MATHEMATICS

الرياضيات

توجيهي الفرع الصناعي - الفصل الدراسي الثاني

4.750

4750

الوحدة الرابعة:

التكامل وتطبيقاته

2024
جيل 2007

إعداد المعلم :

ناجح الجمزاوي

0795656881

الرياضيات
الصف الثاني عشر – الفرع الصناعي
الفصل الدراسي الثاني
الوحدة الرابعة
التكامل

الرقم	اسـم الـدرس	من	إلى
1	استعد لدراسة الوحدة		
2	الدرس الاول : تكامل اقترانات خاصة		
3	الدرس الثاني : التكامل بالتعويض		
4	الدرس الثالث: التكامل بالأجزاء		
5	حلول اسئلة كتاب الطالب واسئلة كتاب التمارين		
6	اختبار نهاية الوحدة مع الحلول		

ناجح الجمزاوي

0795656881 0779192534

أستعد لدراسة الوحدة

الاقتران الأصلي

مفهوم أساسي

الاقتران الأصلي للاقتــران المتصل $f(x)$ هو مجموعــة الاقترانات: $F(x) + C$ التي تُحقِّق المعادلة الآتية، علمًا بأنَّ C ثابت:

$$f(x) = \frac{d}{dx}[F(x)+C]$$

مثال 1

أجد الاقتران الأصلي لكلٍّ من الاقترانين الآتيين:

1 $f(x) = 5x^4$

عند البحث عن اقتران مشتقته $5x^4$، أتذكَّر أنَّ أُسَّ x في مشتقة اقتران القوَّة أقل بواحد من أُسِّ x في الاقتران الأصلي. وبذلك، فإنَّ أُسَّ المُتغيِّر x في الاقتران الأصلي هو 5 وبما أنَّ مشتقة x^5 تساوي $5x^4$.

فإنَّ الاقتران الأصلي للاقتران $f(x)$ هو:

$$F(x) = x^5 + C$$

2 $f(x) = -8x^{-9}$

عند البحث عن اقتران مشتقته $-8x^{-9}$، أتذكَّر أنَّ أُسَّ x في مشتقة اقتران القوَّة أقل بواحد من أُسِّ x في الاقتران الأصلي. وبذلك، فإنَّ أُسَّ المُتغيِّر x في الاقتران الأصلي هو -8 وبما أنَّ مشتقة x^{-8} تساوي $-8x^{-9}$، فإنّ الاقتران الأصلي للاقتران $f(x)$ هو:

$$F(x) = x^{-8} + C$$

أتذكَّر

إذا كان: $y = x^n$، حيــث n عـــدد حقيقـــي، فإنَّ: $\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$.

التكامل غير المحدود

❖ المقدمة

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

تُسمّى المعادلة السابقة **التكامل غير المحدود** للاقتران $f(x)$. ويُسمّى $\int$ رمز التكامل، ويُسمّى الاقتران $f(x)$ **المُكامَل** ويُسمّى C **ثابت التكامل** أمّا dx فرمز يشير إلى أنّ التكامل يتمُّ بالنسبة إلى المُتغيِّر x الذي يُسمّى **مُتغيِّر التكامل**

يُبيِّن المُخطَّط الآتي عناصر التكامل غير المحدود للاقتران: $f(x) = 3x^2$:

المُكامَل
ثابت التكامل

$$\int 3x^2\,dx = x^3 + C$$

مُتغيِّر التكامل
رمز التكامل

ملاحظة:

التكامل والاشتقاق عمليتان عكسيتان. وقد سُمِّي التكامل غير المحدود بهذا الاسم؛ لأنّه يتضمَّن الثابت C الذي يُمكِن تمثيله بأيِّ قيمة.

القواعد الأساسية للتكامل غير المحدود

مفهوم أساسي

إذا كان k عددًا حقيقيًّا، فإنَّ:

تكامل الثابت

1. $\int k\,dx = kx + C$

تكامل اقتران القوّة

2. $\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C,\ n \neq -1$

مثال (1)

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1 $\int 7\,dx$

$\int 7\,dx = 7x + C$ قاعدة تكامل الثابت

2 $\int x^{18}\,dx$

قاعدة تكامل اقتران القوَّة

$\int x^{18}\,dx = \frac{1}{18+1}x^{18+1} + C$

$= \frac{1}{19}x^{19} + C$ بالتبسيط

3 $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

بكتابة المُكامَل في صورة أُسِّية

$\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\,dx$

$= \int x^{-\frac{1}{2}}\,dx$ تعريف الأُسِّ السالب

$= \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}$ قاعدة تكامل اقتران القوَّة

$= 2\,x^{\frac{1}{2}} + C$ بالتبسيط

$= 2\sqrt{x} + C$ الصورة الجذرية

مثال (2)

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1 $\int 9\,dx$

$\int 9\,dx = 9x + C$ تكامل الثابت

2 $\int x^{10}\,dx$

تكامل اقتران القوَّة

$\int x^{10}\,dx = \frac{1}{10+1}x^{10+1} + C$

$= \frac{1}{11}x^{11} + C$ بالتبسيط

3 $\int \sqrt{x}\,dx$

بكتابة المُكامَل في صورة أُسِّية

$\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx$

$= \frac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}+1} + C$ تكامل اقتران القوَّة

$= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$ بالتبسيط

$= \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C$ الصورة الجذرية

4 $\int \frac{1}{x^3}\, dx$

تعريف الأُسِّ السالب

$$\int \frac{1}{x^3}\, dx = \int x^{-3}\, dx$$

$$= \frac{1}{-3+1} x^{-3+1} + C$$ تكامل اقتران القوَّة

$$= -\frac{1}{2x^2} + C$$ تعريف الأُسِّ السالب

ملاحظة :

قبل البَدْء بعملية التكامل أُعيد أوّلًا كتابة المُكامَل في صورة $x^{m/n}$ مُستذكِرًا العلاقة:

$$\sqrt[n]{x^m} = x^{m/n}$$

خصائص التكامل غير المحدود

مفهوم أساسي

إذا كان k ثابتًا، فإنَّ:

تكامل الاقتران المضروب في ثابت

1) $\int kf(x)\, dx = k \int f(x)\, dx$

تكامل المجموع أو الفرق

2) $\int (f(x) \pm g(x))\, dx$

$$= \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx$$

مثال (1)

أجد كُلًّا من التكاملين الآتيين:

1 $\int (6x^2 + 2x)\, dx$

تكامل المجموع، واقتران القوَّة المضروب في ثابت

$$\int (6x^2 + 2x)\, dx$$

$$= 6\int x^2\, dx + 2\int x\, dx$$

تكامل اقتران القوَّة

$$= 6\left(\frac{1}{3}x^3\right) + 2\left(\frac{1}{2}x^2\right) + C$$

$$= 2x^3 + x^2 + C$$ بالتبسيط

2 $\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{3}{x^5}\right) dx$

تكامل الفرق، وتكامل اقتران القوَّة المضروب في ثابت

$$\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{3}{x^5}\right) dx = \int \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx - 3\int \frac{1}{x^5}\, dx$$

تعريف الأُسِّ السالب، والصورة الأُسِّية

$$= \int x^{-1/2}\, dx - 3\int x^{-5}\, dx$$

تكامل اقتران القوَّة

$$= 2x^{1/2} - 3\left(-\frac{1}{4}x^{-4}\right) + C$$

بالتبسيط، والصورة الجذرية

$$= 2\sqrt{x} + \frac{3}{4x^4} + C$$

مثال (2)

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

a) $\int (8x^3 - 3x + 1)\, dx$

تكامل اقتران القوَّة المضروب في ثابت، وتكامل الثابت

$$\int (8x^3 - 3x + 1)\, dx$$

$$= \frac{8}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + x + C$$

بالتبسيط $= 2x^4 - \frac{3}{2}x^2 + x + C$

b) $\int \frac{x^7 - 4x^3 + 8x}{2x}\, dx$

بقسمة كل حدٍّ في البسط على المقام

$$\int \frac{x^7 - 4x^3 + 8x}{2x}\, dx$$

$$= \int \left(\frac{x^7}{2x} - \frac{4x^3}{2x} + \frac{8x}{2x}\right) dx$$

بالتبسيط $= \int \left(\frac{1}{2}x^6 - 2x^2 + 4\right) dx$

تكامل اقتران القوَّة المضروب في ثابت

$$= \frac{1}{14}x^7 - \frac{2}{3}x^3 + 4x + C$$

---

c) $\int (\sqrt{x} + 1)\, dx$

بكتابة المُكامَل في صورة أُسِّية

$$\int (\sqrt{x} + 1)\, dx = (x^{1/2} + 1)\, dx$$

تكامل اقتران القوَّة، وتكامل الثابت

$$= \frac{2}{3}x^{3/2} + x + C$$

الصورة الجذرية $= \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + x + C$

ملاحظة :

تتطلَّب بعض التكاملات تبسيط المُكامَل إلى حدود جبرية، كلٌّ منها في صورة اقتران قوَّة، قبل البَدْء بعملية التكامل.

لا توجد قاعدة لتكامل الضرب؛ لذا أُبسِّط المُكامَل إلى حدود جبرية منفصلة، كلٌّ منها في صورة اقتران قوَّة، قبل البَدْء بعملية التكامل. وفي هذه الحالة، أَضرِب المقدارين الجبريين أوَّلًا، ثم أُجري عملية التكامل.

لا توجد قاعدة لتكامل القسمة؛ لذا أُبسِّط المُكامَل إلى حدود جبرية منفصلة، كلٌّ منها في صورة اقتران قوَّة، قبل البَدْء بعملية التكامل. وفي هذه الحالة، أَقسِم كل حدٍّ في البسط على المقام أوَّلًا، ثم أُجري عملية التكامل.

