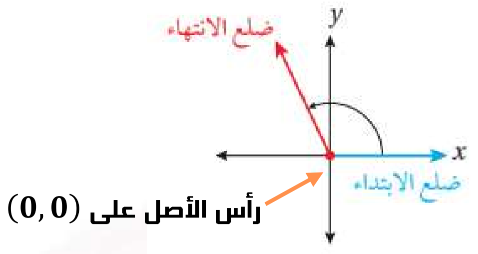
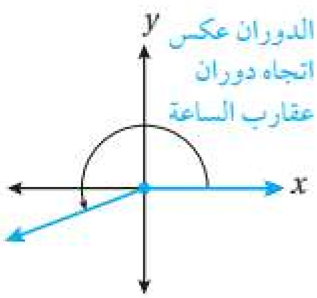
قياس الزاوية بالراديان

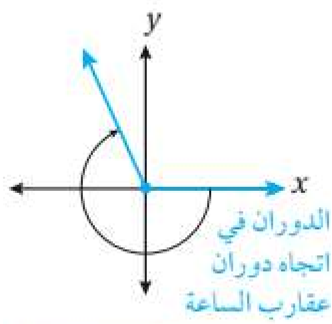
الزاوية في الوضع القياسي



زاوية في الوضع القياسي



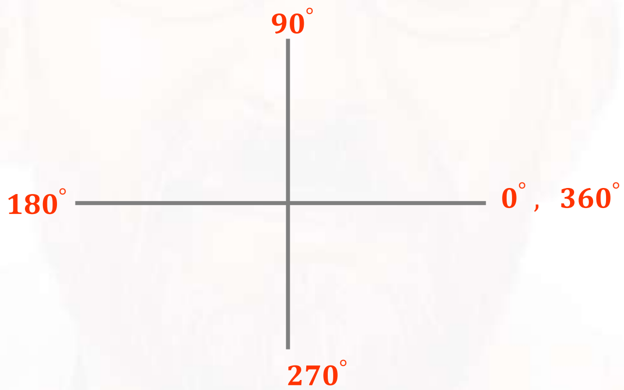
زاوية قياسها موجب



زاوية قياسها سالب

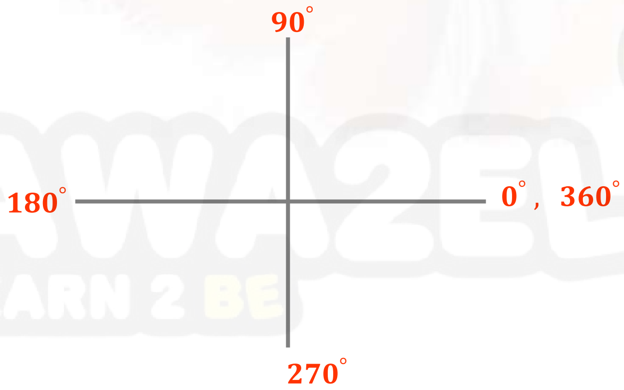
مثال 1 ارسم في الوضع القياسي الزاوية التي علم قياسها في كل مما يأتي :

① 240°



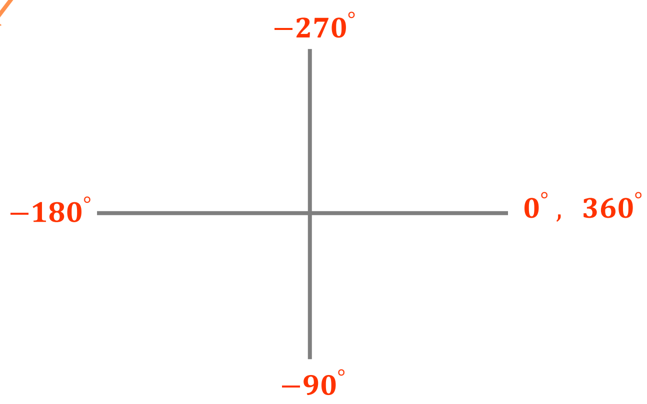
② 500°

■ إذا كانت الزاوية أكبر من 360° اطرح منها 360° لمعرفة أين يتوقف ضلع الانتهاء



3 -50°

الدوران مع عقارب الساعة



أتحقق من فهمي

أرسم في الوضع القياسي الزاوية التي علم قياسها في كل مما يأتي :

$c)\ -130^{\circ}$ $\quad$ $b)\ 650^{\circ}$ $\quad$ $a)\ 170^{\circ}$

أتدرب وأحل المسائل

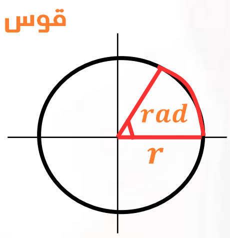
أرسم في الوضع القياسي الزاوية التي علم قياسها في كل مما يأتي :

$d)\ -70^{\circ}$ $\quad$ $c)\ 540^{\circ}$ $\quad$ $b)\ -900^{\circ}$ $\quad$ $a)\ 450^{\circ}$

- **الراديان :**

هو محيط الدائرة $c = 2\pi r$

- الزاوية بالراديان $=$ $\dfrac{\text{طول القوس المقابل للزاوية}}{\text{نصف القطر}}$



للتحويل من درجات إلى راديان اضرب بـ $\frac{\pi\, rad}{180^\circ}$

للتحويل من راديان إلى درجات اضرب بـ $\frac{180^\circ}{\pi}$

مفهوم أساسي التحويل من القياس بالدرجات إلى القياس بالراديان , والعكس

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} rad \qquad 1\, rad = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ \qquad 180^\circ = \pi\, rad$$

1. للتحويل من القياس بالدرجات إلى القياس بالراديان , أضرب قياس الزاوية في $\frac{\pi\, rad}{180^\circ}$
2. للتحويل من القياس بالراديان إلى القياس بالدرجات , أضرب قياس الزاوية في $\frac{180^\circ}{\pi\, rad}$

مثال 2 أحول قياس الزاوية المكتوبة بالدرجات إلى الراديان , وقياس الزاوية المكتوبة بالراديان إلى الدرجات في كل مما يأتي :

① 140°

$$140^\circ = 140^\circ\left(\frac{\pi\, rad}{180^\circ}\right)$$
$$= 140^\circ\left(\frac{\pi\, rad}{180^\circ}\right)$$
$$= \frac{140\pi}{180} = \frac{7\pi}{9} rad$$

② $-\frac{\pi}{12}$

$$-\frac{\pi}{12} = -\frac{\pi}{12} rad\left(\frac{180^\circ}{\pi\, rad}\right)$$
$$= -15^\circ$$

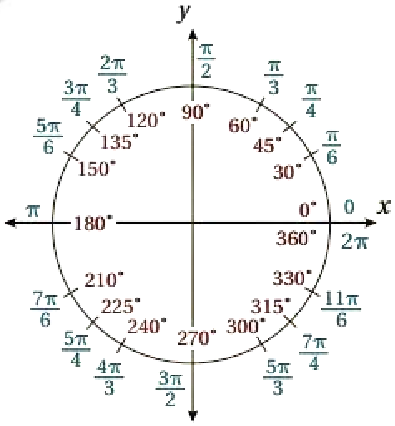
أتحقق من فهمي

أحول قياس الزاوية المكتوبة بالدرجات إلى الراديان , وقياس الزاوية المكتوبة بالراديان إلى الدرجات في كل مما يأتي :

