌ (٣)

أيُّ الزوجينِ (−١، −٢) ، (٥، −١) حلٌّ للمعادلةِ س − ٤ص = ٩؟

الحلُّ

س − ٤ص = ٩	تعويضُ (−١، −٢) في المعادلةِ
−١ − ٤(−٢) ؟= ٩	الإشارةُ (؟) تعني: هلْ يتساوى الطرفانِ بعدَ التعويضِ
٧ ≠ ٩	(−١، −٢) لا يحققُ المعادلةَ

إذنْ (−١، −٢) ليسَ حلًّا للمعادلةِ س − ٤ص = ٩

س − ٤ص = ٩	
٥ − ٤(−١) ؟= ٩	تعويضُ (٥ ، −١) في المعادلةِ
٩ = ٩	(٥ ، −١) حقَّقَ المعادلةَ

إذنْ (٥ ، −١) حلٌّ للمعادلةِ.

اقترحْ حلولًا أخرى للمعادلةِ س − ٤ص = ٩ مبررًا إجابتَكَ.

تدريبٌ ٣

١) أيُّ الأزواجِ الآتيةِ حلٌّ للمعادلةِ −٢س − ص = ٠، مبررًا إجابتَكَ:

(−١، ٢) ، (٢، ٤) ، (١١، −٢٢).

٢) تتكونُ إحدى المؤسساتِ منْ ٥٨ موظفةً وموظفًا. اكتبِ المعادلةَ التي توضحُ عددَ الموظفاتِ والموظفينَ في المؤسسةِ، ثمَّ قدِّمْ حلَّينِ للمعادلةِ، مبررًا إجابتَكَ.

مثالٌ (٤)

اكتبِ المعادلةَ: ٦س − ٢ص = ٨ بحيث يكونُ ص أحدَ الطرفينِ.

الحلُّ

٦س − ٢ص = ٨

−٢ص = ٨ − ٦س　　　طرحُ ٦س من طرفي المعادلةِ

ص = −٤ + ٣س　　　قسمةُ طرفي المعادلةِ −٢

تدريبٌ ٤

اكتبِ المعادلاتِ الآتيةَ بحيثُ يكونُ ص أحدَ طرفيِ المعادلةِ:

١) ١٥ س = −٧ + ص

٢) $\frac{٢}{٥}$ س + $\frac{١}{٥}$ ص = ٠

٣) ٣ص = ١٠ − ٢س + ٢ص

تمثلُ المعادلةُ الخطيةُ بمتغيرينِ أ س + ب ص + جـ = ٠ قانونًا جبريًّا تَعتمدُ قِيَمُ أحدِ المتغيرينِ فيهِ على الآخرِ، وعندَ وضعِ ص في المعادلةِ بدلالةِ س نُسمي ص **موضوعًا للقانونِ**، ونُسمي عمليةَ كتابةِ أحدِ المتغيرينِ بدلالةِ الآخرِ **تغييرَ موضوعِ القانونِ**.

تدريبٌ ٥

١) أعدْ حلَّ تدريبِ (٤) بجعلِ المتغيرِ س موضوعًا للقانونِ.

٢) كوّنْ معادلةً خطيةً بمتغيرينِ، وأعِدْ صياغتَها بجعلِ س موضوعًا للقانونِ، ثمَّ بجعلِ ص موضوعًا للقانونِ.

فكِّرْ وناقشْ

ناقشِ العبارةَ الآتيةَ مدعِّمًا إجابتَكَ بأمثلةٍ، إن لزمَ الأمرُ:

عندَ تغييرِ موضوعِ القانونِ في معادلةٍ منْ س إلى ص مثلًا أوِ العكسِ، فإنَّ مجموعةَ حلِّ هذهِ المعادلةِ تتغيرُ.

تمارينُ ومسائلُ

١) أيُّ المعادلاتِ الآتيةِ خطيةٌ بمتغيرينِ في ما يأتي، مبررًا إجابتَكَ:

أ) $١٨ + \sqrt{ص} = ٩س$ ب) $ع(٢ - ع) = ٤ل - ع^٢$

جـ) $-ي = \sqrt{٥}\ ط$ د) $٣ن + ١٧م = -م ن$

هـ) $س = ٢٨$ و) $\frac{٣}{١١}ك = \frac{٣}{١١}ل$

٢) أعِدْ صياغةَ المعادلةِ $-٤ل + ٩ = ل + ع$؛ بجعلِ ل موضوعًا للقانونِ، ثمَّ بجعلِ ع موضوعًا للقانونِ .

٣) بيِّنْ إذا كانَ الزوجُ المرتبُ إزاءَ كلِّ معادلةٍ في ما يأتي حلًّا لها:

أ) $٢س - ص = ٨$ ، $(١، -٦)$

ب) $٣س + ٢ص = -١٢$ ، $(٠، ٤)$

٤) عددانِ طبيعيانِ، خمسةُ أمثالِ الأولِ مطروحًا من الثاني يساوي ١٠، اكتبْ معادلةً خطيةً بمتغيرينِ توضحُ العلاقةَ بَيْنَ هذينِ العددينِ، ثمَّ اكتبْ حلينِ لها مبررًا إجابتَكَ.

٥) اكتشفِ الخطأَ:

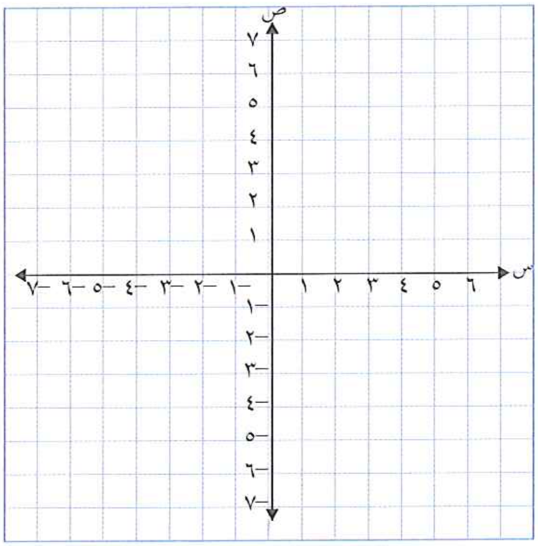
قالَ عادلٌ إنَّ: المعادلةَ $س^٢ + ص^٢ = ٤$، هيَ معادلةٌ خطيةٌ بمتغيرينِ، لأننا إذا أخذْنا الجذرَ التربيعيَّ لكلِّ حدٍّ من حدودِها، فإنَّ الناتجَ $س + ص = ٢$، ما الخطأُ الذي وقعَ بهِ عادلٌ؟

الدرسُ الثاني التمثيلُ البيانيُّ لمعادلةٍ خطيّةٍ بمتغيرينِ

النتاجاتُ

- تُمثّلُ المعادلةَ الخطيةَ بمتغيرينِ بيانيًّا.

نشاطٌ



١) تحدثْ معَ زميلِكَ عنْ خطواتِ تمثيلِ المعادلةِ:

ص = س + ٤ بيانيًّا.

٢) طبِّقِ الخطواتِ التي توصلْتَ لها مع زميلِكَ لتمثيلِ المعادلةِ.

مثالٌ (١)

أجبْ عنْ كلٍّ مما يأتي:

١) مثِّلِ المعادلةَ ٣س – ص = ١ بيانيًّا.

٢) حدِّدْ مجموعةَ حلِّ المعادلةِ.

٣) هلْ تنتمي النقاطُ (١، ٢) ، (–١١، ٣٤) إلى مجموعةِ الحلِّ؟

الحلُّ

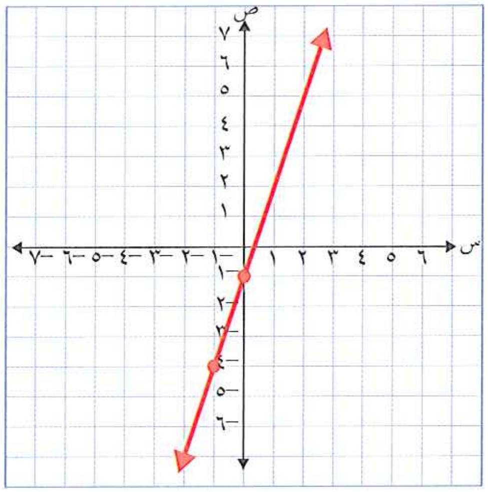
١) لتمثيلِ المعادلةِ بيانيًّا، اتبعِ الخطواتِ الآتيةَ:

أ) اجعلْ ص موضوعَ القانونِ في المعادلةِ: ص = ٣س – ١

ب) اخترْ قِيَمتينِ للمتغيرِ س، ثمَّ احسبْ قيمتيْ ص المُناظِرتينِ لها، واكتبِ الزوجينِ المرتبينِ الناتجيْنِ.

س	ص = ٣س − ١	(س ، ص)
−١	ص = ٣(−١) − ١ = −٤	(−١ ، −٤)
٠	ص = ٣(٠) − ١ = −١	(٠ ، −١)

جـ) عيّنِ الأزواجَ المرتبةَ في المستوى البيانيِّ، ثمَّ صلْ بينَها بمستقيمٍ .



٢) مجموعةُ حلِّ المعادلةِ ٣س − ص =١ هيَ مجموعةُ جميعِ النقاطِ الواقعةِ على المستقيمِ الممثلِ أعلاهُ ، وهيَ مجموعةٌ غيرُ منتهيةٍ.

٣) نعوّضُ النقطةَ (١ ، ٢) في معادلةِ المستقيمِ: ٣س − ص = ١

٣ × ١ − ٢ ≟ ١   تعويضُ قيمةِ س = ١، وقيمةِ ص = ٢

٣ − ٢ = ١

١ = ١

إذنِ النقطةُ (١ ، ٢) تقعُ على المستقيمِ الذي معادلتُه ٣س − ص = ١

نعوّضُ النقطةَ (−١١ ، ٣٤) في معادلةِ المستقيمِ

ص = ٣س − ١

٣٤ ≟ ٣(−١١) − ١   تعويضُ قيمةِ س = −١١، وقيمةِ ص = ٣٤

٣٤ ≠ −٣٤   (−١١، ٣٤) لا تحققُ المعادلةَ

إذنِ النقطةُ (−١١، ٣٤) لا تقعُ على المستقيمِ الذي معادلتُهُ ٣س − ص = ١، وبالتالي لا تنتمي إلى مجموعةِ الحلِّ.

مجموعةُ حلِّ المعادلةِ الخطيةِ بمتغيرين:

أ س + ب ص + جـ = صفرًا حيثُ أ، ب، جـ ∈ ح، أ ≠ ٠ ، ب ≠ ٠؛ هي مجموعةٌ غيرُ منتهيةٍ منَ الأزواجِ المرتبةِ على الصورةِ (س،ص)، وتُمثَّلُ بيانيًا بمستقيمٍ كلُّ نقطةٍ عليه تحققُ المعادلةَ الخطيةَ.

تدريبٌ ١

مَثِّلْ مجموعةَ حلِّ المعادلةِ ٣ + ٦س + ٣ص = ٠ بيانيًا، ثمَّ حدِّدْ أيُّ النقاطِ الآتيةِ تنتمي إلى مجموعةِ حلِّها؟ مبررًا إجابتَكَ:

(٠،٠)، ($-\frac{١}{٢}$، ١)، (١٠، −٢١).

تدريبٌ ٢

يبيعُ أحمدُ بناطيلَ وقمصانَ، إذا كانَ يربحُ في البنطالِ الواحدِ ثلاثةَ دنانيرَ، وفي القميصِ الواحدِ دينارينِ، ويخططُ ليكونَ مجموعُ أرباحِهِ اليوميةِ ٣٠ دينارًا. اكتبِ المعادلةَ التي تبينُ العلاقةَ بينَ عددِ البناطيلِ وعددِ القمصانِ التي عليهِ بيعُها يوميًا ليحققَ هذا الربحَ، ومثّلْها بيانيًا.

بناءً على بيانِ المعادلةِ في المسألةِ السابقةِ، هلْ هناكَ حلولٌ مستثناةٌ. برِّرْ إجابتَكَ.

تمارينُ ومسائلُ

١) مثّلْ كلًّا منَ المعادلاتِ الآتيةِ بيانيًّا:

أ) ص $= \frac{١}{٣}$ س   ب) ص $= \frac{١}{٣}$س + ٣   جـ) ص $= \frac{١}{٣}$س − ٣

٢) أيُّ الأزواجِ المرتبةِ (٠، ٩) ، (٣ ، ٠) ، (−٧,٢ ، −٩,٣) ، (هـ ، $\frac{هـ}{٣}$)،
($\sqrt{٥}$ ، $\frac{\sqrt{٥}}{٣}$ −٣) ينتمي إلى مجموعةِ حلِّ المعادلةِ ص$= \frac{١}{٣}$ س − ٣؟

٣) مثّلِ المعادلةَ ٣ص − ١٢ = ٠ بيانيًّا، ثمَّ حددْ نقاطَ تقاطعِ المستقيمِ الناتجِ معَ كلٍّ من محورِ السيناتِ ومحورِ الصاداتِ.

٤) كوِّنْ معادلةً خطيةً بمتغيرينِ في كلِّ مما يأتي، ثمَّ مَثّلْها بيانيًّا:

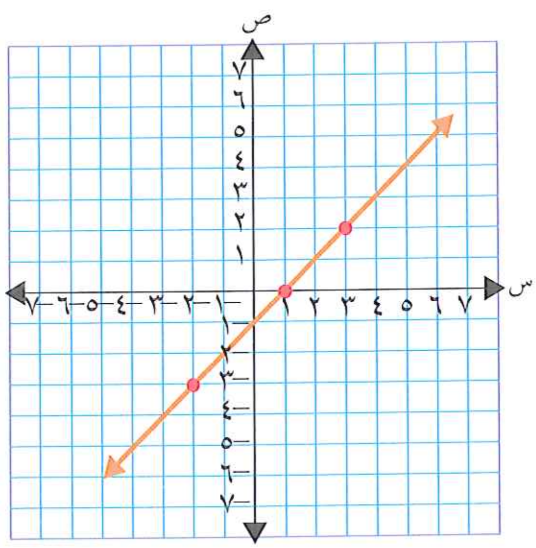
أ) درجةُ حرارةِ الجوِّ بالفهرنهايتِ ف تساوي تسعَ أخماسِ درجةِ الحرارةِ بالسلسيوسِ مضافًا إليها ٣٢.

ب) عددانِ طبيعيّانِ مجموعُهُما ١٧.

جـ) محيطُ مثلثٍ متطابقُ الضلعينِ يساوي ٢٠ سم.

د) محيطُ مستطيلٍ يساوي ٥٠سم.

٥) اكتبْ معادلةَ المستقيمِ الممثلِ جانبًا.



الدرسُ الثالثُ حلُّ نظامٍ مكوّنٍ من معادلتينِ خطيتينِ بمتغيرينِ بيانيًّا

النتاجاتُ

- تحلُّ نظامًا مكونًا من معادلتينِ خطيتينِ بمتغيرينِ بيانيًّا.

اتفقتْ ليلى ورؤى على وضعِ خطةٍ لممارسةِ القراءةِ بوصفِها عادةً يوميةً؛ حيثُ قررتْ ليلى قراءةَ ٦ صفحاتٍ في الأسبوعِ الأولِ، ثمَّ تزيدُ صفحةً في كلِّ أسبوعٍ عنِ الأسبوعِ السابقِ، بينَما قررتْ رؤى قراءةَ صفحتيْنِ في الأسبوعِ الأولِ، ثمَّ تزيدُ في كلِّ أسبوعٍ صفحتينِ. في أيِّ أسبوعٍ ستقرآنِ العددَ نفسَهُ منَ الصفحاتِ؟

لحلِّ المسألةِ السابقةِ، نتبعُ الخطواتِ الآتيةَ:

١) نفرضُ عددَ الصفحاتِ التي تمَّ قراءتُها ص، وعددُ الأسابيعِ س.

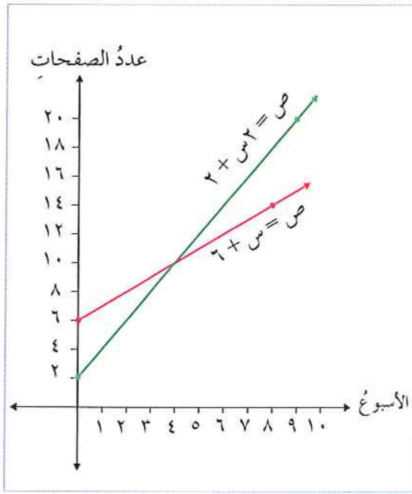
٢) نكتُبُ التعبيرَ الجبريَّ الذي يعبرُ عن عددِ الصفحاتِ التي قرأَتْها ليلى، وهوَ ص = س + ٦، والتعبيرَ الجبريَّ الذي يعبرُ عن عددِ الصفحاتِ التي قرأَتْها رؤى، وهو ص = ٢س + ٢.

لاحظْ أنهُ تكوّنَ لدينا المعادلتانِ الخطيتانِ:

ص = س + ٦

ص = ٢س + ٢

تُسمّى هاتانِ المعادلتانِ **نظامًا منْ معادلتينِ خطيتينِ.**



ولحلِّ هذا النظامِ بيانيًّا؛ نمثلُ كلَّ معادلةٍ على الرسمِ المجاورِ فينتجُ مستقيمانِ متقاطعانِ في النقطةِ (٤ ، ١٠).

إذن نجدُ أنَّهُ في الأسبوعِ الرابعِ ستقرأُ كلٌّ منهُما العددَ نفسَهُ من الصفحاتِ.

فكِّرْ وناقشْ

في مسألةِ بدايةِ الدرسِ:

- لماذا اكتفينا بالربعِ الأولِ منَ المستوى البيانيِّ لتمثيلِ المعادلتينِ؟
- لو استمرتِ الخطةُ أكثرَ من شهرينِ، هل يمكنُ أن يمرَّ أسبوعٌ آخرُ تقرآنِ فيهِ العددَ نفسَهُ منَ الصفحاتِ؟

تعريفٌ

يتكونُ **نظامُ المعادلاتِ الخطيةِ بمتغيرينِ** منْ معادلتينِ خطيتينِ على الصورةِ:

أ س + ب ص = جـ ، حيثُ أ، ب، جـ ∈ ح، أ ≠ ٠ ، ب ≠ ٠

د س + هـ ص = و ، حيثُ د، هـ، و ∈ ح، د ≠ ٠ ، هـ ≠ ٠؛

و**حلُّ نظامٍ منْ معادلتينِ خطيتينِ بيانيًّا** هوَ نقطـــةُ تقاطـــعِ المستقيمينِ الناتجينِ عنْ تمثيـلِ كـلٍّ منهُمـا بيانيًّا {(س$_1$، ص$_1$)}.

مثالٌ (١)

جدْ مجموعةَ حلِّ النظامِ الآتي بيانيًّا:

ص – س + ٣ = ٠

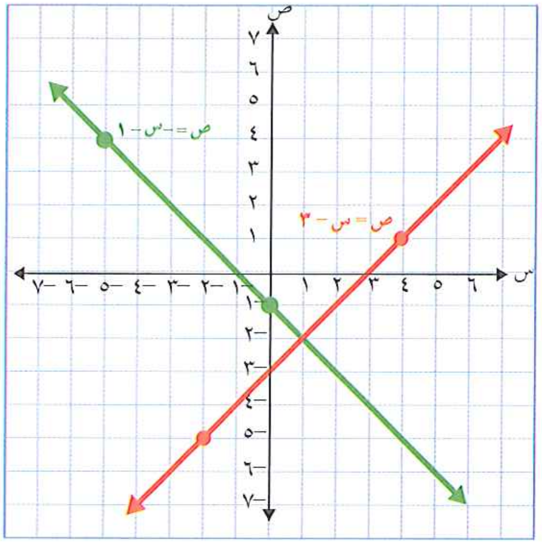
ص + س + ١ = ٠

الحلُّ

مثِّلْ كلًّا منَ المعادلتينِ على المستوى البيانيِّ نفسِهِ بلونٍ مختلفٍ.

ص − س + ٣ = ٠		
س	ص = س − ٣	(س ، ص)
−٢	ص = (−٢) − ٣ = −٥	(−٢، −٥)
٤	ص = (٤) − ٣ = ١	(٤، ١)

ص + س + ١ = ٠		
س	ص = − س − ١	(س ، ص)
−٥	ص = −(−٥) − ١ = ٤	(−٥، ٤)
٠	ص = (٠) − ١ = −١	(٠، −١)



لاحظْ: المستقيمانِ الممثلانِ للمعادلتينِ تقاطعا في النقطةِ أ(١ ،−٢) ؛ لذا، فإنَّ مجموعةَ حلِّ هذا النظامِ هيَ: {(١، −٢)}.

فكِّرْ وناقشْ

- في نظامٍ مكوّنٍ منْ معادلتينِ خطيتينِ بمتغيرينِ، لماذا تعدُّ مجموعةُ حَلّهِ حلًّا لكلتا المعادلتينِ؟
- كيفَ يمكنُكَ التحققُ منْ أنَّ الزوجَ المرتبَ الناتجَ منْ تقاطعِ المستقيمينِ الممثلينِ لمجموعةِ حلِّ معادلتينِ في نظامٍ ما هوَ حلٌّ لهذا النظامِ؟

تدريبٌ ١

١) بيِّنْ إذا كانتْ {(٢، −٢)} هيَ مجموعةَ حلِّ النظامِ الآتي:

٣س + ص = ٤

س − ٣ص = −٤

٢) جدْ مجموعةَ حلِّ النظامِ الآتي بيانيًّا، ثمَّ تحققْ منْ صحةِ حلِّكَ.

س + ص = ٠

ص = − $\frac{١}{٢}$ س + ١

مثالٌ (٢)

جدْ مجموعة حلِّ النظامِ الآتي بيانيًّا:

١ = ٢,٥س + ص

−٣ = ٢,٥ س + ص

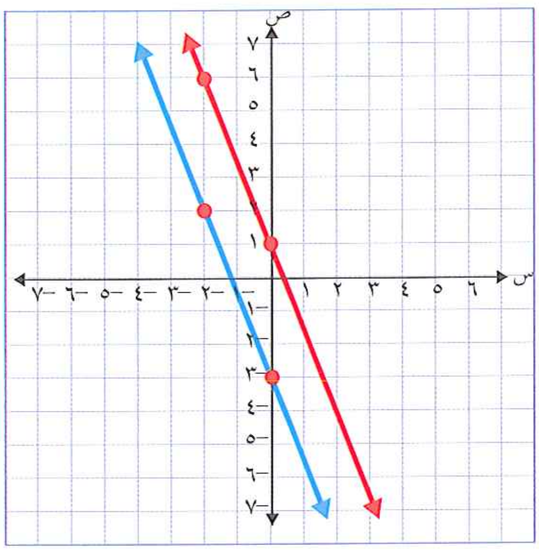
الحلُّ

مثّلِ المعادلتينِ بيانيًّا على الرسمِ نفسِهِ ، ثمَّ جدْ نقطةَ تقاطعِ المستقيمينِ الناتجينِ.

اخترْ قِيَمًا للمتغيرِ س؛ بحيثُ يسهلُ عليكَ حسابُ الأزواجِ المرتبةِ.

١ = ٢,٥س + ص		
س	ص = −٢,٥س + ١	(س ، ص)
−٢	ص = −٢,٥ (−٢) + ١ = ٦	(−٢ ، ٦)
٠	ص = −٢,٥ (٠) + ١ = ١	(٠ ، ١)

−٣ = ٢,٥س + ص		
س	ص = −٢,٥س − ٣	(س ، ص)
−٢	ص = −٢,٥ (−٢) − ٣ = ٢	(−٢ ، ٢)
٠	ص = −٢,٥ (٠) − ٣ = −٣	(٠ ، −٣)



المستقيمانِ الناتجانِ متوازيانِ؛ إذن، لا يوجدُ حلٌّ لهذا النظامِ منَ المعادلاتِ، أيْ أنَّ مجموعةَ الحلِّ هيَ ∅ أو { }.

تدريبٌ ٢

جدْ مجموعةَ حلِّ كلٍّ منَ النظامينِ الآتيينِ بيانيًّا:

١) ٢س = ٥ + ص ،

٢س = ٧ + ص

٢) ص = ٣ س + ٦ ،

٦س − ٢ص + ١٢ = ٠

إذا انطبقَ المستقيمانِ الناتجانِ عنْ تمثيلِ نظامٍ مكوّنٍ من معادلتين خطيتينِ بمتغيرينِ، فإنَّ مجموعةَ حلِّ النظامِ هيَ مجموعةُ لانهائيةٌ منَ النقاطِ، وهيَ مجموعةُ جميعِ النقاطِ الواقعةِ على أحدِ المستقيمينِ.

هلْ يمكنُ التنبؤُ بعددِ حلولِ نظامِ معادلتينِ خطيتينِ بمتغيرينِ منْ دونِ حلِّهِ؟

للإجابةِ عنْ هذا السؤالِ؛ نفّذِ النشاطَ الآتي:

نشاطٌ

أكمل الجدول الآتي:

المعادلتان ص = أس + ب	قيَمُ أ ، ب	العلاقةُ بينَ قيمتي أ، وقيمَتي ب في المعادلتين	عددَ الحلولِ الناتجةِ
ص = س − ٥ ص = −س + ٤	أ = ١ ، ب = −٥ أ = −١ ، ب = ٤	قيمتا أ مختلفتان قيمتا ب مختلفتان	حلٌّ واحدٌ
ص = ٢س + ٣ ص = $-\frac{١}{٢}$س + ٣			
ص = ٣س − ٢ ص = ٣س + ٨			
ص = س − ٥ ص = س − ٧			
ص = ٣س + ٦ ص = $\frac{٦س + ١٢}{٢}$			

ماذا تلاحظ؟

لا بُدَّ أنكَ لاحظتَ أنّهُ في نظامِ المعادلاتِ الخطيّةِ بمتغيرينِ على الصورةِ:

ص = أ س + ب

ص = م س + جـ

١) يكونُ للنظامِ حلٌّ وحيدٌ إذا كانتْ أ ≠ م.

٢) لا يوجدُ حلٌّ للنظامِ إذا كانتْ أ = م.

٣) يوجدُ عددٌ لا نهائيٌّ من الحلولِ إذا كانتْ أ = م وَ ب = جـ.

تمارينُ ومسائلُ

١) تحققْ إذا كانتِ النقطةُ المعطاةُ لكلِّ نظامٍ مما يأتي حلًّا لهُ:

أ) ص = −٢س − ١

٢س = − ص + ٣ النقطةُ (٠، ٥)

ب) س = ٣ص + ٢

٦ص − ٢س = −٤ النقطةُ (−١، −١)

جـ) ص = $\frac{٢}{٣}$س

ص + $\frac{١}{٣}$س = ٦ النقطةُ (٩، ٦)

٢) حُلَّ نظامَ المعادلاتِ الآتي بيانيًّا:

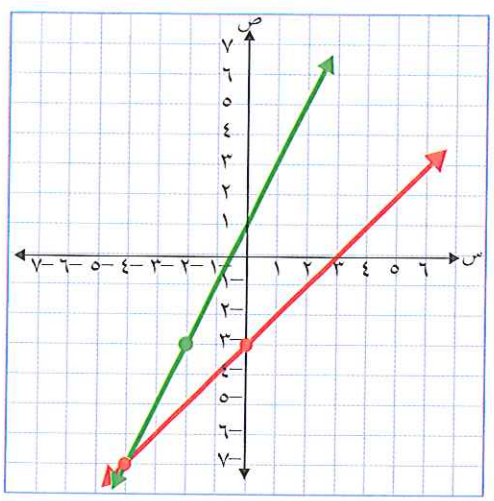
ص = ٠,٥س

٢ص + ٦س = ١٤

٣) ما قيمةُ الثابتِ ب التي تجعلُ النقطةَ (٢، ٦) حلًّا للنظامِ:

ص = ٢س + ٢

ص = ٢,٥ س + ب



٤) أيُّ أنظمةِ المعادلاتِ الآتيةِ يمثلُها الرسمُ المجاورُ؟

أ) ص = ٢س − ١ ، ص = −س + ٣

ب) ص = ٢س − ١ ، ص = ٢س − ٣

جـ) ص = ٢س + ١ ، −ص = −٢س − ١

د) ص = ٢س + ١ ، ص = س − ٣

٥) اكتبْ مثالًا على نظامٍ من معادلتينِ خطيتينِ بمتغيرينِ في كلٍّ من الحالاتِ الآتيةِ:

أ) يكونُ المستقيمانِ الناتجانِ عن تمثيلِها متوازيينِ.

ب) يكونُ المستقيمانِ الناتجانِ عن تمثيلِها متطابقينِ.

جـ) يكونُ المستقيمانِ الناتجانِ عن تمثيلِها متقاطعينِ.

الدرسُ الرابعُ حلُّ نظامٍ مكوّنٍ من معادلتينِ خطيتينِ بمتغيرينِ بالتعويضِ

النتاجاتُ

- تحلُّ نظامًا مكونًا من معادلتينِ خطيتينِ بمتغيرينِ بالتعويضِ.

نشاطٌ

بائعٌ متجولٌ يبيعُ قصصًا للأطفالِ وعلبَ أقلامِ تلوينٍ، باعَ منَ الصنفينِ في أسبوعٍ واحدٍ ٥٠ قطعةً، إذا كانَ سعرُ القصةِ ٥٠ قرشًا، وسعرُ علبةِ الألوانِ ٣٠ قرشًا، وكانَتْ قيمةُ مجموعِ مبيعاتِهِ خلالَ هذا الأسبوعِ منْ الصنفينِ ٢١٠٠ قرشٍ. كم قطعةً باعَ منْ كلِّ صنفٍ؟

١) كـوّنْ نظامًا مكـوّنًا من معادلتينِ خطيتينِ بمتغيرينِ يعبِّرُ عنْ مبيعـاتِ البائعِ بدلالةِ س، ص.

٢) وضِّحْ إلامَ ترمزُ كلٌّ منْ س، ص في النظامِ.

٣) كمْ حلًّا لهذا النظامِ ؟ برِّرْ إجابتَكَ.

٤) اخترْ إحدى المعادلتينِ ، وَضَعْ ص موضوعًا للقانون، ثمَّ عوّضْ عنْ قيمةِ ص في المعادلةِ الثانيةِ ؟

٥) ما نوعُ المعادلةِ التي حصلتَ عليها؟ حُلَّها بإيجادِ قيمةِ س؟

٦) عوِّضْ قيمةَ س الناتجةَ معكَ في إحدى المعادلتينِ ، ثمَّ أكملْ بإيجادِ قيمةِ ص.

٧) اكتبِ الزوجَ المرتبَ (س، ص) الذي حصلتَ عليهِ ، ماذا يمثِّلُ بالنسبةِ للنظامِ ؟ مبررًا إجابتَكَ.

٨) اقترح اسمًا لطريقةِ الحلِّ السابقةِ.

لحلِّ نظامٍ مكوّنٍ منْ معادلتينِ خطيتينِ بمتغيرينِ بطريقةِ التعويضِ؛ نتبعُ الخطواتِ الآتيةَ:

١) نجعلُ أحدَ المتغيرينِ موضوعًا للقانونِ في إحدى المعادلتينِ، ثمَّ نعوِّضُهُ في المعادلةِ الثانيةِ.

٢) نحلُّ المعادلةَ الناتجةَ عنِ التعويضِ.

٣) نجدُ قيمةَ المتغيرِ الآخرِ بتعويضِ القيمةِ العدديةِ للمتغيرِ الناتجةِ في الخطوةِ (٢)، في إحدى المعادلتينِ.

٤) نكتبُ مجموعةَ حلِّ النظامِ.

مثالٌ (١)

استخدمْ طريقةَ التعويضِ في حلِّ النظامِ الآتي ، ثمَّ تحققْ منْ صحَّةِ الحلِّ:

٤ص − ٥س = ٤١

س + ٤ص = ١١

الحلُّ

٤ص − ٥س = ٤١ .... ١

س + ٤ص = ١١ .... ٢

اجعلِ المتغيرَ س موضوعًا للقانونِ في المعادلةِ ٢

س + ٤ص = ١١   برِّرِ اختيارَ معادلةِ (٢) لجعلِ س موضوعًا للقانونِ

س = ١١ − ٤ص ٣

٤ص − ٥(١١−٤ص) = ٤١   تعويضُ قيمةِ س منَ المعادلةِ ٣ في المعادلةِ ١

٤ص − ٥(١١ − ٤ص) = ٤١   حَلُّ المعادلةِ الناتجةِ عنِ التعويضِ

٤ص − ٥٥ + ٢٠ ص = ٤١

٢٤ ص = ٩٦ ⟵ ص = ٤

س + ٤(٤) = ١١   تعويضُ قيمةِ ص= ٤ في المعادلةِ ٢

س + ١٦ = ١١ ⟵ س = −٥

∴ مجموعةُ حلِّ النظامِ هيَ {(−٥، ٤)}

للتحققِّ منْ صحةِ الحلِّ؛ عوِّضِ الزوجَ المرتبَ في جميعِ معادلاتِ النظامِ:

س + ٤ص = ١١

−٥ + ٤(٤) ≟ ١١

١١ = ١١ ✓

٤ص − ٥س = ٤١

٤(٤) − ٥(−٥) ≟ ٤١

١٦ + ٢٥ = ٤١ ✓

∴ الحلُّ صحيحٌ.