مثال 1)

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1 $\int (x+2)(x-2)\ dx$

بضرب المقدارين الجبريين

$$\int (x+2)(x-2)\ dx = \int (x^2-4)\ dx$$

تكامل اقتران القوَّة، وتكامل الثابت

$$= \frac{1}{3}x^3 - 4x + C$$

---

2 $\int \frac{8x^3+5x}{x}\ dx$

بقسمة كل حدٍّ في البسط على المقام

$$\int \frac{8x^3+5x}{x}\ dx = \int \left(\frac{8x^3}{x} + \frac{5x}{x}\right)\ dx$$

بالتبسيط

$$= \int (8x^2+5)\ dx$$

تكامل اقتران القوَّة المضروب في ثابت، وتكامل الثابت

$$= \frac{8}{3}x^3 + 5x + C$$

3 $\int x\left(x^2+\frac{2}{x}\right)\, dx$

بتوزيع الضرب على الجمع

$$\int x\,(x^2+\frac{2}{x})\; dx = \int (x^3+2)\; dx$$

تكامل اقتران القوَّة، وقاعدة تكامل الثابت

$$=\frac{1}{4}x^4+2x+C$$

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1 $\int \frac{3x+2x^4}{x}\, dx$

بقسمة كل حدٍّ في البسط على المقام

$$\int \frac{3x+2x^4}{x}\, dx = \int \left(\frac{3x}{x}+\frac{2x^4}{x}\right) dx$$

بالتبسيط

$$=\int (3+2x^3)\, dx$$

قاعدتا تكامل اقتران القوَّة المضروب في ثابت، وتكامل الثابت

$$=3x+\frac{1}{2}x^4+C$$

2 $\int \frac{(x+2)(x-2)}{\sqrt{x}}\, dx$

بالضرب

$$\int \frac{(x+2)(x-2)}{\sqrt{x}}\, dx = \int \frac{x^2-4}{\sqrt{x}}\, dx$$

بقسمة كل حدٍّ في البسط على المقام

$$=\int (x^{\frac{3}{2}}-4x^{-\frac{1}{2}})\, dx$$

قاعدة تكامل اقتران القوَّة المضروب في ثابت

$$=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-8x^{\frac{1}{2}}+C$$

تدريب

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1 $\int 3x^2\, dx$

2 $\int (2+x^3+5x^{-2})\, dx$

3 $\int \left(2x^7-\frac{4}{x^4}\right) dx$

4 $\int \left(\sqrt{x}-\frac{3}{\sqrt{x}}\right) dx$

5 $\int x(4x^3-4x+1)\, dx$

6 $\int \left(\frac{x^3+7x-2x^2}{x}\right) dx$

7 $\int (x-1)(x+3)\, dx$

8 $\int (2x+5)^5\, dx$

9 $\int \frac{x^2-1}{x+1}\, dx$

تكامل $(ax+b)^n$

مفهوم أساسي

إذا كان a و b عددين حقيقيين، و $a \neq 0$، فإنَّ:

$$\int (ax+b)^n \, dx = \frac{1}{a(n+1)}(ax+b)^{n+1} + C$$

$$n \neq -1$$

مثال (1)

أجد كُلًّا من التكاملين الآتيين:

1 $\int (x+7)^5 \, dx$

تكامل $(ax+b)^n$

$$\int (x+7)^5 \, dx$$

$$= \frac{1}{5+1}(x+7)^{5+1} + C$$

بالتبسيط

$$= \frac{1}{6}(x+7)^6 + C$$

2 $\int \frac{1}{\sqrt{4x-2}} \, dx$

بكتابة المُكامَل في صورة أُسِّية

$$\int \frac{1}{\sqrt{4x-2}} \, dx = \int (4x-2)^{-\frac{1}{2}} \, dx$$

تكامل $(ax+b)^n$

$$= \frac{1}{4 \times \frac{1}{2}}(4x-2)^{\frac{1}{2}} + C$$

بالتبسيط

$$= \frac{1}{2}(4x-2)^{\frac{1}{2}} + C$$

الصورة الجذرية

$$= \frac{1}{2}\sqrt{4x-2} + C$$

مثال (2)

أجد كُلًّا من التكاملين الآتيين:

a) $\int (x-4)^6 \, dx$ b) $\int \sqrt{x+1} \, dx$

الحل

a $\int (x-4)^6 dx = \frac{1}{7}(x-4)^7 + C$

b $\int \sqrt{x+1} dx = \frac{2}{3\sqrt{(x+1)^3}} + C$

الشرط الأولي

مــن المهم في بعض التطبيقات إيجاد قيمة ثابت التكامــل C، مثل إيجاد قاعدة اقتران عُلِمت مشــتقته، لكنَّ ذلــك يتطلّب إيجاد نقطة تُحقّــق الاقتران الأصلي، ويُمكِــن بتعويضها إيجاد قيمة C وتُسمّى هذه النقطة **الشرط الأولي**

مثال (1)

أجد قاعدة الاقتران $f(x)$ إذا كان: $f'(x) = 2x + 3$، ومرَّ منحناه بالنقطة $(1, -2)$.

الحل

الخطوة 1: أجد تكامل الاقتران $f'(x)$.

$$f(x) = \int f'(x)\ dx$$

$$f(x) = \int (2x + 3)\ dx$$

تكامل اقتران القوّة المضروب في ثابت، وتكامل الثابت

$$f(x) = x^2 + 3x + C$$

الخطوة 2: أجد قيمة ثابت التكامل C.

لإيجــاد قيمة ثابت التكامل C، أســتعمل الشــرط الأولي المعطى في المســألة، وهو النقطة $(1, -2)$ التي يمرُّ منحنى الاقتران بها، وتُحقِّق قاعدة الاقتران.

ولهذا أُعوِّض $x = 1$ في قاعدة $f(x)$ ثم أحُلّ المعادلة الناتجة لإيجاد قيمة C

قاعدة الاقتران $f(x) = x^2 + 3x + C$

بتعويض $x = 1, f(1) = -2$

$$-2 = (1)^2 + 3(1) + C$$

بحلِّ المعادلة

$$C = -6$$

إذن، قاعدة الاقتران هي:

$$f(x) = x^2 + 3x - 6.$$

مثال (2)

أجد قاعدة الاقتران $f(x)$ إذا كان:

$f'(x) = x-3$، ومَرَّ منحناه

بالنقطة $(2, 9)$.

الحل

الخطوة 1: أجد تكامل الاقتران $f'(x)$.

$$f(x) = \int f'(x)\, dx$$

$$f(x) = \int (x-3)\, dx$$

تكامل اقتران القوَّة، وتكامل الثابت

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + C$$

الخطوة 2: أجد قيمة ثابت التكامل C.

قاعدة الاقتران

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + C$$

بتعويض $x = 2, f(2) = 9$

$$9 = \frac{1}{2}(2)^2 - 3(2) + C$$

بحلِّ المعادلة لـ C

$$C = 13$$

إذن، قاعدة الاقتران هي

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 13.$$

التكامل المحدود

يُسمّى $\int_a^b f(x)\, dx$ **التكامل المحدود** للاقتران $f(x)$، حيث a الحدُّ السفلي للتكامل، وb الحدُّ العلوي للتكامل ويُمكِن إيجاد قيمة $\int_a^b f(x)\, dx$ على النحو الآتي:

قيمة الاقتران الأصلي عند الحدِّ السفلي

حدود التكامل من a إلى b

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

قيمة الاقتران الأصلي عند الحدِّ العلوي

مفهوم أساسي

إذا كان الاقتران $f(x)$ متصلًا على الفترة $[a, b]$، و$F(x)$ يُمثِّل أيَّ اقتران أصلي للاقتران $f(x)$، فإنَّ التكامل المحدود للاقتران $f(x)$ من a إلى b هو

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

ويُمكِن التعبير عن الفرق $F(b)-F(a)$ باستعمال الرمز: $F(x)\Big|_a^b$.

مثال (1)

أجد كُلًّا من التكاملين الآتيين:

1) $\int_0^1 x^2\,dx$

تكامل اقتران القوّة، والتكامل المحدود

$$\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 \Big|_0^1$$

$a = 0,\ b = 1$

$$= \left(\frac{1}{3}(1)^3\right) - \left(\frac{1}{3}(0)^3\right)$$

بالتبسيط

$$= \frac{1}{3}$$

2) $\int_1^3 (x+2)\,dx$

تكامل اقتران القوّة، والتكامل المحدود

$$\int_1^3 (x+2)\,dx = \left(\frac{1}{2}x^2 + 2x\right)\Big|_1^3$$

$a = 1,\ b = 3$

$$= \left(\frac{1}{2}(3)^2 + 2(3)\right) - \left(\frac{1}{2}(1)^2 + 2(1)\right)$$

بالتبسيط

$$= 8$$

مثال (2)

أجد كُلًّا من التكاملين الآتيين:

a) $\int_{-1}^{1} x^4\,dx$

b) $\int_{-2}^{3} (3x^2 - 4x + 1)\,dx$

الحل

a

$$\int_{-1}^{1} x^4 dx = \frac{1}{5}x^5\Big|_{-1}^{1}$$

$$= \left(\frac{1}{5}\right) - \left(\frac{-1}{5}\right) = \frac{2}{5}$$

b

$$\int_{-2}^{3} (3x^2 - 4x + 1)dx$$

$$= x^3 - 2x^2 + x\Big|_{-2}^{3}$$

$$= (27 - 18 + 3)$$

$$-(-8 - 8 - 2) = 30$$

مثال (3)

أجد قيمة كلٍّ من التكاملين الآتيين:

1) $\int_0^1 (2x-5)\ dx$

تكامل اقتران القوَّة المضروب في ثابت، وتكامل الثابت

$$\int_0^1 (2x-5)\ dx = (x^2 - 5x)\Big|_0^1$$

بالتعويض

$$= ((1)^2 - 5(1)) - ((0)^2 - 5(0))$$

$$= -4$$

بالتبسيط

2) $\int_{-4}^3 x(4-3x)\ dx$

بتوزيع الضرب على الجمع

$$\int_{-4}^3 x(4-3x)\ dx = \int_{-4}^3 (4x - 3x^2)\ dx$$

تكامل اقتران القوَّة المضروب في ثابت

$$= (2x^2 - x^3)\Big|_{-4}^3$$

بالتعويض

$$= (2(3)^2 - (3)^3) - (2(-4)^2 - (-4)^3)$$

$$= -105$$

بالتبسيط

مثال (4)

إذا كان: $\int_1^k \frac{1}{\sqrt{x}}\ dx = 3$، فأجد قيمة الثابت k.

التكامل المعطى $\int_1^k \frac{1}{\sqrt{x}}\ dx = 3$

الصورة الأُسِّية $\int_1^k x^{-1/2}\ dx = 3$

تكامل اقتران القوَّة $2x^{1/2}\Big|_1^k = 3$

الصورة الجذرية $2\sqrt{x}\Big|_1^k = 3$

بالتعويض $2\sqrt{k} - 2\sqrt{1} = 3$

بالتبسيط $2\sqrt{k} - 2 = 3$

بجمع 2 لطرفي المعادلة $2\sqrt{k} = 5$

بقسمة طرفي المعادلة على 2 $\sqrt{k} = \frac{5}{2}$

بتربيع طرفي المعادلة $k = \frac{25}{4}$

قواعد التكامل المحدود

مفهوم أساسي

إذا كان $f(x)$ و $g(x)$ اقترانين متصلين على الفترة $[a, b]$، وكان k ثابتًا، فإنَّ:

تكامل الاقتران المضروب في ثابت

$$1)\ \int_a^b k\,f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$$

تكامل المجموع أو الفرق

$$2)\ \int_a^b (f(x) \pm g(x))\,dx$$

$$= \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$$

التكامل عند نقطة

$$3)\ \int_a^a f(x)\,dx = 0$$

التبديل بين حدَّي التكامل

$$4)\ \int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

تجزئة التكامل

$$5)\ \int_a^b f(x)dx$$

$$= \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

مثال (1)

إذا كان:

$$\int_5^7 f(x)\,dx = 3, \int_0^5 g(x)\,dx = -4,$$

$$\int_0^5 f(x)\,dx = 10$$ فأجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:

1 $\int_0^5 (4f(x) + g(x))\ dx$

تكامل المجموع

$$\int_0^5 (4f(x) + g(x))\ dx$$

$$= \int_0^5 4f(x)\,dx + \int_0^5 g(x)\,dx$$

تكامل الاقتران المضروب في ثابت

$$= 4\int_0^5 f(x)\ dx + \int_0^5 g(x)\,dx$$

$= 4(10) + (-4)$ بالتعويض

$= 36$ بالتبسيط

---

2 $\int_0^7 f(x)\ dx$

بتجزئة التكامل

$$\int_0^7 f(x)\ dx = \int_0^5 f(x)\ dx + \int_5^7 f(x)\ dx$$

$= 10 + 3$ بالتعويض

$= 13$ بالتبسيط

3 $\int_{5}^{0} 5g(x)\ dx$

بالتبديل بين حدَّي التكامل

$$\int_{5}^{0} 5g(x)\ dx = -\int_{0}^{5} 5g(x)\ dx$$

تكامل الاقتران المضروب في ثابت

$$= -5\int_{0}^{5} g(x)\,dx$$

بالتعويض

$$= -5 \times -4$$

بالتبسيط

$$= 20$$

إذا كان:

$$\int_{-2}^{5} f(x)\,dx = 3,\ \int_{-2}^{5} g(x)\,dx = -4,\ \int_{3}^{5} f(x)\,dx = 7$$

فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

1 $\int_{-2}^{5} (2f(x) - 3g(x))\,dx$

قاعدة تكامل الفرق

$$\int_{-2}^{5} (2f(x) - 3g(x))\,dx$$

$$= \int_{-2}^{5} 2f(x)dx - \int_{-2}^{5} 3g(x)dx$$

قاعدة تكامل الاقتران المضروب في ثابت

$$= 2\int_{-2}^{5} f(x)dx - 3\int_{-2}^{5} g(x)dx$$

بالتعويض

$$= 2(3) - 3(-4)$$

بالتبسيط

$$= 18$$

مثال (2)

2 $\int_{-2}^{3} f(x)\,dx$

قاعدة تجزئة التكامل

$$\int_{-2}^{3} f(x)\,dx = \int_{-2}^{5} f(x)\,dx + \int_{5}^{3} f(x)\,dx$$

قاعدة عكس حدود التكامل

$$= \int_{-2}^{5} f(x)\,dx - \int_{3}^{5} f(x)\,dx$$

بالتعويض

$$= 3 - 7$$

بالتبسيط

$$= -4$$

تكاملات الاقترانات المُتشعِّبة

تستعمل قواعد التكامل المحدود إيجاد التكامل المحدود للاقترانات المُتشعِّبة

إذا احتوت فترة التكامل على قواعد مُختلِفة للاقتران؛ إذ أُجزِّئ التكامل عند نقاط التشعُّب، ثم أجد تكامل كل قاعدة على فترتها الجزئية.

مثال (1)

إذا كان: $f(x)=\begin{cases}12 & , x<2\\ 3x^2 & , x\geq 2\end{cases}$،

فأجد قيمة: $\int_1^4 f(x)\, dx$.

قاعدة تجزئة التكامل

$$\int_1^4 f(x)\, dx = \int_1^2 12\, dx + \int_2^4 3x^2\, dx$$

تكامل الثابت، وتكامل اقتران القوَّة

$$= 12x \Big|_1^2 + x^3 \Big|_2^4$$

بالتعويض

$$= 12(2) - 12(1) + ((4)^3 - (2)^3)$$

بالتبسيط

$$= 68$$

مثال (3)

إذا كان:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, dx = 5, \int_{4}^{1} f(x)\, dx = 2, \int_{-1}^{1} h(x)\, dx = 7$$

فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

a) $\int_{-1}^{1} (f(x)+3h(x))\, dx$

b) $\int_{-1}^{4} f(x)\, dx$

الحل

a

$$\int_{-1}^{1} (f(x)+3h(x))dx$$

$$= \int_{-1}^{1} f(x)dx + 3\int_{-1}^{1} h(x)dx$$

$$= 5 + 3(7) = 26$$

---

b

$$\int_{-1}^{4} f(x)dx = \int_{-1}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{4} f(x)dx$$

$$= \int_{-1}^{1} f(x)dx - \int_{1}^{4} f(x)dx$$

$$= 5 - 2 = 3$$

الدرس 1

تكامل اقترانات خاصة

تكامل الاقترانات الأُسِّية

صيغ تكاملات اقترانات أُسِّية

مفهوم أساسي

إذا كانت k, b, a أعدادًا حقيقيةً، و $a \neq 0$،
و $k > 0$، و $k \neq 1$، و e العدد النيبيري، فإنَّ:

$$\int e^x \, dx = e^x + C$$

$$\int e^{ax+b} \, dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C$$

ملاحظة :

خواص الاقتران الاسي الطبيعي

1) $e^0 = 1$
2) $e^x . e^y = e^{x+y}$
3) $\dfrac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$
4) $(e^x)^y = e^{x.y}$

مثال (1)

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1 $\int 2e^{4x+3} \, dx$

تكامل الاقتران الأُسِّي الطبيعي المضروب في ثابت

$$\int 2e^{4x+3} \, dx = 2 \times \frac{1}{4} e^{4x+3} + C$$

بالتبسيط $= \frac{1}{2} e^{4x+3} + C$

2 $\int_0^2 (6e^{-3x} + x^3) \, dx$

تكامل الاقتران الأُسِّي الطبيعي المضروب في ثابت، وتكامل اقتران القوَّة

$$\int_0^2 (6e^{-3x} + x^3) dx = \left(\frac{6}{-3} e^{-3x} + \frac{1}{4} x^4\right) \Big|_0^2$$

بالتعويض

$$= \left(\frac{6}{-3} e^{-3(2)} + \frac{1}{4} (2)^4\right) - \left(\frac{6}{-3} e^{-3(0)} + \frac{1}{4} (0)^4\right)$$

بالتبسيط $= -2e^{-6} + 6$

3 $\int \sqrt{e^{x+1}}\, dx$

بكتابة المُكامَل في صورة أُسّية

$$\int \sqrt{e^{x+1}}\, dx = \int (e^{x+1})^{1/2}\, dx$$

باستعمال قوانين الأسس

$$= \int e^{(x+1)/2}\, dx$$

تكامل الاقتران الأُسّي الطبيعي

$$= 2e^{(x+1)/2} + C$$

مثال (2) تحقق من فهمك صفحة 10

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

a) $\int (5x^2 - 3e^{7x})\, dx$

b) $\int_0^{\ln 3} 8e^{4x}\, dx$

c) $\int \sqrt{e^{1-x}}\, dx$

الحل

a)

$$\int (5x^2 - 3e^{7x})\, dx$$

$$\int (5x^2 - 3e^{7x})\, dx = \frac{5}{3}x^3 - \frac{3}{7}e^{7x} + C$$

b)

$$\int_0^{\ln 3} 8e^{4x}\, dx = \frac{8}{4}e^{4x}\Big|_0^{\ln 3}$$

$$= 2(e^{4\ln 3} - e^0) = 2(e^{\ln 3^4} - e^0)$$

$$= 2(81 - 1) = 160$$

c)

$$\int \sqrt{e^{1-x}}\, dx = \int (e^{1-x})^{1/2}\, dx$$

$$= \int e^{(1-x)/2}\, dx = -2e^{(1-x)/2} + C$$

مثال (2)

أوجد كلًّا من التكاملات الآتية:

a) $\int (6 + e^x)\, dx$

الحل

$$\int (6 + e^x)\, dx = \int 6\; dx + \int e^x\, dx$$

$$= 6x + e^x + C$$

b) $\int 5e^{5x+3}\, dx$

الحل

$$\int 5e^{5x+3}\, dx = e^{5x+3} + C$$

c) $\int e^{6x+2}\, dx$

الحل

$$\int e^{6x+2} dx = \frac{1}{6} \int 6\, e^{6x+2}\, dx$$

$$= \frac{1}{6}\, e^{6x+2} + C$$

تكامل الاقترانات المثلثية

صيغ تكاملات اقترانات مثلثية (1)

مفهوم أساسي

$$\int \sin x\, dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\, dx = \sin x + C$$

$$\int \sec^2 x\, dx = \tan x + C$$

$$\int \csc^2 x\, dx = -\cot x + C$$

$$\int \sec x \tan x\, dx = \sec x + C$$

$$\int \csc x \cot x\, dx = -\csc x + C$$

صيغ تكاملات اقترانات مثلثية (2)

مفهوم أساسي

إذا كان b, a عددين حقيقيين، و $a \neq 0$، فإنَّ:

$$\int \sin (ax+b)\, dx = -\frac{1}{a} \cos (ax+b) + C$$

$$\int \cos (ax+b)\, dx = \frac{1}{a} \sin (ax+b) + C$$

$$\int \sec^2 (ax+b)\, dx = \frac{1}{a} \tan (ax+b) + C$$

$$\int \csc^2 (ax+b)\, dx = -\frac{1}{a} \cot (ax+b) + C$$

$$\int \sec (ax+b) \tan (ax+b)\, dx = \frac{1}{a} \sec (ax+b) + C$$

$$\int \csc (ax+b) \cot (ax+b)\, dx = -\frac{1}{a} \csc (ax+b) + C$$

مثال (1)

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1 $\int 2\sin(4x+3)\,dx$

تكامل $\sin(ax+b)$ المضروب في ثابت

$$\int 2\sin(4x+3)\,dx$$
$$= -2 \times \frac{1}{4}\cos(4x+3) + C$$

بالتبسيط

$$= -\frac{1}{2}\cos(4x+3) + C$$

2 $\int (3\cos x + \sqrt[3]{x})\,dx$

بكتابة $\sqrt[3]{x}$ في صورة أُسّية

$$\int (3\cos x + \sqrt[3]{x})\,dx$$
$$= \int (3\cos x + x^{1/3})\,dx$$

تكامل $\cos x$ المضروب في ثابت، وتكامل اقتران القوّة

$$= 3\sin x + \frac{3}{4}x^{4/3} + C$$

بتحويل القوّة النسبية إلى جذر

$$= 3\sin x + \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + C$$

مثال (2)

تحقق من فهمك صفحة 12

3 $\int_0^{\pi/12} \sec^2 3x\,dx$

تكامل $\sec^2(ax+b)$

$$\int_0^{\pi/12} \sec^2 3x\,dx = \left(\frac{1}{3}\tan 3x\right)\Big|_0^{\pi/12}$$

بالتعويض

$$= \left(\frac{1}{3}\tan 3\left(\frac{\pi}{12}\right)\right) - \left(\frac{1}{3}\tan 3(0)\right)$$
$$= \frac{1}{3}$$

بالتبسيط

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

a) $\int \cos(3x-\pi)dx$

b) $\int (\csc^2(5x) + e^{2x})\,dx$

c) $\int_0^{\pi/3} (\sin 2x - \cos 4x)\,dx$

الحل

a)

$$\int \cos(3x-\pi)\,dx = \frac{1}{3}\sin(3x-\pi) + C$$

b)

$$\int (csc^2(5x) + e^{2x})\, dx$$

$$= -\frac{1}{5} cot\, 5x + \frac{1}{2} e^{2x} + C$$

---

c)

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin 2x - \cos 4x)\, dx$$

$$= (-\frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{4}\sin 4x)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= (-\frac{1}{2}\cos\frac{2\pi}{3} - \frac{1}{4}\sin\frac{4\pi}{3})$$

$$-(-\frac{1}{2}\cos 0 - \frac{1}{4}\sin 0)$$

$$= (-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}) - \frac{1}{4}(\frac{-\sqrt{3}}{2})) - (-\frac{1}{2} - 0)$$

$$= \frac{6+\sqrt{3}}{8}$$

المتطابقات المثلثية والتكامل

المتطابقات المثلثية الأساسية

- متطابقات المقلوب:

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

$$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$$

- المتطابقات النسبية:

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

- متطابقات فيثاغورس:

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$$

$$1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$$

---

1) $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + \sin 2x$

2) $(\sin x - \cos x)^2 = 1 - \sin 2x$

المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية

1)

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

2)

$$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$$

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$$

المتطابقات المثلثية لتقليص القوَّة

$$\sin^2\theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$$

$$\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$$

متطابقات تحويل الضرب إلى مجموع أو فرق

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x-y) + \sin(x+y)]$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) + \cos(x+y)]$$

$$\cos x \sin y = -\frac{1}{2}[\sin(x-y) - \sin(x+y)]$$

قِيَم بعض الاقترانات المثلثية للزوايا الخاصة

θ°	0°	30°	45°	60°
θ rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

θ°	90°	180	270	360°
θ rad	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\theta$	1	0	-1	0
$\cos\theta$	0	-1	0	1
$\tan\theta$	–	0	–	0

مثال (1)

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1 $\int \tan^2 2x\, dx$

متطابقات فيثاغورس

$$\int \tan^2 2x\, dx = \int (\sec^2 2x - 1)\, dx$$

تكامل $\sec^2 (ax+b)$، وتكامل الثابت

$$= \frac{1}{2}\tan 2x - x + C$$

2 $\int_0^{\pi} \sin^2 x\, dx$

متطابقات تقليص القوَّة

$$\int_0^{\pi} \sin^2 x\, dx = \int_0^{\pi} \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)\, dx$$

تكامل $\cos (ax+b)$، وتكامل الثابت

$$= \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_0^{\pi}$$

بالتعويض

$$= \left(\frac{1}{2}\left(\pi - \frac{1}{2}\sin 2(\pi)\right)\right) - \left(\frac{1}{2}\left(0 - \frac{1}{2}\sin 2(0)\right)\right)$$

بالتبسيط

$$= \frac{1}{2}\pi$$

3 $\int \sin 4x \cos 5x\, dx$

متطابقات تحويل الضرب إلى جمع

$$\int \sin 4x \cos 5x\, dx$$

$$= \int \frac{1}{2}\left(\sin(4x-5x) + \sin(4x+5x)\right)dx$$

بالتبسيط

$$= \int \frac{1}{2}\left(-\sin (x) + \sin (9x)\right) dx$$

تكامل $\sin (ax+b)$ المضروب في ثابت

$$= \frac{1}{2}\left(\cos (x) - \frac{1}{9}\cos (9x)\right) + C$$

4 $\int \frac{dx}{1-\cos x}$

بضرب البسط والمقام في مُرافِق $1-\cos x$، وهو $1+\cos x$

$$\int \frac{dx}{1-\cos x}$$

$$= \int \left(\frac{1}{1-\cos x} \times \frac{1+\cos x}{1+\cos x}\right) dx$$

بالتبسيط

$$= \int \frac{1+\cos x}{1-\cos^2 x}\, dx$$

متطابقات فيثاغورس

$$= \int \frac{1+\cos x}{\sin^2 x}\, dx$$

بتوزيع المقام على البسط

$$=\int \left(\frac{1}{\sin^2 x}+\frac{\cos x}{\sin^2 x}\right) dx$$

بتوزيع المقام على البسط

$$=\int \left(\frac{1}{\sin^2 x}+\frac{1}{\sin x}\times\frac{\cos x}{\sin x}\right) dx$$

متطابقة المقلوب، والمتطابقات النسبية

$$=\int (\csc^2 x+\csc x\cot x)\, dx$$

تكامل $\csc^2 x$، وتكامل $\csc x \cot x$

$$=-\cot x-\csc x+C$$

مثال (2) تحقق من فهمك صفحة 14

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

a) $\int \cos^4 x\, dx$

b) $\int_0^{\pi/6} \sin 3x \sin x\, dx$

c) $\int \frac{dx}{1+\cos x}$

الحل

a)

$$\int \cos^4 x\, dx$$

$$\cos^4 x=(\cos^2 x)^2=\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2$$

$$=\frac{1}{4}(1+2\cos 2x+\cos^2 2x)$$

$$=\frac{1}{4}\left(1+2\cos 2x+\frac{1+\cos 4x}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\cos 4x$$

$$=\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x$$

$$\int \cos^4 x\, dx$$

$$=\int \left(\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x\right)dx$$

$$=\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C$$

b)

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 3x \sin x\, dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{2}(\cos(3x-x)-\cos(3x+x))\, dx$$

مثال (3)

اوجد قيمة التكاملات الاتية

1)

$\int (1 + tan^2 x)\, dx$

$$\int (1+\tan^2 x)\,dx$$

$$= \int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$$

2) $$\int \cos 5x\,dx$$

$$= \frac{1}{5}\sin 5x + C$$

3) $$\int \sin 5x\,dx$$

$$= -\frac{1}{5}\cos 5x + C$$

4) $$\int \left(\sin\frac{x}{2}\right)dx$$

$$= -2\cos 0.5x + C$$

5) $$-\int 3\sec^2 3x\,dx$$

$$= -\tan 3x + C$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} (\cos 2x - \cos 4x)\,dx$$

$$= \left(\frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{8}\sin 4x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}$$

$$= \left(\frac{1}{4}\sin\frac{2\pi}{6} - \frac{1}{8}\sin\frac{4\pi}{6}\right) - (0-0)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{\sqrt{3}}{16} = \frac{\sqrt{3}}{16}$$

c)

$$\int \frac{dx}{1+cos\,x}$$

$$= \int \left(\frac{1}{1+cos\,x} \times \frac{1-cos\,x}{1-cos\,x}\right)dx$$

$$= \int \frac{1-cos\,x}{sin^2 x}\,dx$$

$$= \int (csc^2 x - cot\,x csc\,x)\,dx$$

$$= -cot\,x + csc\,x + C$$

6) $\int (-8\cos x - 7\sin x)\, dx$

$-8\sin x + 7\cos x + C$

7) $\int (9\sin x + 8\cos x)\, dx$

$-9\cos x + 8\sin x + C$

8) $\int (\cos x - 3x^2)\, dx$

$\sin x - x^3 + C$

9) $\int (3\cos^2 x - 3\sin^2 x)\, dx$

$3\int (\cos^2 x - \sin^2 x)\, dx$

$= 3\int \cos(2x)\, dx = \frac{3}{2}\sin(2x) + C$

10) $\int (2 - 4\sin^2 x)\, dx$

$2\int (1 - 2\sin^2 x)\, dx$

$= 2\int \cos(2x)\, dx = \sin(2x) + C$

مثال (4)

أوجد التكامل غير المحدود التالي

$\int \frac{2}{e^x}\, dx$

a	$\frac{2}{e^x} + C$
b	$\frac{-2}{e^x} + C$
c	$\frac{2}{e^{-x}} + C$
d	$\frac{-2}{e^{-x}} + C$

الحل

b

مثال (5)

أوجد التكامل غير المحدود التالي

$\int \sin(\sqrt{2}x)\, dx$

a	$\sqrt{2}\cos(\sqrt{2}x) + C$
b	$-\sqrt{2}\cos(\sqrt{2}x) + C$
c	$\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(\sqrt{2}x) + C$
d	$-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(\sqrt{2}x) + C$

الحل

d

مثال (6)

$$\int \frac{\cos^2 x - 4}{\cos x - 2}\,dx =$$

a	$\cos x + 2 + C$
b	$\sin x + 2x + C$
c	$-\sin x + 2x + C$
d	$-\sin x - 2x + C$

الحل: b

مثال (7)

$$\int \frac{4}{\cos^2 x}\,dx \;؟$$

a	$2\tan x + C$
b	$4\sec^2 x + C$
c	$4\tan x + C$
d	$4\tan^2 x + C$

الحل: c

مثال (8)

$$\int \frac{7}{1 - \sin^2 x}\,dx$$

a	$7\cos x + C$
b	$7\sec^2 x + C$
c	$7\tan x + C$
d	$7\tan^2 x + C$

الحل: c

مثال (9)

$$\int (\sec x - 1)(\sec x + 1)\,dx$$

a	$\tan x - x + C$
b	$\tan x + x + C$
c	$\tan^2 x - x + C$
d	$\tan^2 x + x + C$

الحل: a

مثال (10)

$\int (2\cos^2 x - 1)\, dx$

a	$\sin^2 x - x + C$
b	$2\sin^2 x - x + C$
c	$\cos 2x + C$
d	$\frac{1}{2}\sin 2x + C$

الحل

d

مثال (11)

$\int 2\sin x \cos x\, dx$

a	$\sin 2x + C$
b	$2\cos 2x + C$
c	$\frac{1}{2}\cos 2x + C$
d	$\frac{-1}{2}\cos 2x + C$

الحل

d

مثال (12)

$\int (3 - 6\sin^2 x)\, dx$

a	$3x - 6\sin^2 x + C$
b	$3x + 6\sin^2 x + C$
c	$\frac{3}{2}\sin 2x + C$
d	$\frac{3}{2}\cos 2x + C$

الحل

d

تكاملات ينتج منها اقتران لوغاريتمي طبيعي

مفهوم أساسي

إذا كان a, b عددين حقيقيين، و$a \neq 0$،
وكان $f(x)$ اقترانًا قابلًا للاشتقاق، فإنَّ:

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C \quad , x \neq 0$$

$$\int \frac{1}{ax+b}\,dx = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C \quad , x \neq -\frac{b}{a}$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C, f(x) \neq 0$$

قوانين اللوغاريتمات

1. $In(1) = 0$
2. $Ine = 1$
3. $In\ x^n = n\ Inx$
4. $In(xy) = Inx + Iny$

6. $In\left(\frac{x}{y}\right) = Inx - Iny$

7. $Ine^{p(x)} = p(x)$

مثال (1)

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1 $\int \left(2e^x + \frac{3}{x}\right) dx$

تكامل e^x المضروب في ثابت،
وتكامل $\frac{1}{x}$ المضروب في ثابت

$$\int \left(2e^x + \frac{3}{x}\right) dx = 2e^x + 3\ln|x| + C$$

2 $\int \frac{1}{4x-1}\,dx$

تكامل $\frac{1}{ax+b}$

$$\int \frac{1}{4x-1}\,dx = \frac{1}{4}\ln|4x-1| + C$$

3 $\int \frac{2x^5-4}{x}\,dx$

بقسمة كل حدٍّ في البسط على المقام

$$\int \frac{2x^5-4}{x}\,dx = \int \left(\frac{2x^5}{x} - \frac{4}{x}\right) dx$$