$d)\ -6$ $\qquad c)\ -80^\circ$ $\qquad b)\ \frac{5\pi}{4}$ $\qquad a)\ 165^\circ$

أتعلّم بوجه عام , تحذف كلمة (rad) عند التعبير عن قياسات الزوايا بالراديان . وحين يكون قياس الزاوية من دون وحدة , فهذا يعني أن قياسها بوحدة راديان

■ يبين الشكل المجاور القياسات المتكافئة بالدرجات والراديان للزوايا الخاصة من 0° إلى 360° (من $0\ rad$ إلى $2\pi\ rad$)



مثال 3 حول من راديان إلى درجات :

① $\frac{3\pi}{4}$

② $\frac{5\pi}{4}$

③ $\frac{7\pi}{4}$

بالدرجات	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
بالراديان	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

① $\frac{7\pi}{6}$ ② $\frac{11\pi}{3}$ ③ $\frac{13\pi}{4}$

تعميم :

$$\frac{n\pi}{6} = n \times 30^{\circ}$$

$$\frac{n\pi}{4} = n \times 45^{\circ}$$

$$\frac{n\pi}{3} = n \times 60^{\circ}$$

الزوايا المشتركة

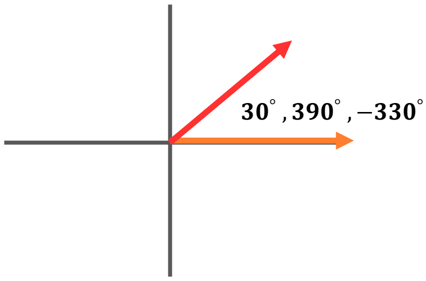
$1 \times 360^\circ = 360^\circ$

$2 \times 360^\circ = 720^\circ$

$3 \times 360^\circ = 1080^\circ$

الفرق بين الزوايا المشتركة ؟

مضاعفات 360°



الزوايا المشتركة لها

→ نفس ضلع الانتهاء

مفهوم أساسي

يمكن إيجاد زاوية مشتركة في ضلع الانتهاء مع زاوية أخرى عن طريق الجمع أو الطرح لأحد مضاعفات الزاوية 360° أو 2π

بالدرجات

إذا كانت θ تمثل القياس بالدرجات لزاوية ما ,

فإن جميع الزوايا ذات القياس $\theta + 360^\circ n$ هي

زوايا مشتركة مع θ , حيث n عدد صحيح

بالراديان

إذا كانت θ تمثل القياس بالراديان لزاوية ما ,

فإن جميع الزوايا ذات القياس

$\theta + 2n\pi$ هي زوايا مشتركة مع θ ,

حيث $(n \to \pm)$ n عدد صحيح

مثال 4

أوجد 3 زوايا موجبة و 3 زوايا سالبة مشتركة للزاوية 50° ثم مثلها بيانيا

● الحل :

$\theta + 360^\circ(n)$

الموجبة

$50 + 360 = 410^\circ$

$50 + 360\ (2) = 770^\circ$

$50 + 360\ (3) = 1130^\circ$

● زوايا سالبة مشتركة لـ 50°

مع عقارب الساعة

$50^\circ - 360^\circ(1) \to 50^\circ - 360^\circ = -310^\circ$

$50^\circ - 360^\circ(2) \to 50^\circ - 720^\circ = -670^\circ$

$50^\circ - 360^\circ(3) \to 50^\circ - 1080^\circ = -1030^\circ$

مثال 5 أوجد زاويتان موجبتان وزاويتان سالبتان مشتركة للزاوية $\frac{\pi}{3}$ ثم مثلها بيانيا . $\theta \pm n(2\pi)$

• الموجبة :

$$\frac{\pi}{3} + 2\pi(1) = \frac{\pi}{3} + \frac{3 \times 2\pi}{3 \times 1} = \frac{7\pi}{3}$$

$$\frac{x}{3} + 2\pi(2) = \frac{\pi}{3} + \frac{3 \times 4\pi}{3 \times 1} = \frac{13\pi}{3}$$

• السالبة :

$$\frac{\pi}{3} - 2\pi(1) = \frac{\pi}{3} - \frac{3 \times 2\pi}{3 \times 1} = \frac{-5\pi}{3}$$

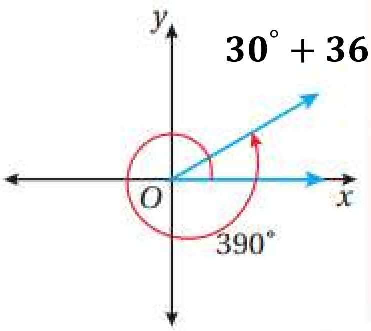
$$\frac{\pi}{3} - 2\pi(2) = \frac{\pi}{3} - \frac{3 \times 4\pi}{3 \times 1} = \frac{-11\pi}{3}$$

مثال 6 أجد زاويتين احداهما قياسها موجب , والأخرى قياسها سالب , وكلتاهما مشتركة في ضلع الانتهاء مع كل زاوية معطاة مما يأتي , ثم أرسمها :

① 30°

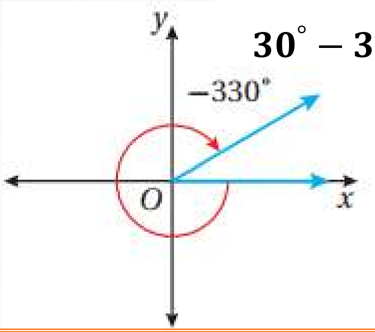
الموجبة

$$30^\circ + 360^\circ = 390^\circ$$



السالبة

$$30^\circ - 360^\circ = -330^\circ$$



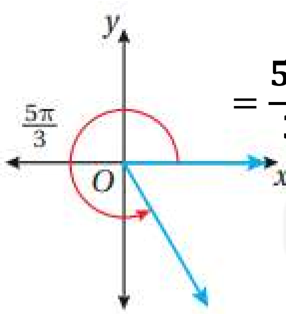
---

② $-\frac{\pi}{3}$

$$\theta \pm 2\pi(n)$$

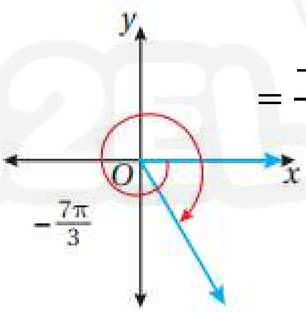
الموجبة

$$\frac{-\pi}{3} + \frac{2\pi \times 3}{1 \times 3} = \frac{-\pi + 6\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$$



السالبة

$$\frac{-\pi}{3} - \frac{2\pi \times 3}{1 \times 3} = \frac{-\pi - 6\pi}{3} = \frac{-7\pi}{3}$$



أتحقق من فهمي

أجد زاويتين إحداهما قياسها موجب , والأخرى قياسها سالب , وكلتاهما مشتركة في ضلع الانتهاء مع كل زاوية معطاة مما يأتي , ثم أرسمها :