فكِّرْ وناقشْ

هلْ توجدُ طريقةٌ أخرى للتحققِ منْ صحةِ الحلِّ؟

تدريبٌ ١

استخدمْ طريقةَ التعويضِ في حلِّ النظامِ:
س + ٣ص = ١٢
ص = س − ٤

مثالٌ (٢)

استخدمْ طريقةَ التعويضِ في حلِّ النظامِ الآتي:

س = ٢ص − ٤

−س + ٢ص = ١٦

الحلُّ

س = ٢ص − ٤ .... ١

−س + ٢ص = ١٦ .... ٢

لاحظْ أنَّ المتغيرَ س موضوعٌ للقانونِ في المعادلةِ (١) ، لهذا عوّضْهُ في (٢).

$-$س + ٢ص = ١٦ — تعويضُ قيمةِ س منَ المعادلةِ (١) في المعادلةِ (٢)

$-$(٢ص − ٤) + ٢ص = ١٦

$-$(٢ص − ٤) + ٢ص = ١٦ — حَلُّ المعادلةِ الخطيةِ الناتجةِ عنِ التعويضِ

$-$$\cancel{٢ص}$ + ٤ + $\cancel{٢ص}$ = ١٦ — ومنهُ ٤ = ١٦ عبارةٌ خاطئةٌ لكلِّ قيمِ س، ص

∴ لا يوجدُ تقاطعٌ بَيْنَ المستقيمينِ الممثلينِ للمعادلتينِ، إذنْ مجموعةُ الحلِّ هي: ∅

مثالٌ (٣)

استخدمْ طريقةَ التعويضِ في حلِّ النظامِ الآتي، إنْ أمكنَ:

$\frac{١}{٢}$ ص + $\frac{١}{٣}$س = ٦

٣٦ − ٢س = ٣ص

الحلُّ

$\frac{١}{٢}$ ص + $\frac{١}{٣}$ س = ٦ .... (١)

٣٦ − ٢س = ٣ص .... (٢)

٣٦ − ٢س = ٣ص — المعادلة (٢)

ص = ١٢ − $\frac{٢}{٣}$ س .... (٣) — جَعْلُ المتغيرِ ص موضوعًا للقانونِ في المعادلةِ (٢)

$\frac{١}{٢}$ ص + $\frac{١}{٣}$ س = ٦ .... (١)

$\frac{١}{٢}$ (١٢ − $\frac{٢}{٣}$س) + $\frac{١}{٣}$س = ٦ — تعويضُ قيمةِ ص منَ المعادلةِ (٣) في المعادلةِ (١)

$\frac{١}{٢}$ (١٢ − $\frac{٢}{٣}$س) + $\frac{١}{٣}$س = ٦ — حَلُّ المعادلةِ الخطيةِ بمتغيرٍ واحدٍ

٦ − $\cancel{\frac{١}{٣}}$ س + $\cancel{\frac{١}{٣}}$ س = ٦

٦ = ٦ ومنهُ العبارةُ صحيحةٌ لكلِّ قِيَمِ س، ص.

∴ يوجدُ عددٌ لا نهائيٌّ منَ الحلولِ لهذا النظامِ، ومجموعةُ الحلِّ هيَ مجموعةُ جميعِ النقاطِ الواقعةِ على أحدِ مستقيمينِ. لماذا؟

تدريبٌ ٢

استخدمْ طريقةَ التعويضِ في حلِّ الأنظمةِ الآتيةِ، وتحققْ من صحةِ الحلِّ:

١) – ٦ س + ٣ ص = –٢

ص = ٢س – ٤

٢) ٤ ص = ٨ – ٢س

٥س + ١٠ ص = ٢٠

تدريبٌ ٣

١) عددانِ مجموعُهُما ١١، ثلاثةُ أمثالِ أحدِهِما يزيدُ على مثلَي العددِ الآخرِ بمقدارِ ٥، ما العددانِ؟

٢) اشترى مازنٌ قلمَيْ حبرٍ وثلاثةَ دفاترَ ، دفعَ ١٣٠ قرشًا ثَمنًا لمشترياتِهِ، إذا علمتَ أنَّ ثمنَ الدفترِ الواحدِ يزيدُ على ثمنِ القلمِ بمقدارِ ١٠ قروشٍ . كوِّنْ نظامَ معادلاتٍ تعبِّرُ فيهِ عنْ مشترياتِ مازنٍ ، ثُمَّ حُلَّها . ماذا يمثِّلُ الحلُّ الذي حصلتَ عليهِ؟

فكِّرْ وناقشْ

ما قيمةُ المتغيرِ ل التي تحققُ النظامَ الآتي:

ل + ع + س = ٧

ع + س = ٥

تمارينُ ومسائلُ

١) ع ، ل زاويتانِ متتامتانِ، كوِّنْ معادلتينِ لإيجادِ قياسِ كلٍّ منهُما في الحالاتِ الآتيةِ:

أ) إذا كانتْ إحداهُما تساوي ثلاثةَ أمثالِ الأخرى.

ب) إذا كانتْ إحداهُما تقلُّ عنْ أربعةِ أمثالِ الأخرى بمقدارِ (١٠°).

٢) عددانِ صحيحانِ مختلفانِ، ٥ أمثالِ العددِ الأصغرِ مطروحًا من مثلَيْ العددِ الأكبرِ يساوي ١٦، والعددُ الأكبُر مضافًا إليهِ ٣ أمثالِ العددِ الأصغرِ يساوي ٦٣. ما العددانِ؟

٣) مع خالدٍ ٤٥ ورقةً نقديةً، بعضُها من فئةِ الخمسةِ دنانيرَ والباقي من فئةِ العشرةِ دنانيرَ، فإذا كانَ المبلغُ كلُّهُ يساوي ٣٠٠ دينارٍ. فكم عددُ الأوراقِ من كلِّ فئةٍ؟

٤) مثلثٌ متطابقُ الضلعينِ فيه قياسُ إحدى زاويتي القاعدةِ يقلُّ ١٠° عن مثلَيْ قياسِ زاويةِ الرأسِ، جدْ قياسَ زوايا المثلثِ.

الدرسُ الخامسُ: حلُّ نظامٍ مكوّنٍ من معادلتينِ خطيتينِ بمتغيرينِ بالحذفِ

النتاجاتُ

- تحلُّ نظامًا مكونًا من معادلتينِ خطيتينِ بمتغيرينِ بالحذفِ.

مَعَ عثمانَ ٢٢ قطعةً نقديةً منْ فئتَيْ ربعِ الدينارِ ونصفِ الدينارِ، إذا كانَ عددُ قطعِ نصفِ الدينارِ يزيدُ على عددِ قطعِ ربعِ الدينارِ ١٢ قطعةً. فَجدْ عددَ القطعِ التي يملكُها منْ كلِّ فئةٍ.

لتكنْ س عددَ القطعِ مِنْ فئةِ نصفِ الدينارِ وَ ص عددَ القطعِ مِنْ فئةِ ربعِ الدينارِ، فإنَّ نظامَ المعادلتينِ س + ص = ٢٢ ، س − ص = ١٢ يوضحُ العلاقاتِ بَيْنَ عددِ القطعِ النقديةِ التي معَ عثمانَ.

ويُمكِنُ تمثيلُ أيِّ معادلةٍ منْ معادلاتِ النظامِ السابقِ في ميزانٍ ذي كفّتينِ كالآتي:

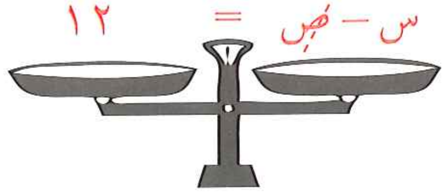
س + ص = ٢٢

س − ص = ١٢

ثمَّ جمعُ المعادلتينِ في ميزانٍ واحدٍ كالآتي: (سيبقى الطرفانِ متساويينِ ، برِّرْ ذلكَ)

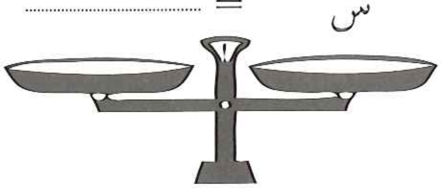
س ~~+ ص~~ = ٢٢

س ~~− ص~~ = ١٢



ومنهُ

س = ...



ثمَّ تعويضُ قيمةِ س في إحدى المعادلتينِ ؛ ولتكنْ

س + ص = ٢٢

١٧ + ص= ٢٢ ، ومنه ص= ......

عندها سنجدُ مجموعةَ حلِّ النظامِ، وهي: ....

تحققْ منْ صحّةِ الحلِّ.

نُسمي الطريقةَ التي اتبعناها لحلِّ النظامِ السابقِ **طريقةَ الحذفِ**. ما سببُ هذهِ التسميةِ؟

لحلِّ نظامِ المعادلاتِ الخطيةِ بمتغيرينِ بطريقةِ الحذفِ، نتبعُ الخطواتِ الآتيةَ:

١) نرتّبُ الحدودَ المتشابهةَ في المعادلتينِ أسفلَ بعضِها.

٢) نحدِّدُ أيَّ المتغيرينِ يسهلُ حذفُهُ، ثمَّ نجعلُ معامليهِ في المعادلتينِ متساويينِ في المقدارِ ومختلفينِ في الإشارةِ، وذلكَ بضربِ طرفيْ إحدى المعادلتينِ أو كلتَيْهما في عددٍ، أو بالقسمةِ على عددٍ.

٣) نجمعُ المعادلتينَ للتخلصِ منَ المتغيرِ المرادِ حذفُهُ.

٤) نعوِّضُ قيمةَ المتغيرِ الناتجةَ في إحدى المعادلتينِ؛ لإيجادِ قيمةِ المتغيرِ الآخرِ.

مثالٌ (١)

حُلَّ النظامَ الآتيَ بطريقةِ الحذفِ، ثمَّ تحققْ منْ صحّةِ الحلِّ.

٣س + ص = −٢

٢ص − ٣س = ١٤

الحلُّ

أعدْ ترتيبَ المعادلتينِ بوضعِ الحدودِ المتشابهةِ أَسْفَلَ بَعْضِها.

$\cancel{3س} + ص = -2$ .... (1) لاحظِ المتغيرَ الأسهلَ حذفُهُ هوَ س

$-\cancel{3س} + 2ص = 14$ .... (2) إعادةُ ترتيبِ الحدودِ في المعادلتينِ

$3ص = 12$ ناتجُ جمعِ المعادلتينِ، ثمَّ قسمةُ الطرفينِ على 3

$ص = 4$ حلُّ المعادلةِ الخطيةِ بمتغيرٍ.

وباستكمالِ الحلِّ بتعويضِ ص = ٤ في إحدى المعادلتينِ؛ نجدُ أنَّ مجموعةَ حلِّ النظامِ هيَ: {(-٢، ٤)}. كيفَ يمكنكَ التحققُ منْ صحةِ الحلِّ؟

مثالٌ (٢)

استخدمْ طريقةَ الحذفِ في حلِّ النظامِ الآتي، ثمَّ تحققْ منْ صحةِ الحلِّ:

$6س + 5ص = 16$

$-2س + 5ص = -8$

الحلُّ

لاحظْ أنَّ الحدودَ المتشابهةَ مرتبةٌ أَسْفَلَ بَعْضِها، وأنَّ المتغيرَ الأسهلَ حذفُهُ هوَ ص.

$6س + 5ص = 16$ .... (1)

$-1 \times (-2س + 5ص) = -8 \times -1$ .... (2) الضربُ بـ -1 لحذفِ المتغيرِ ص

$6س + \cancel{5ص} = 16$ .... (1)

$2س - \cancel{5ص} = 8$ .... (3)

$8س + 0 = 24$

وباستكمالِ الحلِّ بإيجادِ قيمةِ كلٍّ منْ س، وَ ص، مجموعةُ الحلِّ هي: $\{(3، \frac{-2}{5})\}$.

تحققْ منْ صحةِ الحلِّ.

مثالٌ (٣)

استخدمْ طريقةَ الحذفِ في حلِّ النظامِ الآتي، ثمَّ تحققْ منْ صحةِ الحلِّ:

١,٨ س + ٠,٦ ص = ٠,٦

ص = −٣,٢ س + ٢,٢

الحلُّ

١,٨ س + ٠,٦ ص = ٠,٦ .... (١)

ص = −٣,٢ س + ٢,٢ .... (٢)

$$\frac{\text{١,٨س + ٠,٦ص}}{\text{−٠,٦}} = \frac{\text{٠,٦}}{\text{−٠,٦}}$$ القسمةُ على −٠,٦ في المعادلةِ (١) لحذفِ ص

٣,٢س + ص = ٢,٢ إعادةُ ترتيبِ الحدودِ في المعادلةِ (٢)

−٣س − $\cancel{\text{ص}}$ = −١ ترتيبُ المعادلتينِ بوضعِ الحدودِ

٣,٢س + $\cancel{\text{ص}}$ = ٢,٢ المتشابهةِ أسفلَ بعضِها

٠,٢س + ٠ = ١,٢

س = ٦

نستكملُ الحلَّ بتعويضِ قيمةِ س=٦ في إحدى المعادلتينِ؛ لنجدَ قيمةَ ص

ص = −٣,٢ × ٦ + ٢,٢ تعويضُ قيمةِ س = ٦ في المعادلةِ (٢)

= −١٩,٢ + ٢,٢ = −١٧

∴ مجموعةُ الحلِّ هيَ: {(٦ ، −١٧)}.

تحققْ منْ صحةِ الحلِّ.

تدريبٌ ١

١) استخدمْ طريقةَ الحذفِ في حلِّ الأنظمةِ الآتيةِ، ثمَّ تحققْ منْ صحةِ الحلِّ:

أ) س + ص = ٥

س = ص + ١

ب) س + ٣ص = ١٢

ص = س − ٤

جـ) ٢ص = ٤ − س

٥س + ١٠ص = ٢٠

د) ٣ص − ٦س = −٢

ص − ٢س = ٤

٢) س، ص زاويتانِ متكاملتانِ ، يزيدُ قياسُ س بمقدارِ ١٠٤° على قياسِ زاويةِ ص ، ما قياسُ الزاويتينِ؟

تمارينُ ومسائلُ

١) استخدمْ طريقةَ الحذفِ لِحلِّ أنظمةِ المعادلاتِ الخطيةِ الآتيةِ، ثمَّ تحققْ منْ صحةِ الحلِّ:

أ) ص + س = ٤

ص = ٦ + س

ب) −٥س + ٧ص = ١١

−٥س + ٣ص = ١٩

جـ) ٢س + ٣ص = ١٢

٥س − ص = ١٣

د) ٢س + ٦ص = ١٢

٧س = −٢٣ + ٣ص

٢) جدْ قيمَ كلٍّ من أ ، ب التي تجعلُ النقطةَ (٦، ٢) حلًّا للنظامِ الآتي:

ص = أ س + ٢ب

ص = ٣ أ س + ب

٣) معَ فاطمةَ وأخيها خالدٍ عددٌ من قطعِ الحلوى، إذا أعطتْ فاطمةُ خالدًا خمسَ قطعِ حلوى يتساوى عددُ القطعِ معَ كلَيْهِما، وإذا أعطى خالدٌ فاطمةَ خمسَ قطعٍ، يصبحُ عددُ القطعِ معَ فاطمةَ مثلَيْ عددِها عندَ خالدٍ، فما عددُ قطعِ الحلوى التي معَ كليهِما؟

١) أيُّ المعادلاتِ الآتيةِ خطيةٌ بمتغيرينِ في ما يأتي، معَ ذكرِ السببِ:

أ) $\frac{١}{س} - ص = ٤$ حيثُ س $\neq$ ٠ ب) ع + ٥ل = ل − ١

جـ) ٣م ن − م = ٢ د) ٨هـ + ٤و = ١٤ز

هـ) ٢,٥ ك − ٤,٣ ل = ٠ و) ٩$س^٢$ + س = ٣$ص^٢$ − ص

ز) $\frac{١١ط - ح}{-٣} = ٦٣$ ح) $أ^٢$ع − ٢ أ ل + أ = ٠ حيث أ عددٌ ثابتٌ

٢) أعدْ صياغةَ المعادلةِ: ٤(٢ − ٣ص) = ٢٤س، بحيثُ يكونُ ص موضوعًا للقانونِ، ثمَّ س موضوعًا لهُ.

٣) تحققْ إذا كانتِ النقطةُ المعطاةُ إزاءَ كلِّ معادلةٍ حلًّا لها.

أ) ص = ٢س + ٥ (−١ ، ٣)

ب) ص = −٣ س − ١ (٠ ، ٥)

جـ) ٤س − ٧ص = ١٩ (−٤ ، ٣٥)

د) ٦س + ٥ص = ٢١ (٦ ، −٣)

٤) تحققْ إذا كانتِ النقطةُ المعطاةُ لكلِّ نظامٍ ممّا يأتي تمثّلُ حلًّا لهُ:

أ) ٢س − ص = ٥

−٢س + ص = ١ النقطةُ (٣، ١)

ب) س + ص = ٥

س − ص = −٣ النقطةُ (١، ٤)

جـ) س − ٢ص = ٤

٣س + ص = ٥ النقطةُ (٢، −١)

د) ٢س + ٥ص = ٨

٣س − ٢ص = ٥ النقطةُ (−٢، ١)

٥) حُلَّ أنظمةَ المعادلاتِ الخطيةِ الآتيةِ، مستخدمًا الطريقةَ الموضحةَ بجانبِ كلٍّ منها، وتحققْ منْ صحةِ الحلِّ:

أ) ص = −٤س − ٣

ص= ٢س + ٣ (بيانيًّا)

ب) ٣ص + س = ١٦

س= ٤ص + ٢ (بالتعويضِ)

جـ) ٢س + ٦ص = ٤

٤س + ٥ص = ١٥ (بالحذفِ)

٦) يُرادُ تصميمُ وسيلةٍ تعليميةٍ من قطعةِ كرتونٍ مستطيلةِ الشكلِ محيطُها ٢٠٠ سم، والفرقُ بينَ بُعديْها ٢٠ سم ، ما بُعدا قطعةِ الكرتونِ؟

اختبارٌ ذاتيٌّ

١) يتكونُ هذا السؤالُ من ٤ فقراتٍ منْ نوعِ الاختيارِ منْ متعددٍ، لكلِّ فقرةٍ منها ٤ بدائلَ ، واحدٌ فقطْ منها صحيحٌ، ضعْ دائرةً حولَ رمزِ البديلِ الصحيحِ:

(١) أيُّ الأزواجِ المرتبةِ الآتيةِ ليسَ حلًّا للمعادلةِ ٥س − ٤ص = ٧؟

أ) (−٩ ، −١٣)   ب) (−٥ ، −٩)

جـ) (٧ ، ٧)   د) (١١ ، ١٢)

(٢) المجموعةُ: {(٠ ، ٥)، (−١ ، ٦)} هيَ مجموعةٌ جزئيةٌ منْ مجموعةِ حلِّ المعادلةِ:

أ) س − ص = ٣   ب) س = ٥ − ص

جـ) ص = ٧س   د) ص = − س

(٣) الزوجُ المرتبُ الذي يمثِّلُ حلًّا للنّظامِ:

ص = −٣س − ٢

س + ٢ص = −٤ هو:

أ) (٢ ، ٠)   ب) (٠ ، ٢)

جـ) (٠ ، −٢)   د) (−٢ ، ٠)

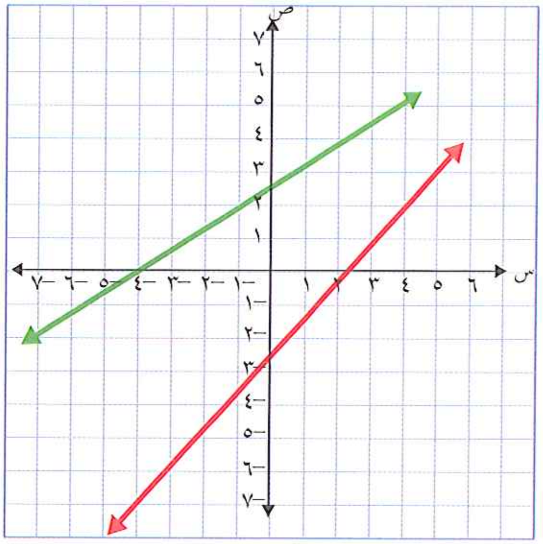
(٤) قيمةُ كلٍّ منَ و ، هـ التي تجعلُ مجموعةَ حلِّ النظامِ

ص = ٢س + و ، ص = ٢س + هـ ، غيرَ منتهيةٍ:

أ) و = ٠ ، هـ = −٣   ب) و = ٣ ، هـ = −٣

جـ) و = −٣ ، هـ = −٣   د) و = ٠ ، هـ = ٣

٢) تقولُ مها إنَّهُ لا يوجدُ حلٌّ لنظامِ المعادلتينِ الخطيتينِ الممثلِ بالرسمِ المجاورِ، بينَما تقولُ أملُ إنَّهُ يوجدُ حلٌّ للنظامِ، أيُّهما أصابتْ؟ برِّرْ إجابتَكَ.



٣) اكتبْ مثالًا على نظامٍ من المعادلاتِ الخطيّةِ في كلٍّ من الحالاتِ الآتيةِ:

أ) أنْ تكونَ مجموعةُ حلِّ النظامِ ∅

ب) أنْ تكونَ مجموعةُ الحلِّ هيَ: {(٠، −٤)}

٤) إذا كانتْ تعرفةُ المكالماتِ في شركتَيْ اتّصالاتٍ كما هوَ موضحٌ في الجدولِ الآتي، فَأجبْ عنِ الأسئلةِ التي تليه:

الشركةُ أ	٧ قروشٍ للدقيقةِ الأولى، ثمَّ تَزيدُ قرشًا واحدًا لكلِّ دقيقةٍ تليها.
الشركةُ ب	قرشان للدقيقةِ الأولى، ثمَّ تَزيدُ قرشينِ لكلِّ دقيقةٍ تليها.

أ) كوِّنْ معادلةً تعبّرُ عنْ تعرفةِ كلِّ شركةٍ.

ب) مثِّلْ تعرفتَيْ الشركتينِ بيانيًّا على الرسمِ نفسِهِ.

(إرشادٌ: تحتاجُ إلى التمثيلِ في الربعِ الأولِ فقطْ منَ المستوى البيانيِّ، برِّرْ ذلكَ)

جـ) بعدَ كمْ دقيقةٍ منَ المكالماتِ تتساوى التعرفتانِ؟

د) يريدُ صاحبُ محلٍّ شراءَ خطٍّ منْ إحدى الشركتينِ ، بأيِّ التعرفتينِ تنصحُهُ؟ برِّرْ إجابتَكَ.

٦

الوحـــدةُ السادسةُ

الإنشاءاتُ الهندسيةُ

تحتاجُ الهندسةُ بفروعِها كافَّةً، ومنها المدنيةُ والميكانيكيةُ إلى عملِ تصاميمَ لمُنشآتٍ أو معداتٍ أو آلاتٍ، كما أنّهُ لا غنىً لمصممي الملابسِ عنِ المبادئِ الأساسيةِ في الرياضياتِ؛ لرسمِ تصاميمِهم قبلَ إخراجِها وإنتاجِها. كذلكَ الأمرُ بالنسبةِ إلى النجارينَ والحدادينَ والنحاتينَ، والكثيرِ منَ المهنِ التي تحتاجُ إلى إعدادِ تصاميمَ لمنتجاتِها على الورقِ قبلَ إنشائِها وإنتاجِها. وستتعلمُ في هذه الوحدةِ بعضَ المبادئِ الأساسيةِ في الرياضياتِ التي تعتمدُ عليها هذهِ التصاميمُ.

يتوقعُ منَ الطالبِ في نهايةِ هذهِ الوحدةِ أن يكونَ قادرًا على:

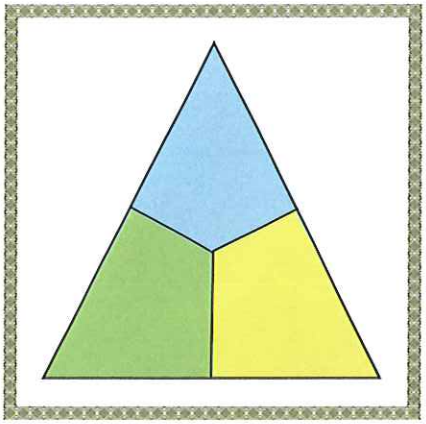
- إنشاءِ عمودٍ على مستقيمٍ منْ نقطةٍ معلومةٍ عليهِ.
- إسقاطِ عمودٍ على مستقيمٍ منْ نقطةٍ معلومةٍ خارجةٍ عنهُ.
- تنصيفِ قطعةٍ مستقيمةٍ باستخدامِ المسطرةِ والفرجارِ.
- تنصيفِ زاويةٍ باستخدامِ المسطرةِ والفرجارِ.
- اكتشافِ أنَّ منصِّفاتِ الزوايا الثّلاثِ للمثلثِ تتلاقى في نقطةٍ واحدةٍ هيَ مركزُ الدائرةِ المرسومةِ داخلَ المثلثِ، وتمسُّ أضلاعَهُ الثلاثةَ.
- رسمِ دائرةٍ داخلَ مثلثٍ وتمسُّ أضلاعَهُ.

الدرس الأول
إنشاءُ عمودٍ على مستقيمٍ

النتاجاتُ

- تنشئُ عمودًا على مستقيمٍ منْ نقطةٍ معلومةٍ عَلَيْهِ.
- تنزلُ عمودًا على مستقيمٍ منْ نقطةٍ معلومةٍ خارجَهُ.

اللوحةُ المجاورةُ على بساطتِها تحتاجُ إلى مهارةِ إنشاءِ عمودٍ منْ منتصفِ كلِّ ضلعٍ منْ أضلاعِ المثلثِ، وهذهِ المهارةُ يحتاجُ إليها الكثيرُ منَ المصمّمينَ على اختلافِ تخصصاتِهم لإنشاءِ تصاميمِهم.



كيفَ تُنشِئُ عمودًا منْ نقطةٍ على مستقيمٍ باستخدامِ الفرجارِ؟

مثالٌ (١)

أنشئْ عمودًا على مستقيمٍ منْ نقطةٍ معلومةٍ عليهِ، باستخدامِ الفرجارِ.

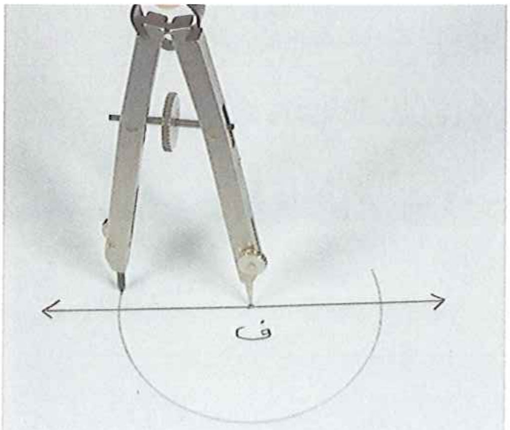
الحلُّ

١) ارسمْ مستقيمًا باستخدامِ المسطرةِ.

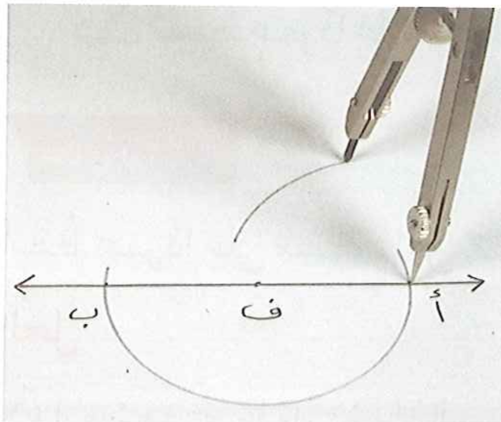
٢) حدِّدْ نقطةً عليهِ، ولتكنْ ف.

٣) افتحِ الفرجارَ فتحةً مناسبةً.

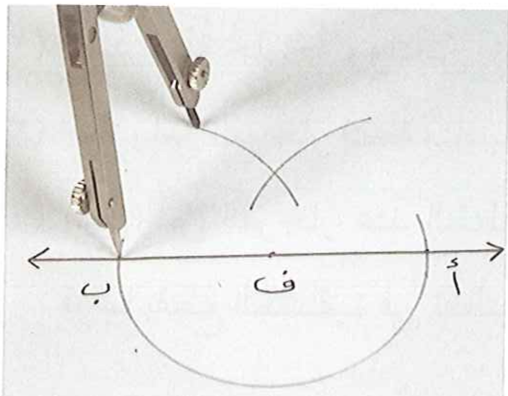
٤) ثبِّتْ رأسَ الفرجارِ عندَ النقطةِ ف، ثمَّ ارسمْ قوسًا يقطعُ المستقيمَ في نقطتينِ مِثلْ أ ، ب.



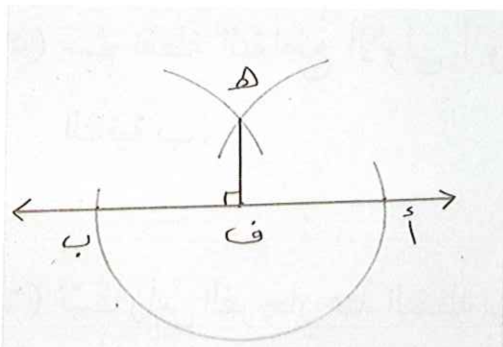
٥) افتحِ الفرجارَ فتحةً أكبرَ منْ طولِ $\overline{\text{أ ف}}$، ثمَّ ثبِّتْ رأسَ الفرجارِ عندَ النقطةِ أ وَارسمْ قوسًا كما في الشكلِ المجاورِ.



٦) مُستخدمًا فتحةَ الفرجارِ نفسَها، ثبِّتِ الفرجارَ عندَ النقطةِ ب ثمَّ ارسمْ قوسًا يقطعُ الأولَ في النقطةِ هـ.



٧) صلْ بَيْنَ النقطةِ ف والنقطةِ هـ الناتجةِ.



٨) استخدمِ المنقلةَ أوِ المثلثَ القائمَ للتحققِ منْ قياسِ الزوايا الناتجِ.

تدريبٌ ١

١) أنشئْ عمودًا على مستقيمٍ منْ نقطةٍ معلومةٍ عليهِ باستخدامِ الفرجارِ إلى أعلى، ثمَّ أنشئْ عمودًا إلى أسفلَ .تحققْ منْ قياسِ الزوايا الناتجِ .(ماذا تلاحظُ بالنسبةِ إلى العمودينِ؟)

٢) أنشئْ عمودًا على مستقيمٍ منْ نقطةٍ معلومةٍ عليهِ، باستخدامِ أداةٍ هندسيةٍ أخرى، ثمَّ ناقشِ الخطواتِ التي اتبعتَها معَ زملائِكَ.

كيفَ تُسقطُ عمودًا على مستقيمٍ منْ نقطةٍ معلومةٍ خارجَةٍ عنهُ ، باستخدامِ الفرجارِ؟

مثالٌ (٢)

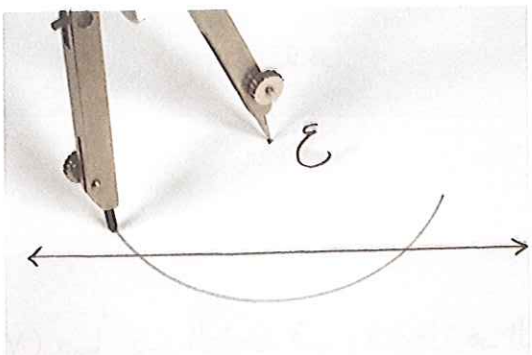
أسقطْ عمودًا على مستقيمٍ منْ نقطةٍ معلومةٍ خارجةٍ عنهُ ، باستخدامِ الفرجارِ.

الحلُّ

١) ارسمْ مستقيمًا باستخدامِ المسطرةِ.

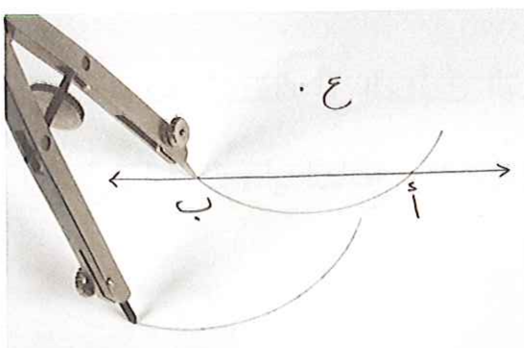
٢) حدِّدْ نقطةً خارجَهُ ، ولتكنْ ع .