بالتبسيط

$$= \int \left(2x^4 - \frac{4}{x} \right) dx$$

تكامل اقتران القوّة المضروب في ثابت،

وتكامل $\frac{1}{x}$ المضروب في ثابت

$$= \frac{2}{5} x^5 - 4 \ln |x| + C$$

4 $\int \frac{2x}{x^2 - 1} dx$

تكامل $\frac{f'(x)}{f(x)}$

$$\int \frac{2x}{x^2 - 1} dx = \ln |x^2 - 1| + C$$

5 $\int \frac{6x}{x^2 + 9} dx$

إعادة كتابة الاقتران في صورة: $k \frac{f'(x)}{f(x)}$

$$\int \frac{6x}{x^2 + 9} dx = 3 \int \frac{2x}{x^2 + 9} dx$$

تكامل $\frac{f'(x)}{f(x)}$

$$= 3 \ln |x^2 + 9| + C$$

$|x^2 + 9| = x^2 + 9$

$$= 3 \ln(x^2 + 9) + C$$

6 $\int \frac{\cos x}{3 + 2 \sin x} dx$

بالضرب في 2، والقسمة على 2

$$\int \frac{\cos x}{3 + 2 \sin x} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2 \times \cos x}{3 + 2 \sin x} dx$$

بالتبسيط

$$= \frac{1}{2} \int \frac{2 \cos x}{3 + 2 \sin x} dx$$

تكامل $\frac{f'(x)}{f(x)}$

$$= \frac{1}{2} \ln |3 + 2 \sin x| + C$$

$|3 + 2 \sin x| = 3 + 2 \sin x$

$$= \frac{1}{2} \ln (3 + 2 \sin x) + C$$

7 $\int \tan x \, dx$

المتطابقات النسبية

$$\int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$$

بالضرب في -1، والقسمة على -1

$$= \frac{1}{-1} \int \frac{-1 \times \sin x}{\cos x} dx$$

تكامل $\frac{f'(x)}{f(x)}$

$$= -\ln |\cos x| + C$$

8 $\int \sec x \, dx$

بالضرب في $\dfrac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x}$

$$\int \sec x \, dx$$

$$= \int \sec x \times \frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x} \, dx$$

باستعمال خاصية التوزيع

$$= \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x} \, dx$$

تكامل $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$

$$= \ln|\sec x + \tan x| + C$$

مثال (2) تحقق من فهمك صفحة 16

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

a) $\int \left(\sin x - \frac{5}{x}\right) dx$ b) $\int \frac{5}{3x+2} \, dx$

c) $\int \frac{x^2 - 7x + 2}{x^2} \, dx$ d) $\int \frac{2x+3}{x^2+3x} \, dx$

e) $\int \frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x} \, dx$ f) $\int \cot x \, dx$

g) $\int \frac{e^x}{e^x + 7} \, dx$ h) $\int \csc x \, dx$

الحل

a)

$$\int \left(\sin x - \frac{5}{x}\right) dx$$

$$= -\cos x - 5\ln|x| + C$$

b)

$$\int \frac{5}{3x+2} \, dx = \frac{5}{3} \int \frac{3}{3x+2} \, dx$$

$$= \frac{5}{3} \ln|3x+2| + C$$

c)

$$\int \frac{x^2-7x+2}{x^2}\,dx = \int (1-\frac{7}{x}+2x^{-2})\,dx$$

$$= x - 7\ln|x| - 2x^{-1} + C$$

d)

$$\int \frac{2x+3}{x^2+3x}\,dx = \ln|x^2+3x| + C$$

e)

$$\int \frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{-2\sin 2x}{1+\cos 2x}\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}\ln|1+\cos 2x| + C$$

$$= -\frac{1}{2}\ln(1+\cos 2x) + C$$

f)

$$\int \cot x\,dx$$

$$= \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \ln|\sin x| + C$$

g)

$$\int \frac{e^x}{e^x+7}\,dx$$

$$= \ln|e^x+7| + C = \ln(e^x+7) + C$$

h)

$$\int \frac{dx}{1+\cos x}$$

$$= \int (\frac{1}{1+\cos x} \times \frac{1-\cos x}{1-\cos x})\,dx$$

$$= \int \frac{1-\cos x}{\sin^2 x}\,dx$$

$$= \int (\csc^2 x - \cot x \csc x)\,dx$$

$$= -\cot x + \csc x + C$$

مثال (3)

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1 $\int \left(\frac{1}{x} + 6\sin x\right) dx$

تكامل $\frac{1}{x}$، وتكامل $\sin x$ المضروب في ثابت

$$\int \left(\frac{1}{x} + 6\sin x\right) dx$$
$$= \ln|x| - 6\cos x + C$$

2 $\int \left(2e^x + \frac{3}{x}\right) dx$

تكامل e^x المضـــروب في ثابت،
وتكامل $\frac{1}{x}$ المضروب في ثابت

$$\int \left(2e^x + \frac{3}{x}\right) dx$$
$$= 2e^x + 3\ln|x| + C$$

3 $\int \frac{2x^5 - 4}{x} dx$

بقسمة كل حدٍّ في البسط على المقام

$$\int \frac{2x^5 - 4}{x} dx = \int \left(\frac{2x^5}{x} - \frac{4}{x}\right) dx$$

بالتبسيط $= \int \left(2x^4 - \frac{4}{x}\right) dx$

تكامــل اقتــران القوَّة المضـــروب في ثابت، وتكامل $\frac{1}{x}$ المضروب في ثابت

$$= \frac{2}{5}x^5 - 4\ln|x| + C$$

مثال (4)

b) $\int \frac{5x^4 + 12x^2}{x^5 + 4x^3} dx$

لاحظ أن $(x^5 + 4x^3)' = 5x^4 + 12x^2$

$$\int \frac{5x^4 + 12x^2}{x^5 + 4x^3} dx = \ln|x^5 + 4x^3| + C$$

c) $\int 4(2t+1)^{-1} dt$

$$\int 4(2t+1)^{-1} dt = \int \frac{4}{2t+1} dt$$
$$= 2\int \frac{2}{2t+1} dt$$

تكامل الاقترانات النسبية

يتطلَّب إيجاد تكاملات بعض الاقترانات النسبية أحيانًا إعادة كتابة المُكامَل بصورة أُخرى باستعمال القسمة في حال كانت درجة البسط أعلى من (أو تساوي) درجة المقام. وقد ينتج من صورة الاقتران الجديدة تكاملٌ ينتج منه اقتران لوغاريتمي طبيعي

ملاحظة :

الاقترانات النسبية هي اقترانات يُمكِن كتابتها في صورة نسبة بين كثيري حدود: $\frac{f(x)}{g(x)}$، حيث: $g(x) \neq 0$.

إذا كان $\frac{f(x)}{g(x)}$ اقترانًا نسبيًّا فيه درجة $f(x)$ أكبر من (أو تساوي) درجة $g(x)$، وكان ناتج القسمة $q(x)$، وباقي القسمة $r(x)$، فإنَّ:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)}$$

$$\text{الناتج} + \frac{\text{الباقي}}{\text{المقسوم علية}} =$$

مثال (1)

أجد: $\int \frac{x^3+x}{x-1}\,dx$.

بما أنَّ المُكامَل اقتران نسبي، درجة البسط فيه أعلى من درجة المقام، فإنَّني سأُعيد كتابته بصورة أُخرى

الخطوة 1: أَقسِم البسط على المقام.

$$\begin{array}{r|l}
 & x^2+x+1 \\
\hline
x-1 & x^3+x \\
 & -x^3 \pm x^2 \\
\hline
 & x^2+x \\
 & -x^2 \pm x \\
\hline
 & 2x \\
 & -2x \pm 2 \\
\hline
 & 2
\end{array}$$

الخطوة 2: أُعيد كتابة المُكامَل باستعمال نتيجة القسمة.

$$\frac{f(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)}$$

$$\int \frac{x^3+x}{x-1}\,dx$$

$$= \int \left(x^2 + x + 2 + \frac{2}{x-1}\right) dx$$

تكامل اقتران القوَّة، وتكامل $\frac{1}{ax+b}$ المضروب في ثابت

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x + 2\ln|x-1| + C$$

مثال (2) تحقق من فهمك صفحة 17

أجد: $\int \frac{x^2+x+1}{x+1}\,dx$.

الحل

$$\begin{array}{r|l} & x \\ x+1 & x^2+x+1 \\ & -x^2 \mp x \\ \hline & 1 \end{array}$$

$$\int \frac{x^2+x+1}{x+1}\,dx = \int \left(x + \frac{1}{x+1}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + \ln|x+1| + C$$

مثال (3)

اجد

$$\int \frac{6x}{3x+2}$$

الحل

$$\begin{array}{r|l} & 6x \\ 3x+2 & 6x \\ & -6x \mp 4 \\ \hline & -4 \end{array}$$

$$\int 2 + \frac{-4}{3x+2}\,dx$$

$$= 2x - \frac{4}{3}\ln|3x+2| + c$$

مثال (4)

اجد

$$\int \frac{12x^2}{2x+1}\,dx$$

الحل

$$\begin{array}{r|l} & 6x-3 \\ 2x+1 & 12x^2 \\ & -12x^2 \mp 6x \\ \hline & -6x \\ & \pm 6x \pm 3 \\ \hline & 3 \end{array}$$

$$\int \left(6x - 3 + \frac{3}{2x+1}\right) dx$$

$$= \frac{6x^2}{2} - 3x + \frac{3}{2}\ln|2x+1| + c$$

$$3x^2 - 3x + \frac{3}{2}\ln|2x+1| + c$$

مثال (5)

اجد $\int \frac{x^3 + 4x^2 + 5}{x - 2}\, dx$

لاحظ أن درجة البسط أكبر من درجة المقام لذا نقوم بإيجاد ناتج القسمة قبل التكامل باستعمال القسمة المطوَّلة أو القسمة التركيبية.

الخطوة 1: أوجد ناتج القسمة باستعمال القسمة التركيبية.

2	1	4	0	5
		2	12	24
	1	6	12	29

إذن: $\frac{x^3 + 4x^2 + 5}{x - 2} = x^2 + 6x + 12 + \frac{29}{x - 2}$

الخطوة 2: أوجد التكامل.

$$\int \frac{x^3 + 4x^2 + 5}{x - 2}\, dx = \int \left(x^2 + 6x + 12 + \frac{29}{x - 2}\right) dx$$

$$= \int x^2\, dx + \int 6x\, dx + \int 12\, dx + \int \frac{29}{x - 2}\, dx$$

$$= \int x^2\, dx + 6\int x\, dx + 12\int dx + 29\int \frac{1}{x - 2}\, dx$$

$$= \frac{1}{3}x^3 + \frac{6}{2}x^2 + 12x + 29 \ln|x - 2| + C$$

$$= \frac{1}{3}x^3 + 3x^2 + 12x + 29 \ln|x - 2| + C$$

تكاملات الاقترانات المُتشعِّبة

تعلَّمْتُ سابقًا بعض قواعد التكامل المحدود، مثل قاعدة تجزئة التكامل. فإذا كان $f(x)$ اقترانًا متصلًا على الفترة $[a, b]$، فإنَّ:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

يُمكِن استعمال هذه القاعدة لإيجاد التكامل المحدود لبعض الاقترانات، التي من أهمها الاقترانات المُتشعِّبة في حال احتوت فترة التكامل على قواعد مختلفة للاقتران ومن ثَمَّ أُجزِّئ التكامل عند نقاط التشعُّب، ثم أجد تكامل كل قاعدة على فترتها الجزئية.