$b)\ -920^{\circ}$

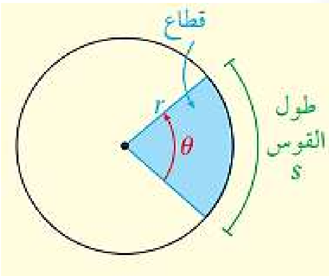
$a)\ 88^{\circ}$

$d)\ -\frac{3\pi}{4}$

$c)\ \frac{2\pi}{3}$

طول القوس ومساحة القطاع

مفهوم أساسي



- **طول القوس**

بالكلمات : طول القوس s من الدائرة المقابل لزاوية مركزية قياسها θ بالراديان يساوي ناتج ضرب طول نصف القطر r في θ

بالرموز : $\boxed{s = r\theta}$

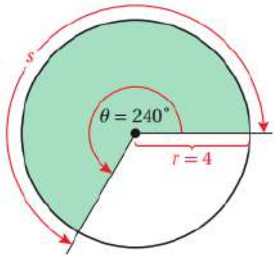
- **مساحة القطاع**

بالكلمات : مساحة القطاع A الذي قياس زاويته المركزية θ بالراديان في دائرة نصف قطرها r تساوي نصف ناتج ضرب مربع طول نصف القطر r في θ

بالرموز : $\boxed{A = \frac{1}{2}r^2\theta}$

مثال 7

يبين الشكل المجاور قطاعا دائريا زاويته المركزية 240° في دائرة طول نصف قطرها $4\ cm$. أجد طول القوس ومساحة القطاع ، مقربا إجابتي إلى أقرب جزء من عشرة.



$$\theta = \cancel{240}^{4\,\circ} \times \frac{\pi}{\cancel{180}_{3}} \rightarrow \theta = \frac{4\pi}{3}\ rad$$

$$r = 4cm$$

طول القوس

$$s = r\theta$$

$$s = (4)\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \frac{16\pi}{3}\,cm$$

$$= 16.8\ cm$$

مساحة القطاع

$$A = \frac{1}{2}r^2\theta$$

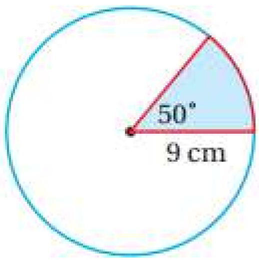
$$A = \frac{1}{\cancel{2}}(4)^2\left(\frac{4\pi}{3}\right)$$

$$A = \frac{32\pi}{3}$$

$$= 33.5\ cm^2$$

أتحقق من فهمي

يبين الشكل المجاور قطاعا دائريا زاويته المركزية 50° في دائرة طول نصف قطرها $9cm$. أجد طول القوس ومساحة القطاع ، مقربا إجابتي إلى أقرب جزء من عشرة



$$r = 9cm \qquad \theta = \cancel{50}^\circ \times \frac{\pi}{\cancel{180}^\circ} = \frac{5\pi}{18}\ rad$$

طول القوس

$$s = r\theta$$

$$s = (\cancel{9}^{1})\left(\frac{5\pi}{\cancel{18}_{2}}\right) = \frac{5\pi}{5}\,cm$$

$$= 7.9\ cm$$

مساحة القطاع

$$A = \frac{1}{2}r^2\theta$$

$$A = \frac{1}{2}(9)^2\left(\frac{5\pi}{18}\right)$$

$$A = \frac{1}{2} \times \cancel{81}^{9} \times \frac{5\pi}{\cancel{18}_{2}}$$

$$A = \frac{45\pi}{4}\ cm^2$$

$$= 35.3\ cm$$

الحركة الدائرية

السرعة الخطية $= \dfrac{\text{طول القوس المرسوم}}{\text{الزمن المستغرق}}$

$$v = \frac{s}{t}$$

طول القوس

السرعة الزاوية $= \dfrac{\text{مقدار التغير بالزاوية}}{\text{الزمن المستغرق}}$

$$w = \frac{\theta}{t}$$

مقدار التغير في الزمن

مثال 8 سيارة : إطار سيارة يبلغ طول قطره $15\ in$, ويدور 9.3 دورات في الثانية :

1) أجد السرعة الخطية للإطار بالإنش لكل ثانية

بما أن قياس الدورة الكاملة 2π , فإن 9.3 دورات تقابل زاوية الدوران θ التي قياسها $9.3 \times 2\pi$, أو 18.6π راديان

السرعة الخطية
$$v = \frac{s}{t}$$

بتعويض $s = r\theta$
$$= \frac{r\theta}{t}$$

بتعويض $r = 7.5\ , \theta = 18.6\pi\ \ ,\ \ t = 1\ sec$
$$= \frac{(7.5)(18.6\pi)inch}{1\ sec}$$

بالتبسيط
$$= \frac{139.5\pi\ inch}{1\ sec}$$

إذن , السرعة الخطية للإطار هي $139.5\ \pi$ إنش لكل ثانية , أو 438.25 إنش لكل ثانية تقريبا

2) أجد السرعة الزاوية للإطار بالراديان لكل ثانية

السرعة الزاوية
$$w = \frac{\theta}{t}$$

بتعويض $\theta = 18.6\pi\ \ ,\ \ t = 1\ sec$
$$= \frac{18.6\ \pi\ rad}{1\ sec}$$

إذن السرعة الزاوية للإطار هي $18.6\ \pi$ راديان لكل ثانية , أو 58.4 راديان لكل ثانية تقريبا

أتحقق من فهمي

منارة : تتوسط منارة قناة ماء , ويتحرك ضوؤها حركة دائرية بسرعة ثابتة . إذا أكمل ضوء المنارة دورة كاملة كل 10 ثوان , فأجد السرعة الزاوية لضوئها في الدقيقة

السرعة الزاوية = $\frac{\text{عدد الدورات}}{\text{الزمن المستغرق}}$

$$w=\frac{1\,\cancel{rad}}{10\,\cancel{sec}}\times\frac{2\pi\,rad}{1\,\cancel{rad}}\times\frac{60\,\cancel{sec}}{1\,min}$$

$$w=\frac{(1)(2\pi)(6\cancel{0})}{(1\cancel{0})(1)(1)}\,rad/min$$

$$\boxed{w=12\pi\ rad/min}$$

أتدرب وأحل المسائل

أرسم في الوضع القياسي الزاوية التي علم قياسها في كل مما يأتي :

(1) 450° (2) -900° (3) 540° (4) -700°

(5) $-\frac{\pi}{6}$ (6) $\frac{21\pi}{4}$ (7) $\frac{7\pi}{6}$ (8) $\frac{\pi}{9}$

أحول قياس الزاوية المكتوبة بالدرجات إلى الراديان , والزاوية المكتوبة بالراديان إلى الدرجات في كل مما يأتي :

(9) -225° (10) -135° (11) 75° (12) 500°

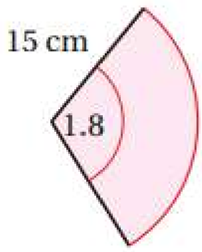
(13) $-\frac{\pi}{7}$ (14) $\frac{5\pi}{12}$ (15) 1.2 (16) 4