٣) افتحْ رأسَ الفرجارَ فتحةً مناسبةً.

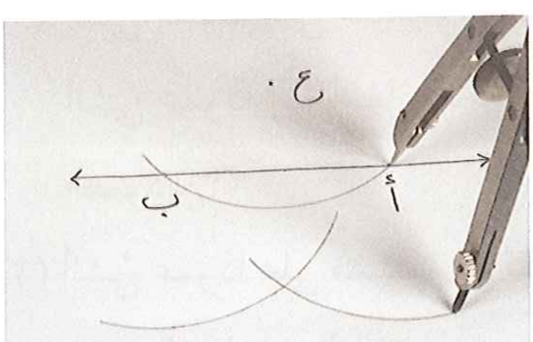


٤) ضعْ رأسَ الفرجارَ عندَ النقطةِ ع ثمَّ ارسمْ قوسًا يقطعُ المستقيمَ في نقطتينِ.

٥) سَمِّ نقطةَ التقاطعِ الأولى أ ونقطةَ التقاطعِ الثانيةَ ب.

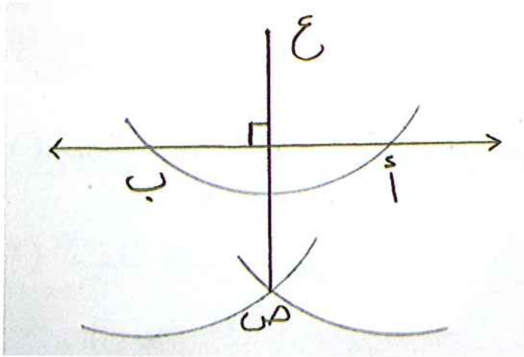


٦) ثبِّتْ رأسَ الفرجارِ عندَ النقطةِ ب، وباستخدامِ فتحةِ الفرجارِ نفسِها ارسمْ قوسًا أسفلَ الخطِّ.



٧) ثبِّتْ رأسَ الفرجارِ عندَ النقطةِ أ، وبفتحةِ الفرجارِ نفسِها ارسمْ قوسًا آخر يقطعُ الأولَ في النقطةِ ص.

٨) صلْ بَيْنَ النقطةِ ع والنقطةِ ص فيكونُ ع ص عمودًا على المستقيمِ.

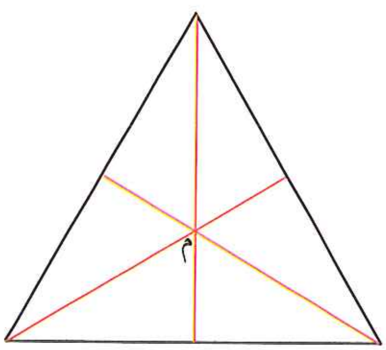


تدريبٌ ٢

أسقِطْ عمودًا على مستقيمٍ منْ نقطةٍ معلومةٍ خارجةٍ عنهُ، باستخدامِ الفرجارِ، ثمَّ تحققْ منَ الزوايا الناتجةِ.

نشاطٌ

ارسمْ مثلثًا متطابقَ الأضلاعِ، طولُ ضلعِهِ ٦ سم باستخدامِ الفرجارِ والمِسْطرةِ، ثمَّ نفّذِ الخطواتِ الآتيةَ:



١) حدِّدْ نقطةَ المنتصفِ لكلِّ ضلعٍ باستخدامِ المسطرةِ.

٢) أنشئْ أعمدةً منْ منتصفاتِ الأضلاعِ، ثمَّ مُدَّ كلًّا منها حتى تتلاقى في نقطةٍ داخلَ المثلثِ، وَلْتكنْ م .

٣) افتحِ الفرجارَ فتحةً تساوي المسافةَ بَيْنَ أحدِ منتصفاتِ أضلاعِ المثلثِ وَالنقطةِ م، ثمَّ ارسمْ دائرةً مركزُها النقطةُ م، ماذا تلاحظُ؟

٤) افتحِ الفرجارَ فتحةً تساوي المسافةَ بينَ أحدِ رؤوسِ المثلثِ والنقطةِ م، ثمَّ ارسمْ دائرةً مركزُها النقطةُ م، ماذا تلاحظُ؟

تمارينُ ومسائلُ

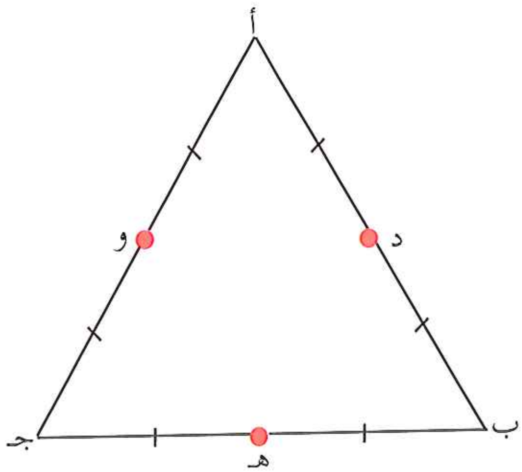
١) أنشئْ عمودًا على مستقيمٍ منْ نقطةٍ معلومةٍ عليهِ، باستخدامِ المسطرةِ والفرجارِ.

٢) أسقطْ عمودًا على مستقيمٍ منْ نقطةٍ معلومةٍ خارجةٍ عنهُ، باستخدامِ المسطرةِ والفرجارِ.

٣) أ ب جـ مثلثٌ متطابقُ الأضلاعِ د، هـ، و منتصفاتُ أضلاعِهِ (انظرِ الشكلَ المجاورَ)، باستخدامِ المسطرةِ والفرجارِ، ارسمْ ما يأتي:

أ) دائرةً داخلَ المثلثِ وتمسُّ أضلاعَهُ.

ب) دائرةً خارجَ المثلثِ وتمسُّ رؤوسَهُ.

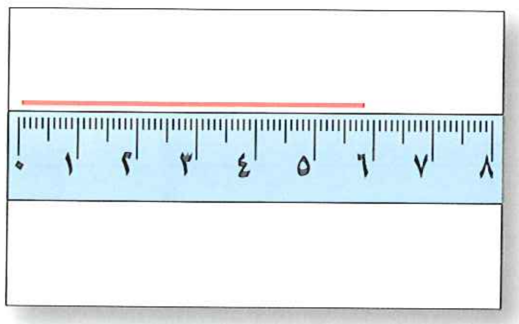


الدرس الثاني تنصيفُ قطعةٍ مستقيمةٍ

النتاجاتُ

- تنصّفُ قطعةً مستقيمةً باستخدامِ المسطرةِ والفرجارِ.

تريدُ جهادُ تنصيفَ القطعةِ المستقيمةِ المجاورةِ، وعندَما استخدمتِ المسطرةَ وجدتْ طولَها يقعُ بَيْنَ ٥,٨سم وَ ٥,٩ سم، كيفَ تُنصّفُ جهادُ القطعةَ بدقةٍ عاليةٍ؟



كيفَ تنصّفُ قطعةً مستقيمةً، باستخدامِ الفرجارِ؟

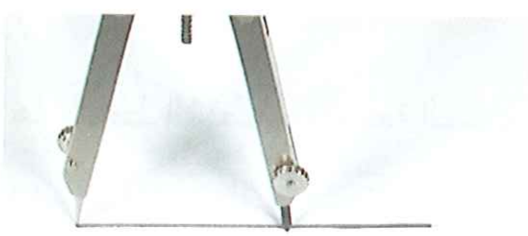
مثالٌ (١)

ارسمْ قطعةً مستقيمةً، ثمَّ نصِّفْها باستخدامِ الفرجارِ والمسطرةِ.

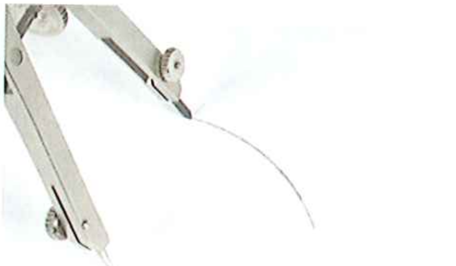
الحلُّ

١) ارسمْ قطعةً مستقيمةً باستخدامِ المسطرةِ.

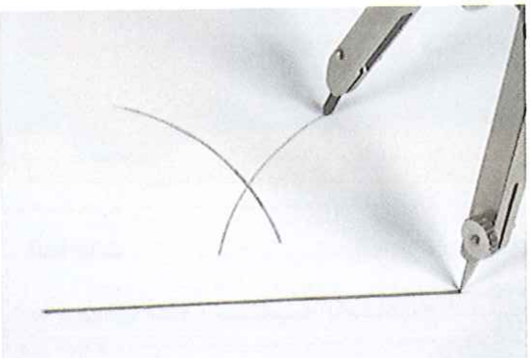
٢) افتحِ الفرجارَ فتحةً تزيدُ على طولِ نصفِ القطعةِ المستقيمةِ.



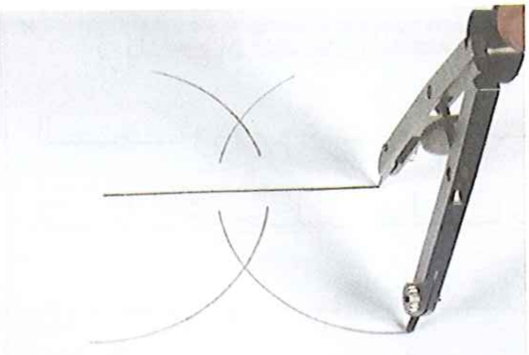
٣) ثبِّتْ رأسَ الفرجارِ عندَ أحدِ طرفَي القطعةِ المستقيمةِ، وارسمْ قوسًا أعلى القطعةِ.



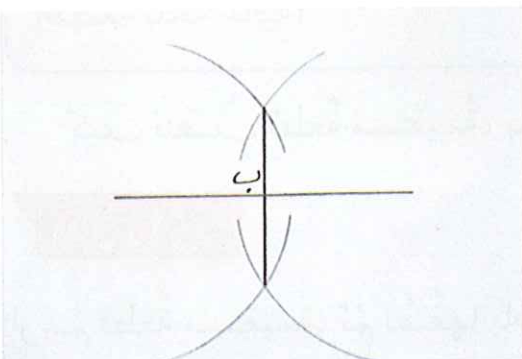
٤) ثبِّتْ رأسَ الفرجارِ عندَ الطرفِ الثاني للقطعةِ المستقيمة، وبفتحةِ الفرجارِ نفسِها ارسمْ قوسًا يقطعُ القوسَ الأولَ.



٥) كرِّرِ الخطواتِ السابقةَ لرسمِ قوسينِ متقاطعينِ أسفلَ القطعةِ، مستخدمًا فتحةَ الفرجارِ نفسَها عندَ رسمِ القوسينِ.



٦) باستخدامِ المسطرةِ، ارسمْ خطًّا يصِلُ بينَ النقطتينِ الناتجتينِ عنْ تقاطعِ الأقواسِ ثمَّ سَمِّ نقطةَ التقاطعِ ب، وهكـذا تكـونُ قدْ نَصَّفْتَ القطعةَ المستقيمةَ عندَ النقطةِ ب.



ابحثْ

هلِ الخطُّ المُنصِّفُ للقطعةِ المستقيمةِ في المثالِ (١) عموديٌّ على القطعةِ؟

(إرشادٌ: استعملِ المنقلةَ لتتحققَ).

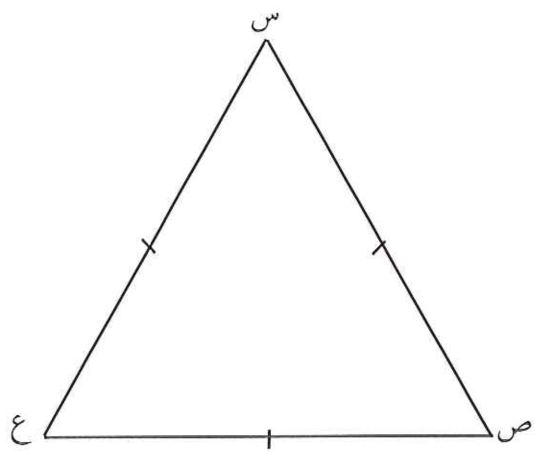
تدريبٌ ١

ارسمْ قطعةً مستقيمةً، ثمَّ نَصِّفْها باستخدامِ الفرجارِ والمسطرةِ .

تمارينُ ومسائلُ

١) ارسمْ قطعةً مستقيمةً، ثمَّ قسّمْها إلى أربعِ قطعٍ متساويةِ الطولِ باستخدامِ الفرجارِ والمسطرةِ.

٢) ارسمْ دائرةً داخلِ المثلثِ س ص ع بحيثُ تمسُّ أضلاعَهُ.



٣) ارسمْ مثلثًا باستخدامِ المسطرةِ، ثمَّ نفِّذِ الخطواتِ الآتيةَ:

أ) نَصِّفْ أضلاعَ المثلثِ، باستخدامِ الفرجارِ والمسطرةِ.

ب) مُدَّ القطعَ المُنَصِّفَةَ لأضلاعِ المثلثِ حتى تلتقيَ في نقطةٍ داخلَ المثلثِ.

جـ) لوِّنِ المساحاتِ الناتجةَ لتخرجَ بلوحةٍ فنيةٍ.

٤) اقترحْ خطواتٍ أخرى لتنصيفِ قطعةٍ مستقيمةٍ باستخدامِ الفرجارِ والمسطرةِ.

الدرسُ الثالثُ تنصيفُ زاويةٍ

النتاجاتُ

- تنصِّفُ زاويةً باستخدامِ المسطرةِ والفرجارِ.

رسَمَ خالدٌ نَجمةً خماسيةً، وقرّرَ تنصيفَ زوايا رؤوسِها الخمسةِ للخروجِ بتصميمٍ فنيٍّ كما هوَ موضحٌ جانبًا، كيفَ ينصِّفُ خالدٌ الزوايا الخمسَ للنجمةِ؟

لتنصيفِ زاويةٍ نلجأُ إلى المنقلةِ، أما إنْ كانَ قياسُها يَصعبُ تنصيفُهُ بدقةٍ عاليةٍ باستخدامِ المنقلةِ، كأنْ يكونَ قياسُها مثلًا ٣٦,٥°، نلجأُ إلى استخدامِ المسطرةِ والفرجارِ.

كيفَ تنصِّفُ زاويةً باستخدامِ الفرجارِ والمسطرةِ؟

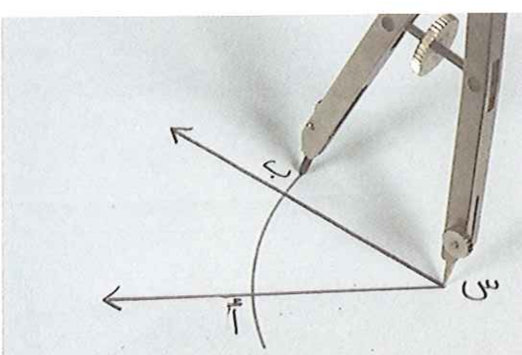
مثالٌ (١)

ارسمْ زاويةً، ثمَّ نصِّفْها باستخدامِ المسطرةِ والفرجارِ.

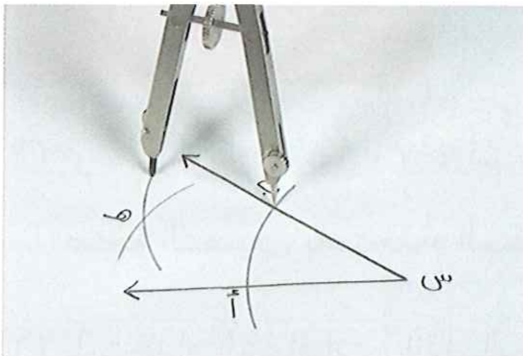
الحلُّ

١) ارسمْ زاويةً باستخدامِ المسطرةِ، وسَمِّ رأسَها النقطةَ س .

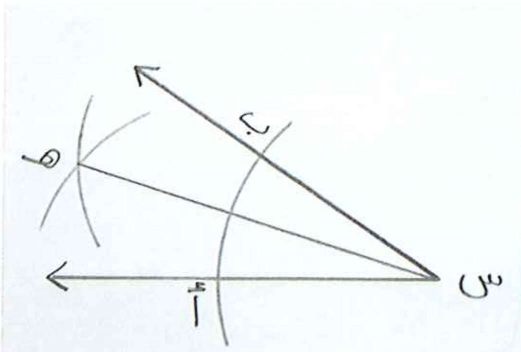
٢) افتحِ الفرجارِ فتحةً مناسبةً، ثمَّ ثبِّتْ رأسَ الفرجارِ عندَ رأسِ الزاويةِ س، وارسمْ قوسًا يقطعُ ضلعَي الزاويةِ في النقطتينِ أ ، وَ ب.



٣) افتحِ الفرجار فتحةً مناسبةً، ثمَّ ثبِّتْ رأسَ الفرجارِ عندَ النقطةِ أ، وَ ارسمْ قوسًا داخلَ الزاويةِ، وباستخدامِ فتحةِ الفرجارِ نفسِها، ثبِّتْ رأسَ الفرجارِ عندَ النقطةِ ب وَارسمْ قوسًا يقطعُ الأولَ في نقطةٍ ولتكنْ هـ.



٤) ارسمْ خطًّا يصلُ النقطةَ هـ برأسِ الزاويةِ س.
هكذا تكونُ قدْ نصّفْتَ الزاويةَ.



كيفَ تتحققُ منْ صحةِ تنصيفِ الزاويةِ؟

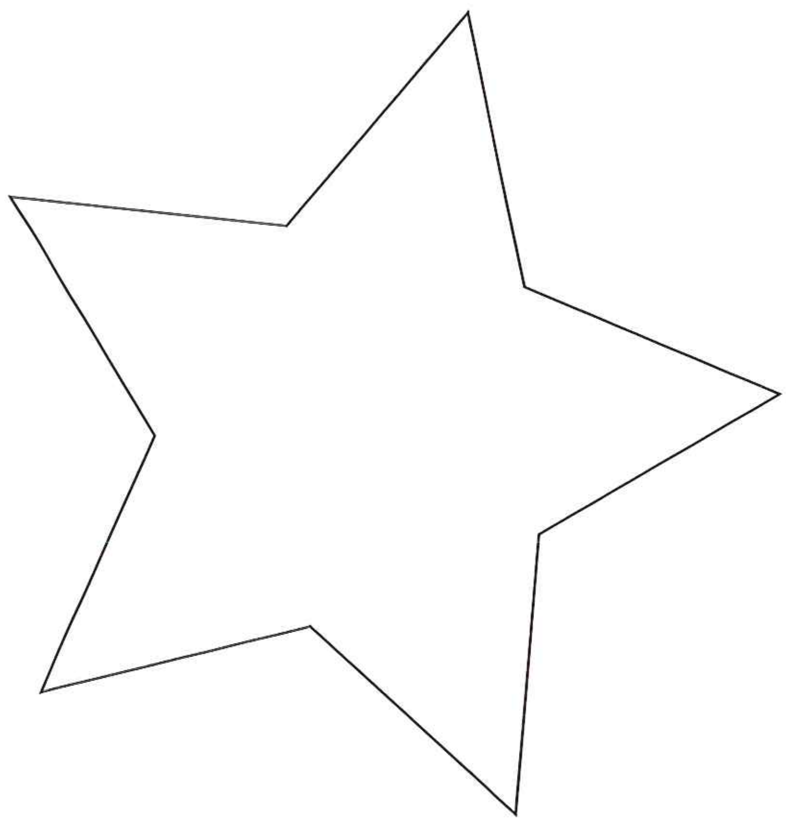
تدريبٌ ١

ارسمْ زاويةً باستخدامِ المنقلةِ قياسُها ٨٠°، ثمَّ نصِّفْها باستخدامِ المسطرةِ والفرجارِ، وتحققْ منْ صحةِ تنصيفِ الزاويةِ.

تمارينُ ومسائلُ

١) ارسمْ زاويةً قياسُها ٧٠°، ثمَّ نصِّفْها باستخدامِ المسطرةِ والفرجارِ، وتحققْ منْ صحةِ التنصيفِ باستخدامِ المنقلةِ.

٢) باستخدامِ الشفافياتِ، انقلِ الرسمَ الآتي على ورقةٍ، ثمَّ نصِّفْ زوايا رؤوسِهِ ولوِّنِ المساحاتِ الناتجةَ حتى تحصلَ على تصميمٍ فنيٍّ.



الدرس الرابع رسمُ دائرةٍ داخلَ مثلثٍ

النتاجاتُ

- تستكشفُ أنَّ منصفاتِ زوايا المثلثِ تتلاقى في نقطةٍ هيَ مركزُ الدائرةِ المرسومةِ داخلَهُ وتمسُّ أضلاعَهُ.
- ترسمُ دائرةً داخلَ مثلثٍ تمسُّ أضلاعَهُ.

نشاطٌ

١) ارسمْ مثلثًا.

٢) نَصِّفْ زواياهُ.

٣) مُدَّ منصفاتِ الزوايا حتى تلتقيَ في نقطةٍ، ولتكنْ م.

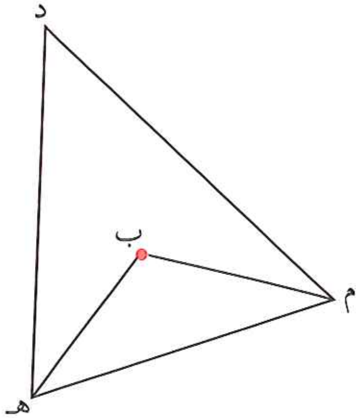
٤) أسقطْ عمودًا منَ النقطةِ م على أيِّ ضلعٍ فيها باستخدامِ المثلثِ القائمِ، ثمَّ سَمِّ نقطةَ تقاطعِ العمودِ معَ الضلعِ جـ.

٥) افتحِ الفرجارَ فتحةً مساويةً للمسافةِ بَيْنَ النقطتينِ م ، جـ ثمَّ ارسمْ دائرةً مركزُها م. ماذا تلاحظُ؟

قاعدةٌ

تلتقي منصفاتُ الزوايا في أيِّ مثلثٍ في نقطةٍ هيَ مركزُ الدائرةِ المرسومةِ، داخلهُ وتمسُّ أضلاعَهُ.

مثالٌ (١)



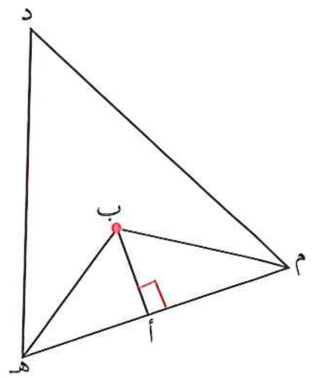
ارسمْ دائرةً داخلَ المثلثِ د م هـ.

الحلُّ

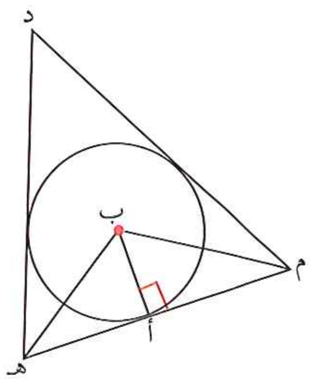
نتبّعُ الخطواتِ الآتيةَ:

١) نصّفِ الزاويةَ (م) ثم نصّفِ الزاويةَ (هـ) ليلتقيَ المنصفانِ في النقطةِ ب.

٢) أنزلْ عمودًا منَ النقطةِ (ب) إلى الضلعِ م هـ يلاقيهِ في أ

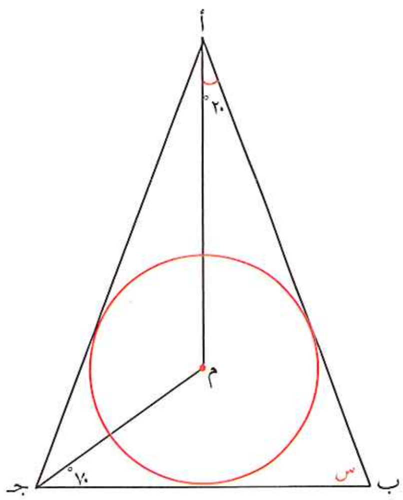


٣) افتحِ الفرجارَ فتحةً بطولِ ب أ وَارسمْ دائرةً.



تدريبٌ ١

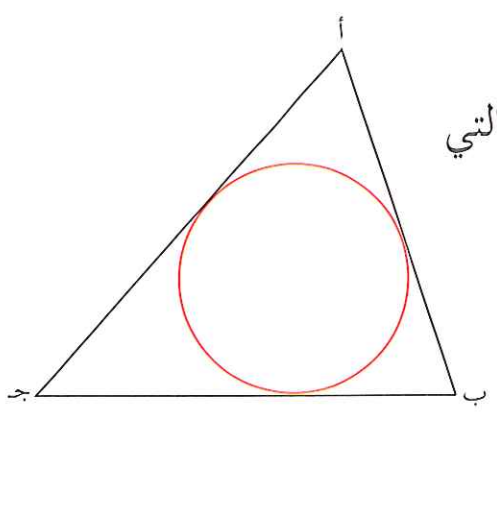
ارسمْ دائرةً تمسُّ أضلاعَ مثلثٍ قائمِ الزاويةِ.



تدريبٌ ٢

جِدْ قيمةَ س في الشكلِ، مبررًا إجابتَكَ،
علمًا بأنَّ م مركزُ الدائرةِ.

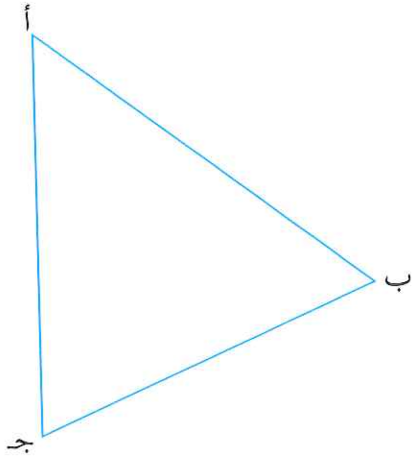
تدريبٌ ٣



كيفَ تحددُ مركزَ الدائرةِ المرسومةِ داخلَ المثلثِ التي تمسُّ أضلاعَهُ؟

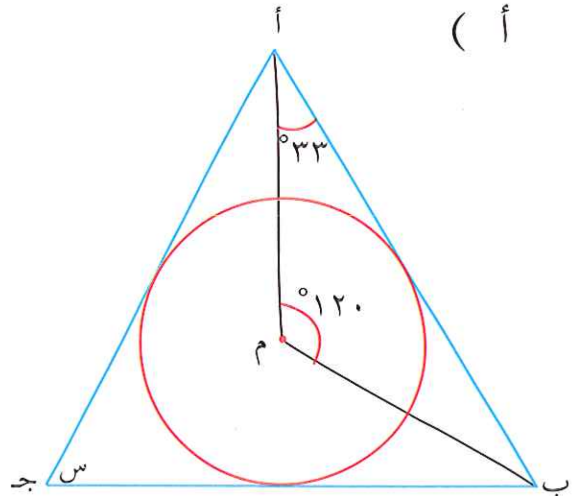
تمارينُ ومسائلُ

١) ارسمْ دائرةً داخلَ المثلثِ أ ب جـ وتمسُّ أضلاعَهُ.

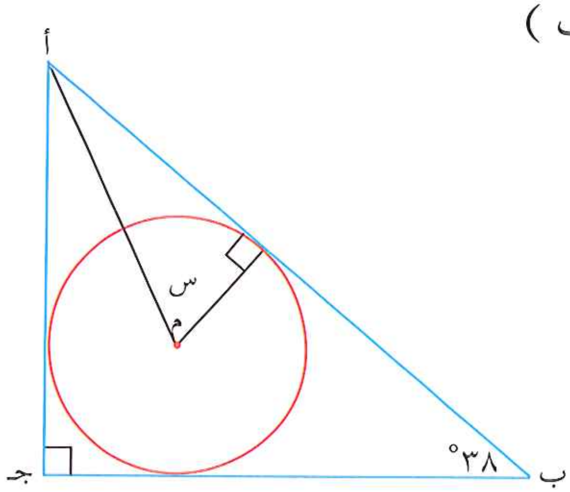


٢) جِدْ قيمةَ س في كلٍّ منَ الآتي، علمًا بأنَّ م مركزُ الدائرةِ المرسومةِ داخلَ المثلثِ:

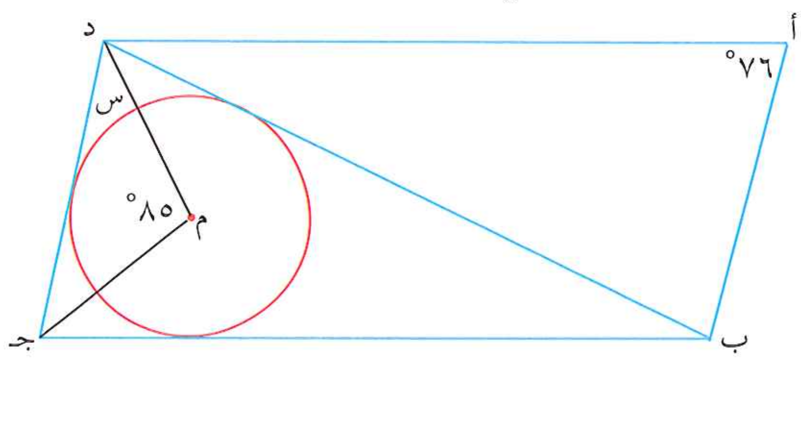
أ)



ب)



٣) الشكلُ أ ب جـ د متوازي أضلاعٍ، م مركزُ الدائرةِ، ما قيمةُ س؟



مراجعةٌ

١) ارسمْ مثلثًا مختلفَ الأضلاعِ على ورقِ مربعاتٍ، ثمَّ أسقط عمودًا منْ رأسِهِ على قاعدتِهِ.

٢) ارسمْ قطعةً مستقيمةً، ثمَّ نصِّفْها باستخدامِ المسطرةِ والفرجارِ.

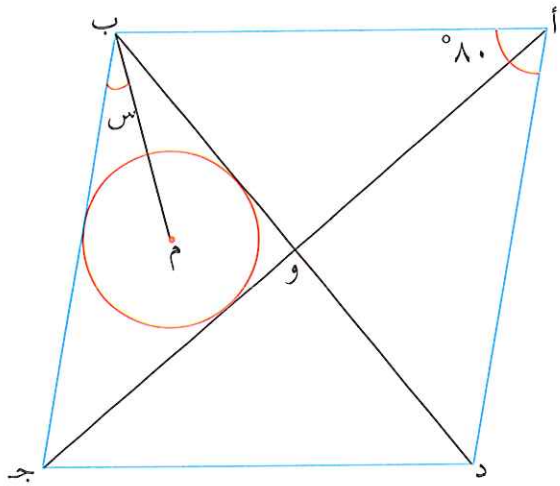
٣) ارسمْ مَعينًا على ورقِ مربعاتٍ، ثمَّ نفِّذِ الخطواتِ الآتيةَ :

أ) نصِّفْ زاويا المعينِ باستخدامِ المسطرةِ والفرجارِ .

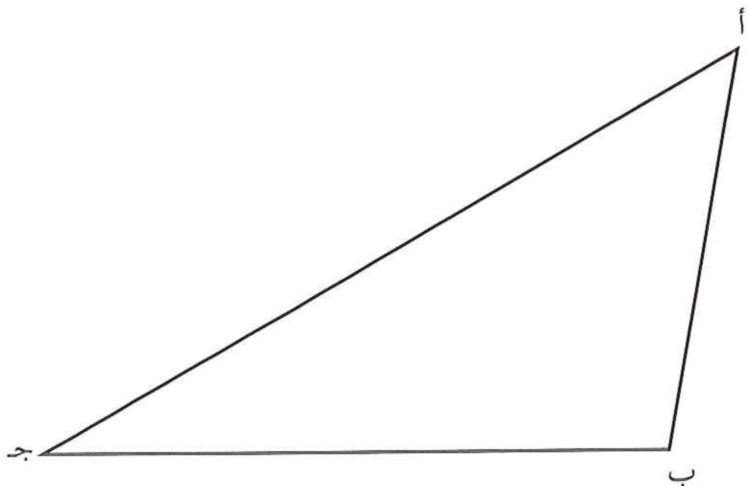
ب) مُدَّ مُنصِّفاتِ الزوايا حتى تتلاقى في نقطةٍ.

جـ) لَوِّنِ المساحاتِ الناتجةَ لتحصلَ على لوحةٍ فنيةٍ.

٤) فـي الشكـلِ المجاور أ ب جـ د مَعينًا، م مركزَ الدائرةِ المرسومةِ داخلَ المثلثِ ب و جـ وتمسُّ أضلاعَهُ، جدْ قيمةَ س.