مثال (1)

1

إذا كان: $f(x) = \begin{cases} 12 & ,x < 2 \\ 3x^2 & ,x \geq 2 \end{cases}$،

فأجد قيمة: $\int_1^4 f(x)\,dx$.

الحل

قاعدة تجزئة التكامل

$$\int_1^4 f(x)\,dx = \int_1^2 12\,dx + \int_2^4 3x^2\,dx$$

تكامل الثابت، وتكامل اقتران القوَّة

$$= 12x \Big|_1^2 + x^3 \Big|_2^4$$

بالتعويض

$$= 12(2-1) + \left((4)^3 - (2)^3\right)$$

بالتبسيط

$$= 68$$

2 إذا كان: $f(x) = |x|$، فأجد قيمة:

$$\int_{-2}^6 f(x)dx.$$

الحل

الخطوة 1: أُعيد تعريف اقتران القيمة المُطلَقة.

$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x & ,x < 0 \\ x & ,x \geq 0 \end{cases}$$

الخطوة 2: أجد قيمة التكامل المحدود.

قاعدة تجزئة التكامل

$$\int_{-2}^{6} f(x)\,dx = \int_{-2}^{0} -x\,dx + \int_{0}^{6} x\,dx$$

تكامل اقتران القوَّة

$$= -\frac{1}{2}x^2 \Big|_{-2}^{0} + \frac{1}{2}x^2 \Big|_{0}^{6}$$

بالتعويض

$$= -\frac{1}{2}((0)^2 - (-2)^2) + \frac{1}{2}(6^2 - 0^2)$$

$$= 20$$ بالتبسيط

---

3 إذا كان: $f(x) = |4 - x^2|$، فأجد قيمة: $\int_{0}^{3} f(x)dx$.

الحل

الخطوة 1: أُعيد تعريف اقتران القيمة المُطلَقة.

$$f(x) = |4 - x^2| = \begin{cases} x^2 - 4 & , x \le -2 \\ 4 - x^2 & , -2 < x < 2 \\ x^2 - 4 & , x \ge 2 \end{cases}$$

الخطوة 2: أجد قيمة التكامل المحدود.

قاعدة تجزئة التكامل

$$\int_{0}^{3} f(x)\,dx = \int_{0}^{2} (4 - x^2)\,dx + \int_{2}^{3} (x^2 - 4)\,dx$$

تكامل الثابت، وتكامل اقتران القوَّة

$$= (4x - \frac{1}{3}x^3)\Big|_{0}^{2} + (\frac{1}{3}x^3 - 4x)\Big|_{2}^{3}$$

بالتعويض

$$= \left(4(2) - \frac{1}{3}(2)^3\right) - \left(4(0) - \frac{1}{3}(0)^3\right) + \left(\frac{1}{3}(3)^3 - 4(3)\right) - \left(\frac{1}{3}(2)^3 - 4(2)\right)$$

$$= \frac{23}{3}$$ بالتبسيط

مثال (2) تحقق من فهمك **صفحة 19**

a) إذا كان: $f(x) = \begin{cases} 1+x & ,x<1 \\ 2x & ,x \geq 1 \end{cases}$،

فأجد قيمة: $\int_{-1}^{3} f(x)dx$.

b) إذا كان: $f(x) = |1-x|$،

فأجد قيمة: $\int_{-2}^{2} f(x)dx$.

c) إذا كان: $f(x) = |x^2-1|$،

فأجد قيمة: $\int_{-4}^{0} f(x)dx$.

الحل

a)

$$\int_{-1}^{3} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1}(1+x)\,dx + \int_{1}^{3} 2x\,dx$$

$$= (x+\frac{1}{2}x^2)\Big|_{-1}^{1} + x^2\Big|_{1}^{3}$$

$$= (1+\frac{1}{2}) - (-1+\frac{1}{2}) + 9 - 1 = 10$$

b)

$$f(x) = \{ \begin{matrix} 1-x, & x \leq 1 \\ x-1, & x > 1 \end{matrix}$$

$$\int_{-2}^{2} f(x)\,dx$$

$$= \int_{-2}^{1}(1-x)\,dx + \int_{1}^{2}(x-1)\,dx$$

$$= (x-\frac{1}{2}x^2)\Big|_{-2}^{1} + (\frac{1}{2}x^2-x)\Big|_{1}^{2}$$

$$= (1-\frac{1}{2}) - (-2-2) + (2-2)$$

$$-(\frac{1}{2}-1) = 5$$

c)

$$f(x) = \{ \begin{matrix} x^2-1, x<-1 \\ 1-x^2, -1 \leq x \leq 1 \\ x^2-1, x>1 \end{matrix}$$

$$\int_{-4}^{0} f(x)\,dx$$

$$= \int_{-4}^{-1}(x^2-1)\,dx + \int_{-1}^{0}(1-x^2)\,dx$$

$$= (\frac{1}{3}x^3-x)\Big|_{-4}^{-1} + (x-\frac{1}{3}x^3)\Big|_{-1}^{0}$$

$$= (-\frac{1}{3}+1) - (-\frac{64}{3}+4)$$

$$+ (0-0) - (-1+\frac{1}{3}) \quad = \frac{56}{3}$$

مثال (3)

$f(x)=x^2|x|$ لكل x في $[-2, 2]$،

فأوجد ناتج $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx$

الخطوة 1 : أعد تعريف الدالة خلال الفترة المعطاة.

تعريف القيمة المطلقة

$$f(x)=\begin{cases} x & , \quad x \geq 0 \\ -x & , \quad x < 0 \end{cases}$$

اضرب في x^2

$$f(x)=\begin{cases} x^3 & , \quad 0 \leq x \leq 2 \\ -x^3 & , \quad -2 \leq x < 0 \end{cases}$$

الخطوة 2 : أوجد ناتج التكامل.

$$\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = \int_{-2}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{2} f(x)\,dx$$

$$= \int_{-2}^{0} -x^3\,dx + \int_{0}^{2} x^3\,dx$$

$$= \left[\frac{-x^4}{4}\right]_{-2}^{0} + \left[\frac{x^4}{4}\right]_{0}^{2}$$

$$= \frac{-1}{4}(0-16) + \frac{1}{4}(16-0)$$

$$= \frac{-1}{4}(-16) + \frac{1}{4}(16)$$

$$= 4 + 4 = 8$$

مثال (4)

أوجد قيمة $\int_0^2 f(x)dx$ حيث

$$f(x)=\begin{cases} 2x-1 , & x \geq 1 \\ x^2 , & x < 1 \end{cases}$$

a	1
b	2
c	2.33
d	3.33

c

مثال (5)

$\int_{-1}^{1}|x+1|dx$

$$|x+1| = \begin{cases} x+1 & x \geq -1 \\ -x-1 & x < -1 \end{cases}$$

$$\int_{-1}^{1}|x+1|dx$$

$$= \int_{-1}^{1}(x+1)\,dx = [\frac{x^2}{2}+x]_{-1}^{1}$$

$$= \left[\frac{1}{2}+1\right] - \left[\frac{1}{2}-1\right] = 1+1=2$$

مثال (6)

إذا كان $f(x)=\begin{cases}3x^2 & , \quad x\geq 0\\ 1 & , \quad x<0\end{cases}$

أوجد $\int_{-2}^{3} f(x)\,dx$

a	-24
b	25
c	29
d	35

c

مثال (7)

إذا كان $f(x)=\begin{cases}2x-1 & , \quad x<1\\ \frac{x}{2}+3 & , \quad x\geq 1\end{cases}$.

أوجد $\int_{1}^{4} f(x)\,dx$

a	$\frac{41}{4}$
b	$\frac{51}{4}$
c	12
d	$\frac{99}{4}$

b

تطبيقات التكامل: الشرط الأوَّلي

الشرط الأوَّلي هو نقطة تُحقِّق الاقتران الأصلي ويُمكِن بتعويضها إيجاد قيمة ثابت التكامل C

ويُمكِن بها أيضًا إيجاد الاقتران الأصلي الوحيد الذي يُحقِّق شرط المسألة

مثال (1)

من الحياة

تلوُّث: يُعالَج التلوُّث في بحيرة باستعمال مضاد للبكتيريا إذا كان عدد الخلايا البكتيرية الضارَّة في البحيرة يتغيَّر بمُعدَّل: $N'(t) = -\frac{2000t}{1+t^2}$، حيث $N(t)$ عدد الخلايا البكتيرية لكل ملّيلتر من الماء، بعد t يومًا من استعمال المضاد، فأجد $N(t)$، علمًا بأنَّ العدد الابتدائي للخلايا هو 5000 خلية لكل ملّيلتر.

الحل:

الخطوة 1: أجد تكامل الاقتران: $N'(t)$.

$$N(t) = \int N'(t)\,dt$$

$$N(t) = \int -\frac{2000t}{1+t^2}\,dt$$

بالضرب في 2، والقسمة على 2

$$= -1000\int \frac{2t}{1+t^2}\,dt$$

تكامل $\frac{f'(x)}{f(x)}$

$$= -1000\ln|1+t^2| + C$$

$$|1+t^2| = 1+t^2$$

$$= -1000\ln(1+t^2) + C$$

الخطوة 2: أجد ثابت التكامل C.

قاعدة الاقتران

$$N(t) = -1000\ln(1+t^2) + C$$

بتعويض $t=0,\ N(0)=5000$

$$5000 = -1000\ln(1+(0)^2) + C$$

بالتبسيط

$$5000 = C$$

إذن، اقتران عدد الخلايا البكتيرية لكل ملّيلتر من الماء بعد t يومًا من استعمال المضاد هو: $N(t) = -1000\ln(1+t^2) + 5000$.

مثال (2) تحقق من فهمك صفحة 20

تلوُّث: تسرَّب نفط من ناقلة بحرية، مُكوِّنًا بقعة دائرية الشكل على سطح الماء، نصف قُطْرها $R(t)$ قدمًا بعد t دقيقة من بَدْء التسرُّب إذا كان نصف قُطْر الدائرة يزداد بمُعدَّل: $R'(t)=\frac{21}{0.07t+5}$، فأجد $R(t)$، علمًا بأنَّ $R(0)=0$.