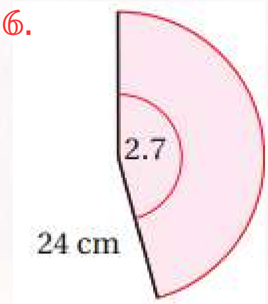
أجد زاويتين إحداهما قياسها موجب , والأخرى قياسها سالب , وكلتاهما مشتركة في ضلع الانتهاء مع كل زاوية معطاة مما يأتي , ثم أرسمها :

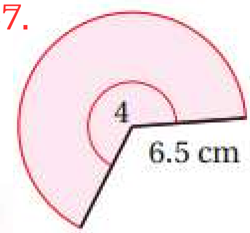
(17) 50° (18) 135° (19) 1290° (20) -150°

21. $\frac{11\pi}{6}$ 22. $-\frac{\pi}{4}$ 23. $-\frac{\pi}{12}$ 24. $\frac{7\pi}{6}$

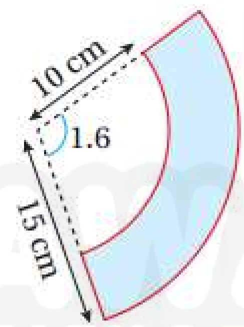
أجد طول القوس ومساحة القطاع في كل مما يأتي , مقربا إجابتي إلى أقرب جزء من عشرة :

25.


26.


27.


يمثل الشكل المظلل المجاور جزءا من قطاع دائري :

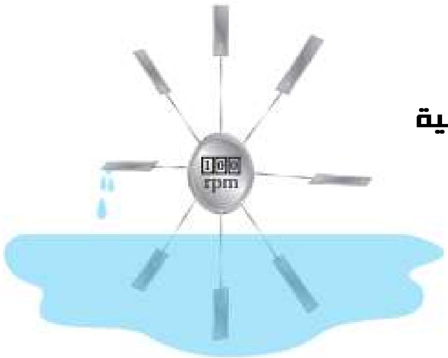


28. أجد مساحة هذا الشكل

29. أجد مساحة هذا الشكل

30. قطاع دائري مساحته $500\ cm^2$, وطول قوسه $20\ cm$,

أجد قياس زاويته بالراديان



31. تيار ماء : استعمل العلماء عجلة مجداف لقياس سرعة التيارات المائية بناءا على معدل الدوران . أجد سرعة تيار مائي بالمتر لكل ثانية إذا دارت العجلة 100 دورة في الدقيقة , علما بأن طول عجلة المجداف (المسافة من مركز الدائرة إلى طرف المجداف) هو $0.20\ m$

معلومة

الجزري مهندس عبقري مسلم , ولد عام 1136م , وقد تمكن من ابتكار أول مضخة مياه في التاريخ ,وهي الآلة التي أدت دورا محوريا فاعلا في الثورة الصناعية بأوروبا

32. يدور طفل حجرا مربوطا بطرف حبل طوله $3\ ft$ بمعدل 15 دورة في 10 ثوان .

أجد السرعة الزاوية والسرعة الخطية للحجر

■ قطر شفرة منشار دائرية الشكل $7.5\ in$, وهي تدور 2400 دورة في الدقيقة :

33. أجد السرعة الزاوية لهذه الشفرة بالراديان لكل ثانية

34. أجد السرعة الخطية لأسنان المنشار عند ملامستها الخشب المراد قطعه

معلومة

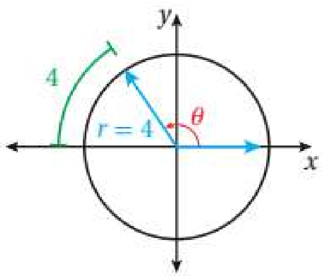
الشفرة الماسية هي شفرة منشار تحتوي على ماس مثبت بحافتها , وتستعمل لقطع المواد الصلبة , مثل : الرخام , وحجر البناء , وبلاط السيراميك

مهارات التفكير العليا

■ تبرير : قطاع دائري طول قوسه بالسنتيمترات يساوي عدديا مساحته بالأمتار المربعة :

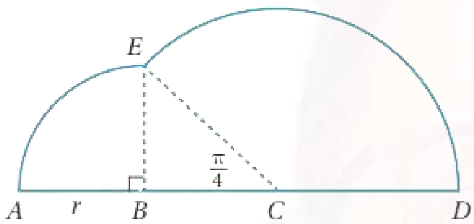
.35 أجد نصف قطر القطاع الدائري , مبررا إجابتي

.36 أجد قياس زاوية القطاع , مبررا إجابتي



.37 تبرير : أجد قياس الزاوية θ في الشكل المجاور , مبررا إجابتي

■ تحد : في الشكل المجاور ACD زاوية مستقيمة , و ABE قطاع دائري مركزه B , ونصف قطره r , و CED قطاع دائري مركزه C , و $m\angle ACE = \frac{\pi}{4}$:



.38 أثبت أن طول $\overline{CD}$ هو $\sqrt{2}\, r$

.39 أجد قياس $\angle ECD$ بالراديان

.40 أجد محيط الشكل ومساحته , علما بأن $r = 10\ cm$

الاقترانات المثلثية

مفهوم أساسي

إذا مثلت θ قياس زاوية حادة في مثلث قائم الزاوية ,

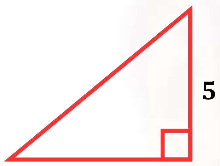
فإن الاقترانات المثلثية الستة تعرف بدلالة الوتر , والضلع

المقابل , والضلع المجاور كما يأتي :

قاطع التمام $(consecant)$ $\quad csc\ \theta = \dfrac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}}$	الجيب $(sine)$ $\quad sin\ \theta = \dfrac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$
القاطع $(secant)$ $\quad sec\ \theta = \dfrac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}}$	جيب التمام $(cosine)$ $\quad cos\ \theta = \dfrac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$
ظل التمام $(cotangent)$ $\quad cot\ \theta = \dfrac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}}$	الظل $(tangent)$ $\quad tan\ \theta = \dfrac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$

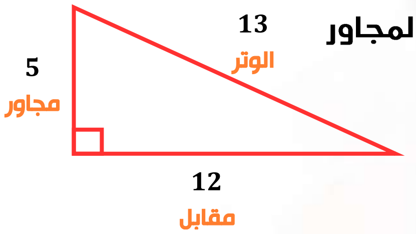
أتحقق من فهمي

أجد قيم الاقترانات المثلثية الستة للزاوية θ في المثلث المجاور



مثال 1

أجد قيم الاقترانات المثلثية الستة للزاوية θ في المثلث المجاور



نجد الضلع الثالث أولا

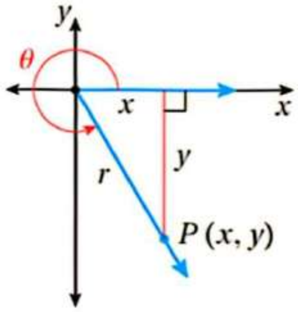
$$L = \sqrt{12^2 + 5^2}$$

$$L = \sqrt{144 + 25}$$

$$L = \sqrt{169} = 13$$

$csc\theta = \dfrac{13}{12}$	$sin\theta = \dfrac{12}{13}$ مقابل / وتر
$sec\theta = \dfrac{13}{5}$	$cos\theta = \dfrac{5}{13}$ مجاور / وتر
$cot\theta = \dfrac{5}{12}$	$tan\theta = \dfrac{12}{5}$ مقابل / مجاور