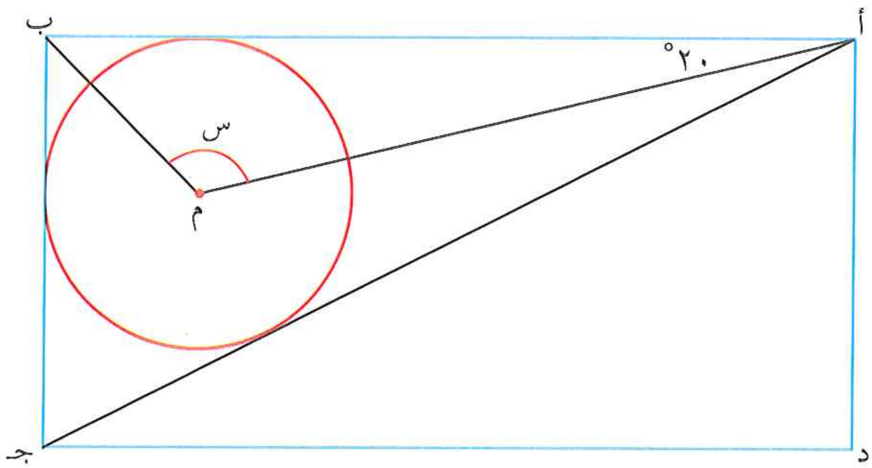
٥) ارسمْ دائرةً داخلَ المثلثِ في الشكلِ المجاور بحيثُ تمسُّ أضلاعَهُ.



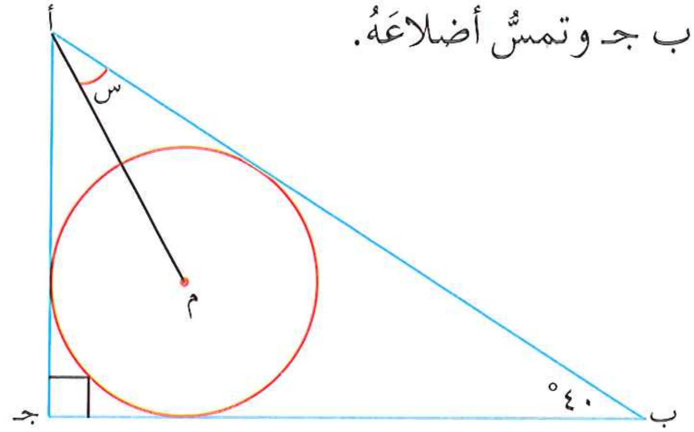
١) ارسمْ قطعةً مستقيمةً، حدِّدْ نقطةً عليها وسَمِّها ب ، ثمَّ أنشئْ عمودًا من ب على القطعةِ المستقيمةِ، باستخدامِ المسطرةِ والفرجارِ.

٢) ارسمْ مثلثًا مختلفَ الأضلاعِ، ثمَّ نصِّفْ إحدى زواياهُ .

٣) معتمدًا الشكلَ الآتي والذي يمثلُ المستطيلَ أ ب جـ د، إذا كانتْ م مركزَ الدائرةِ المرسومةِ داخلَ المثلثِ أ ب جـ فجدْ قيمةَ س.



٤) جِدْ قيمةَ س في الشكلِ الآتي، مبررًا إجابتَكَ، علمًا بأنَّ م مركزَ الدائرةِ المرسومةِ داخلَ المثلثِ أ ب جـ وتمسُّ أضلاعَهُ.



٧ الوحـــدةُ السابعةُ

المثـــلثـــاتُ

يُعَدُّ علمُ الهندسةِ منَ الفروعِ المهمةِ في الرياضياتِ، الذي أسهمَ في تطورِ العديدِ منَ العلومِ الأخرى كالعمارةِ والفيزياءِ والفلكِ ... إلخ ، وتُعَدُّ المثلثاتُ منَ الأشكالِ الهندسيةِ المهمّةِ في معظمِ العلومِ ؛ لذلكَ سندرسُ في هذهِ الوحدةِ المثلثاتِ بأنواعِها المختلفةِ، ونتعرفُ خصائصَها، وسيتمُّ التركيزُ على المثلثِ القائمِ الزاويةِ ومُبرهنةِ فيثاغورسَ.

اعتقدَ البعضُ أنَّ أولَ مَـنِ استخـدمَ مبرهنـةَ فيثـاغورسَ هـوَ العـالمُ فيثاغورسُ نفسُهُ، لكنَّ الوثائقَ التاريخيةَ تشيرُ إلى استخدامِ مثلثاتٍ قائمةٍ بأضلاعٍ أطوالُها أعدادٌ صحيحةٌ في العصورِ الحجريةِ ، وتأكَّدَ استخدامُها عندَ البابليـيـنَ، وعندَ المصريينَ القدماءِ؛ حيثُ كانـوا يستخدمونَ حبالًا ذاتَ ثـلاثَ عشرةَ عقدةً أثناءَ عملياتِ البنـاءِ وتقسيمِ الأراضي الزراعيةِ؛ بغيةَ الاستفادةِ منَ المسافاتِ الاثنتي عشرةَ الموجودةِ بَيْنَ العُقَدِ في إنشاءِ مثلـثٍ قائمٍ أطوالُ أضلاعِـهِ مثلَ (٣، ٤، ٥) ويحقـقُ مبرهنةَ فيتاغورسَ وسُمّيَ المثلثَ الذهبيَّ، ولكنَّ هذهِ المبرهنةُ لمْ تُعَمَّمْ على باقي المثلثاتِ القائمةِ إلى أنْ عَمّمها العالمُ فيثاغورسُ.

يتوقعُ منَ الطالبِ في نهايةِ هذهِ الوحدةِ أن يكونَ قادرًا على:

- استقصاءِ بعضِ العلاقاتِ والخصائصِ المتعلقةِ بأضلاعِ المثلثِ وزواياهُ.
- استقصاءِ خصائصِ المثلثِ متطابقِ الضلعينِ.
- تعرُّفِ الزاويةِ الخارجةِ للمثلثِ.
- استقصاءِ مبرهنةِ فيثاغورسَ للمثلثِ القائمِ الزاويةِ، والتطبيقِ عليها.
- استقصاءِ بعضِ النتائجِ الخاصةِ بالمثلثِ القائمِ الزاويةِ.
- توظيفِ الخصائصِ والعلاقاتِ المتعلقةِ بالمثلثِ في حلِّ مسائلَ حياتيةٍ.

الدرسُ الأولُ
خصائصُ المثلثِ (١)

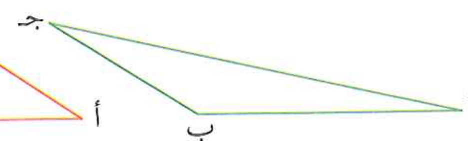
النتاجاتُ

- تستقصي علاقةَ أطوالِ أضلاعِ المثلثِ مع بعضِها.
- تستقصي علاقةَ أطوالِ أضلاعِ المثلثِ بقياساتِ زواياهُ.
- تستقصي خصائصَ المثلثِ متطابقِ الضلعينِ.

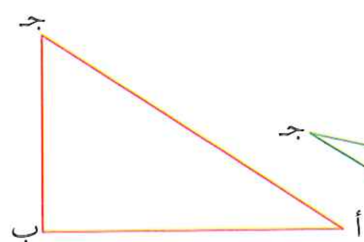
استنبتَ مهندسٌ زراعيٌّ زهرةَ السوسنِ في حوضٍ قاعدتُهُ على شكلِ مثلثٍ متطابقِ الضلعينِ، حيثُ يكونُ قياسُ زاويةِ الرأسِ فيه ثلاثةَ أمثالِ قياسِ زاويةٍ منْ زوايا القاعدةِ. احسبْ قياسَ زوايا الحوضِ.

نشاطٌ (١)

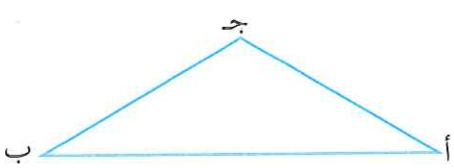
معتمدًا على الأشكالِ الآتيةِ أكملِ الجدولَ الذي يَليها مستخدمًا الأدواتِ الهندسيةَ المناسبةَ:



الشكلُ (١)



الشكلُ (٢)



الشكلُ (٣)

١)

الشكلُ	طولُ أ ب	طولُ ب جـ	طولُ أ جـ
١			
٢			
٣			

٢) جدْ مجموعَ طولَيْ أيِّ ضلعينِ في المثلثِ ، وقارنْهُ بطولِ الضلعِ الثالثِ.
ماذا تلاحظ؟

النتيجةُ (١)
مجموعُ طولَيْ أيِّ ضلعينِ في المثلثِ أكبرُ من طولِ الضلعِ الثالثِ.

مثالٌ (١)

هلْ يُمكنُ رَسمُ مُثلثٍ أَطوالُ أضلاعِهِ ٧سم ، ٨سم ، ٣سم؟ مبررًا إجابتَكَ.

الحلُّ

٧ < ٣ + ٨ ، ٨ < ٣ + ٧ ، ٣ < ٨ + ٧

لاحظْ أنَّ مجموعَ طولَيْ أيِّ ضلعينِ > طولِ الضلعِ الثالثِ.

إذنْ يُمكنُ رسمُ مثلثٍ أطوالُ أَضلاعِهِ ٧سم ، ٨سم، ٣سم.

التحققُ منْ صحةِ الحلِّ: ارسمِ المثلثَ.

تدريبٌ ١

أيُّ الأطوالِ الآتيةِ تمثِّلُ أَطوالَ أضلاعِ مثلثٍ؟ مبررًا إجابتَكَ.

١) ٤سم، ٦سم، ٦سم.

٢) ٨سم، ٣سم، ٥سم.

٣) ٢,٥سم، ٦,٥سم، ١٠سم.

فكِّرْ وناقشْ

هلْ يُمكنُ رسمُ مثلثٍ أطوالُ أضلاعِهِ ٨ سم، ٨سم، ١٦سم؟ برِّر إجابتَكَ.

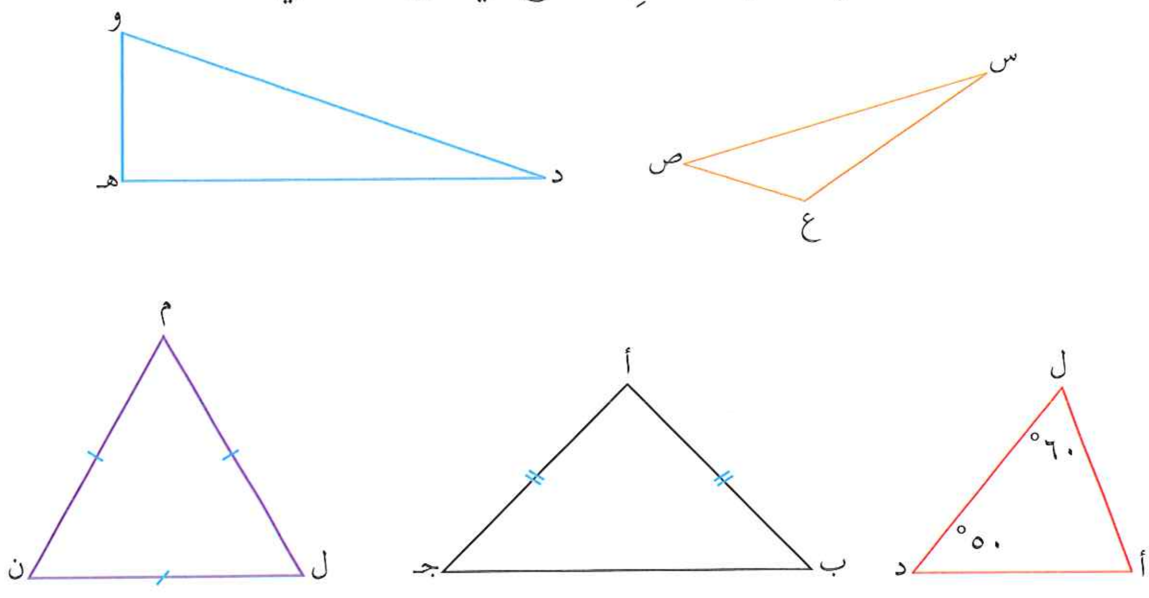
فكّرْ وناقشْ

ناقشِ العباراتِ الآتيةِ، مبررًا إجابتَكَ:

- مجموعُ طوليْ الضلعينِ الأصغرينِ في المثلثِ مختلفِ الأضلاعِ > طولِ الضلعِ الأكبرِ.
- كلُّ ثلاثِ قطعٍ متساويةٍ في الطولِ تصلُحُ لتشكيلِ مثلثٍ.

نشاطٌ (٢)

اعتمادًا على الأشكالِ الآتيةِ ، أكملِ الفراغَ في كلٍّ مما يأتي:



١) أكبرُ ضلعٍ في Δس ص ع ......، وأكبرُ زاويةٍ هيَ.......

٢) أصغرُ ضلعٍ في Δس ص ع هو ....، وأصغرُ زاويةٍ هيَ.......

٣) كرِّرِ الخطواتِ (١)، (٢)، لباقي المثلثاتِ.

ماذا تلاحظُ؟

النتيجةُ (٢)

الضلعُ الأكبرُ في أيِّ مثلثٍ يقابلُ الزاويةَ الكبرى، كذلكَ الضلعُ الأصغرُ يقابلُ الزاويةَ الصغرى.

حالاتٌ خاصةٌ:

- إذا تطابقتْ أضلاعُ مثلثٍ، فإن الزوايا تكونُ متطابقةً.
- إذا تطابقَ ضلعا مثلثٍ، فإنَّ زاويتَيْ القاعدةِ تكونانِ متطابقتينِ.

تدريبٌ ٢

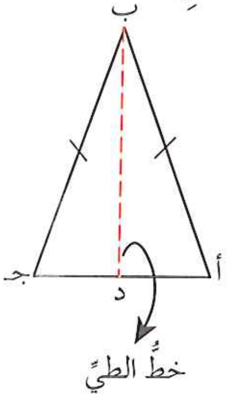
∆أ هـ س أطوالُ أضلاعِهِ أ هـ = ١١سم ، أ س = ١٥سم، هـ س = ٨سم، سمِّ الزاويةَ الكبرى، والزاويةَ الصغرى.

نشاطٌ (٣)

١) ارسمْ على ورقةٍ ∆أ ب جـ فيه أ ب = ب جـ، ثمّ قُصَّهُ.

٢) اطوِ المثلثَ على نفسِهِ من الرأسِ ب ، حيثُ ينطبقُ الرأسُ أ على الرأسِ جـ.

٣) ماذا تلاحظُ على كلٍّ منَ ∢أ ،∢جـ؟ ماذا نُسمِّي كلًّا من الزاويتينِ؟



٤) ارسمْ خطَّ الطيِّ وسَمِّهِ ب د.

٥) ماذا تلاحظُ على كلٍّ منَ ∢أ ب د ، ∢جـ ب د؟

٦) ما قياسُ ∢أ د ب؟

٧) باستخدامِ البيكارِ (الفرجارِ مدببِ الرأسينِ) قارنْ طولَ $\overline{\text{أد}}$ مع طولِ $\overline{\text{دجـ}}$ ، ماذا تلاحظُ ؟

٨) قارنِ النتائجَ التي توصلتَ إليها مع زملائِكَ، ماذا تلاحظُ؟

النتيجةُ (٣)

خصائصُ المثلثِ المتطابقِ الضلعينِ:

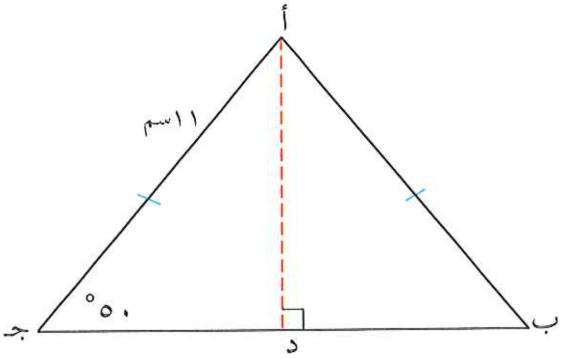
١) زاويتا القاعدةِ متطابقتانِ.

٢) القطعةُ المستقيمةُ الواصلةُ منْ رأسِ المثلثِ إلى منتصفِ قاعدتِه، تكونُ عموديةً على القاعدةِ، وتنصِّفُ زاويةَ الرأسِ.

٣) العمودُ النازلُ منْ رأسِ المثلثِ متطابقِ الضلعينِ على قاعدتِه، ينصِّفُها وينصِّفُ زاويةَ الرأسِ.

ما الفرقُ بَيْنَ خاصيةِ ٢، وخاصيةِ ٣؟

مثالٌ (٢)



في الشكلِ المجاورِ Δأ ب جـ متطابقُ الضلعينِ، إذا كانَ $\overline{\text{أد}}$ عمودًا على $\overline{\text{ب جـ}}$، جدْ كلاًّ مما يأتي مبررًا إجابتَكَ:

طولَ أ ب ، ق∢ب ، ق∢ب أ د.

الحلُّ

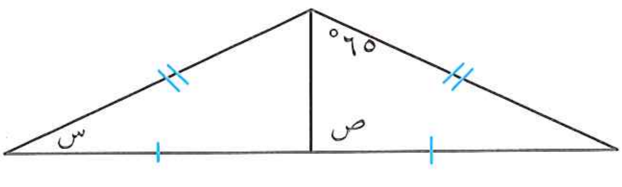
أ ب = ١١سم — المثلثُ متطابقُ الضلعين.

ق∢ب = ق∢جـ = ٥٠° — زوايا قاعدةٍ في المثلثِ متطابقِ الضلعينِ.

لإيجادِ ق∢ب أ د، نجدُ ق∢ب أ جـ = ١٨٠° − ١٠٠° = ٨٠° لماذا ؟

إذنْ ق∢ب أ د = ق∢جـ أ د = ٤٠° — العمودُ أ د نصَّفَ زاويةَ الرأسِ.

تدريبٌ ٣



جدْ ق∢ص، ق∢س في الشكلِ المجاورِ.

مبررًا إجابتَكَ، وبطريقتينِ مختلفتينِ.

تمارينُ ومسائلُ

١) أيُّ الأطوالِ في كلٍّ مما يأتي تمثلُ أطوالَ أضلاعِ مثلثٍ ؟ مبررًا إجابتَكَ.

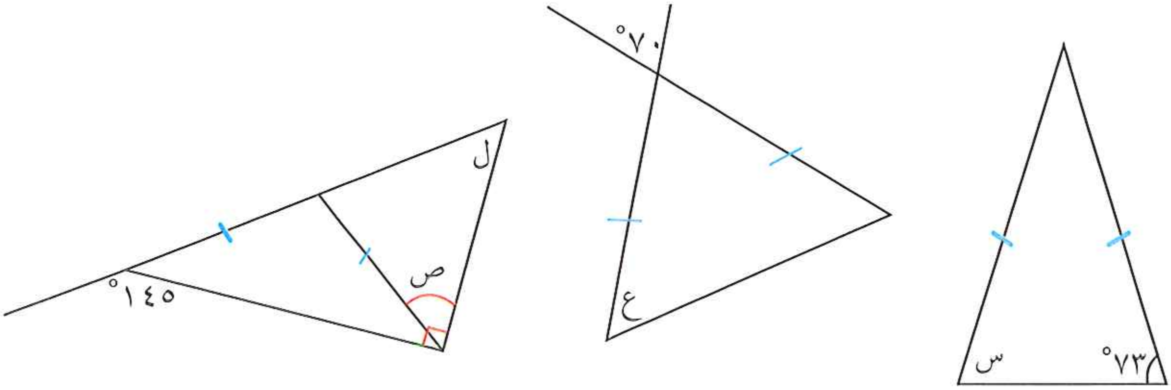
أ) ٢١ سم ، ١٣ سم ، ٢٦سم.

ب) ٦سم ، ١٠ سم ، ٨سم.

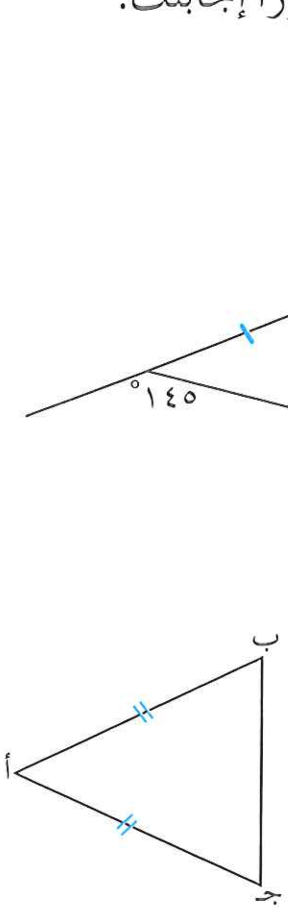
جـ) ١٨,٥سم ، ٥,٣سم ، ١٣,٢سم.

د) ٦سم ، ٦سم ، ٦سم.

٢) جدْ قِيَمَ الزوايا المجهولةِ في كلِّ شكلٍ منَ الأشكالِ الآتيةِ، مبررًا إجابتَكَ.



٣) حُلَّ المسألةَ الواردةَ بدايةَ الدرسِ.



٤) الشكلُ المجاورُ يبيِّنُ Δأ ب جـ فيه $\overline{أ ب} = \overline{أ جـ}$، ارسمْ خطًّا يقسمهُ إلى مثلثينِ متطابقينِ، مستخدمًا المسطرةَ والفرجارَ.

٥) اعتمادًا على خصائصِ المثلثِ المتطابقِ الضلعينِ، بَيِّنْ أنَّ قياسَ كلِّ زاويةٍ في المثلثِ المتطابقِ الأضلاعِ تساوي ٦٠°.

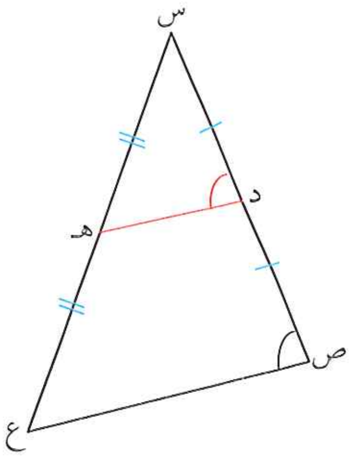
الدرسُ الثاني

خصائصُ المثلثِ (٢)

النتاجاتُ

- تستقصي بعضَ خصائصِ المثلثاتِ.

نشاطٌ (١)



١) ارسمْ مثلثًا وسمِّهِ س ص ع.

٢) نصِّفِ الضلعينِ س ص وَ س ع، وسمِّ النقاطَ المنصِّفةَ د، هـ على التوالي.

٣) صلِ القطعةَ المستقيمةَ دهـ.

٤) جدْ ق∡ س د هـ ، ق∡ س ص ع ، ماذا تلاحظُ؟

(تذكّر: الزاويتانِ∡س د هـ ، و ∡س ص ع في وضعِ تناظرٍ).

٥) جدْ ق∡ س هـ د ، ق∡ س ع ص، ماذا تلاحظُ ؟

٦) هلْ $\overline{\text{د هـ}}$ // $\overline{\text{ص ع}}$ ؟ برِّرْ إجابتَكَ.

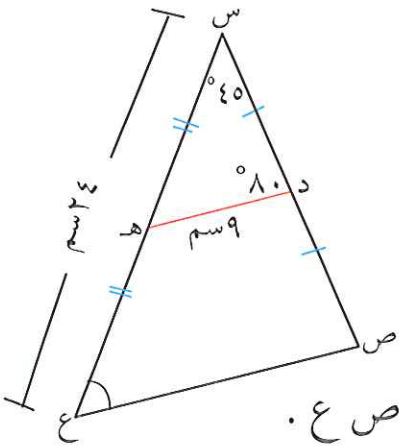
٧) قارنْ بينَ طولِ $\overline{\text{دهـ}}$، وطولِ $\overline{\text{ص ع}}$، ماذا تلاحظُ ؟

٨) قارنْ ما توصلتَ إليهِ بما توصلَ إليهِ زملاؤُكَ .

النتيجةُ (٤)

القطعةُ الواصلةُ بَيْنَ منتصَفيْ ضلعينِ في مثلثٍ توازي الضلعَ الثالثَ، وطولُها يُساوي نصفَ طولهِ.

مثالٌ (١)



في الشكلِ المجاورِ، جدْ كلًّا مما يأتي معَ التبريرِ:

ق∢ع ، طولَ هـ ع ، طولَ ص ع.

الحلُّ

لاحظْ أنَّ د هـ القطعةُ الواصلةُ بينَ منتصفَيْ ضلعينِ في Δس ص ع .

١) لإيجادِ ق∢ع:

ق∢س هـ د = ١٨٠° − (٨٠° + ٤٥°) — مجموعُ زوايا Δ س د هـ يساوي ١٨٠°

= ٥٥°

ق∢ع = ق∢س هـ د = ٥٥° — د هـ // ص ع ، إذنْ ∢ع تناظرُ ∢هـ

فكِّرْ بطريقةٍ أخرى لإيجادِ قياسِ ∢ع . معَ التبريرِ.

٢) طولُ هـ ع = $\frac{\text{س ع}}{٢}$ = $\frac{٢٤}{٢}$ = ١٢سم . — المعطياتُ س هـ = هـ ع

٣) طولُ ص ع = ٢× د هـ = ٢ × ٩ = ١٨سم . — النتيجةُ (٤) ، د هـ = $\frac{١}{٢}$ص ع

فكِّرْ وناقشْ

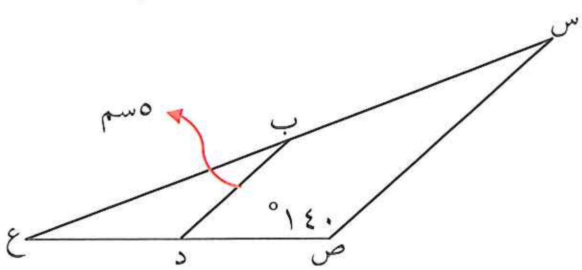
في مثالِ (١) هل يمكنُ أنْ يكونَ طولُ الضلعِ س د = ١٣سم ؟ برِّرْ إجابتَكَ .

تدريبٌ ١

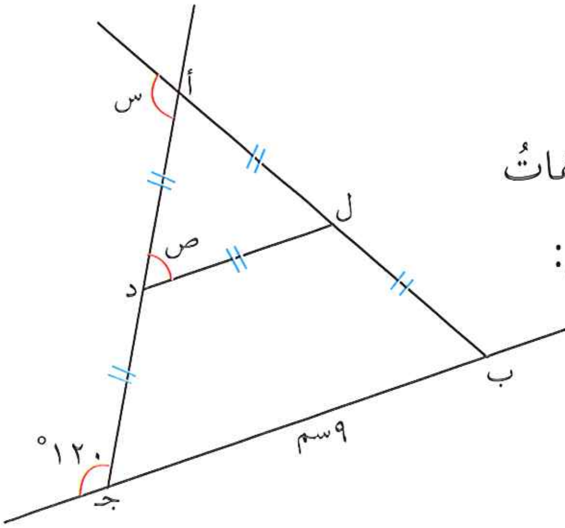
في الشكلِ المجاورِ؛ إذا علِمْتَ أنَّ ب د قطعةٌ مستقيمةٌ واصلةٌ بيْنَ منتصفي الضلعينِ ع ص، وَ ع س ، وأنَّ طولَها ٥ سم،

وأنَّ ق∢ ص= ١٤٠°.

فجدْ طولَ س ص ، ق∢ ب د ع مع التبريرِ.



تدريبٌ (٢)



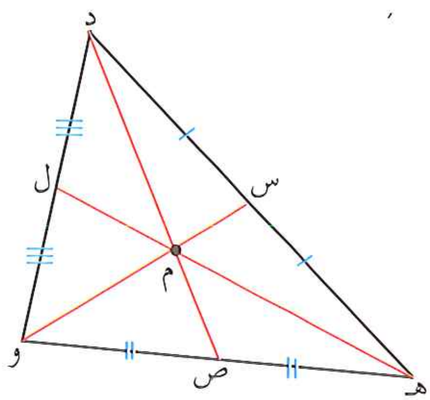
الشكلُ المجاورُ، يُمثِّلُ ∆أ ب جـ فيـه ل ، د منصِّفاتُ الأضلاعِ أب ، أ جـ على التوالي جدّ كلًّا مما يأتي:

طولَ أ ب ، طولَ د جـ ،

ق∡ص ، ق∡ س . معَ التبريرِ.

القطعةُ المتوسطةُ في المثلثِ هيَ قطعةٌ تصلُ رأسُ المثلثِ بمنتصفِ الضلعِ المقابلِ لهُ .

نشاطٌ (٢)



١) ارسمْ ∆د هـ و.

٢) نَصِّفِ الأضلاعَ الثلاثةَ، وسمِّ النقاطَ المنصفةَ س ، ص ، ل كما في الشكلِ المجاورِ.

٣) صِلِ القطعَ المتوسطةَ و س ، هـ ل ، د ص، ستتلاقى القطعُ المتوسطةُ الثلاثُ في النقطةِ م.

٤) باستخدامِ البيكارِ ، قارنْ بَيْنَ طولِ س م وطولِ و م ، وسجِّلِ النسبةَ الآتيةَ

و م : م س=............................

٥) كرِّر الخطوةَ (٤) للقطعِ د ص ، هـ ل .

٦) سجِّلْ ملاحظاتِكَ ، بكتابةِ كلٍّ منَ النسبِ الآتيةِ:

و م : م س=.................

هـ م : م ل =.................

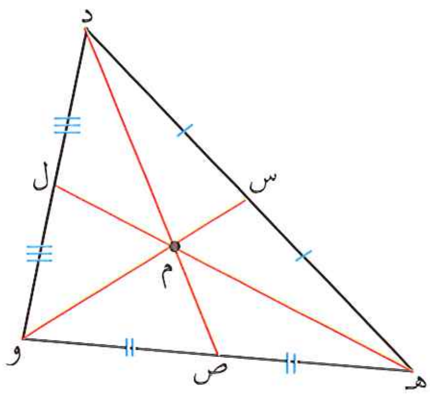
د م : م ص =.................

٧) قارنْ ما توصلتَ إليه بما توصلَ إليهِ زملاؤكَ .
ماذا تلاحظُ؟

النتيجةُ (٥)

القطعُ المتوسطةُ في المثلثِ تتلاقى في نقطةٍ واحدةٍ ، تقسِّمُ كلًّا منها بنسبةِ ٢ : ١ منْ جهةِ الرأسِ.

مثالٌ (٢)



في الشكلِ المجاورِ؛ إذا كانَ طولُ س م = ٥ سم ، وَطول د م = ١٢ سم ، فجدْ طولَ كلٍّ منْ : و م ، د ص .

الحلُّ

منَ الشكلِ نجدُ أنَّ م نقطةُ تلاقي القطعِ المتوسطةِ في Δد هـ و.

١) لإيجادِ طولِ و م ، نعتمدُ نتيجةَ (٥)

و م : م س = ٢ : ١

$\frac{\text{و م}}{\text{م س}} = \frac{٢}{١}$

$\frac{\text{و م}}{٥} = \frac{٢}{١}$ ⟵ و م = ١٠ سم.

٢) لإيجادِ طولِ د ص:

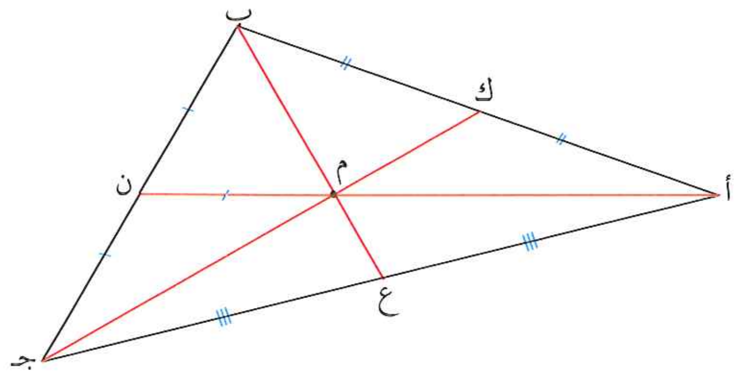
د ص = د م + م ص

لكنَّ د م = ١٢سم ، ومِنْهُ م ص = ٦سم . لماذا ؟

إذنْ د ص = ١٢ + ٦ = ١٨ سم.

تدريبٌ ٣

في الشكلِ الآتي، إذا علمتَ أنَّ أ ع = ٣,٨ سم ، أ م = ٢,٥سم، وأنَّ قياسَ ∢ن جـ م =٢٨°.



فجدْ كلاًّ منْ :

طولَ أ جـ ، طولَ أ ن ، طولَ ب جـ ، ق∢ جـ ن أ.

فكِّرْ وناقشْ

- في تدريبِ (٣) ، ادّعتْ آلاءُ :

(بما أنَّ Δن جـ م متطابقُ الضلعينِ، فإنَّ Δك م ب متطابقُ الضلعينِ أيضًا).