الحل

$$R(t)=\int\frac{21}{0.07t+5}\,dt$$

$$=\frac{21}{0.07}\int\frac{0.07}{0.07t+5}\,dt$$

$$=300\ln|0.07t+5|+C$$

$$R(0)=300\ln 5+C$$

$$0=300\ln 5+C\Rightarrow C=-300\ln 5$$

$$R(t)=300\ln|0.07t+5|-300\ln 5$$

$$=300\ln\left|\frac{0.07t+5}{5}\right|$$

$$=300\ln|0.014t+1|$$

مسألة اليوم

يُمثِّل الاقتران $P(t)$ عدد الخلايا البكتيرية بعد t يومًا من بَدْء دراستها في مجتمع بكتيري. إذا كان عدد هذه الخلايا عند بَدْء الدراسة هو 200000 خلية، فأجد عددها في المجتمع البكتيري بعد 12 يومًا من بَدْء الدراسة، علمًا بأنَّها تتغيَّر بمُعدَّل:

$$P'(t)=200e^{0.1t}+150e^{-0.03t}$$

الحل

$$P(t)=\int(200e^{0.1t}+150e^{-0.03t})\,dt$$

$$=\frac{200}{0.1}e^{0.1t}+\frac{150}{-0.03}e^{-0.03t}+C$$

$$=2000e^{0.1t}-5000e^{-0.03t}+C$$

$$P(0)=2000-5000+C$$

$$200000=-3000+C\Rightarrow C=203000$$

$$P(t)=2000e^{0.1t}-5000e^{-0.03t}+203000$$

$$P(12)=2000e^{1.2}-5000e^{-0.36}+203000$$

$$\approx 206152$$

مثال (3)

اذا كان

$$f'(x) = 2x - \sin x$$

وكانت $f(\pi) = 3$ جد قاعدة الاقتران $f(x)$

الحل

$$f(x) = \int f'(x)\,dx$$
$$= \int (2x - \sin x)\,dx$$
$$= x^2 + \cos x + C$$

بالتعويض لايجاد قيمة C

$$f(\pi) = \pi^2 + \cos 1^+ + c = 3 \to c = 4 - \pi^2$$

هي الاقتران قاعدة

$$f(x) = x^2 + \cos x + 4 - \pi^2$$

تطبيقات التكامل: الحركة في مسار مستقيم

من التطبيقات المُهِمَّة على الشرط الأوَّلي، إيجاد موقع جسم يتحرَّك في مسار مستقيم إذا عُلِم اقتران السرعة المتجهة، وعُلِم شرط أوَّلي عن موقع الجسم يُطلَق على التغيُّر في موقع الجسم اسم **الإزاحة** فإذا كان $s(t)$ موقع جسم عند الزمن t، فإنَّ الإزاحة على الفتــرة الزمنية $[t_1, t_2]$ هي $s(t_2) - s(t_1)$، وقد تكون قيمتها موجبةً أو سالبةً أو صفرًا، تبعًا لاتجاه حركة الجسم.

الإزاحة

مفهوم أساسي

إذا تحرَّك جسم في مســار مستقيم وَفق اقتران الموقع $s(t)$ فإنَّ سرعته المتجهة هي: $v(t) = s'(t)$، وإزاحته في الفترة الزمنية $[t_1, t_2]$ هي:

$$s(t_2) - s(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$$

أمّا إذا كان المطلوب إيجاد المسافة الكلية التي قطعها جسم خلال فترة زمنية فيجب تحديد الفترات الزمنية الجزئيـة التي تكون عندها $v(t) \leq 0$ (يتحرَّك الجسم إلى الجهة السالبة)، وتحديد الفترات الزمنية الجزئية التي تكون عندها $v(t) \geq 0$ (يتحرَّك الجسم إلى الجهة الموجبة). وفي كلتا الحالتين، تُحسَب المسافة بإيجاد تكامل اقتران السرعة $|v(t)|$ على النحو الآتي:

المسافة الكلية المقطوعة

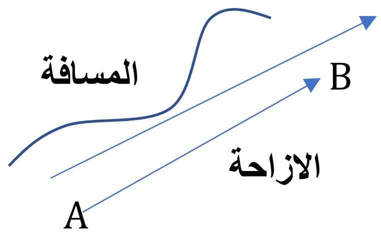
مفهوم أساسي

إذا تحرَّك جسم في مســار مستقيم وَفق اقتران الموقع $s(t)$، فإنّ سرعته المتجهة هى: $v(t) = s'(t)$، والمسافة الكلية التي قطعها في الفترة الزمنية $[t_1, t_2]$ هي

$$\int_{t_1}^{t_2} |v(t)|\, dt$$

ملاحظة :

المسافة هي طول المسار الذي يقطعه الجسم بصرف النظر عن الاتجاه، وقيمتها أكبر من (أو تساوي) الصفر. أمّا الإزاحة فهي التغيُّر في الموقع.



معلومة:

$$s(t) = \int v(t)\,dt$$

$$v(t) = \int a(t)\,dt$$

ملاحظة :

لايجاد المسافة الكلية

1) نجد اصفار اقتران السرعة
2) ندرس إشارة اقتران السرعة على خط الاعداد
3) نجري التكامل على الفترات الجزئية

مثال (1)

يتحرَّك جُسَيْم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران: $v(t) = \sin t$، حيث t الزمن بالثواني، وv سرعته المتجهة بالمتر لكل ثانية:

1 إذا بدأ الجُسَيْم حركته من نقطة الأصل، فأجد موقع الجُسَيْم بعد $\frac{\pi}{3}$ ثانية من بَدْء الحركة.

الحل

الخطوة 1: أجد اقتران الموقع.

بإيجاد تكامل اقتران السرعة المتجهة

$$s(t) = \int v(t)\,dt$$

بتعويض $v(t) = \sin t$

$$= \int \sin t\,dt$$

$$= -\cos t + C_1$$ تكامل $\sin t$

الخطوة 2: أجد قيمة ثابت التكامل C_1.

بما أنَّ الموقع الابتدائي للجُسَيْم هو نقطة الأصل، فإنَّ $s(0) = 0$، وهذا يُعَدُّ شرطًا أوَّليًّا لإيجاد قيمة ثابت التكامل C_1:

اقتران الموقع $s(t) = -\cos t + C_1$

بتعويض $t = 0, s(0) = 0$

$0 = -\cos(0) + C_1$

بحلّ المعادلة $C_1 = 1$

إذن، اقتران الموقع بعد t ثانية من بَدْء الحركة هو $s(t) = -\cos t + 1$.

الخطوة 3: أجد موقع الجُسَيْم بعد $\frac{\pi}{3}$ ثانية من بَدْء الحركة.

اقتران الموقع $s(t) = -\cos t + 1$

بتعويض $t = \frac{\pi}{3}$ $\quad s\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + 1$

بالتبسيط $= \frac{1}{2}$

إذن، موقع الجُسَيْم بعد $\frac{\pi}{3}$ ثانية من بَدْء الحركة هو $\frac{1}{2}$ m

2 أجد إزاحة الجُسَيْم في الفترة $[0, 3\pi]$.

صيغة الإزاحة $s(t_2) - s(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\, dt$

بتعويض $v(t) = \sin t, t_1 = 0, t_2 = 3\pi$

$s(3\pi) - s(0) = \int_0^{3\pi} \sin t\, dt$

تكامل $\sin t$ $\quad = -\cos t \Big|_0^{3\pi}$

بالتعويض $= -(\cos(3\pi) - \cos(0))$

بالتبسيط $= 2$

إذن، إزاحة الجُسَيْم هي 2 m

---

3 أجد المسافة الكلية التي قطعها الجُسَيْم في الفترة $[0, 3\pi]$

الخطوة 1: أدرس إشارة السرعة المتجهة.

أجد أصفار اقتران السرعة المتجهة بمساواة هذا الاقتران بالصفر:

اقتران السرعة المتجهة $v(t) = \sin t$

بمساواة اقتران السرعة المتجهة بالصفر

$\sin t = 0$

بحلّ المعادلة لـ t في الفترة $[0, 3\pi]$

$t = 0 \quad t = \pi \quad t = 2\pi \quad t = 3\pi$

أدرس إشارة اقتران السرعة المتجهة حول أصفاره في الفترة المعطاة.

إشارة $v(t)$

+++++ ----- +++++

t: $0 \quad \pi \quad 2\pi \quad 3\pi$

الخطوة 2: أُكامِل اقتران السرعة على الفترة $[0, 3\pi]$.

تكامل اقتران السرعة

$$\int_0^{3\pi} |v(t)|dt$$

$$= \int_0^{\pi} v(t)dt + \int_{\pi}^{2\pi} (-v(t))dt + \int_{2\pi}^{3\pi} v(t)dt$$

بتعويض $v(t) = \sin t$

$$= \int_0^{\pi} \sin t\, dt + \int_{\pi}^{2\pi} (-\sin t)dt + \int_{2\pi}^{3\pi} \sin t\, dt$$

تكامل $\sin t$

$$= (-\cos t)\Big|_0^{\pi} + \cos t\,\Big|_{\pi}^{2\pi} + (-\cos t)\Big|_{2\pi}^{3\pi}$$

بالتبسيط $= 2 + 2 + 2 = 6$

إذن، المسافة الكلية التي قطعها الجُسَيْم في الفترة $[0, 3\pi]$ هي 6 m.

مثال (2) تحقق من فهمك **صفحة 23**

يتحرَّك جُسَيْم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران: $v(t) = 3\cos t$، حيث t الزمن بالثواني وv سرعته المتجهة بالمتر لكل ثانية:

a) إذا بدأ الجُسَيْم حركته من نقطة الأصل، فأجد موقع الجُسَيْم بعد $\frac{\pi}{6}$ ثانية من بَدْء الحركة.

b) أجد إزاحة الجُسَيْم في الفترة $[0, 2\pi]$.

c) أجد المسافة الكلية التي قطعها الجُسَيْم في الفترة $[0, 2\pi]$.

الحل

a)

$$s(t) = \int v(t)\, dt$$

$$= \int 3\cos t\, dt = 3\sin t + C$$

$$s(0) = 3\sin 0 + C$$

$$0 = 3\sin 0 + C \Rightarrow C = 0$$

$$s(t) = 3\sin t$$

$$s\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1.5\text{ m}$$

b)

$$s(2\pi) - s(0)$$

$$= 3\sin(2\pi) - 3\sin(0) = 0\text{ m}$$

c)

$$3\cos t, 0 \le t < \frac{\pi}{2}$$

$$|v(t)| = |3\cos t|$$

$$= \begin{cases} 3\cos t, & 0 \le t < \frac{\pi}{2} \\ -3\cos t, & \frac{\pi}{2} \le t \le \frac{3\pi}{2} \\ 3\cos t, & \frac{3\pi}{2} < t \le 2\pi \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} |v(t)|\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\cos t\, dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} -3\cos t\, dx + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} 3\cos t\, dx$$

$$= 3\sin t|_0^{\frac{\pi}{2}} - 3\sin t|_{\frac{\pi\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} + 3\sin t\,|_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}$$

$$= (3-0) - (-3-3) + (0-(-3))$$

$$= 12m$$

مثال (3)

يتحرك جسيم في خط مستقيم، إذا كانت سرعته بعد مرور t ثانيةً تعطى بالعلاقة $v(t) = 8 - 4t + 6t^2$ بالأمتار لكل ثانية، وعلمت أن إزاحته كانت 14 m عندما $t = 1$، فأوجد موقع الجسيم بعد مرور 3 sec من بدء الحركة.

معادلة السرعة $V(t) = 8 - 4t + 6t^2$

$v(t) = \frac{dS}{dt}$ $\quad \frac{dS}{dt} = 8 - 4t + 6t^2$

افصل المتغيرات

$$dS = (8 - 4t + 6t^2)dt$$

كامل كلا الطرفين

$$\int dS = \int (8 - 4t + 6t^2)dt$$

أوجِد التكامل

$$S(t) = 8t - \frac{4t^2}{2} + \frac{6t^3}{3} + C$$

بسّط $= 8t - 2t^2 + 2t^3 + C$

معطًى $S(1) = 14$

عوِّض $t = 1$

$$14 = 8(1) - 2(1)^2 + 2(1)^3 + C$$

مثال (4)

يتحرَّك جُسَيْم في مسار مستقيم، ويعطى تسارعه بالاقتران: $a(t) = 6t$، حيث الزمن t بالثواني، و a تسارعه بالمتر لكل ثانية تربيع. إذا كان الموقع الابتدائي للجُسَيْم هو 4 m، وكانت سرعته المتجهة هي 1 m/s بعد ثانية واحدة من بَدْء حركته، فأجد موقع الجُسَيْم بعد ثانيتين من بَدْء الحركة.