مفهوم أساسي



إذا كانت θ زاوية مرسومة في الوضع القياسي , والنقطة $P(x, y)$

تقع على ضلع الانتهاء للزاوية θ , و r يمثل

البعد بين النقطة P ونقطة الأصل ,

حيث : $r \neq 0$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$,

فإن الاقترانات المثلثية للزاوية θ تعرف كما يأتي :

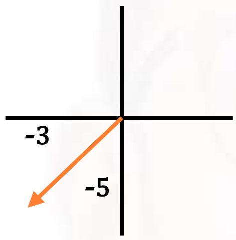
$$\tan\theta = \frac{y}{x} \ , \ x \neq 0 \qquad \cos\theta = \frac{x}{r} \qquad \sin\theta = \frac{y}{r}$$

$$\cot\theta = \frac{x}{y} \ , \ y \neq 0 \qquad \sec\theta = \frac{r}{x} \ , \ x \neq 0 \qquad \csc\theta = \frac{r}{y} \ , \ y \neq 0$$

مثال 2

تقع النقطة $(-3, -5)$ على ضلع انتهاء الزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي .

أجد قيم الاقترانات المثلثية الستة للزاوية θ



$$x = -3$$

$$y = -5$$

$$r = \sqrt{(-3)^2 + (-5)^2} = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34}$$

$$\csc\theta = \frac{-\sqrt{34}}{5} \qquad \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{-5}{\sqrt{34}}$$

$$\sec\theta = \frac{-\sqrt{34}}{3} \qquad \cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{-3}{\sqrt{34}}$$

$$\cot\theta = \frac{3}{5} \qquad \tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{-5}{-3} = \frac{5}{3}$$

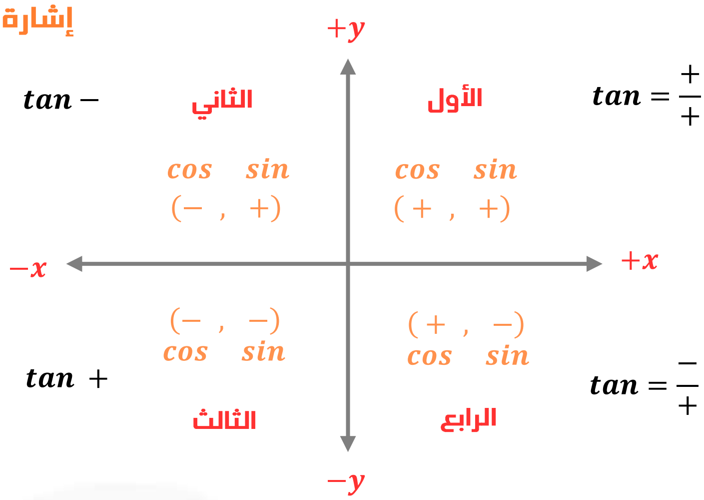
أتحقق من فهمي

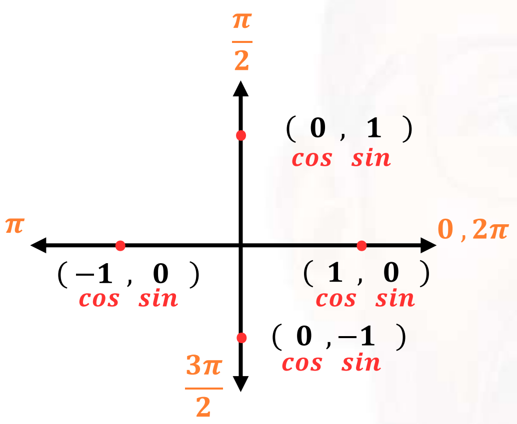
تقع النقطة $(1, -3)$ على ضلع انتهاء الزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي . أجد قيم

الاقترانات المثلثية الستة للزاوية θ

$r =$ $\qquad$ $y =$ $\qquad$ $x =$

إشارة فقط وليس قيم





θ	$0 , 2\pi$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\sin\theta$				
$\cos\theta$				
$\tan\theta$				
$\csc\theta$				
$\sec\theta$				
$\cot\theta$				

مثال 3

أجد قيمة كل اقتران مثلثي مما يأتي إذا كان معرفا , وإلا أكتب عبارة (غير معرف) :

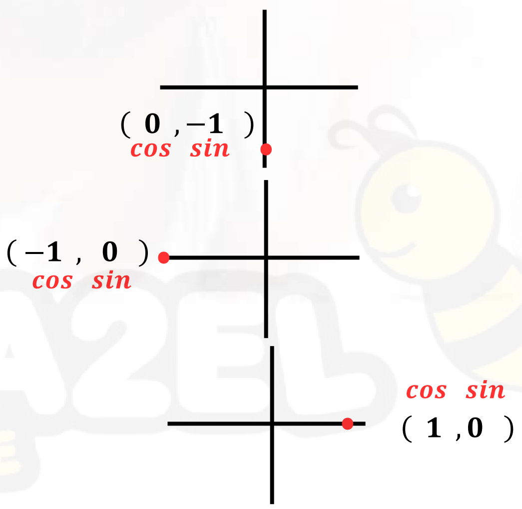
① $\cot 270° = \frac{\cos 270°}{\sin 270°}$

$= \frac{0}{-1} = 0$

② $\csc(-\pi) = \frac{1}{\sin(-\pi)}$

$= \frac{1}{0}$ غير معرف

③ $\cos 4\pi = 1$



أ.محمد عواد

أتحقق من فهمي

أجد قيمة كل اقتران مثلثي مما يأتي إذا كان معرفا , وإلا أكتب عبارة (غير معرف) :

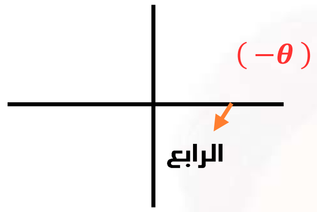
$c)\ sec\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$ $\qquad$ $b)\ tan\ 90°$ $\qquad$ $a)\ sin\ 3\pi$

أتعلّم

يوجد عدد لانهائي من الزوايا الربعية التي تشترك مع الزوايا الربعية في الدورة الكاملة , وتكون قياساتها مضاعفات $90°$ أو $\frac{\pi}{2}$

$$\left.\begin{array}{l} sin\ (-\theta) = -sin\ \theta \\ tan\ (-\theta) = -tan\ \theta \end{array}\right\}$$