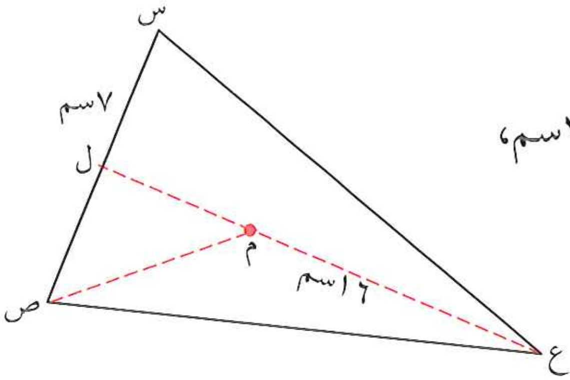
ناقشْ ادِّعاءَ آلاءَ وقدِّمْ تبريرًا.

- القطعةُ المتوسطةُ الواصلةُ بَيْنَ رأسِ المثلثِ متطابقِ الضلعينِ وقاعدتِهِ ، تكونُ عموديةً على القاعدةِ .

تمارينُ ومسائلُ

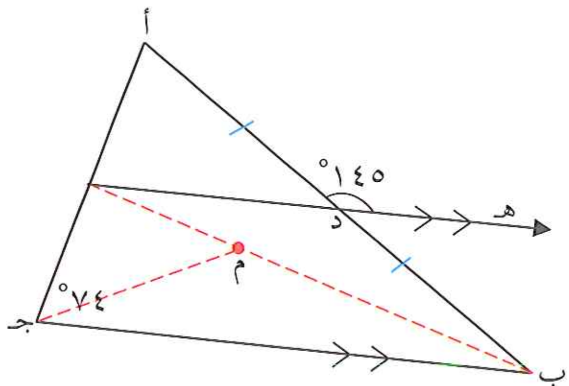
١) في الشكلِ المجاورِ، إذا كانتْ م نقطةُ تلاقي القطعِ المتوسطةِ، ع م = ١٦ سم ، س ل = ٧سم، فجدْ طولَ كلٍّ مما يأتي:

$\overline{\text{س ص}}$ ، $\overline{\text{ع ل}}$ ، مبررًا إجابتَكَ.



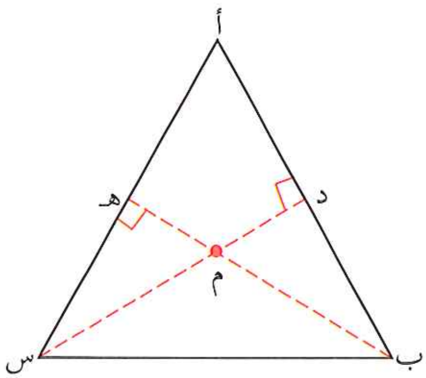
٢) معتمدًا على الشكلِ الآتي، إذا كانتْ م نقطةَ تلاقي القطعِ المتوسطةِ، وكانَ ق∢أ جـ ب = ٧٤°، ق∢أ د هـ = ١٤٥°.

فجدْ قياسَ كلٍّ منْ: ∢أ ب جـ ، ∢ أ. مبررًا إجابتَكَ .



٣) إذا كانتْ م نقطةُ تلاقي القطعِ المتوسطةِ في Δ أ ب س ، وكانتْ $\overline{\text{س د}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ب}}$، $\overline{\text{ب هـ}}$ ⊥ $\overline{\text{أ س}}$.

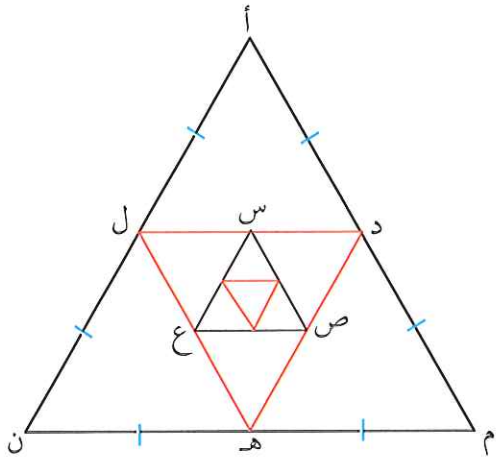
فَبيِّنْ أنَّ Δ أ ب س متطابقُ الأضلاعِ.



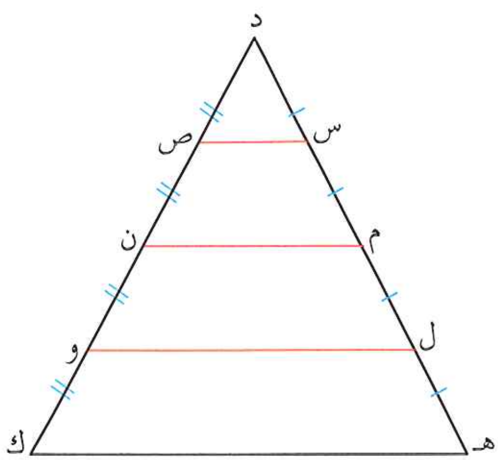
٤) معتمدًا الشكلَ الآتيَ، الذي يمثلُ Δ أ م ن متطابقُ الأضلاعِ ، وُصِلَت منتصفاتُ أضلاعهِ فتكوَّنَ Δ دهـ ل، كذلكَ وُصِلتْ منتصفــاتُ أضلاعِ Δد هـ ل؛ فَتَكــوَّنَ Δ س ص ع ، ثمَّ استمرَّتِ العمليةُ على النمطِ نفسِهِ:

أ) هلْ جميعُ المثلثاتِ الناتجةِ متطابقةُ الأضلاعِ؟

ب) معتمدًا الشكلَ الآتيَ، إذا علمتَ أنَّ طولَ ضلعِ Δأ م ن وحدةٌ واحدةٌ ، فجدْ محيطَ كلٍّ منْ: Δ أ م ن ، Δ د هـ ل ، Δ س ص ع.



٥) في الشكــلِ المجــاورِ Δ د هـ ك قُسِّــمَ ضلعاهُ $\overline{د هـ}$ ، $\overline{د ك}$ إلى أربعةِ أجزاءٍ متطابقةٍ، ما العلاقةُ بَيْنَ أطوالِ س ص ، هـ ك ؟

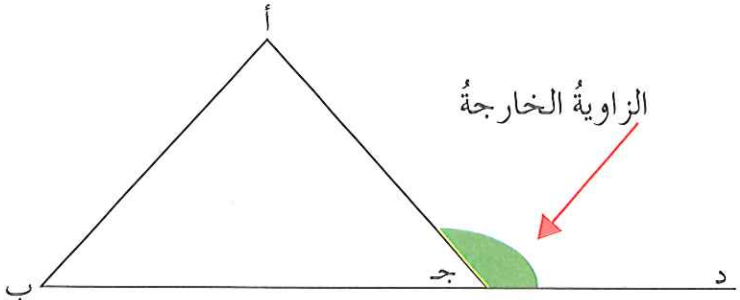


٦) اكتبْ مسألةً تستخدمُ في حلِّها إحدى النتائجِ التي توصلْنا إليها في الدرسِ، ثمَّ حُلَّها.

الدرسُ الثالثُ الزاويةُ الخارجةُ للمثلثِ

النتاجاتُ

- تتعرفُ الزاويةَ الخارجةَ للمثلثِ.



اعتمادًا على الشكلِ المجاورِ،

أجبْ عمَّا يأتي:

١) ما المقصودُ بالزاويةِ الخارجةِ للمثلثِ ؟

٢) ما العلاقةُ بَيْنَ قياسِ الزاويةِ الخارجةِ للمثلثِ وَ قياسِ∡أ جـ ب؟

٣) ارسمْ زاويةً خارجةً أخرى للمثلثِ ومجاورةً لـ ∡ أ جـ ب.

٤) ما علاقةُ الزاويةِ الناتجةِ من (٣) بالزاويةِ الخارجةِ الموضحةِ في الرسمِ.

٥) ما عددُ الزوايا الخارجةِ والمختلفةِ القياسِ للمثلثِ الواحدِ؟

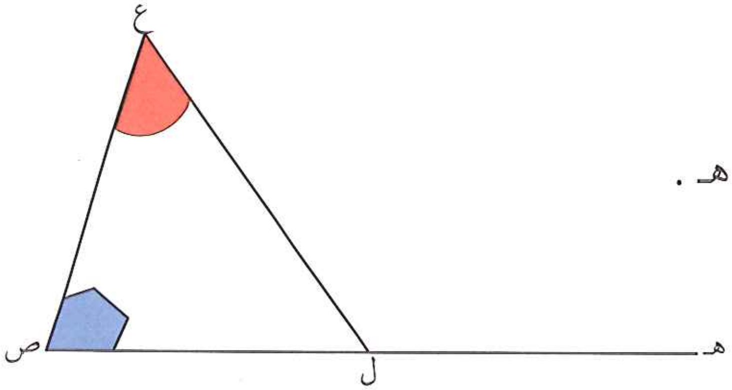
إذا مُدَّ أحدُ أضلاعِ المثلثِ على استقامتِهِ ، فإنَّ الزاويةَ المحصورةَ بَيْنَ امتدادِ هذا الضلعِ والضلعِ المجاورِ تُسمى **الزاويةَ الخارجةَ**.

نشاطٌ

١) ارسمْ Δص ع ل.

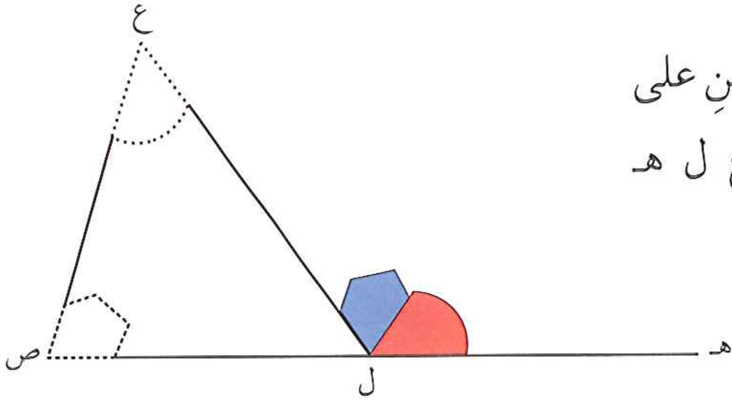
٢) عيِّنِ الزاويةَ الخارجيةَ ∡ع ل هـ .

٣) لوِّنِ الزاويتينِ ∡ص ، ∡ع كما في الشكلِ (١)، ثمَّ قصَّ كلًّا منهُما.



الشكلُ (١)

٤) اجعلْ رأسَ كلٍّ منَ الزاويتينِ على رأسِ الزاويةِ الخارجةِ ع ل هـ كما في الشكلِ (٢).



الشكلُ (٢)

ماذا تلاحظُ ؟

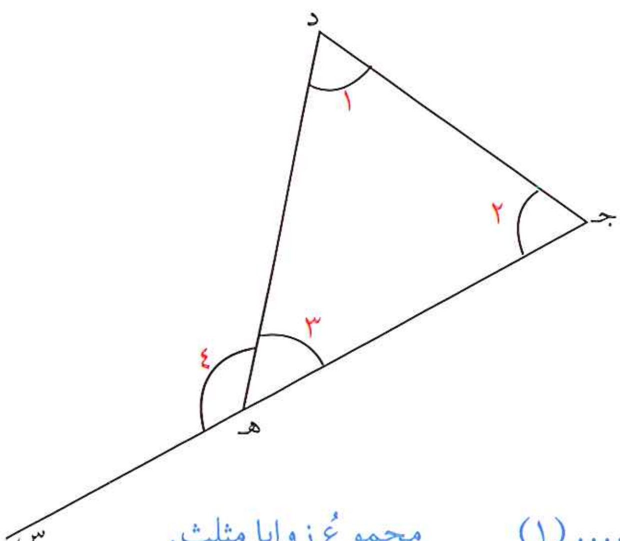
النتيجةُ (٦)

قياسُ الزاويةِ الخارجةِ للمثلثِ يساوي مجموعَ قياسَيِ الزاويتينِ الداخليتينِ البعيدتينِ.

لبرهنةِ النتيجةِ السابقةِ؛ نحدِّدُ المعطياتِ والمطلوبَ إثباتُهُ ثمَّ نبدأُ بخطواتِ البرهانِ.

المعطياتُ

نرسمُ مثلثًا ليكُنْ د جـ هـ، ونحددُ لهُ زاويةً خارجةً، كما في الشكلِ المجاورِ.



المطلوبُ

إثباتُ أنَّ ق∢٤ = ق∢١+ ق∢٢

البرهانُ

ق∢ ٣ + ق∢ ٢ + ق∢ ١ = ١٨٠° .... (١) مجموعُ زوايا مثلثٍ.

ق∢٣ + ق∢٤ = ١٨٠° ....(٢) جـ هـ س زاويةٌ مستقيمةٌ.

بطرحِ معادلةِ (٢) منْ معادلةِ (١) ينتجُ أنَّ:

ق∢ ٢ + ق∢ ١ − ق∢ ٤ = صفراً لماذا؟

أيْ أنَّ

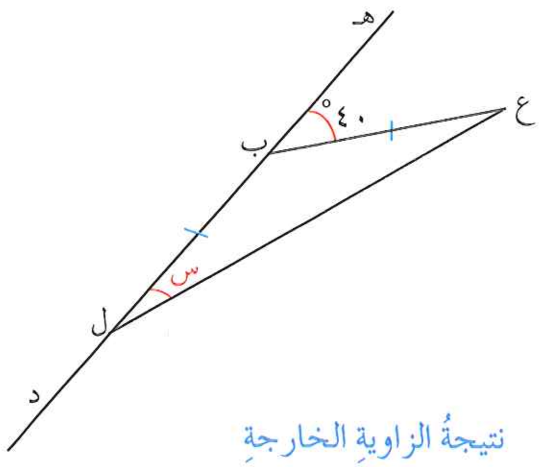
ق∢٢ + ق∢١ = ق∢٤ وهوَ المطلوبُ.

تدريبٌ ١

Δ أ ب جـ فيهِ ق∡ أ = ٧٥° ، ∡ أ ب د خارجةٌ للمثلثِ وقياسُها يساوي ١٣٧°. جد قياساتُ زوايا المثلثِ ؟ برِّرْ خطواتِ حلِّكَ ، ثمَّ تحققْ منْ صحةِ الحلِّ.

(حُلَّ التدريبَ بطريقتينِ مختلفتينِ) .

مثالٌ (١)



جدْ ق∡د ل ع في الشكلِ المجاورِ .

برِّرْ إجابتَكَ ، ثمَّ تحققْ منْ صحةِ الحلِّ.

الحلُّ

بما أنَّ ∡ هـ ب ع خارجةٌ للمثلثِ ؛ فإنَّ

ق∡ هـ ب ع = ق∡ ب ل ع + ق∡ ب ع ل. نتيجةُ الزاويةِ الخارجةِ

أيْ أنَّ: ٤٠° = س + س Δ ب ع ل متطابقُ الضلعينِ

س = ٢٠°

ق∡ د ل ع = ١٨٠° − ٢٠° = ١٦٠° لماذا ؟

التحققُ منْ صحةِ الحلِّ:

ق∡ ع ب ل = ١٤٠° لماذا؟

ق∡ ع = ٢٠° مثلثٌ متطابقُ الضلعينِ.

ق∡ د ل ع = ق∡ب ع ل + ق∡ ع ب ل

= ٢٠° + ١٤٠° = ١٦٠°

فكِّرْ وناقشْ

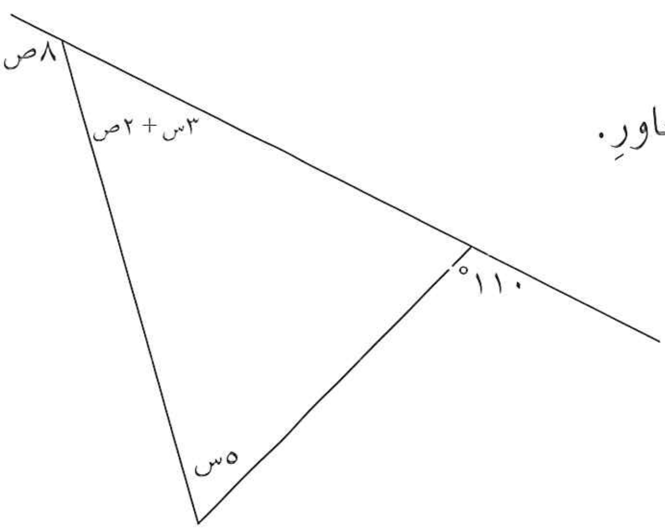
ادّعتْ مريمُ ما يأتي:

- إذا كانتْ لمثلثٍ زاويةٌ خارجةٌ منفرجةٌ ، فإنَّ المثلثَ حادُّ الزوايا.
- إذا كانتْ لمثلثٍ زاويتانِ خارجتانِ منفرجتانِ ، فإنَّ المثلثَ حادُّ الزوايا.
- الزاويةُ الخارجةُ للمثلثِ أكبرُ منْ أيِّ زاويةٍ داخليةٍ ما عدا المجاورةَ لها.

ناقشْ ادِّعاءاتِ مريمَ مقدمًا تبريرًا .

فكِّرْ وناقشْ

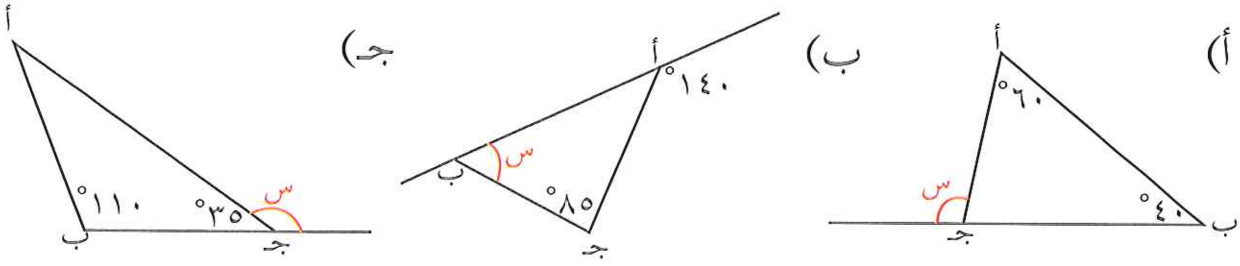
جدْ قيمةَ كلٍّ مِنْ س ، ص في الشكلِ المجاورِ.



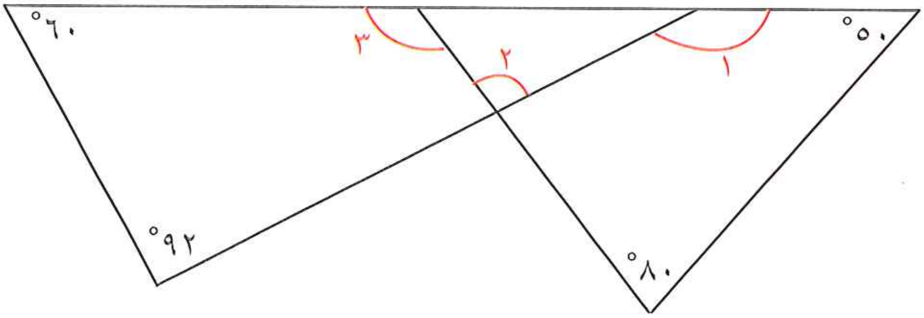
فكِّرْ وناقشْ

- ما مجموعُ قياساتِ جميعِ الزوايا الخارجةِ للمثلثِ؟
- ما مجموعُ قياساتِ جميعِ الزوايا الخارجةِ للشكلِ الرباعيِّ؟

١) جدْ قيمةَ الزاويةِ س في كلٍّ مما يأتي :

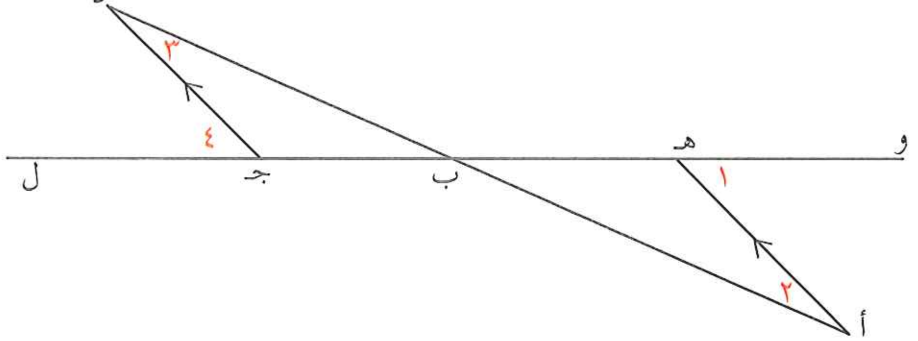


٢) جدْ قياسَ الزوايا ١ ، ٢ ، ٣ في الشكلِ الآتي:



٣) إذا كانَ قياسُ الزاويةِ الخارجةِ لمثلثِ ١١٧° ، وقياسُ الزاويتينِ الداخليتينِ البعيدتيْنِ لهُ ٢س^{٢} + ٧ ، ٦١ − س^{٢} . فجدْ قيمةَ س.

٤) إذا كانتْ أهـ // جـ د في الشكلِ الآتي، بَيِّنْ أنَّ ق∢١ = ق∢٤ .



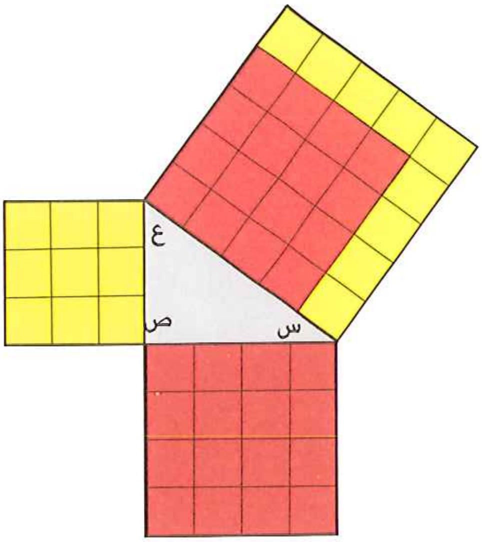
مبرهنةُ فيثاغورسَ

النتاجاتُ

- تستقصي مبرهنةَ فيثاغورسَ للمثلثِ القائمِ.

نشاطٌ (١)

معتمدًا على الشكلِ المجاورِ، أجبْ عنْ كلٍّ مما يأتي:



١) ما نوعُ المثلثِ الممثلِ في الشكلِ؟

٢) ما مساحةُ المربعِ المنشأ على ضلعِ القائمةِ الأولى؟

٣) ما مساحةُ المربعِ المنشأ على ضلعِ القائمةِ الثانيةِ؟

٤) ما مساحةُ المربعِ المنشأ على الوترِ؟

ماذا تلاحظُ؟

مبرهنةُ فيثاغورسَ:

في المثلثِ القائمِ الزاويةِ؛

- مساحةُ المربعِ المنشأ على الوترِ يساوي مجموعَ مساحتيْ المربعينِ المنشأينِ على الضلعينِ الآخرينِ.

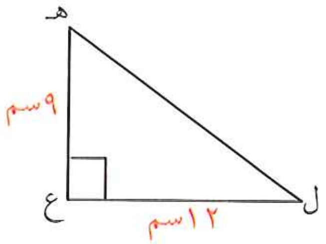
وهذا يعني أنَّ مربعَ طولِ الوترِ يساوي مجموعَ مربعَيْ طولَيْ الضلعينِ الآخرينِ.

- أيْ أنَّ (طولَ الوترِ)^{٢} = (طولَ الضلعِ الأولِ)^{٢} + (طولُ الضلعِ الثاني)^{٢}

مثالٌ (١)

Δ هـ ع ل قائمُ الزاويةِ في ع فيهِ هـ ع = ٩سم ، ع ل = ١٢ سم ، احسبْ طولَ هـ ل.

الحلُّ



بما أنَّ Δ هـ ع ل قائمُ الزاويةِ نطبقُ مبرهنةَ فيثاغورسَ.

(طولُ الوترِ)^٢ = (طولَ الضلعِ الأولِ)^٢ + (طولُ الضلعِ الثاني)^٢

(هـ ل)^٢ = (هـ ع)^٢ + (ع ل)^٢

= (٩)^٢ + (١٢)^٢ = ٢٢٥

هـ ل = $\pm\sqrt{٢٢٥}$ ولكن $-\sqrt{٢٢٥}$ مرفوضٌ. لماذا ؟

$\therefore$ هـ ل = $\sqrt{٢٢٥}$ = ١٥ سم.

تدريبٌ ١

١) Δ س ل ع قائمُ الزاويةِ في ل فيه س ل = ١سم، ع ل = ١سم. احسبْ طولَ س ع.

٢) Δ أ ب جـ قائمُ الزاويةِ في ب فيهِ أ جـ = ١٠ سم ، ب جـ = ٨سم احسبْ طولَ أ ب.

فكِّرْ وناقشْ

إذا كانَ الشكلُ المُنشأُ على كلِّ ضلعٍ منْ أضلاعِ المثلثِ القائمِ نصفَ دائرةٍ، فهلْ مساحةُ نصفُ الدائرةِ المنشأةِ على الوترِ تساوي مجموعَ مساحتَيْ نصفَي الدائرتينِ المنشأتينِ على الضلعينِ الآخرينِ؟ برِّرْ إجابتَكَ .

نشاطٌ (٢)

Δ أ ب جـ فيه ب أ = ٣سم ، أ جـ = ٤سم ، ب جـ = ٥سم :

١) قارنْ بينَ مربعِ الضلعِ الأكبرِ ومجموعِ مربعيْ الضلعينِ الأصغرينِ.

٢) ارسمِ المثلثَ.

٣) سمِّ الزاويةَ المقابلةَ للضلعِ الأكبرِ ، ثمَّ قمْ بقياسِها، ما نوعُ المثلثِ الناتجِ؟

٤) كرِّرِ الخطواتِ السابقةَ لكلٍّ منَ المثلثينِ؛

أ) Δ د هـ و فيه د هـ =١٣سم، هـ و =٥سم ، دو= ١٢سم.

ب) Δ س ع ك فيه س ع = ٨سم ، ع ك = ١٠ سم ، س ك = ٦سم.

ماذا تلاحظُ؟

نتيجةٌ

إذا كانتْ مساحةُ المربعِ المنشأ على ضلع مثلث يساوي مجموعَ مساحتيْ المربعينِ المنشأينِ على ضلعيْ المثلثِ الآخرينِ ، فإنَّ المثلثَ قائمُ الزاويةِ .

مثالٌ (٢)

بَيِّنْ إذا كانَ المثلثُ الذي أطوالُ أضلاعِهِ ١٥ دسم ، ٢٠ دسم ، ٢٥ دسم قائمُ الزاويةِ.

الحلُّ

نجدُ مربعاتِ أطوالِ الأضلاعِ:

$(١٥)^{٢} = ٢٢٥$ ، $(٢٠)^{٢} = ٤٠٠$ ، $(٢٥)^{٢} = ٦٢٥$

بما أنَّ ٢٢٥ + ٤٠٠ = ٦٢٥، إذنِ المثلثُ قائمُ الزاويةِ.

تدريبٌ ٢

بَيِّنْ أيُّ الأطوالِ الآتيةِ تمثلُ أطوالَ أضلاعِ مثلثٍ قائمِ الزاويةِ:

١) ٤ سم ، ٨سم ، ١١سم.
٢) ٣٠ سم ، ٤٠ سم ، ٥٠سم.
٣) ١٠ سم ، ٩سم ، ١٣سم.
٤) ٣سم ، ٣سم ، ٣$\sqrt{٢}$سم.

فكِّرْ وناقشْ

- ما العلاقةُ بَيْنَ مساحاتِ المربعاتِ المنشأةِ على أضلاعِ المثلثِ حادِّ الزوايا؟
- ما العلاقةُ بَيْنَ مساحاتِ المربعاتِ المنشأةِ على أضلاعِ المثلثِ منفرجِ الزاويةِ؟
- هلْ تستطيعُ أنْ تتنبأَ بنوعِ المثلثِ منْ حيثُ الزوايا دونَ رسمِهِ، وباستخدام مبرهنةِ فيثاغورسَ؟ برِّر إجابتَكَ.

نشاطٌ (٣)

(المثلثُ الثلاثينيُّ الستينيُّ).

١) ارسمْ Δ أ ب جـ قائمَ الزاويةِ في ب، فيه ق∢ أ = ٣٠°، ق∢ جـ = ٦٠°.

٢) باستخدامِ البيكارِ قارنْ طولَ الضلعِ المقابلِ للزاويةِ ٣٠° معَ طولِ الوترِ أ جـ، ماذا تلاحظُ ؟

٣) قارنْ ما توصلتَ إليهِ بما توصلَ إليهِ زملاؤُكَ. ماذا تلاحظُ ؟

نتيجةٌ

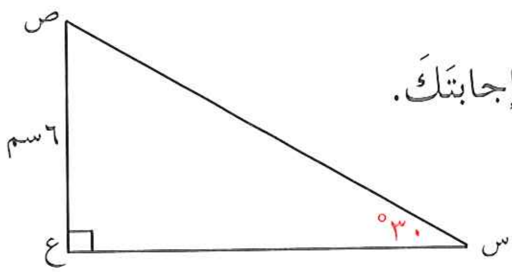
طولُ الضلعِ المقابلِ للزاويةِ ٣٠° في المثلثِ الثلاثينيِّ الستينيِّ يساوي نصفَ طولِ الوترِ.

فكّرْ وناقشْ

ما علاقةُ طولِ الضلعِ المجاورِ للزاويةِ ٣٠° بطولِ الوترِ؟

تدريبٌ (٣)

في الشكلِ المجاورِ جدْ طولَ الضلعِ س ع ، مبررًا إجابتَكَ.



نشاطٌ (٤)

١) ارسمْ Δ د هـ و قائمَ الزاويةِ في هـ.

٢) نصِّفِ الوترَ كما تعلمتَ سابقًا، وسمِّ نقطةَ المنتصفِ جـ.

٣) صلْ رأسَ القائمةِ معَ النقطةِ جـ ، ثمَّ قارنْ طولَ هـ جـ بطولِ الوترِ د و. ماذا تلاحظُ؟

٤) قارنْ ما توصلتَ إليهِ بما توصلَ إليهِ زملاؤُكَ، ماذا تلاحظُ؟

نتيجةٌ

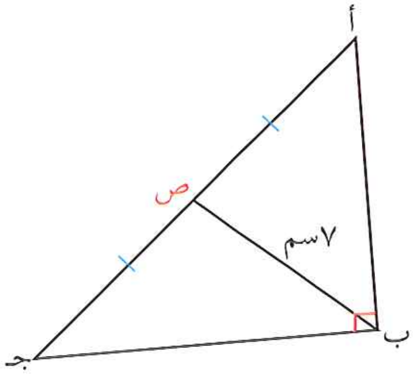
طولُ القطعةِ المستقيمةِ الواصلةِ بَيْنَ رأسِ القائمةِ ومنتصفِ الوترِ في المثلثِ القائمِ الزاويةِ، يساوي طولَ نصفِ الوترِ.

مثالٌ (٣)

Δ أ ب جـ قائمُ الزاويةِ في ب، النقطةُ ص منتصفُ الوترِ أ جـ، إذا كانتْ ب ص = ٧سم، فما طولُ الوترِ؟

الحلُّ

نرسمُ رسمًا توضيحيًّا



أ جـ = ٢ × ب ص (نتيجة)

∴ أ جـ = ١٤سم.

تدريبٌ ٤

Δص ع ل قائمُ الزاويةِ في ع ، النقطةُ د منتصفُ ص ل ، ق∡ ص د ع = ١١٠° ، احسبْ ق∡ ص.

فكّرْ وناقشْ

تُسمى الأضلاعُ ٣، ٤، ٥ ثلاثيَة فيثاغورسَ ، لأنَّها تحققُ مبرهنةَ فيثاغورسَ.

أوجدْ مجموعتينِ على الأقلِّ من ثلاثياتِ فيثاغورسَ.

تمارينُ ومسائلُ

١) أيٌّ مما يأتي تمثِّلُ أطوالَ أضلاعِ مثلثٍ قائمِ الزاويةِ :

أ) ٣ سم ، ٥سم ، ٩سم.
ب) ٥ سم ، ١٢سم ، ١٣سم.

جـ) ٢٠ سم ، ٢٤ سم ، ٢٥سم.
د) ١٢ دسم ، ٢١ دسم ، ١٥ دسم .

هـ) ٥دسم ، ١٠ دسم ، $\sqrt{٧٥}$ دسم.
و) ٢٠سم ، ١٢سم ، ١٦سم .