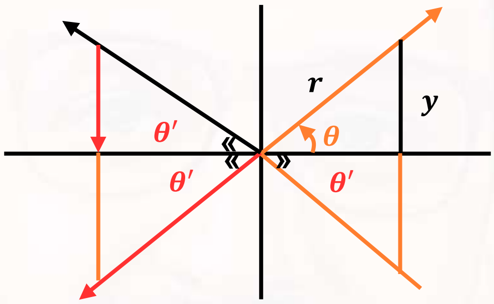
$$cos\ (-\theta) = cos\ \theta$$



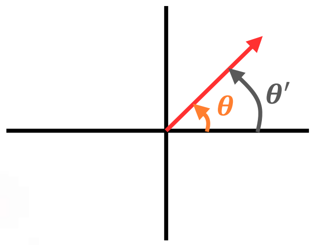
$sin\ \theta$

$cos\ \theta$

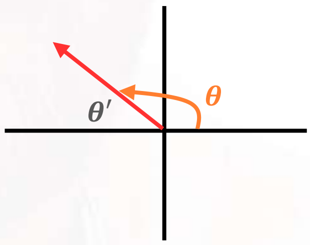
$tan\ \theta$



θ' : هي زاوية مرجعية حادة محصورة بين ضلع الانتهاء ومحور x



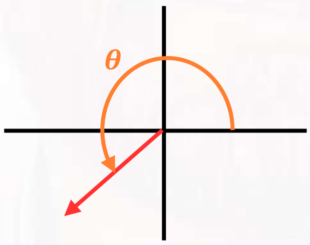
الربع الأول
$\theta' = \theta$



الربع الثاني
$\theta' = 180° - \theta$
$\theta' = \pi - \theta$

ما هي الزاوية المرجعية لـ $150°$

$\theta' = 180 - 150 = 30°$

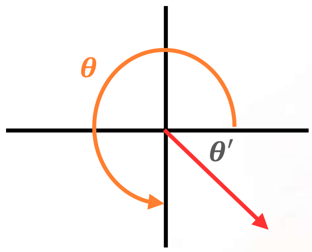


الربع الثالث
$\theta' = \theta - 180°$
$\theta' = \theta - \pi$

$\theta = 210°$

$\theta' = 210° - 180$

$= 30°$



الربع الرابع
$\theta' = 360° - \theta$
$\theta' = 2\pi - \theta$

$\theta = 300°$

$\theta' = 360° - 300$

$= 60°$

θ	$30^{\circ} = \frac{\pi}{6}$	$45^{\circ} = \frac{\pi}{4}$	$60^{\circ} = \frac{\pi}{3}$
$\sin\theta$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\theta$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$
$\tan\theta$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

مثال 4 أجد قيمة كل مما يأتي :

1) $\sin 135°$ ← الثاني $\rightarrow \sin +$

$= \sin 45°$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\theta' = 180° - 135°$

$= 45°$

لإيجاد النسب المثلثية لأي زاوية منعكسة عن زاوية مشهورة نرجعها إلى الربع الأول للتعامل معها مع الانتباه إلى الإشارة

2) $\cos 600°$

$= \cos 240°$

$= -\cos 60°$

$= -\frac{1}{2}$

الثالث

$\cos -$

$\theta' = 240 - 180$

$\theta' = 60°$

لا نتعامل الأصغر الدورة الواحدة

$[0°\ ,\ 360°]$

تجهيز :

$$\begin{array}{r} \overset{510}{\cancel{600}}° \\ -360° \\ \hline 240 \end{array}$$

مهارات

$\csc \rightarrow \frac{1}{\sin}$

$\sec \rightarrow \frac{1}{\cos}$

$\cot \rightarrow \frac{1}{\tan}$

حول الراديان إلى درجات

$$\frac{17\pi}{6} = 17 \times 30$$
$$= 510^\circ$$
$$510^\circ - 360^\circ = 150^\circ$$
$$\theta' = 180^\circ - 150^\circ$$
$$\theta' = 30^\circ$$

③ $$csc\,\frac{17\pi}{6} = \frac{1}{sin\frac{17x}{6}}$$
$$= \frac{1}{sin\,510^\circ}$$
$$= \frac{1}{sin\,150^\circ}$$
$$= \frac{1}{sin\,(30^\circ)} = \frac{1}{\frac{1}{2}}$$
$$= 2$$

• لا تتعامل مع سالب

$$sin(-\theta) = -sin\,\theta$$
$$tan(-\theta) = -tan\,\theta$$
$$cos(-\theta) = cos\,\theta$$

$$\frac{4\pi}{3} = 4 \times 60$$
$$= 240^\circ$$

+ الربع الثالث

$$\theta' = 240 - 180$$
$$= 60^\circ$$

④ $$cot\left(-\frac{4\pi}{3}\right)$$
$$= \frac{1}{-tan\left(\frac{4\pi}{3}\right)}$$
$$= \frac{1}{-tan\,240}$$
$$= \frac{-1}{tan\,60^\circ}$$
$$= \frac{-1}{\sqrt{3}}$$

أتحقق من فهمي

أجد قيمة كل مما يأتي :

a) $sin\,210^\circ$

b) $cos\,510^\circ$

c) $sec\,5\pi$

d) $tan\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$

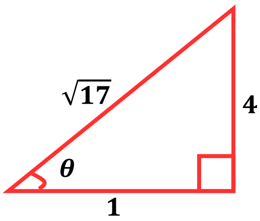
مثال 5

إذا كان $tan\theta = -4$, حيث $sin\ \theta < 0$, فأجد قيمة كل من الاقترانات المثلثية الخمسة المتبقية للزاوية θ

$\therefore \begin{cases} tan\ \theta & \ominus \\ sin\ \theta & \ominus \end{cases}$ الرابع

$$tan\ \theta = \frac{-4}{1} = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}}$$

$$l = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}$$



$$sin\ \theta = \frac{-4}{\sqrt{17}} \qquad csc\ \theta = \frac{-\sqrt{17}}{4}$$

$$cos\ \theta = \frac{1}{\sqrt{17}} \qquad sec\ \theta = \sqrt{17}$$

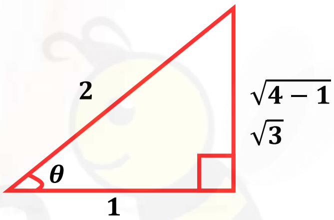
$$tan\ \theta = \frac{-4}{1} = -4 \qquad cot\ \theta = \frac{-1}{4}$$

أتحقق من فهمي

إذا كان $sec\ \theta = 2$, حيث $sin\ \theta < 0$, فأجد قيمة كل من الاقترانات المثلثية الخمسة المتبقية للزاوية θ

الربع الرابع

$$sec\ \theta = \frac{\text{وتر}}{\text{مجاور}} = \frac{2}{1}$$



$$sin\ \theta = \frac{-\sqrt{3}}{2} \qquad csc\ \theta = \frac{-2}{\sqrt{3}}$$

$$cos\ \theta = \frac{1}{2} \qquad sec\ \theta = 2$$

$$tan\ \theta = -\sqrt{3} \qquad cot\ \theta = \frac{-1}{\sqrt{3}}$$

مثال 6

تزلج : يمكن حساب الزمن (بالثواني) الذي تستغرقه عملية الانزلاق على منحدر تل يميل عن الأفق بزاوية قياسها θ باستعمال العلاقة :

$t = \frac{\sqrt{d \csc \theta}}{4}$, حيث d طول المنحدر بالأقدام .