٢) جدْ طولَ الضلعِ الثالثِ في كلِّ مما يأتي:

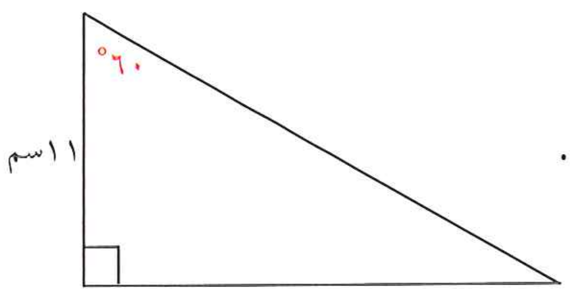
أ) Δ س د ب قائمٌ في د فيهِ س د = ١٥ سم ، دب = ٨سم .

ب) Δ م ن ل قائمٌ في ن فيهِ م ن =١سم ، ن ل = $\sqrt{٣}$ سم .

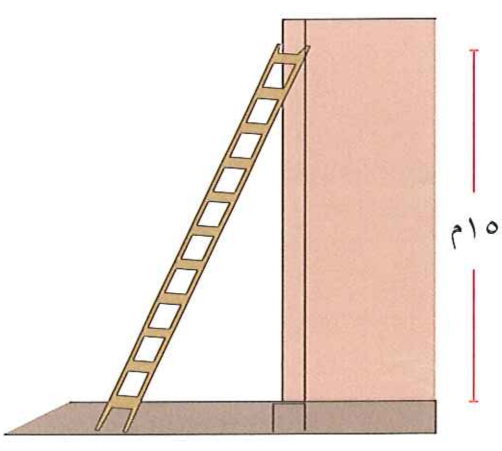
جـ) مثلثٌ قائمُ الزاويةِ طولُ أحدِ أضلاعِهِ ٠,٧ سم ، وطولُ وترِهِ ٢,٥سم .

٣) Δ د هـ و متطابقُ الضلعينِ طولُ ضلعِهِ ٢٥سم، وطولُ قاعدتِهِ ٤٠ سم، جدْ ارتفاعَهُ.

٤) مثلثٌ قائمُ الزاويةِ متطابقُ الضلعينِ، طولُ وترِهِ يساوي ١٠$\sqrt{٢}$ سم، جدْ طولَ كلٍّ من الضلعينِ الآخرينِ.



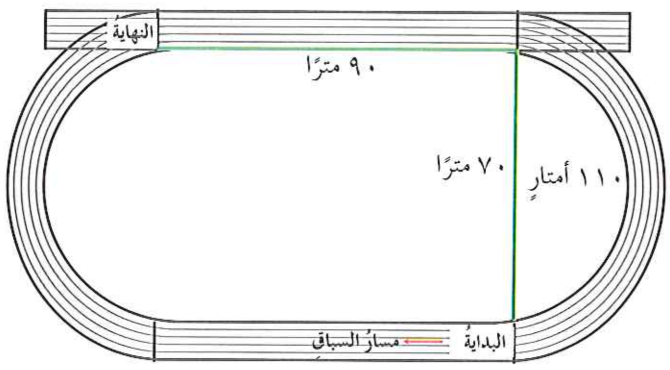
٥) احسبْ محيطَ المثلثِ في الشكلِ المجاورِ .



٦) يحتاجُ أحدُ رجالِ الإنقاذِ إلى تثبيتِ سُلَّم على نافذةٍ ترتفعُ عن الأرضِ ١٥م، إذا علمْتَ أنَّ منْ شروطِ السلامةِ أنْ تكونَ المسافةُ بَيْنَ قاعدةِ السلمِ والمبنى بمقدارِ ربعِ طولِ السلمِ تقريبًا، فَجدِ المسافةَ التقريبيةَ لبُعْدِ قاعدةِ السلمِ عنِ البنايةِ.

٧) س ص ع مثلثٌ قائمُ الزاويةِ في ص ، النقطـةُ ب منتصـفُ س ع، جـ منتصـفُ ص ع. أَثبتْ أنَّ $\overline{\text{ب جـ}} \perp \overline{\text{ص ع}}$.

٨) تأملِ الشكلَ الذي يمثلُ مضمارَ سباقٍ، ثمَّ أجبْ عنِ الأسئلةِ التي تليهِ:

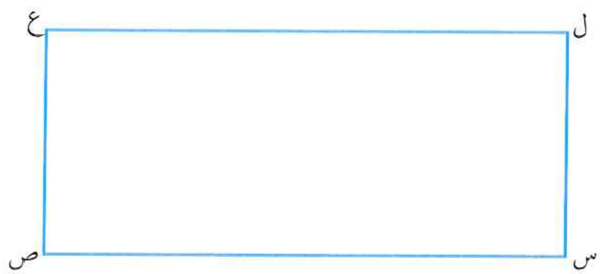


مضمار سباق

أ) احسبِ المسافةَ التي يقطعُها اللاعبُ منْ خطِّ البدايةِ إلى خطِّ النهايةِ.

ب) حددْ على الشكلِ إزاحةَ اللاعبِ، ثمَّ احسبْ مقدارَها.

٩) دوريةُ شرطةٍ تطاردُ عصابةَ مهربينَ وقفتْ في منطقةٍ على شكلِ المستطيلِ س ص ع ل (س ص = ٦ كم، ص ع = ٣كم) ، جدْ مقدارَ كلٍّ منَ المسافةِ والإزاحةِ التي تفصلُ بينَ الدوريةِ والعصابةِ في الحالاتِ التاليةِ، معَ تحديدِ اتجاهِ الإزاحةِ:



أ) إذا تحركتِ الدوريةُ منْ س إلى ص باتجاهِ عكسِ عقاربِ الساعةِ.

ب) إذا تحركتِ الدوريةُ منْ س إلى ل ثمَّ إلى ع

١٠) عيّنِ العددَ الحقيقيَّ $\sqrt{٢}$ على خطِّ الأعدادِ باستخدامِ مبرهنةِ فيثاغورسَ.

١١) تحدَّثْ: عن حالاتِ استخدامِ مبرهنةِ فيثاغورسَ.

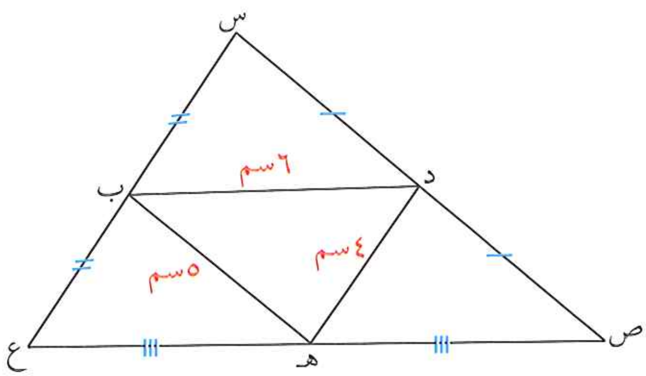
مراجعةٌ

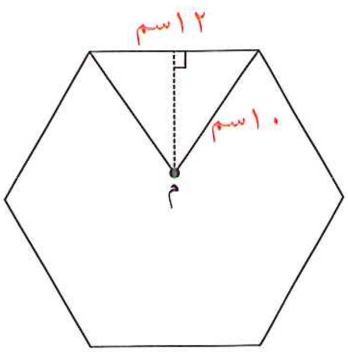
١) أيٌّ مما يأتي يمثلُ أضلاعَ مثلثٍ؟ وحدِّدْ نوعَ ذلكَ المثلثِ منْ حيثُ الزوايا :

أ) ٤سم ،٧سم ،٥سم.   ب) ٨ سم ، ١١سم ، ٣سم .

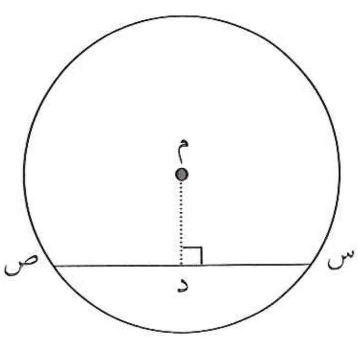
جـ) ١٨سم ، ٢٤سم ، ٣٠سم .   د) ١٢ سم ، ١٠سم ، ٩ سم .

٢) احسبْ محيطَ Δ س ص ع في الشكلِ الآتي:





٣) يُبيِّنُ الشكلُ المجاورُ سداسيًّا منتظمًا مركزُهُ النقطةُ م، جدْ مساحتَهُ بالسنتيمتراتِ المربعةِ.



٤) في الشكلِ المجاورِ ، بيِّنْ أنَّ $\overline{\text{م د}}$ ينصِّفُ $\overline{\text{س ص}}$.

٥) أ ب جـ د شكلٌ رباعيٌّ فيهِ س، ص ، ع ، ل منتصفاتُ الأضلاعِ الأربعةِ على التوالي، بيِّنْ أنَّ الشكلَ س ص ع ل متوازي أضلاعٍ.

اختبارٌ ذاتيٌّ

١) اقرأ العبارات الآتيةِ، ثم أجبْ بنعمٍ أو لا مع ذكرِ السببِ:

أ) لأيِّ ثلاثةِ أعدادٍ، إذا كانَ مجموعُ العددينِ الأصغرينِ > العددِ الأكبرِ ، فإنَّ هذهِ الأعدادَ يمكنُ أن تكونَ أطوالَ أضلاعٍ في مثلثٍ.

ب) في Δ س ص ل ؛ إذا كانتْ ∢س منفرجةً ، فإنَّ الضلعَ ص ل هوَ أطولُ أضلاعِ المثلثِ.

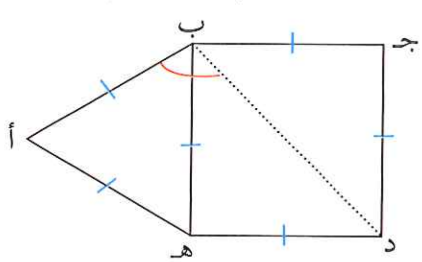
جـ) إذا كانتْ ∢هـ د ك خارجةً للمثلثِ هـ د ن ، فإنَّها منفرجةٌ.

د) إذا كانت إحدى القطعِ المتوسطةِ في مثلثٍ عموديةً على الضلعِ الساقطةِ عليهِ، فإنَّ المثلثَ متطابقُ الأضلاعِ .

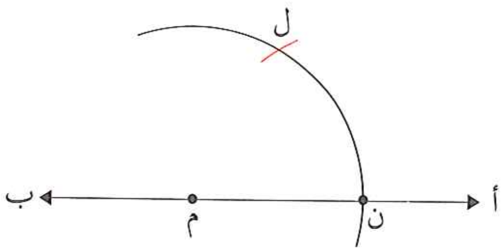
هـ) في Δ أ ب جـ إذا وُجدتْ قطعتانِ متوسطتانِ عموديتانِ على ضلعيْهِ، فإنَّ المثلثَ مُتطابقُ الأضلاعِ.

و) الزوايا الخارجةُ للمثلثِ حادِّ الزوايا، جميعًا منفرجةٌ.

ز) في المثلثِ القائمِ الزاويةِ ، مساحةُ المثلثِ المنتظمِ المنشأ على الوترِ تساوي مجموعَ مساحتي المثلثينِ المنتظمينِ المنشأينِ على الضلعينِ الآخرينِ.



٢) في الشكلِ المجاورِ جدْ ق∢ أ ب د



*٣) رُسِمَ قوسُ دائرةٍ مركزُها م فقطعَ المستقيمَ $\overleftrightarrow{أب}$ في النقطةِ ن، ثم رُسِمَ قوسٌ آخرُ منَ النقطةِ ن بنفسِ فتحةِ الفرجارِ فقطعَ القوسَ الأولَ في ل . جد ق∢ م ل ن.

* السؤالُ منْ أسئلةِ الاختباراتِ الدوليةِ.

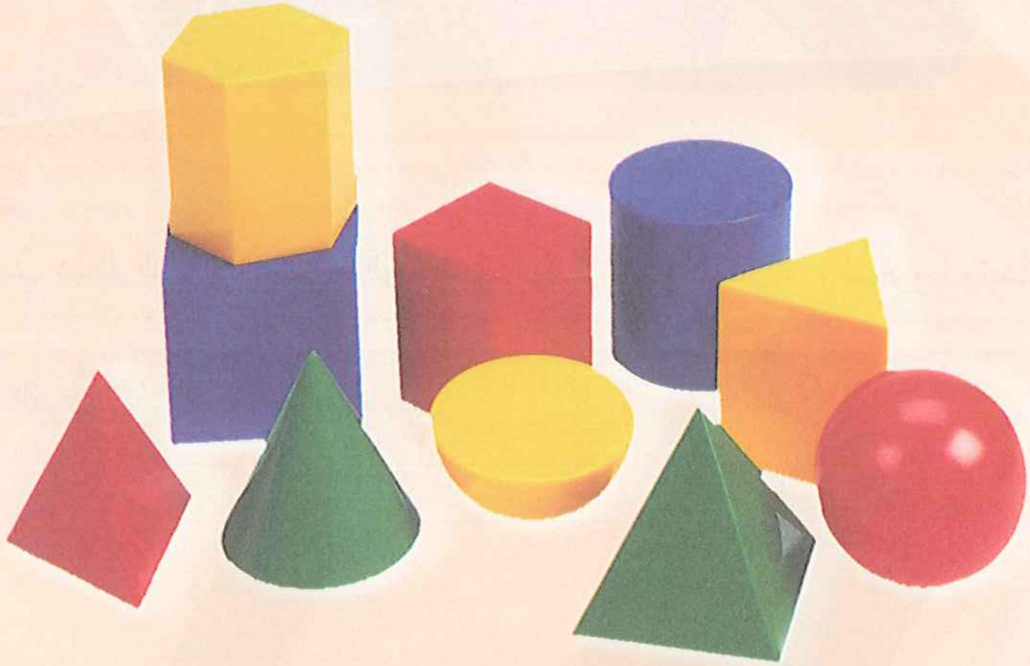
٨

الوحدةُ الثامنةُ

المجسماتُ

نستخدمُ في حياتِنا اليوميةِ مجسّماتٍ مثلَ العلبِ والصناديقِ، وللتعاملِ معَ هذهِ الأشياء بشكلٍ سليم وصحيحٍ منْ حيثُ التصميمُ والسعةُ والتخزينُ والتوزيعُ والعرضُ؛ فلا بدَّ منْ دراسةِ خصائِصها، بالإضافةِ إلى أنّ هنالكَ العديدَ منَ الأشياءِ منها ما هوَ مسطحٌ (ثنائيُّ الأبعادِ) وما هوُ مجسمٌ (ثلاثيُّ الأبعادِ). ومنْ أجلِ بناءِ الفهمِ الصحيحِ لبنيةِ الأشكالِ والمجسماتِ، يحتاجُ الطلبةُ إلى خبراتٍ تعليميةٍ تتعلقُ بالأشكالِ ثنائيةِ الأبعادِ، والمجسماتِ ثلاثيةِ الأبعادِ، ليتوصلوا إلى أنَّ الأسطحَ المستويةَ (ثنائيةَ الأبعادِ)، تُكوِّنُ عندَ طيّها مجسماتٍ (ثلاثيّةَ الأبعادِ).

إنَّ فهمَ المجسماتِ (المنشورِ، وَ الهرمِ، وَالأسطوانةِ، وَ المخروطِ، وَالكرةِ)، والصيغَ المتعلقةَ بحجومِها ومساحاتِ سطحِها يساعدُ في حلِّ العديدِ منَ المشكلاتِ.



يتوقعُ منَ الطالبِ في نهايةِ هذهِ الوحدةِ أن يكونَ قادرًا على:

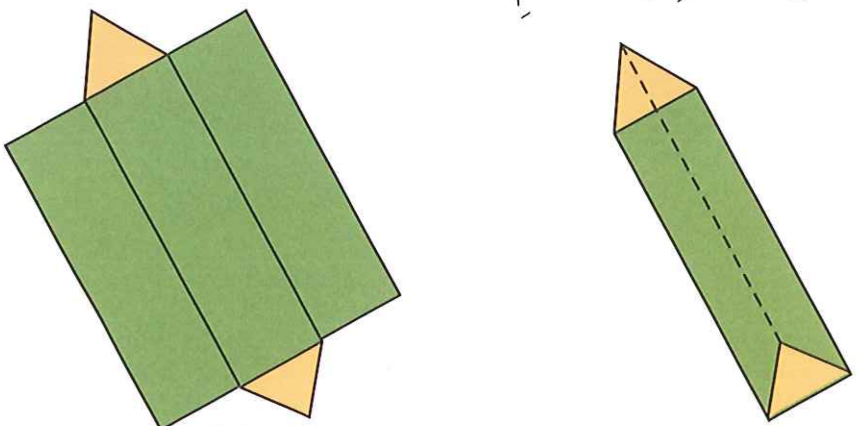
- اكتشافِ شبكةِ المنشورِ الثلاثيِّ، والهرمِ الثلاثيِّ، والرباعيِّ، والأسطوانةِ، والمخروطِ، وإنشائِها.
- استقصاءِ صيغةٍ لحجمِ المنشورِ الثلاثيِّ، ومساحةِ سطحِهِ.
- تعرُّفِ صيغةٍ لحجمِ الأسطوانةِ، ومساحةِ سطحِها.
- استقصاءِ صيغةٍ لحجمِ المخروطِ، ومساحةِ سطحِهِ.
- استقصاءِ صيغةٍ لحجمِ الهرمِ الثلاثيِّ، والرباعيِّ، ومساحةِ سطحِهِ.
- استقصاءِ صيغةٍ لحجمِ الكرةِ، ومساحةِ سطحِها.
- استقصاءِ تأثيرِ التغيُّرِ في أبعادِ المجسمِ على مساحةِ سطحِهِ، وحجمِهِ.
- حلِّ مسائلَ حياتيةٍ على المساحاتِ والحجومِ.

الدرس الأول
الشبكاتُ

النتاجاتُ

- تكتشفُ شبكةَ المنشورِ الثلاثيِّ، والهرمِ الثلاثيِّ والرباعيِّ، والأسطوانةِ، والمخروطِ وتنشئُها.

ما الفرقُ بَيْنَ الشبكةِ والمجسمِ؟



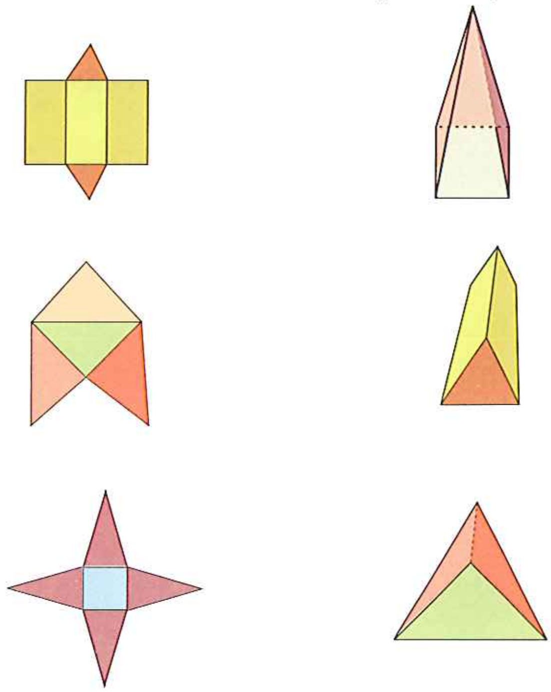
أكملِ الفراغَ في الجدولِ الآتي بوضعِ إشارةِ (✓) أوْ (✗) ، للإجابةِ عنِ السؤالِ أعلاهُ:

	ثنائيُّ الأبعادِ	ثلاثيُّ الأبعادِ
الشبكةُ		
المجسمُ		

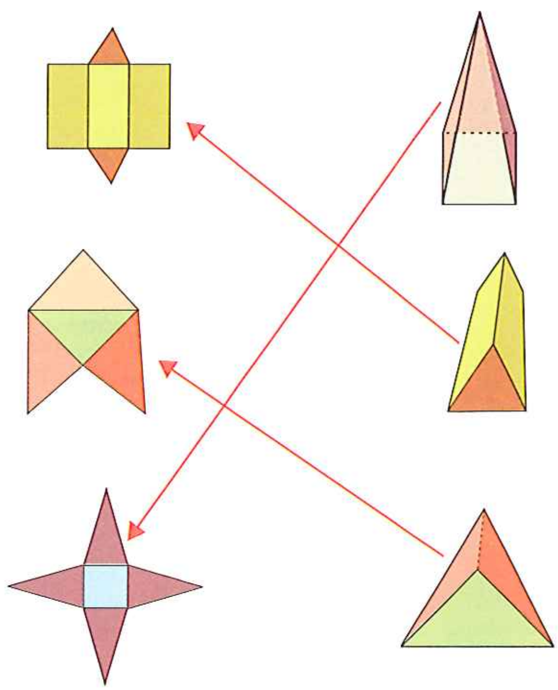
الشبكةُ: مسطحٌ مستوٍ (ثنائيُّ الأبعادِ)، يمكنُ أنْ يُطْوى لعملِ مجسمٍ (ثلاثيِّ الأبعادِ)، وتتكونُ الشبكةُ منَ القاعدةِ، والأسطحِ (الأوجهِ)، والرؤوسِ.

مثالٌ (١)

صلْ كلَّ مجسمٍ بشبكتِهِ في ما يأتي:



الحلُّ



تدريبٌ ١

أنا مجسمٌ شبكتي تتكونُ منْ مستطيلٍ، وأربعةِ مثلثاتٍ متطابقةِ الضلعين، عندَ طيِّها تلتقي رؤوسُها في نقطةٍ واحدةٍ، فمنْ أنا؟ وماذا تُسمى نقطةُ الالتقاءِ؟

نشاطٌ (١)

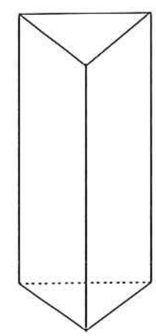
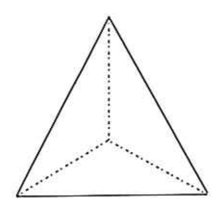
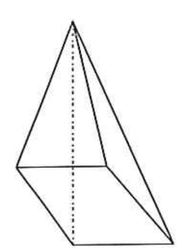
١) ارسمْ شبكةَ المجسمِ الواردِ في تدريبِ (١).

٢) اطوِ الشبكةَ لتشكلَ المجسمَ.

٣) قارنْ منتجكَ بمنتجِ زملائِكَ.

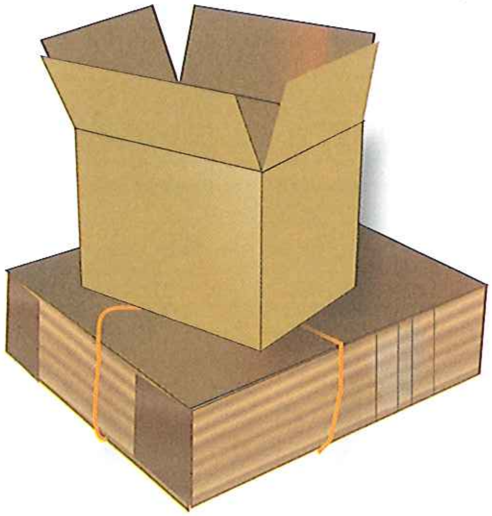
مثالٌ (٢)

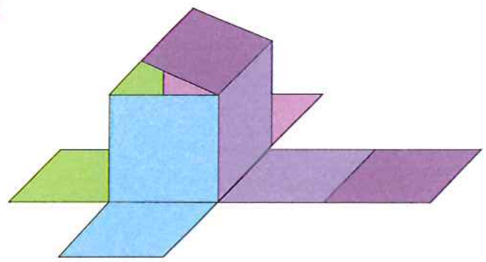
أكملِ الفراغَ في الجدولِ الآتي:

المجسمُ	اسمُ المجسمِ	شكلُ القاعدةِ	عددُ القواعدِ	شكلُ الأوجهِ الجانبيةِ
				
				
				

نشاطٌ (٢)

عبِّرْ بلغتِكَ الخاصةِ عمّا تراهُ في الصورِ أدناهُ.

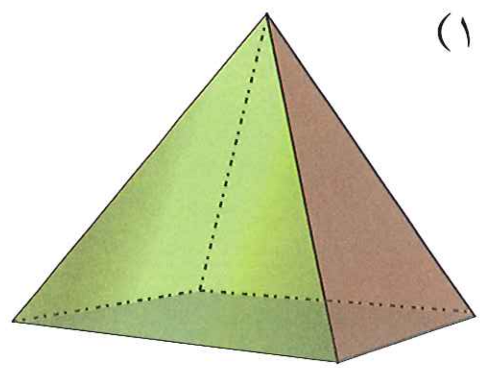




تدريبٌ ٢

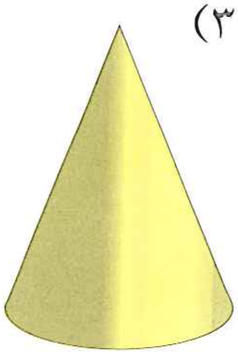
ارسمْ شبكةً لكلِّ مجسمٍ منَ المجسماتِ الآتيةِ:

١)



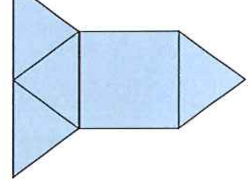
٢)

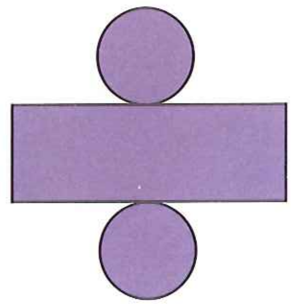
٣)

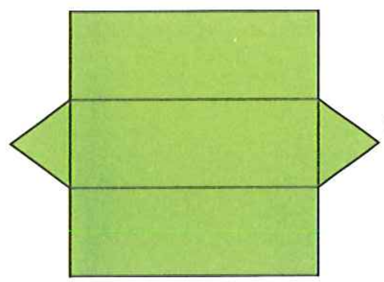


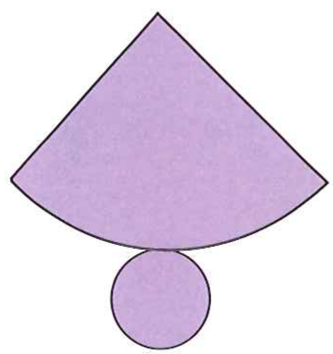
تمارينُ ومسائلُ

١) اكتبِ اسمَ المجسمَ الذي تكوِّنهُ كلُّ شبكةٍ مما يأتي:

أ)  اسمُ المجسمِ هوَ: ....

ب)  اسمُ المجسمِ هوَ: ....

جـ)  اسمُ المجسمِ هوَ: ....

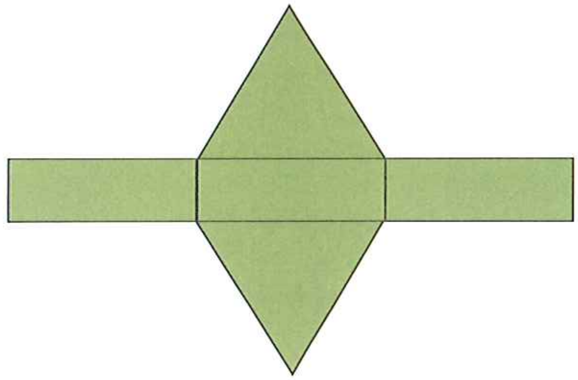
د)  اسمُ المجسمِ هوَ: ....

٢) ارسمْ شبكةً لكلِّ مجسمٍ مما يأتي ، ثمَّ قارنْ منتَجَكَ بمنتجاتِ زملائِكَ:

أ) منشورٌ ثلاثيٌّ　　ب) هرمٌ ثلاثيٌّ　　جـ) هرمٌ رباعيٌّ

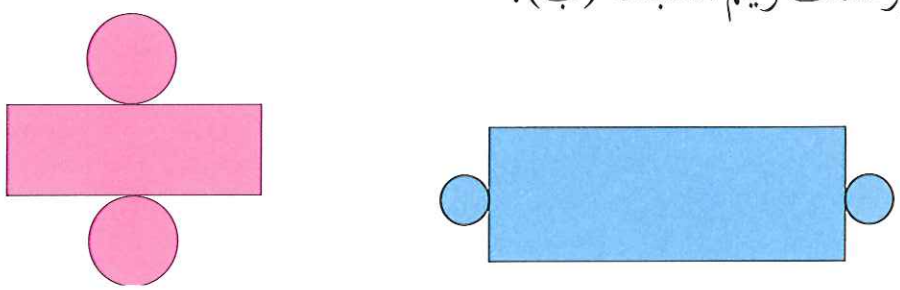
د) أسطوانةٌ　　هـ) مخروطٌ

٣) كلَّفَ معلِّمُ الرياضياتِ الطالبَ سعيدًا برسمِ شبكةِ هرمٍ ثلاثيٍّ، فرسمَ الطالبُ الشبكةَ الآتيةَ:



هلْ تتفقُ معَ ما رسمَهُ سعيدٌ؟ مبررًا إجابتَكَ.

٤) طلبتْ معلمةُ الرياضياتِ رسمَ شبكةٍ لمجسمِ الأُسطوانةِ، فرسمتْ راما الشبكةَ (أ)، ورسمت ريمُ الشبكةَ (ب):



(أ) (ب)

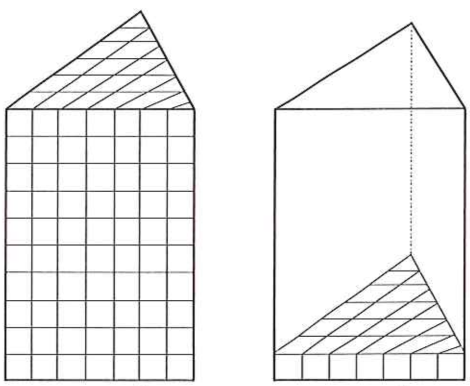
هلْ تتفقُ معَ ما رسمتْهُ كلٌّ منْ راما، وريمَ؟ مبررًا إجابتَكَ.

الدرس الثاني حجمُ المنشورِ الثلاثيِّ القائمِ، ومساحةُ سطحِه

النتاجاتُ

- تستقصي صيغةً لحجمِ المنشورِ الثلاثيِّ القائمِ، ومساحةِ سطحِهِ.
- تحلُّ مسائلَ حياتيةً على المساحاتِ والحجومِ.

نشاطٌ



شكل (١) شكل (٢)

١) ما عددُ الوحداتِ المكعبةِ -تقريبًا- التي تغطِّي قاعدةَ المنشورِ في شكلِ (١)؟ ماذا يمثِّلُ عددُ الوحداتِ بالنسبةِ إلى قاعدةِ المنشورِ؟

٢) إذا مُلِئَ المنشورُ بالوحداتِ المكعبةِ كما هوَ موضحٌ في الشكلِ (٢)، ما عددُ الطبقاتِ التي تملأُ المنشورَ؟ مَاذا يمثِّلُ عددُ الطبقاتِ بالنسبةِ إلى المنشورِ؟

٣) ما حجمُ المنشورِ؟

تعلمتَ سابقًا أنَّ:

حجمَ متوازي المستطيلاتِ = مساحةَ القاعدةِ × الارتفاعِ

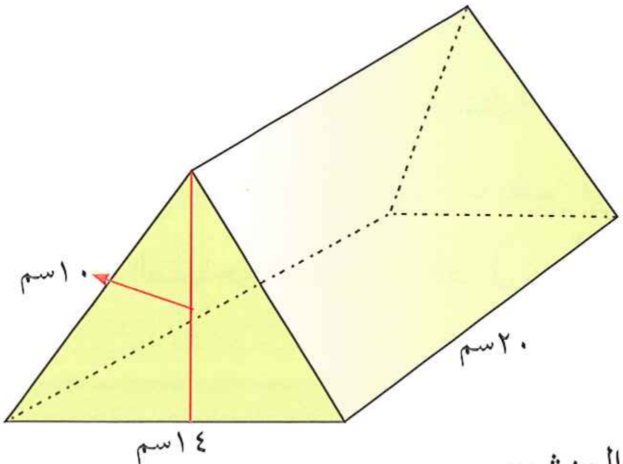
ومتوازي المستطيلاتِ ما هوَ إلا منشورٌ رباعيٌّ، والفرقُ بَيْنَ المنشورِ الرباعيِّ والمنشورِ الثلاثيِّ يكمنُ في شكلِ القاعدةِ فقطْ، وعليهِ فإنَّ:

حجمَ المنشورِ الثلاثيِّ = مساحةَ القاعدةِ × الارتفاعِ.

تذكَّرْ

مساحةُ المنطقةِ المثلثةِ = $\frac{١}{٢}$ × طولِ القاعدةِ × الارتفاعِ

مثالٌ (١)



جدْ حجمَ المنشورِ الثلاثيِّ المجاورِ.