أجد الزمن الذي تستغرقه عملية الانزلاق على منحدر طوله $2000\ ft$ وزاوية ميله $\frac{\pi}{6}$

$$\csc\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sin\frac{\pi}{6}}$$
$$= \frac{1}{\frac{1}{2}}$$
$$= 2$$
$$t = \frac{\sqrt{2000 \csc\frac{\pi}{6}}}{4}$$
$$t = \frac{\sqrt{2000 \times 2}}{4} = \frac{\sqrt{4000}}{4} = \frac{\sqrt{400 \times 10}}{4}$$
$$= \frac{20\sqrt{10}}{4}$$
$$= 5\sqrt{10}\ sec$$

أتحقق من فهمي

أجد الزمن الذي تستغرقه عملية الانزلاق على منحدر طوله $3000\ ft$, وزاوية ميله $\frac{\pi}{4}$, مستعملا العلاقة الواردة في المثال 6

$$\csc\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sin\frac{\pi}{4}}$$
$$= \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$
$$= \sqrt{2}$$

$$t = \frac{\sqrt{3000 \csc\frac{\pi}{4}}}{4}$$
$$= \frac{\sqrt{3000\sqrt{2}}}{4}$$
$$\approx 16.28\ sec$$

الاقترانات المثلثية

معكوس اقتران الجيب

إذا $y = sin^{-1}x$ إذا وفقط

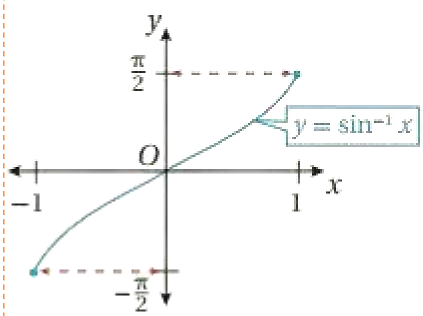
إذا $sin\, y = x$, حيث :

$-1 \le x \le 1$, و

$-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$

المجال : $[-1, 1]$

المدى : $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$



معكوس اقتران جيب التمام

إذا $y = cos^{-1}x$ إذا وفقط

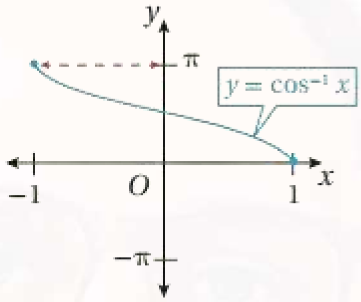
إذا $\cos y = x$,

حيث : $-1 \le x \le 1$

و $0 \le y \le \pi$

المجال : $[-1, 1]$

المدى : $[0, \pi]$



معكوس اقتران الظل

إذا $y = tan^{-1}x$ إذا وفقط إذا

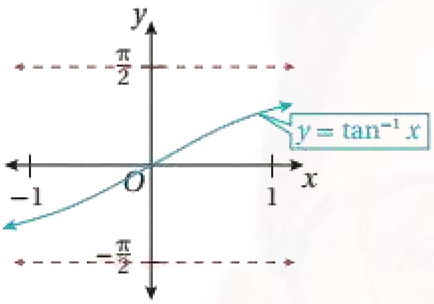
$\tan y = x$,

حيث : $-\infty < x < \infty$

و $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$

المجال : $(-\infty, \infty)$

المدى : $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$



	$sin^{-1}(x)$	$cos^{-1}(x)$	$tan^{-1}(x)$
المدخلات	$[-1, 1]$	$[-1, 1]$	$(-\infty, \infty)$
المخرجات	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$	$[0, \pi]$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$sin^{-1}(x)$:

ما بداخل sin^{-1} موجب ↓ الزاوية موجبة أي في الربع الأول

ما بداخل sin^{-1} سالب ↓ الزاوية سالبة أي في الربع الرابع

$cos^{-1}(x)$:

ما بداخل cos^{-1} موجب ↓ الزاوية موجبة أي في الربع الأول

ما بداخل cos^{-1} سالب ↓ الزاوية سالبة أي في الربع الثاني

$tan^{-1}(x)$:

ما بداخل sin^{-1} موجب ↓ الزاوية موجبة أي في الربع الرابع

ما بداخل sin^{-1} سالب ↓ الزاوية سالبة أي في الربع الرابع

① $sin^{-1}\frac{1}{2}$

أي من هي الزاوية التي عند تعويضها في $sin\ x$ يكون الإجابة $\frac{1}{2}$ 

$= \frac{\pi}{6}$

② $sin^{-1}\left(\frac{-1}{2}\right)$

$= \frac{-\pi}{6}$

③ $sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$= \frac{\pi}{4}$

④ $sin^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$

$= \frac{-\pi}{4}$

⑤ $sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

⑥ $sin^{-1}\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$

---

⑦ $cos^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$, $[0, \pi]$

$cos^{-1}\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{6\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$

الربع الثاني

---

⑧ $cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$, $[0, \pi]$

$cos^{-1}\left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{3\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

---

⑨ $cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4}$, $[0, \pi]$

$cos^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{4\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

---

⑩ $tan^{-1}1 = \frac{\pi}{4}$, $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$tan^{-1}(-1) = \frac{-\pi}{4}$

⑪ $\tan^{-1}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$

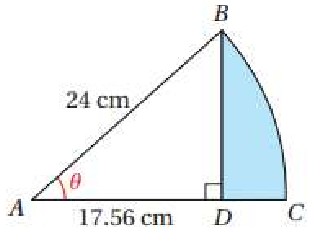
$\tan^{-1}(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$

⑫ $\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$

$\tan^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{6}$

مثال 7

يمثل الشكل المجاور قطاعا دائريا مركزه A وقياس زاويته θ , وطول نصف قطره $24\ cm$. إذا كانت الزاوية ADB قائمة , وطول $\overline{AD}$ هو $17.56\ cm$, فأجد كلا مما يأتي :



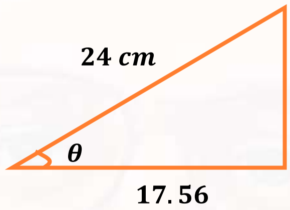
1. قياس زاوية القطاع θ بالراديان

2. مساحة الجزء المظلل

$$\cos\theta = \frac{17.56}{24}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{17.56}{24}\right)$$

$$\theta = 0.75\ rad$$



تذكير يوجد علاقتين لمساحة المثلث

$$= \frac{1}{2}(\text{القاعدة})(\text{الارتفاع})$$

$$= \frac{1}{2}(\text{الأول})(\text{الثاني})\ \sin\theta$$ ← بينهما

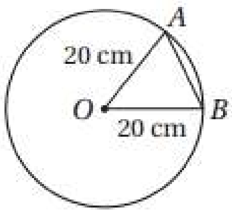
$$A_{\text{المظلل}} = A_{\text{القطاع}} - A_{\text{المثلث}}$$

$$= \frac{1}{2}r^2\theta - \frac{1}{2}(\text{الأول})(\text{الثاني})\ \sin\theta$$