الحلُّ

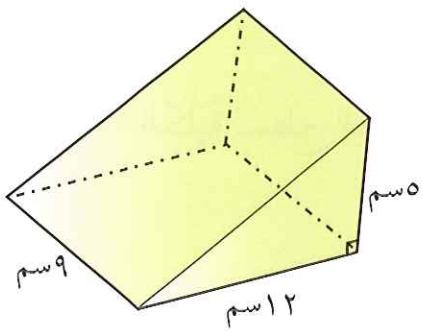
مساحةُ القاعدةِ $= \frac{١}{٢} \times ١٤ \times ١٠$

$= ٧ \times ١٠ = ٧٠$ سم^{٢}

حجمُ المنشورِ = مساحةَ القاعدةِ × ارتفاعِ المنشورِ

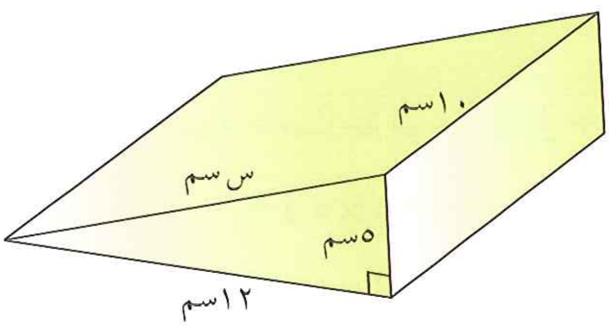
$= ٧٠ \times ٢٠ = ١٤٠٠$ سم^{٣}

تدريبٌ ١



جدْ حجمَ المنشورِ الثلاثيِّ المجاورِ.

مثالٌ (٢)



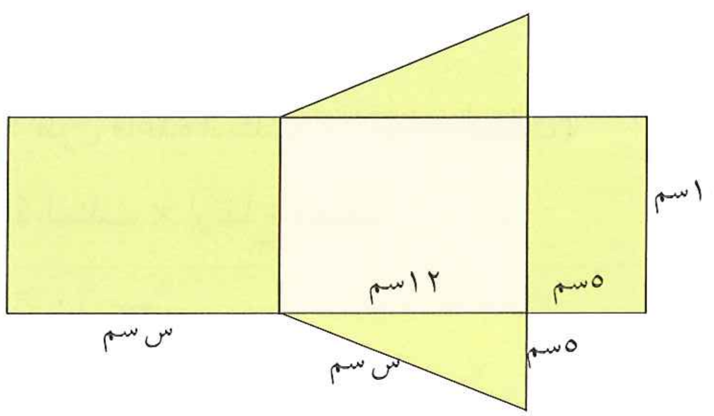
للمنشورِ الثلاثيِّ المجاورِ:

١) ارسمْ شبكةً للمنشورِ.

٢) احسبِ المساحةَ الكليةَ لسطحِ المنشورِ، ثمَّ تحققْ منْ صحةِ الحلِّ.

الحلُّ

١)



٢) $س^٢ = ٥^٢ + ١٢^٢$ ، ومنه س = ١٣. لماذا ؟

الأوجهُ الجانبيةُ تشكلُ مستطيلًا طولُهُ يساوي (٥ + ١٢ + ١٣)، وعرضهُ يساوي ارتفاعَ المنشورِ ١٠سم، كما يظهرُ في الشبكةِ.

∴ المساحةُ الجانبيةُ = الطولَ × العرضِ المساحةُ الجانبيةُ = مساحةَ المستطيلِ

= محيطَ قاعدةِ المنشورِ × ارتفاعِ المنشورِ

= (٥ + ١٢ + ١٣) × ١٠

= ٣٠ × ١٠ = ٣٠٠ $سم^٢$

مساحةُ القاعدةِ = $\frac{١}{٢}$ × طولِ قاعدةِ المثلثِ × ارتفاعِ المثلثِ القاعدةُ مثلثةُ الشكلِ

= $\frac{١}{٢}$ × ١٢ × ٥ = ٣٠ $سم^٢$

∴ المساحةُ الكليةُ لسطحِ المنشورِ = المساحةَ الجانبيةَ + مساحةُ القاعدتينِ

= ٣٠٠ + ٢ × مساحةِ القاعدةِ

= ٣٠٠ + ٢ × ٣٠

= ٣٠٠ + ٦٠ = ٣٦٠ $سم^٢$

التحققُ منْ صحةِ الحلِّ:

المساحةُ الجانبيةُ = مساحةَ الوجهِ الأولِ + مساحةُ الوجهِ الثاني + مساحةُ الوجهِ الثالثِ

= (٥ × ١٠) + (١٢ × ١٠) + (١٣ × ١٠)

= ٥٠ + ١٢٠ + ١٣٠ = ٣٠٠ $سم^٢$ ✓

مساحةُ القاعدتينِ = ٢ × مساحةِ القاعدةِ

= ٢ × ($\frac{١}{٢}$ × طولِ قاعدةِ المثلثِ × ارتفاعِ المثلثِ)

= طولَ قاعدةِ المثلثِ × ارتفاعِ المثلثِ

= ١٢ × ٥ = ٦٠ $سم^٢$ ✓

∴ المساحةُ الكليةُ لسطحِ المنشورِ = ٣٠٠ + ٦٠ = ٣٦٠ $سم^٢$ ✓

نستنتج مما سبق أن:

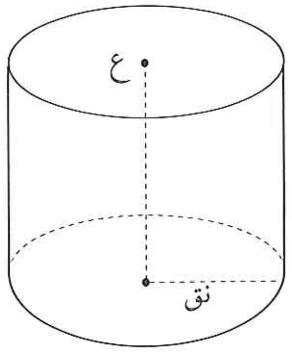
المساحةَ الجانبيةَ للمنشورِ = محيطَ القاعدةِ × ارتفاعِ المنشورِ

المساحةَ الكليةَ لسطحِ المنشورِ = المساحةَ الجانبيةَ + مساحةُ القاعدتينِ

تدريبٌ ٢

منشورٌ ثلاثيٌّ مساحةُ سطحِهِ الكليةُ ٤٨ سم^{٢}، ومساحتُهُ الجانبيةُ ٣٦ سم^{٢}. جدْ مساحة قاعدتِهِ.

مثالٌ (١)



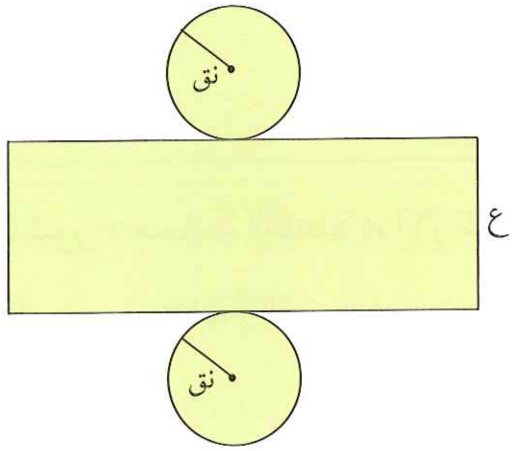
معتمدًا على الشكلِ المجاورِ، الذي يمثلُ أسطوانةً، أجبْ عمّا يأتي:

١) ارسمْ شبكةً تقريبيةً لها.

٢) جدْ مساحةَ سطحِها الكليةَ إذا كانَ نصفُ قطرِها ٧سم، وارتفاعُها ١٦ سم، ثمَّ تحققْ منْ صحةِ الحلِّ.

الحلُّ

١)



٢) مساحةُ السطحِ الكليةُ = المساحةَ الجانبيةَ + مساحةُ القاعدتينِ

= (الطولَ × العرضِ) + ٢ ×مساحةِ القاعدةِ لماذا؟

= (محيطَ القاعدةِ × الارتفاعِ)+ ٢ × π نق^{٢} لماذا؟

= ٢ π نق × ع + ٢ π نق^{٢}

$\approx (٢ \times \frac{٢٢}{٧} \times ٧ \times ١٦) + ٢ \times \frac{٢٢}{٧} \times (٧)^{٢}$

≈ ١٠١٢ سم^{٢}.

التحققُ منْ صحةِ الحلِّ:

مساحةُ السطحِ الكليةُ = ٢ π نق (ع + نق) لماذا؟

$\approx ٢ \times \frac{٢٢}{٧} \times ٧\ (١٦ + ٧)$

$$\approx ٢ \times \frac{٢٢}{٧} \times ٧ \times ٢٣$$

$\approx ٤٤ \times ٢٣ = ١٠١٢$ سم^{٢}.

حجمُ الأسطوانةِ = مساحةَ القاعدةِ × الارتفاعِ

$= \pi$ نق^{٢}ع

المساحةُ الجانبيةُ = محيطَ القاعدةِ × الارتفاعِ

$= ٢ \pi$ نق ع

المساحةُ الكليةُ لسطحِها = المساحةَ الجانبيةَ + ٢ × مساحةِ القاعدةِ

$= ٢ \pi$ نق ع + ٢ π نق^{٢}

$= ٢ \pi$ نق (ع + نق)

تدريبٌ ٢

أسطوانةٌ دائريةٌ قائمةٌ، طولُ قطرِ قاعدتِها ٢٨سم، وارتفاعُها ٣سم:

١) ارسمْ شبكةً تقريبيةً لهذهِ الأسطوانةِ.

٢) جدْ مساحةَ سطحِها الكليةَ، ثمَّ تحققْ منْ صحةِ الحلِّ.

مثالٌ (٢)

أسطوانةٌ دائريةٌ مساحةُ سطحِها الكليةُ ٤٨سم^{٢}، ومساحتُها الجانبيةُ ٣٦سم^{٢}، جدْ مساحةَ قاعدتِها.

الحلُّ

مساحةُ القاعدةِ = (مساحةَ السطحِ الكلّيةَ − المساحةُ الجانبيةُ) ÷ ٢ لماذا؟

= (٤٨ − ٣٦) ÷ ٢

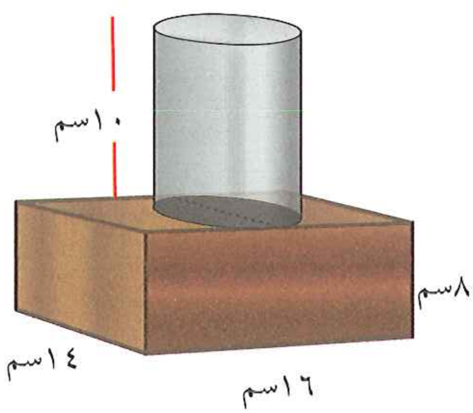
= ١٢ ÷ ٢ = ٦سم^{٢}.

تدريبٌ ٣

أسطوانةٌ دائريةٌ مساحةُ سطحِها الكليةُ ٧٢ سم^{٢}، ومساحةُ قاعدتِها ١٦سم^{٢}. جدْ مساحتَها الجانبيةَ.

مثالٌ (٣)

جدْ حجمَ المجسمِ المركبِ في الشكلِ المجاورِ علمًا أنَّ طولَ قطرِ الأسطوانةِ يساوي عَرضَ متوازي المستطيلاتِ.



الحلُّ

حجمُ متوازي المستطيلاتِ (وَهُوَ منشورٌ رباعيٌّ)

= ١٦ × ١٤ × ٨

= ١٧٩٢ سم^{٣}.

قطرُ الأسطوانةِ = ١٤سم.

حجمُ الأسطوانةِ = π نق^{٢} ع ≈ $\frac{٢٢}{٧}$ × (٧)^{٢} × ١٠

≈ ١٥٤٠سم^{٣}.

حجمُ المجسمِ المركبِ = حجمَ متوازي المستطيلاتِ + حجمُ الأسطوانةِ

≈ ١٧٩٢ + ١٥٤٠ ≈ ٣٣٣٢ سم^{٣}.

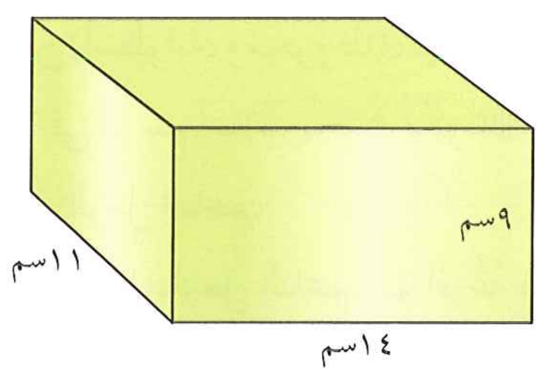
تمارينُ ومسائلُ

١) أسطوانةٌ دائريةٌ قائمةٌ طولُ قطرِ قاعدتِها ٢٠سم، وارتفاعُها ٤ سم. جدْ حجمَها، ومساحةَ سطحِها الكلية، ثمَّ تحققْ منْ صحةِ الحلِّ.

٢) أسطوانةٌ دائريةٌ قائمةٌ حجمُها ٦٫٢٨ سم^{3}، ارتفاعُها ٢٠ سم، جدْ طولَ نصفِ قطرِ قاعدتِها. ثمَّ تحققْ منْ صحةِ الحلِّ، معتبرًا (π = ٣٫١٤).

٣) أسطوانةٌ دائريةٌ قائمةٌ حجمُها ٣٥٢سم^{3}، وطولُ قطرِ قاعدتُها ٨سم، جدِ ارتفاعَها. ثمَّ تحققْ منْ صحةِ الحلِّ.

٤) يبينُ الشكلُ أدناهُ علبةً كرتونيةً، طولُ قاعدتِها ١٤سم، وعرضُها ١١سم، وارتفاعُها ٩ سم. إذا قررتِ الشركةُ المُصَنِّعةُ استعمالَ تصميمٍ جديدٍ للعلبةِ بالحجمِ نفسِهِ والارتفاعِ نفسِهِ، ولكنْ بشكلٍ أسطوانيٍّ، فَجدْ طولَ قطرِ قاعدةِ الأسطوانةِ الذي يمكنُ استعمالُهُ.

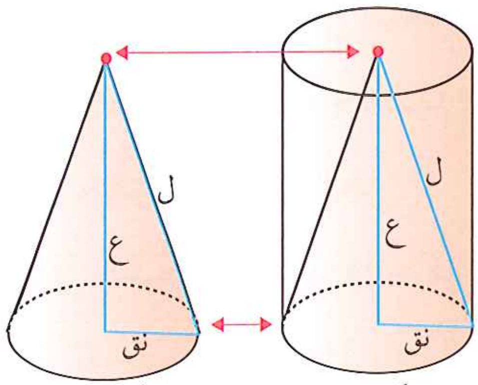


٥) ادّعى عمرُ أنَّ حجمَ أسطوانةٍ نصفُ قطرِها ٥سم، وارتفاعُها ١٢سم يساوي حجمَ أسطوانةٍ أخرى نصفُ قطرِها ١٠سم، وارتفاعُها ٦سم.
ناقشِ ادعاءَ عمرَ، مبررًا إجابتكَ.

الدرسُ الرابعُ حجمُ المخروطِ القائمِ، ومساحةُ سطحِهِ

النتاجاتُ

- تستقصي صيغةً لحجمِ المخروطِ القائمِ، ومساحةِ سطحِهِ.



شكل (١) شكل (٢)

ماذا يمثِّلُ شكلُ (١) ؟

ماذا يمثِّلُ شكلُ (٢) ؟

ما العلاقةُ بينهُما؟

هلْ يمكنُكَ صنعُ مجسمينِ لهُما المواصفاتُ نفسُها ؟

نشاطٌ (١)

١) أحضرْ مجسمينِ (أسطوانةً، ومخروطًا)، لهُما قاعدتانِ متساويتانِ، وارتفاعانِ متساويانِ كما في الرسمِ أعلاهُ، بحيثُ يكونانِ مفرغينِ منَ الداخلِ.

٢) أحضرْ كميةً منَ الرملِ الناعمِ.

٣) املأ المخروطَ تمامًا بالرملِ الناعمِ، ثمَّ أفرغْهُ في الأسطوانةِ. كررِ العمليةَ حتى تمتلئَ الأسطوانةُ تمامًا.

٤) كمْ عددُ المراتِ التي لزمتْ لملْءِ الأسطوانةِ تمامًا؟

٥) ماذا تستنتجُ ؟

تعلمتَ سابقًا أنَّ: حجمَ الأسطوانةِ = πنق^{٢} ع

ولاحظْ أنَّكَ احتجتَ إلى مَلْءِ المخروطِ القائمِ ٣ مرّاتٍ تمامًا، لكَيْ تملأ الأسطوانةَ تمامًا، وهذا يعني أنَّ:

حجمَ المخروطِ القائمِ $= \frac{١}{٣}$ حجمِ الأسطوانةِ المشتركةِ معهُ في القاعدةِ والارتفاعِ.

نستنتجُ أنَّ: حجمَ المخروطِ القائمِ $= \frac{١}{٣}\ \pi$ نق^{٢} ع

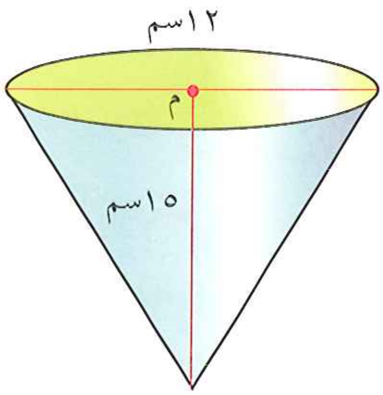
حيثُ: نق: نصفُ قطرِ قاعدةِ المخروطِ القائمِ.

ع : ارتفاعُ المخروطِ القائمِ.

π : النسبةُ التقريبيةُ وتُقرَّبُ بـ $\frac{٢٢}{٧}$ أوْ ٣,١٤ .

مثالٌ (١)

جدْ حجمَ المخروطِ القائمِ الموضحِ جانبًا.



الحلُّ

حجمُ المخروطِ القائمِ $= \frac{١}{٣}\ \pi$ نق^{٢} ع

$= \frac{١}{٣} \times \pi \times (٦)^{٢} \times ١٥$

$= \frac{١}{\cancel{٣}_{١}} \times \pi \times \cancel{٦}^{٢} \times ٦ \times ١٥$

$= ١٢ \times ١٥ \times \pi = ١٨٠\ \pi$ سم^{٣}.

تدريبٌ ١

مخروطٌ دائريٌّ قائمٌ مساحةُ قاعدتِهِ ٣١٤ سم^{٢}، وارتفاعُهُ ٩سم. جدْ:

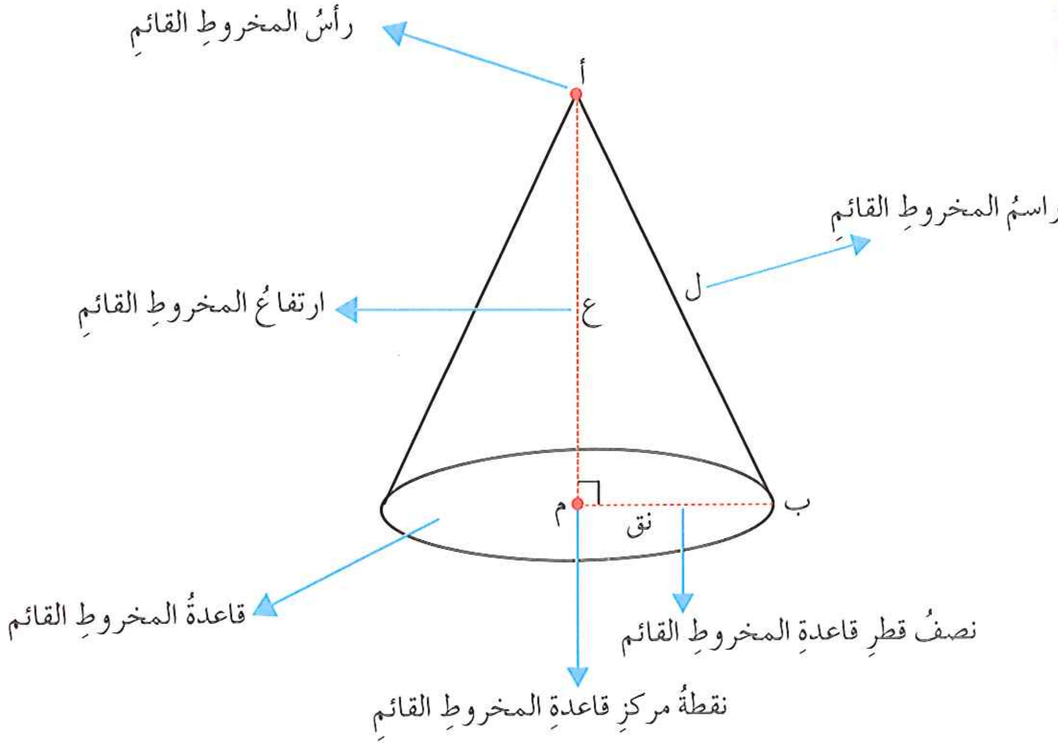
١) حجمَ المخروطِ القائمِ.

٢) نصفَ قطرِ قاعدةِ المخروطِ القائمِ.

مثالٌ (٢)

ارسمْ مجسمَ مخروطٍ قائمٍ، وعيِّنْ عليهِ نصفَ قطرِ القاعدةِ نق، وارتفاعَهُ ع، وراسمَهُ ل، ثمَّ حدِّدْ منَ الرسمِ العلاقةَ بَيْنَ ل ، ع ، نق؟

الحلُّ



العلاقةُ بَيْنَ ل، ع، نق، هيَ ل^{٢} = ع^{٢} + نق^{٢} (نظريةُ فيثاغورسَ)؛ لأنَّ المثلثَ أ م ب قائمُ الزاويةِ في م.

تدريبٌ ٢

مخروطٌ دائريٌّ قائمٌ ارتفاعُهُ ١٢ سم، وطولُ قطرِ قاعدتِهِ ١٠ سم. جدْ حجمَ المخروطِ القائمِ وطولَ راسمِهِ.

نشاطٌ (٢)

١) أحضرْ مجسمَ مخروطٍ قائمٍ مصنوعٍ منَ الكرتونِ.
٢) قُصَّ المخروطَ القائمَ على طولِ أحدِ الرواسمِ. ماذا نُسمي الشكلَ الناتجَ؟
٣) ما العلاقةُ بَيْنَ المساحةِ الجانبيةِ للمخروطِ القائمِ، ومساحةِ القطاعِ الدائريِّ الناتجِ منْ قصِّ المخروطِ القائمِ على طولِ أحدِ الرواسمِ (شبكةِ المخروطِ القائمِ).

المساحةُ الجانبيةُ للمخروطِ القائمِ تُستنتَجُ منْ مساحةِ القطاعِ الدائريِّ.

المساحةُ الجانبيةُ للمخروطِ القائمِ = πل نق، حيثُ:

ل: طول راسمُ المخروطِ القائمِ.

نق: نصفُ قطرِ قاعدةِ المخروطِ القائمِ.

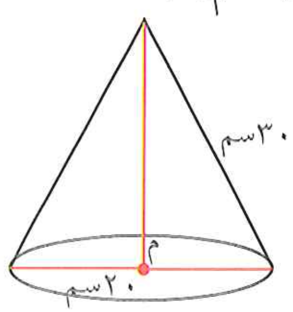
المساحةُ الكليةُ لسطحِ المخروطِ القائمِ = المساحةَ الجانبيةَ + مساحةُ القاعدةِ .

= π ل نق + π نق^{٢}

= π نق (ل + نق)

مثالٌ (٣)

مخروطٌ دائريٌّ قائمٌ طولُ قطرِ قاعدتِهِ ٢٠سم، وطولُ راسمِهِ ٣٠ سم، جدْ مساحةَ سطحِهِ الكليةَ، ثمَّ تحققْ منْ صحةِ الحلِّ .



الحلُّ

المساحةُ الكليةُ لسطحِ المخروط القائمِ = π نق (ل + نق)

= π × ١٠ (٣٠ + ١٠)

= π × ١٠ × ٤٠ = ٤٠٠ π سم^{٢}.

التحققُ منْ صحةِ الحلِّ:

المساحةُ الجانبيةُ للمخروطِ القائمِ = π ل نق = π × ٣٠ × ١٠ ≈ ٣٠٠ π سم^{٢}.

مساحةُ القاعدةِ = π نق^{٢} = π × ١٠ × ١٠ ≈ ١٠٠ π سم^{٢}.

المساحةُ الكليةُ لسطحِ المخروطِ القائمِ = المساحةَ الجانبيةَ + مساحةُ القاعدةِ.

= ٣٠٠ π + ١٠٠ π = ٤٠٠ π سم^{٢}. ✓

تدريبٌ ٢

مخروطٌ دائريٌّ قائمٌ طولُ نصفِ قطرِ قاعدتِهِ ٥سم، وارتفاعُهُ ١٢سم، جدْ مساحةَ سطحِهِ الكليةَ، ثمَّ تحققْ منْ صحةِ الحلِّ.

تمارينُ ومسائلُ

١) جدْ حجمَ مخروطٍ دائريٍّ قائمٍ طولُ قطرِ قاعدتِهِ ٢٠م، وارتفاعُهُ ٢٥م.

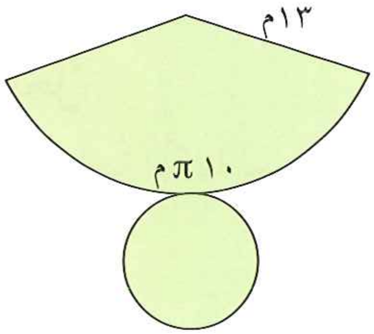
٢) مخروطٌ دائريٌّ قائمٌ ، حجمُهُ ٣٦٠ π سم^{٣}، وارتفاعُهُ ٩سم. جدْ طولَ نصفِ قطرِ قاعدتِهِ.

٣) مخروطٌ دائريٌّ قائمٌ طولُ قطرِ قاعدتِهِ ٦سم، وطولُ راسمِهِ ٥ سم، جدْ كلًّا مما يأتي:

أ) حجمَ المخروطِ. ب) مساحتَهُ الجانبيةَ.

جـ) مساحةَ سطحِهِ الكليةَ، ثمَّ تحققْ منْ صحةِ الحلِّ.

٤) الشكلُ المجاورُ يمثلُ شبكةَ مخروطٍ دائريٍّ قائمٍ طولُ راسمِهِ ١٣ مترًا، ومحيطُ قاعدتِهِ ١٠ π متر، جدْ كلًّا مما يأتي:



أ) حجمَ المخروطِ.

ب) مساحتَهُ الجانبيةَ.

جـ) مساحةَ سطحِهِ الكليةَ، ثمَّ تحققْ منْ صحةِ الحلِّ.

٥) أسطوانةٌ ، ومخروطٌ لهُما الحجمُ نفسُهُ والارتفاعُ نفسُهُ، إذا كانَ طولُ نصفِ قطرِ قاعدةِ الأسطوانةِ ٤سم، وارتفاعُها ١٨ سم. فجدْ طولَ نصفِ قطرِ قاعدةِ المخروطِ؟

٦) قبعةٌ على شكلِ مخروطٍ ، حجمُها ١٨٠ π سم^{٣}، وارتفاعُها ١٥سم. جدْ طولَ الراسمِ، ثمَّ تحققْ منْ صحةِ الحلِّ.

٧) هلْ يبقى حجمُ المخروطِ ثابتًا، إذا أضفْنا واحدًا إلى نصفِ القطرِ، وطرحْنا واحدًا منَ الارتفاعِ؟ مبررًا إجابتَكَ.

٨) أثبتْ أنَّ: المساحةَ الجانبيةَ للمخروطِ = π ل نق ، حيثُ ل طولُ راسمِ المخروطِ، نق نصفُ قطرِ قاعدتِهِ .

الدرسُ الخامسُ حجمُ الهرمِ القائمِ ومساحةُ سطحِهِ

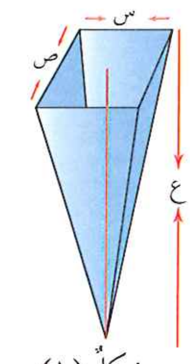
النتاجاتُ

- تستقصي صيغةً لحجمِ الهرمِ الثلاثيِّ القائمِ، والرباعيِّ القائمِ، ومساحةِ سطحِ كلٍّ منهُما.

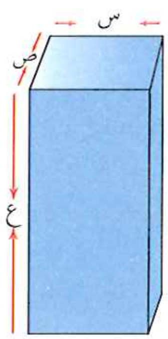
ماذا يمثِّلُ شكلُ (١)؟

ماذا يمثلُ شكلُ (٢)؟

ما العلاقةُ بينَهُما ؟ هل يمكنُكَ صُنعُ مجسمينِ لهما المواصفاتُ نفسُها؟



شكلٌ (١)



شكلٌ (٢)

نشاطٌ (١)

١) أحضرْ مجسمينِ (هرمًا رباعيًّا، منشورًا رباعيًّا)، مشتركَيْنِ في أبعادِ القاعدةِ والارتفاعِ، كما في الرسمِ أعلاهُ، بحيثُ يكونانِ مفرغينِ منَ الداخلِ.

٢) أحضرْ كميةً منَ الرملِ الناعمِ.

٣) املأْ الهرمَ تمامًا بالرملِ الناعمِ، ثم أفرغْهُ في المنشورِ. كرِّرِ العمليةَ حتى يمتلئَ المنشورُ تمامًا.

٤) كمْ عددُ المراتِ التي لزمتْ لملءِ المنشورِ تمامًا؟

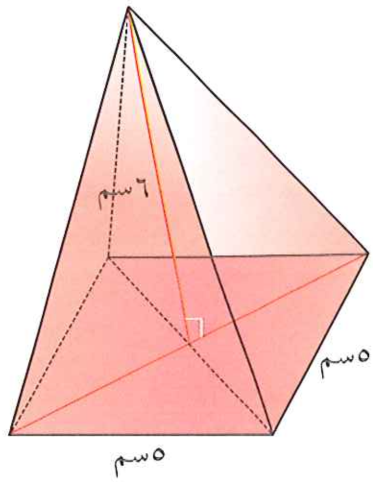
٥) ماذا تلاحظُ؟

لا بدَّ أنَّكَ لاحظتَ حاجَتَكَ إلى مَلءِ الهرمِ٣ مراتٍ تمامًا، لكي تملأَ المنشورَ تمامًا، وهذا يعني أنَّ: حجمَ الهرمِ = $\frac{1}{3}$ حجمِ المنشورِ المشتركِ معهُ في القاعدةِ والارتفاعِ.

حجمُ الهرمِ القائمِ = $\frac{1}{3}$ مساحةِ القاعدةِ × الارتفاعِ

مثالٌ (١)

جدْ حجمَ الهرمِ القائمِ الموضحِ جانبًا.



الحلُّ

حجمُ الهرمِ = $\frac{١}{٣}$ مساحةِ القاعدةِ × الارتفاعِ

= $\frac{١}{٣}$ (٥ × ٥) × ٦

= $\frac{١}{٣}$ × ٢٥ × ٦

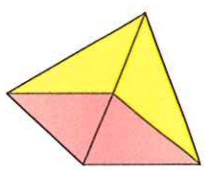
= ٢٥ × ٢

= ٥٠سم^{٣}.

تدريبٌ ١

هرمٌ قائمٌ ثلاثيٌّ ارتفاعُهُ ١٥ م، وقاعدتُهُ على شكلِ مثلثٍ طولُ قاعدتِهِ ١٠ سم، وارتفاعُهُ ٧سم. جدْ حجمَهُ.

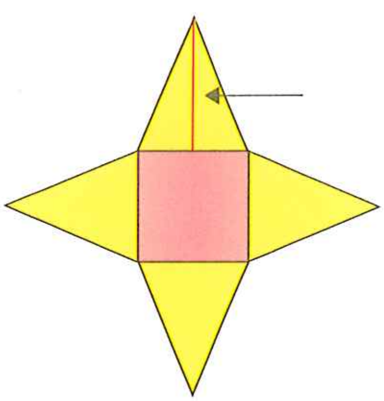
نشاطٌ (٢)



١) أحضرْ مجسمَ هرمٍ قائمٍ مصنوعٍ منَ الكرتونِ.

٢) قصَّ الهرمَ لتحصلَ على شبكتِهِ.

٣) ما العلاقةُ بَيْنَ ارتفاعِ كلِّ وجهٍ جانبيٍّ والارتفاعِ الجانبيِّ للهرمِ القائمِ؟



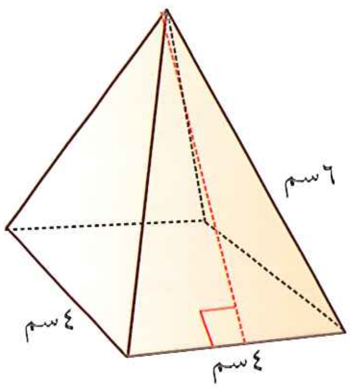
٤) ما العلاقةُ بَيْنَ المساحةِ الجانبيةِ للهرمِ، ومجموعِ مساحاتِ الأوجهِ الأربعةِ التي تشكلُ مثلثاتٍ متطابقةَ الضلعين، ولها الارتفاعُ نفسُهُ؟

ماذا تلاحظُ؟

المساحةُ الجانبيةُ لسطحِ الهرمِ القائمِ = مجموعَ مساحاتِ الأوجهِ الأربعةِ

= $\frac{1}{2}$ × محيط القاعدةِ × الارتفاعِ الجانبيِّ للهرمِ القائمِ

المساحةُ الكليةُ لسطحِ الهرم القائمِ = المساحةَ الجانبيةَ للهرمِ + مساحةُ القاعدةِ



مثالٌ (٢)

جدِ المساحةَ الجانبيةَ والكليةَ لسطحِ الهرمِ القائمِ الموضحِ جانبًا.