$$= \frac{1}{2}(29)^2(0.75) - \frac{1}{2}(17.56)(24)\ \sin(0.75)$$

$$= 72.37\ cm^2$$

أتحقق من فهمي



إذا كانت مساحة القطاع الدائري OAB هي $164\ cm^2$

في الشكل المجاور , فأجد مساحة ΔOAB

ما هو طول الضلع AB

$$AB = \sqrt{(20)^2 + (20)^2 - 2(20)(20)\cos 0.82}$$

$$AB = 15.94\ cm$$

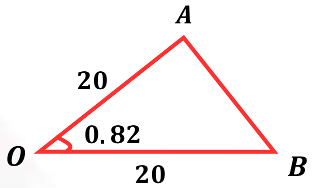
نجد الزاوية AOB أولا

$$A_{\text{المقطاع}} = \frac{1}{2}(r^2)\theta$$

$$164 = \frac{1}{2}(20)^2\theta$$

$$\frac{164}{200} = \frac{\cancel{200}}{\cancel{200}}\theta$$

$$\theta = 0.82\ rad$$



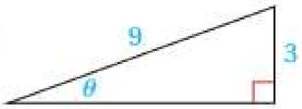
مساحة $\Delta\ AOB$

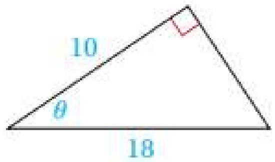
$$= \frac{1}{2}(20)(20)\sin(0.82)$$

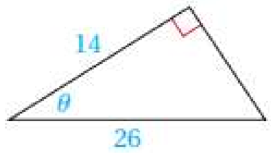
$$\approx 146.2\ cm^2$$

أتدرب وأحل المسائل

أجد قِيَم الاقترانات المثلثية الستة للزاوية θ في كلٍّ ممّا يأتي:

1 

2 

3 

تقع النقطة المعطاة في كلٍّ ممّا يأتي على ضلع انتهاء الزاوية θ المرســـومة في الوضع القياسي. أجد قِيَم الاقترانات المثلثية الستة للزاوية θ:

4 $(-12, 5)$ 5 $(3, -3)$ 6 $(-2, -5)$ 7 $(3, 7)$

أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:

8 $\sec 135°$ 9 $\tan\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$ 10 $\cot\left(\frac{8\pi}{3}\right)$ 11 $\cos\frac{7\pi}{4}$

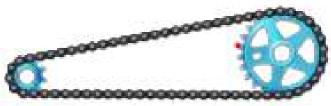
12 $\sec\frac{15\pi}{4}$ 13 $\csc(-630°)$ 14 $\tan 7\pi$ 15 $\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$

أجد قيمة كلٍّ من الاقترانات المثلثية الخمسة المتبقية للزاوية θ في كلٍّ ممّا يأتي:

16 $\cos\theta = -\frac{7}{12}, \tan\theta > 0$ 17 $\sec\theta = 5, \sin\theta < 0$

18 $\cot\theta = \frac{1}{4}, \sin\theta < 0$ 19 $\csc\theta = 2, \cos\theta > 0$

20 **بكرة:** يُمثِّل الاقتران: $y = 20 + \sin(10t)$ الارتفاع الرأسي عن سطح الأرض بالســـنتيمترات لسِنٍّ بكرة درّاجة هوائية بعد t ثانية من بدء حركة الدرّاجة. أجد الارتفاع الرأسي لسِنٍّ البكرة بعد 2.5 ثانية من بدء حركة الدرّاجة.



إذا كان $\cos\frac{\pi}{12} = 0.966$ لأقرب ثلاث منازل عشرية، فأستعمل هذه الحقيقة لإيجاد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:

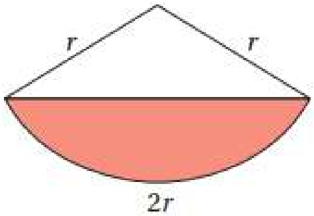
21 $\cos\frac{13\pi}{12}$ 22 $\cos\frac{11\pi}{12}$ 23 $\cos\frac{-\pi}{12}$ 24 $\cos\frac{23\pi}{12}$

أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:

25 $\left(\cos\frac{3\pi}{4}\right)^2 + \left(\sin\frac{4\pi}{3}\right)^2 + \left(\cos\frac{5\pi}{4}\right)^2$

26 $\sin\frac{\pi}{3} - \sin\frac{2\pi}{3} + \sin\pi - \sin\frac{4\pi}{3} + \sin\frac{5\pi}{3} - \sin 2\pi$

يُبيِّن الشـكل المجاور قطاعًا دائريًّا، طول نصف قُطْره r، وطول قوسه $2r$. إذا كانت مساحة الجزء المُظلَّل من القطاع $24\ cm^2$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:



27 طول نصف قُطْر القطاع.

28 محيط الجزء المُظلَّل.

أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي (إن وُجِدَت):

29 $\sin^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

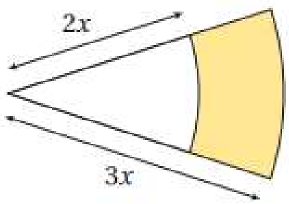
30 $\tan^{-1}(-1)$

31 $\tan^{-1}(\sqrt{3})$

32 $\cos^{-1}(2)$

مهارات التفكير العليا

33 تحدٍّ: يُبيِّن الشكل المجاور قطاعين دائريين ناتجين من دائرتين متحدتين في المركز. إذا كان قياس زاوية القطاعين 0.75، ومساحة الجزء المُظلَّل $30\ cm^2$، فأجد قيمة x.

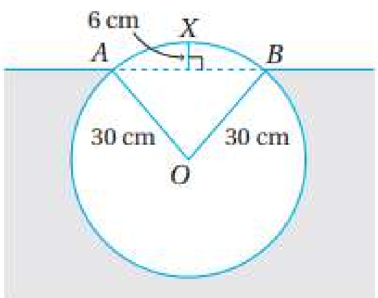


تبرير: أُثبِت كُلًّا ممّا يأتي، مُبرِّرًا إجابتي:

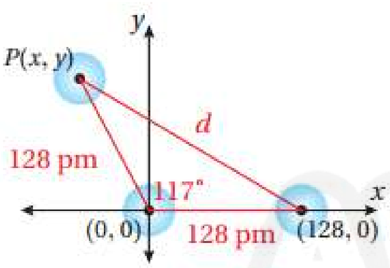
34 $\tan 210° + \tan 240° = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

35 $\frac{\sin 30° + \sin 60°}{\sin 45°} = \frac{1}{2}(\sqrt{2}+\sqrt{6})$

36 تحدٍّ: يُبيِّن الشـكل المجاور المقطع العرضي لقطعة خشـب أسطوانية الشـكل عائمة على الماء. إذا كان نصف قُطْـر المقطع العرضي لقطعة الخشـب 30 cm، وكانت النقطتان A و B على سطح الماء، وكان ارتفاع أعلى نقطة من هذه القطعة 6 cm فوق سـطح الماء؛ فأجد النسبة المئوية للجزء من هذه القطعة الواقع تحت سطح الماء.



تبرير: يتكوَّن جزيء الأوزون من ثلاث ذرّات أكسـجين مُرتبِطة كما في الشكل المجاور:



37 أجد إحداثيي مركـز ذرَّة الأكسـجين $P(x, y)$ الواقع في الربع الثانـي، علمًا بـأنَّ الأبعاد على الشـكل هي بوحـدة البيكومتر $(1\ pm = 10^{-12}\ m)$، ثم أُبرِّر إجابتي.

38 أجد المسافة d بالبيكومتر بين ذرَّتي الأكسجين غير المُرتبِطتين.

0788118727