الحلُّ

المساحةُ الجانبيةُ لسطحِ الهرمِ القائم

= $\frac{1}{2}$ × محيطِ القاعدةِ ×الارتفاعِ الجانبيِّ للهرمِ القائمِ

= $\frac{1}{2}$ (٤ + ٤ + ٤ + ٤) × ٦

= ٤٨ سم^{٢}.

المساحةُ الكليةُ لسطحِ الهرمِ القائمِ = المساحةَ الجانبيةَ للهرمِ القائمِ + مساحةُ القاعدةِ

= ٤٨ + ٤ × ٤

= ٦٤سم^{٢}.

تدريبٌ ٢

هرمٌ ثلاثيٌّ قائمٌ أبعادُ قاعدتِهِ ٥سم، ٦سم، ٧ سم ، وارتفاعُهُ الجانبيُّ ٨سم . جدْ مساحةَ سطحِهِ الجانبيةَ، ثمَّ تحققْ منْ صحةِ الحلِّ .

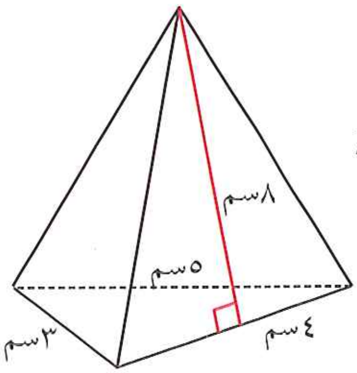
تحدَّثْ

ما أوجُهُ الشبهِ والاختلافِ بيْنَ الهرمِ الثلاثيِّ القائمِ والهرمِ الرباعيِّ القائمِ؟

تمارينُ ومسائلُ

١) جدْ حجمَ هرمٍ قائم ارتفاعُهُ ١٧ مترًا ، وقاعدتُهُ مربعةُ الشكلِ طولُ ضلعِها ٢٢ مترًا.

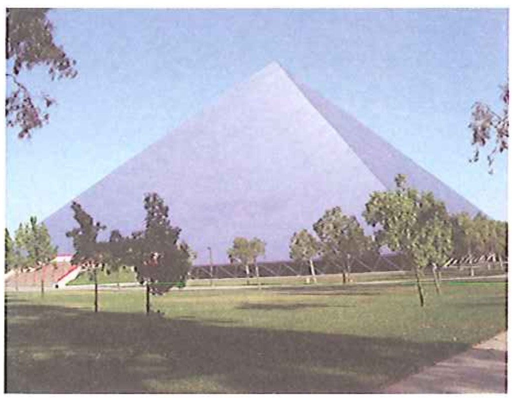
٢) جدِ ارتفاعَ شمعةٍ على شكلِ هرمٍ قائمٍ، حجمُها ٨٤٧ سم^{٣}، ومساحةُ قاعدتِها ١٢١سم^{٢}.



٣) هرمٌ قائمٌ ثلاثيٌّ أبعادُ قاعدتِهِ ٥سم، ٤سم، ٣سم ، وارتفاعُهُ الجانبيُّ ٨سم، كما هوَ موضحٌ جانبًا، جدْ:

أ) مساحةَ سطحِهِ الجانبيةَ.

ب) مساحةَ سطحِهِ الكليةَ.



٤) الشكلُ الموضحُ جانبًا يمثلُ هرمًا قائمًا رباعيًّا قاعدتُهُ مستطيلةُ الشكلِ طولُها ١٥م، وعرضُها ١٠م، ومساحتُهُ الجانبيةُ ٢٢٥م^{٢}. جدِ ارتفاعَهُ الجانبيَّ.

٥) الهرمُ الأكبرُ "خوفو" منْ أهراماتِ الجيزةِ في مصرَ، يبلغُ ارتفاعُهُ ١٤٦,٥ مترًا، وقاعدتُهُ مربعةُ الشكلِ طولُ ضلعِها ٢٣٠ مترًا . جدْ حجمَهُ.

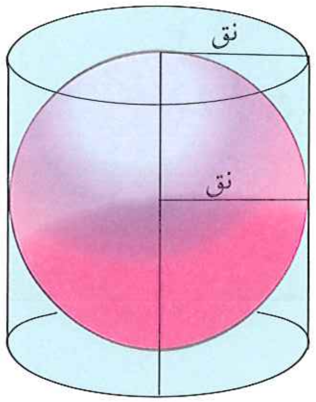
٦) ارسمْ شبكةً لهرمٍ ثلاثيٍّ بحيثُ تكونُ مساحتُهُ الجانبيةُ (٦٠) سم^{٢}.

٧) ارسمْ شبكةً لهرمٍ رباعيٍّ بحيثُ تكونُ مساحتُهُ الكليةُ (٦٠) سم^{٢}.

الدرس السادس
حجمُ الكرةِ ومساحةُ سطحِها

النتاجاتُ

- تستقصي صيغةً لحجمِ الكرةِ، ومساحةِ سطحِها.



١) ماذا يمثِّلُ الشكلُ المجاورُ؟

٢) ما العلاقةُ بَيْنَ نصفِ قطرِ الكرةِ ونصفِ قطرِ الأسطوانةِ؟

٣) ما العلاقةُ بَيْنَ نصفِ قطرِ الكرةِ وارتفاعِ الأسطوانةِ؟

٤) ما حجمُ الكرةِ؟

أثبتَ أرخميدسُ أنَّ حجمَ الكرةِ يساوي $\frac{٢}{٣}$ حجمِ الأسطوانةِ المحيطةِ بها كما في الشكلِ أعلاهُ، وعليهِ فإنَّ:

حجمَ الكرةِ $= \frac{٢}{٣} \times \pi$ نق$^{٢} \times$ ع

وبما أنَّ:

١) نصفَ قطرِ الأسطوانةِ = نصفَ قطرِ الكرةِ

٢) ارتفاعَ الأسطوانةِ = ٢ × نصفِ قطرِ الكرةِ

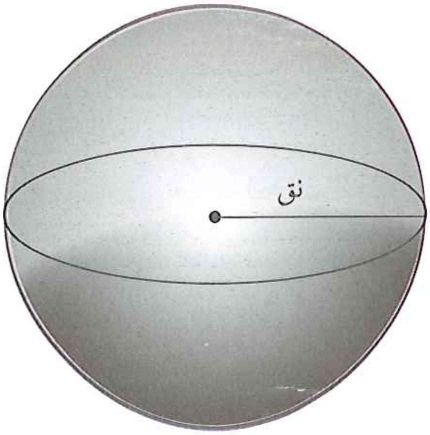
إذنْ: حجمُ الكرةِ $= \frac{٢}{٣} \times \pi$ نق$^{٢} \times$ ٢ نق

$= \frac{٤}{٣} \times \pi$ نق^{٣}.

حجمُ الكرةِ $= \frac{٤}{٣} \pi$ نق^{٣} حيثُ نق نصفُ قطرِ الكرةِ

مثالٌ (١)

كرةٌ طولُ نصفِ قطرِها ٦سم . جدْ حجمَها.



الحلُّ

حجمُ الكرةِ = $\frac{٤}{٣}\pi$ نق^{٣}

= $\frac{٤}{٣}\pi \times ٦^{٣}$

= ٢٨٨ π سم^{٣}.

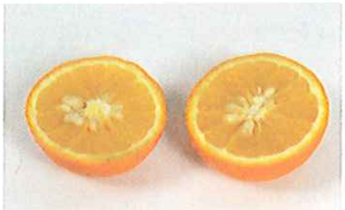
تدريبٌ ١

جدْ طولَ قطرِ كرةٍ حجمُها $\frac{٥٠٠}{٣}\pi$ سم^{٣}.

نشاطٌ

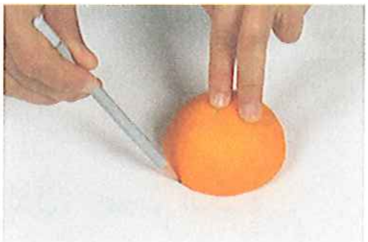
١) أحضرْ برتقالةً على شكلِ كرةٍ قدْرَ الإمكانِ، وقسِّمْها إلى نصفينِ.

(١)/ أ



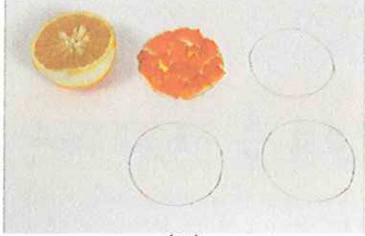
(١)/ ب

٢) ارسمْ أربعَ دوائرَ مستخدمًا البرتقالةَ نفسَها.



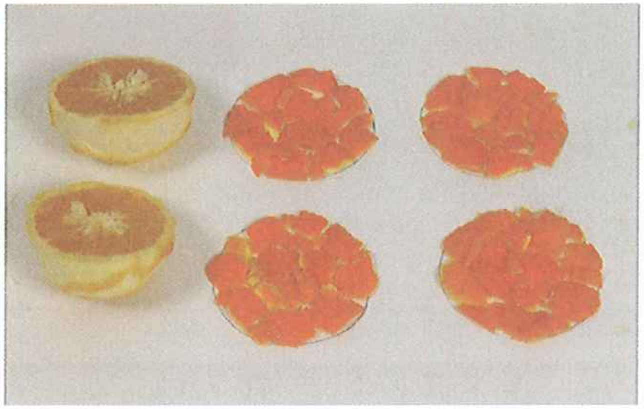
(٢)

٣) قشّرِ البرتقالةَ تمامًا إلى قطع صغيرة واستخدم قِشرَ البرتقالةِ لتغطيةِ الدوائرِ الأربعِ.



(٣)

٥) منَ الشكلِ (٤) ماذا تستنتجُ ؟



(٤)

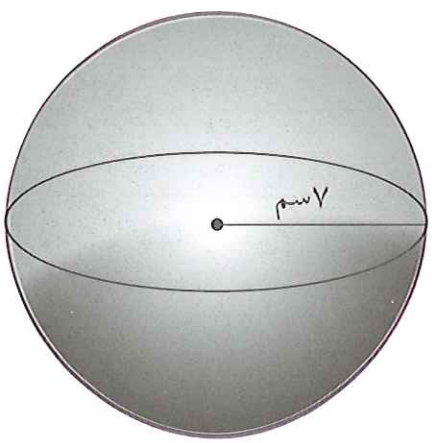
تعلمتَ سابقًا أنَّ مساحةَ الدائرةِ = π نق^{٢}، وأنَّ قشرَ البرتقالةِ غطّى الدّوائرَ الأربعَ تمامًا، وهذا يعني أنَّ: مساحةَ سطحِ الكرةِ = ٤ × مساحةِ الدائرةِ

= ٤ π نق^{٢}.

مساحةُ سطحِ الكرةِ = ٤ π نق^{٢}، حيثُ نق نصفُ قطرِ الكرةِ .

مثالٌ (٢)

جدْ مساحةَ سطحِ كرةٍ طولُ نصفِ قطرِها ٧سم .



الحلُّ

مساحةُ سطحِ الكرةِ = ٤ π نق^{٢}

$\approx$ ٤ × $\frac{٢٢}{٧}$ × ٧^{٢}

$\approx$ ٦١٦ سم^{٢}.

تدريبٌ ٢

جدْ مساحةَ سطحِ كرةٍ، طولُ نصفِ قطرِها ٢٠سم.

مثالٌ (٣)

جدْ طولَ نصفِ قطرِ كرةٍ مساحةُ سطحِها ٧٨٤ π سم^{٢}.

الحلُّ

مساحةُ سطحِ الكرةِ = ٤ π نق^{٢}

٧٨٤ π = ٤ × π × نق^{٢} — التعويضُ في القانونِ

٧٨٤ = ٤ نق^{٢} — قسمةُ طرفيِ المعادلةِ على π

١٩٦ = نق^{٢} — حلُّ المعادلةِ

± $\sqrt{١٩٦}$ = نق

نق = $\sqrt{١٩٦}$ — إهمالُ القيمةِ السالبةِ. لماذا؟

∴ نق = ١٤سم

∴ نصفُ قطرِ الكرةِ = ١٤سم.

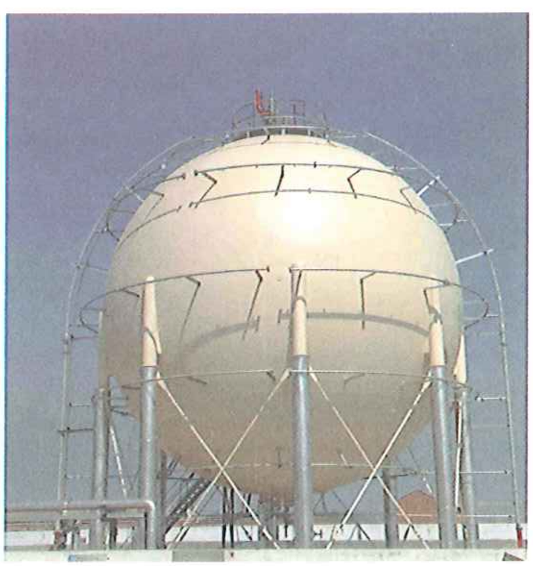
تدريبٌ ٣

خزانٌ كرويُّ الشكلِ مساحةُ سطحِهِ ١٢٥٦م^{٢} جدْ :

١) طولَ نصفِ قطرِ الخزانِ.

٢) حجمَ الخزانِ.

(استخدم π ≈ ٣,١٤)



تمارينُ ومسائلُ

١) كرةٌ طولُ نصفِ قطرِها ٢١سم . جدْ حجمَها ، ومساحةَ سطحِها .

٢) جدْ طولَ نصفِ قطرِ كرةٍ حجمُها ٣٦ π سم^{٣}.

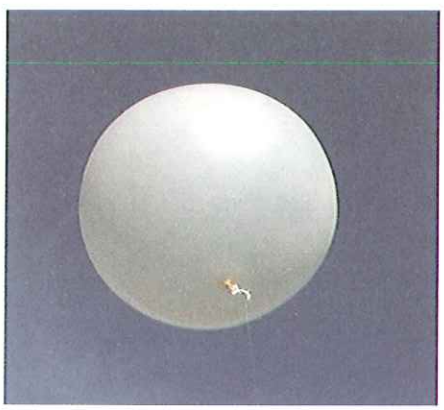
٣) جدْ مساحةَ سطحِ كرةٍ حجمُها $\frac{٢٥٦}{٣}$ سم^{٣}.

٤) جدْ حجمَ الكرةِ التي مساحةُ سطحِها ١٠٠ π سم^{٢}.

٥) مكعبٌ منَ الرصاصِ حجمُهُ ٣٨٨٠٨ سم^{٣}، صُهرَ لإعادةِ صنعِهِ على صورةِ كرةٍ، جدْ:

أ) طولَ نصفِ قطرِ الكرةِ الناتجةِ بعدَ إعادةِ التصنيعِ.

ب) مساحةَ سطحِ الكرةِ الناتجةِ بعدَ إعادةِ التصنيعِ.



٦) الشكلُ المجاورُ يمثِّلُ بالونًا كرويًّا يُستخدَمُ لدراسةِ الطقسِ، ويبلغُ حجمُهُ ٣٦ πسم^{٣}، جدْ مساحةَ سطحِهِ.

الدرسُ السابعُ معاملُ التغيّرِ

النتاجاتُ

- يستقصي تأثيرَ التغيّرِ في أبعادِ المجسمِ على حجمِهِ ومساحةِ سطحِهِ.

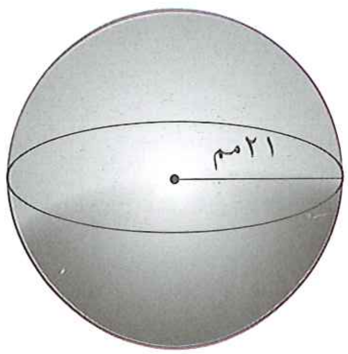
كرةٌ نصفُ قطرِها ٧مم تتمددُ بفعْلِ الحرارةِ بشكلٍ منتظمٍ محافظةً على شكلِها؛ بحيثُ أصبحَ نصفُ قطرِها ٢١مم، انظرِ الشكلَ المجاورَ، ثمَّ أجبْ عما يأتي:

١) ما معاملُ التغيّرِ؟

٢) ما حجمُ الكرةِ قبلَ عمليةِ التمددِ؟

٣) ما حجمُ الكرةِ بعدَ عمليةِ التمددِ؟

شكلٌ (١)



شكلٌ (٢)

بما أنَّ نصفَ قطرِ الكرةِ تغيّرَ منْ ٧مم إلى ٢١مم فإنَّ معاملَ التغيّرِ هوَ ٣

∴ حجمُ الكرةِ قبلَ التمددِ (التغيُّرِ) ≈ $\frac{٤}{٣} \times ٧^{٣} \times \pi$

≈ $\frac{١٣٧٢}{٣} \pi$ مم^{٣}.

حجمُ الكرةِ بعدَ عمليةِ التمددِ (التغيُّرِ) ≈ $\frac{٤}{٣} \times ٢١^{٣} \times \pi$

≈ $\frac{٣٧٠٤٤}{٣}$ مم^{٣}.

لاحظْ أنَّ: حجمَ الكرةِ بعدَ التغيُّرِ = $(٣)^{٣} \times$ حجمِ الكرةِ قبلَ التغيُّرِ.

تدريبٌ ١

كرةٌ ثلجيةٌ نصفُ قطرِها ٢٠سم، أخذتْ بالذوبانِ بشكلٍ منتظمٍ محافظةً على شكلِها وفي لحظةٍ ما أصبحَ نصفُ قطرِها ١٠سم، جدْ كلًّا مما يأتي:

١) معاملَ التغيُّرِ.

٢) حجمَ الكرةِ بعدَ ذوبانِها في اللحظةِ حيثُ نصفُ قطرِها ١٠سم.

مثالٌ (١)

كرةٌ منَ المعدنِ نصفُ قطرِها ٣سم، أخذتْ تتمددُ بفعلِ الحرارةِ، وفي لحظةٍ معينةٍ أصبحَ نصفُ قطرِها ٦سم، جدْ ما يأتي:

١) معاملَ التغيُّرِ.

٢) مساحةَ سطحِها لحظةَ أصبحَ نصفُ قطرِها ٦سم.

الحلُّ

معاملُ التغيُّرِ هوَ ٢

مساحةُ سطحِ الكرةِ = ٤ π نق^{٢}

∴ مساحةُ سطحِ الكرةِ قبلَ التغيُّرِ = ٤ × (٣)^{٢} π

= ٣٦ π سم^{٢}

مساحةُ سطحِ الكرةِ بعدَ التغيُّرِ = ٤ × (٦)^{٢} π

= ١٤٤ π سم^{٢}.

لاحظ أنَّ: مساحةَ سطحِ الكرةِ بعدَ التغيُّرِ = (٢)^{٢} × مساحةِ سطحِ الكرةِ قبلَ التغيُّرِ.

تدريبٌ ٢

بالونٌ كرويُّ الشكلِ مساحةُ سطحِهِ ١٢٥ π سم^{٢} أخذَ يتسرّبُ منهُ الهواءُ بشكلٍ منتظمٍ بحيثُ يبقى محافظًا على شكلِهِ الكرويِّ، وفي لحظةٍ ما أصبحَ نصفُ قطرِهِ $\frac{٢}{٣}$ نصفِ قطرِهِ السابقِ، جدْ مساحةَ سطحِهِ عندَ تلكَ اللحظةِ.

تحدَّثْ

تحدَّثْ لزميلِكَ عن أثرِ معاملِ التغيرِ في كلٍّ منْ: حجمِ الكرةِ، ومساحةِ سطحِها بعدَ التغييرِ. مبررًا إجابتكَ من خلالِ تقديمِ أمثلةٍ.

مثالٌ (٢)

بركةُ سباحةٍ أسطوانيةُ الشكلِ نصفُ قطرِها ٧م وارتفاعُها ٤م، تمَّ عملُ توسعةٍ لها بحيثُ أصبحَ نصفُ قطرِها ١٤م وارتفاعُها ٨م، أكملِ الجدولِ الآتيَ:

بركةُ السباحةِ	نصفُ القطرِ	الارتفاعُ	محيطُ القاعدةِ	مساحةُ القاعدةِ	المساحةُ الجانبيةُ	المساحةُ الكليةُ	الحجمُ
قبلَ التوسعةِ	٧	٤	٤٤		١٧٦		٦١٦
بعدَ التوسعةِ	١٤	٨		٦١٦		١٩٣٦	

ماذا تلاحظُ؟

الحلُّ

بركةُ السباحةِ	نصفُ القطرِ	الارتفاعُ	محيطُ القاعدةِ	مساحةُ القاعدةِ	المساحةُ الجانبيةُ	المساحةُ الكليةُ	الحجمُ
قبلَ التوسعةِ	٧	٤	٤٤	١٥٤	١٧٦	٤٨٤	٦١٦
بعدَ التوسعةِ	١٤	٨	٨٨	٦١٦	٧٠٤	١٩٣٦	٤٩٢٨

نلاحظُ أنَّ: معاملَ التغيُّرِ هوَ ٢

١) ٨٨ = ٢ × ٤٤ أو ٤٤ = $\frac{١}{٢}$ × ٨٨

٢) ٦١٦ = $(٢)^{٢}$ × ١٥٤

٣) ٧٠٤ = $(٢)^{٢}$ × ١٧٦

٤) ١٩٣٦ = $(٢)^{٢}$ × ٤٨٤

٥) ٤٩٢٨ = $(٢)^{٣}$ × ٦١٦

تدريبٌ ٣

قالبٌ منَ الثلجِ أسطوانيُّ الشكلِ، حجمُهُ ٣٦ π سم^{٣}، أخذَ بالذوبانِ بشكلٍ منتظمٍ، وفي لحظةٍ ما كانَ معاملُ التغيُّرِ ٠,٢، جدْ حجمَ القالبِ في تلكَ اللحظةِ.

تمارينُ ومسائلُ

١) مصنعٌ للحلوياتِ يعملُ كعكَ العيدِ على شكلِ كراتٍ، حجمُ كلٍّ منها ١,٣ π سم^٣ قررَ صاحبُ المعملِ تصغيرَ الكعكةِ إلى الثلثينِ، وذلكَ منْ أجلِ إعادةِ تسعيرِها. ما حجمُ الكعكةِ بعد عمليةِ التصغيرِ؟

٢) أسطوانةٌ دائريةٌ قائمةٌ مصنوعةٌ من المعدنِ حجمُها ٥٣٤٦سم^٣، أخذتْ تتمددُ بفعلِ الحرارةِ بشكلٍ منتظمٍ وفي لحظةٍ ما ازدادتْ أبعادُها بمقدارِ الضعفينِ. فَجدْ حجمَ الأسطوانةِ في تلكَ اللحظةِ.

٣) منشورٌ ثلاثيٌّ مصنوعٌ منَ الثلجِ حجمُهُ ٧٦٨ سم^٣، وأبعادُهُ: ١٢سم، ١٦سم، ٢٠سم، ومساحتُهُ الجانبيةُ ٣٨٤ سم^٢. أخذَ بالذوبانِ بشكلٍ منتظمٍ محافظًا على شكلهِ، وفي لحظةٍ ما أصبحتْ أبعادُهُ ٣سم، ٤سم، ٥سم، جدْ كلًّا مما يأتي:

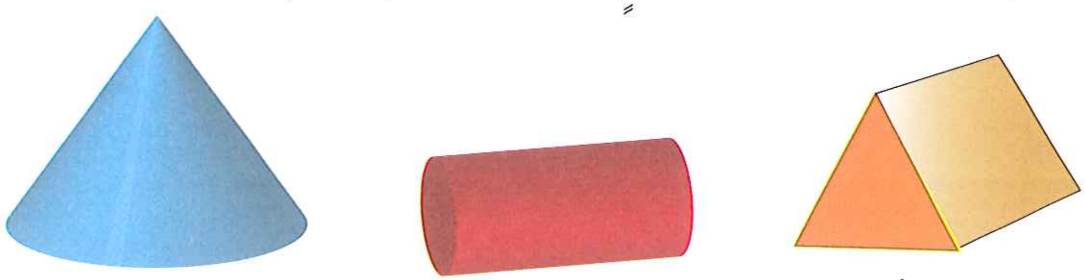
أ) معاملَ التغيُّرِ.

ب) حجمَ المنشورِ في تلكَ اللحظةِ.

جـ) مساحتَه الجانبيةَ في تلكَ اللحظةِ.

مراجعةٌ

١) ارسمْ شبكةً تقريبيةً لكلِّ مجسمٍ منَ المجسماتِ الآتيةِ:



(أ) (ب) (جـ)

٢) منشورٌ ثلاثيٌّ قاعدتُهُ مثلثٌ قائمُ الزاويةِ، أطوالُ أضلاعِهِ: ٥سم ، ١٢سم ، ١٣سم ، وارتفاعه ١٠سم ، جدْ:

أ) حجمَهُ.

ب) مساحةَ سطحِهِ الكليةَ.

جـ) حجمَهُ ومساحةَ سطحِهِ الكليةَ إذا ضُرِبْتَ أبعادُهُ في ٤ .

٣) منشورٌ قاعدتُهُ على شكلِ شبهِ منحرفٍ طولُ قاعدتيهِ المتوازيتينِ ١٢سم، ٨سم وارتفاعُها ٦سم، وارتفاعُ المنشورِ ٩سم. جدْ حجمَهُ.

٤) هرمٌ قائمٌ رباعيٌّ حجمُهُ ٧٢م٣، وارتفاعُهُ ٨م جدْ مساحةَ قاعدتِهِ.

٥) هرمٌ قائمٌ ارتفاعُهُ ١٧م ، وقاعدتُهُ مربعةُ الشكلِ طولُ ضلعِها ٢٢م ، جدْ:

أ) حجمَهُ.

ب) إذا تضاعفَتْ أبعادُهُ، فما حجمُهُ بعد التغيُّرِ؟

٦) أسطوانةٌ دائريةٌ قائمةٌ طولُ قطرِها ١٤سم، وارتفاعُها ١٢سم ، جدْ:

أ) حجمَها.

ب) مساحةَ سطحِها الكليةَ.

جـ) إذا تضاعفَتْ أبعادُها فجدْ حجمَها.

٧) أسطوانةٌ دائريةٌ قائمةٌ مساحتُها الكليةُ ٧٠٤ سم^{2} ، وطولُ نصفِ قطرِها ٧سم جدِ ارتفاعَها.

٨) مخروطٌ مساحةُ قاعدتِهِ ٣١٤ سم^{2}، وارتفاعُهُ ٢٤سم ، جدْ:

أ) حجمَهُ.

ب) مساحتَهُ الجانبيةَ.

جـ) مساحةَ سطحِهِ الكليةَ.

٩) مخروطٌ دائريٌّ قائمٌ طولُ قطرِ قاعدتِهِ ٦سم ، وطولُ راسمِهِ ٥سم، جدْ:

أ) حجمَ المخروطِ.

ب) مساحتَهُ الجانبيةَ.

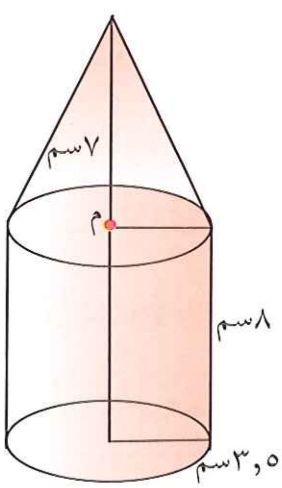
جـ) إذا ضُرِبَتْ أبعادُهُ في ٣، فجدْ حجمَهُ ومساحَتَهُ الجانبيةَ.

١٠) يمثّلُ المجسمُ جانبًا كرةً طولُ قطرِها ٦م، جدْ:

أ) حجمَها.

ب) مساحةَ سطحِها الكليةَ.

١١) أسطوانةٌ دائريةٌ قائمةٌ، طولُ نصفِ قطرِ قاعدتِها ٦سم، وحجُمها ٣٢٤ π سم^{3}، جدْ ارتفاعَها.



١٢) جدْ حجمَ المجسمِ المركبِ المرسومِ جانبًا.

اختبارٌ ذاتيٌّ

١) يتكونُ هذا السؤالُ من ٦ فقراتٍ، من نوعِ الاختيارِ منْ متعددٍ، لكلِّ فقرةٍ منها ٤ بدائلَ، واحدٌ منها فقطْ صحيحٌ، ضعْ دائرةً حولَ رمزِ البديلِ الصحيحِ:

(١) منشورٌ رباعيٌّ مساحتُهُ الجانبيةُ ٤٨ πسم^{٢}، وارتفاعُهُ ٦سم؛ لذا فإنَّ طولَ محيطِ قاعدتِهِ يساوي:

أ) ٨ سم　　ب) ٤سم　　جـ) ٨ π سم　　د) ٦ π سم

(٢) أسطوانةٌ طولُ نصفِ قطرِها ٧سم، وارتفاعُها ١٠ سم، ما مساحةُ سطحِها الكليةَ بالسنتمترِ المربعِ؟

أ) ٧٤٨　　ب) ٣٠٨　　جـ) ١٥٤٠　　د) ٤٤٠

(٣) مخروطٌ دائريٌّ قائمٌ مساحةُ قاعدتِهِ ٦١٦ سم^{٢}؛ ما محيطُ قاعدتِهِ بالسنتمترِ؟

أ) ١٤　　ب) ٤٤　　جـ) ٨٨　　د) ١٩٦

(٤) هرمٌ حجمُهُ ١٧٥سم^{٣}، وارتفاعُهُ ٢٥سم ، ما مساحةُ قاعدتِهِ؟

أ) ٧سم^{٢}　　ب) ٢١سم^{٢}　　جـ) ٢٨سم^{٢}　　د) ١٤سم^{٢}

(٥) كرةٌ طولُ نصفِ قطرِها ٦ سم ؛ ما حجمُها بالسنتمترِ المكعبِ:

أ) ١٤٤ π　　ب) ٣٦π　　جـ) ٢١٦ π　　د) ٢٨٨ π

(٦) كرةٌ مساحةُ سطحِها ٣٦ πسم^{٢}، تناقصَ نصفُ قطرِها إلى النصفِ، ما مساحةُ سطحِها؟

أ) ٣٦ π سم^{٢}　　ب) ٩ π سم^{٢}　　جـ) ٤ π سم^{٢}　　د) ١٨ π سم^{٢}

٢) منشــورٌ ثـلاثيٌّ قاعــدتُهُ مثلثٌ قائمُ الزاويةِ أطوالُ أضلاعِهِ: (٦) سم ، (٨) سم ، (١٠) سم ، وارتفاعُهُ (١١) سم. جدْ مساحتَهُ الجانبيةَ.

٣) أسطوانةٌ دائريةٌ قائمةٌ مساحةُ قاعدتِها ١٥٤ سم٢، وارتفاعُها ٢٠ سم .جدْ كلًّا مما يأتي:

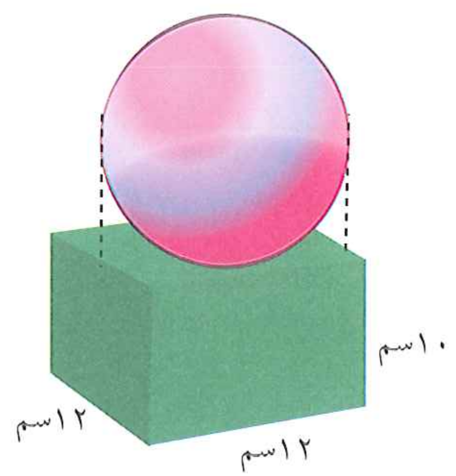
أ) محيطَ قاعدتِها.

ب) مساحةَ سطحِها الكليةَ.

٤) قبعةٌ على شكلِ مخروطٍ، حجمُها ١٨٠ π سم٣، وارتفاعُها ١٥سم. جدْ طولَ نصفِ قطرِها .

٥) في حصةِ التربيةِ المهنيةِ ، عملَ أحدُ الطلبةِ كوبًا أسطوانيَّ الشكلِ منَ الفخارِ بحيثُ كانَ حجمُهُ ٤٨ π سم٣، ونصفُ قطرِ قاعدتِهِ ٢سم، ما ارتفاعُهُ؟

٦) جدْ حجمَ المجسمِ المركبِ المرسومِ أدناهُ.



تمَّ بِحَمدِ اللّٰهِ تعالى