الحل

الخطوة 1: أجد اقتران السرعة المتجهة.

بإيجاد تكامل اقتران التسارع

$$v(t) = \int a(t)\ dt$$

$$= \int 6t\ dt$$ بتعويض $a(t) = 6t$

تكامل اقتران القوَّة المضروب في ثابت

$$= 3t^2 + C_1$$

- أجد قيمة ثابت التكامل C_1.

$$v(1) = 1$$

$$= 3t^2 + C_1$$ اقتران السرعة المتجهة

بتعويض $t = 1, v(1) = 1$

$$1 = 3(1)^2 + C_1$$

$$C_1 = -2$$ بحَلِّ المعادلة

إذن، اقتران السرعة المتجهة هو:

$v(t) = 3t^2 - 2$.

الخطوة 2: أجد اقتران الموقع.

بإيجاد تكامل اقتران السرعة المتجهة

$$s(t) = \int v(t)\ dt$$

بتعويض $v(t) = 3t^2 - 2$

$$= \int (3t^2 - 2)\ dt$$

تكامل الثابت، وتكامل اقتران القوَّة المضروب في ثابت

$$= t^3 - 2t + C_2$$

- أجد قيمة ثابت التكامل C_2.

$$s(0) = 4$$

اقتران الموقع

$$s(t) = t^3 - 2t + C_2$$

بتعويض $t = 0, s(0) = 4$

$$4 = (0)^3 - 2(0) + C_2$$

$$C_2 = 4$$ بحَلِّ المعادلة

إذن، اقتران الموقع بعد t ثانية من بَدْء الحركة هو: $s(t) = t^3 - 2t + 4$.

مثال (4)

يتحرك جسيم بسرعة $v(t) = 2t^2 - 12t + 16$

كيلو مترًا/ ساعة، أوجد كلًّا مما يأتي:

a) الإزاحة التي يقطعها الجسم خلال الفترة الزمنية من $t = 0$ إلى $t = 4$

معادلة الإزاحة $S(t) = \int_a^b v(t)dx$

عوّض $t = 0$ $= \int_0^4 (2t^2 - 12t + 16)dt$

أوجد التكامل $= \left[\frac{2t^3}{3} - 6t^2 + 16t\right]_0^4$

عوّض $= \left[\frac{128}{3} - 96 + 64\right] - [0]$

بسّط $= \frac{32}{3}$

أي أن الإزاحة التي قطعها الجسيم خلال الفترة $[0, 4]$ تساوي $\frac{32}{3}$ km

b) المسافة الكلية المقطوعة خلال الفترة من $t = 0$ إلى $t = 4$

الخطوة 1: حدد اتجاه الحركة.

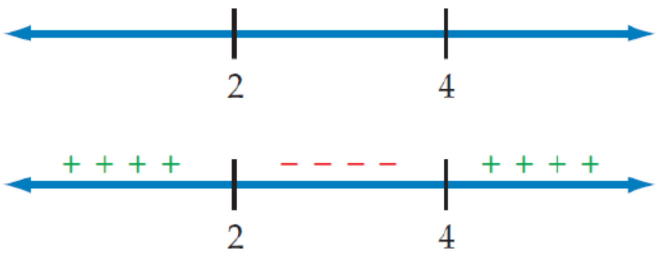
$v(t) = 0$ $2t^2 - 12t + 16 = 0$

أخرج عاملًا مشتركًا $2(t^2 - 6t + 8) = 0$

حلل $2(t - 2)(t - 4) = 0$

خاصية الضرب الصفري $t = 2 \text{ or } t = 4$

استعمل خط الأعداد ادرس إشارة $v(t)$



معادلة المسافة الكلية $d(t) = \int_a^b |v(t)|dt$

عوّض $= \int_0^4 |2t^2 - 12t + 16|dt$

خصائص التكامل

$$= \int_0^2 |2t^2 - 12t + 16|\,dt + \int_2^4 |2t^2 - 12t + 16|dt$$

أعد تعريف القيمة المطلقة

$$= \int_0^2 (2t^2 - 12t + 16)\,dt - \int_2^4 (2t^2 - 12t + 16)dt$$

أوجد التكامل

$$= \left[\frac{2t^3}{3} - 6t^2 + 16t\right]_0^2 - \left[\frac{2t^3}{3} - 6t^2 + 16t\right]_2^4$$

عوّض $= \frac{40}{3} + \frac{8}{3}$

بسّط $= 16$

أي أن المسافة الكلية المقطوعة خلال الفترة

من $t = 0$ إلى $t = 4$ تساوي $16\,\text{km}$

لنفترض أن جسيمًا يتحرك على خط مستقيم بسرعة $v(t)$ أوجد إزاحة الجسيم خلال الفترة المعطاة

$v(t) = 4\cos 2t \quad , \quad 0 \le t \le \pi$

a	0
b	1
c	2
d	π

a

يتحرك جسيم بسرعة $v(t) = 2t^2 - 6t + 4$ بالأقدام/ ثانيةٍ، أوجد المسافة الكلية التي يقطعها الجسيم خلال الفترة الزمنية من $t = 0$ إلى $t = 2$

a	$\frac{4}{3}$ ft
b	2 ft
c	$\frac{5}{3}$ ft
d	$\frac{1}{3}$ ft

b

أتدرّب وأحُلُّ المسائل

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1 $\int (e^{2x-3} - \sqrt{x})\, dx$

$= \int (e^{2x-3} - x^{1/2})\, dx$

$= \frac{1}{2} e^{2x-3} - \frac{2}{3} x^{3/2} + C$

2 $\int \left(e^{0.5x} - \frac{3}{e^{0.5x}}\right) dx$

$= \int (e^{0.5x} - 3e^{-0.5x})\, dx$

$= 2e^{0.5x} + 6e^{-0.5x} + C$

3 $\int (4 \sin 5x - 5 \cos 4x)\, dx$

$\int (4\sin 5x - 5\cos 4x)\, dx$

$= -\frac{4}{5} \cos 5x - \frac{5}{4} \sin 4x + C$

4 $\int \left(3 \sec x \tan x - \frac{2}{5x}\right) dx$

$\int (3\sec x \tan x - \frac{2}{5x})\, dx$

$= 3\sec x - \frac{2}{5} \ln |x| + C$

5 $\int \left(\sqrt{e^x} - \frac{1}{\sqrt{e^x}}\right)^2 dx$

$\int (\sqrt{e^x} - \frac{1}{\sqrt{e^x}})^2\, dx$

$= \int (e^x - 2 + \frac{1}{e^x})\, dx$

$= \int (e^x - 2 + e^{-x})\, dx$

$= e^x - 2x - e^{-x} + C$

6 $\int (\sin(5 - 3x) + 2 + 4x^2)\, dx$

$= \frac{1}{3} \cos(5 - 3x) + 2x + \frac{4}{3} x^3 + C$

7 $\int (e^x+1)^2\,dx$

$$= \int (e^{2x}+2e^x+1)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}e^{2x}+2e^x+x+C$$

---

8 $\int (e^{4-x}+\sin(4-x)+\cos(4-x))dx$

$$\int (e^{4-x}+\sin(4-x)+\cos(4-x))dx$$

$$= -e^{4-x}+\cos(4-x)-\sin(4-x)+C$$

---

9 $\int \frac{x^4-6}{2x}\,dx$

$$\int \frac{x^2-6}{2x}\,dx = \int \left(\frac{1}{2}x-\frac{3}{x}\right)dx$$

$$= \frac{1}{4}x^2-3\ln|x|+C$$

---

10 $\int \left(3\csc^2(3x+2)+\frac{5}{x}\right)dx$

$$= -\cot(3x+2)+5\ln|x|+C$$

---

11 $\int \frac{e^x+1}{e^x}\,dx$

$$\int \frac{e^x+1}{e^x}\,dx$$

$$= \int (1+e^{-x})\,dx = x-e^{-x}+C$$

---

12 $\int \frac{e^x}{e^x+4}\,dx$

$$\int \frac{e^x}{e^x+4}\,dx = \ln|e^x+4|+C$$

$$= \ln(e^x+4)+C$$

---

13 $\int \frac{\cos 2x}{\sin x\cos x+4}\,dx$

$$\int \frac{\cos 2x}{\sin x\cos x+4}\,dx$$

$$= \int \frac{\cos 2x}{\frac{1}{2}\sin 2x+4}\,dx$$

$$= \ln\left|\frac{1}{2}\sin 2x+4\right|+C$$

$$= \ln\left(\frac{1}{2}\sin 2x+4\right)+C$$

14 $\displaystyle\int \frac{dx}{5-\frac{x}{3}}$

$$\int \frac{dx}{5-\frac{x}{3}} = -3\int \frac{-\frac{1}{3}}{5-\frac{x}{3}}\,dx$$

$$= -3\,ln\left|5-\frac{x}{3}\right| + C$$

15 $\displaystyle\int \frac{1}{1-\sin x}\,dx$

$$\int \frac{1}{1-sin\,x}\,dx$$

$$= \int \frac{1}{1-sin\,x} \times \frac{1+sin\,x}{1+sin\,x}\,dx$$

$$= \int \frac{1+sin\,x}{1-sin^2 x}\,dx$$

$$= \int \frac{1+sin\,x}{cos^2 x}\,dx$$

$$= \int (sec^2 x + tan\,x sec\,x)\,dx$$

$$= tan\,x + sec\,x + C$$

16 $\displaystyle\int \sec^2 x\,(1+e^x\cos^2 x)\,dx$

$$\int \sec^2 x(1+e^x\cos^2 x)\,dx$$

$$= \int (\sec^2 x + e^x)\,dx$$

$$= \tan x + e^x + C$$

17 $\displaystyle\int \left(\frac{2}{x} - 2^x\right) dx$

$$\int \left(\frac{2}{x} - 2^x\right) dx = 2\ln|x| - \frac{2^x}{\ln 2} + C$$

18 $\displaystyle\int \sin 3x \cos 2x\,dx$

$$= \frac{1}{2}\int (\sin 5x + \sin x)\,dx$$

$$= -\frac{1}{10}\cos 5x - \frac{1}{2}\cos x + C$$

19 $\displaystyle\int \frac{2x+3}{3x^2+9x-1}\,dx$

$$\int \frac{2x+3}{3x^2+9x-1}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{6x+9}{3x^2+9x-1}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\ln|3x^2+9x-1| + C$$

20 $\int \frac{x^2+x+1}{x^2+1}\,dx$

$$\int \frac{x^2+x+1}{x^2+1}\,dx$$

$$= \int \left(\frac{x^2+1}{x^2+1} + \frac{x}{x^2+1}\right)dx$$

$$= \int \left(1 + \frac{1}{2} \times \frac{2x}{x^2+1}\right)dx$$

$$= x + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$$

21 $\int \left(\frac{1+\cos x}{\sin^2 x} + (\sin^2 x \csc x)\right)dx$

$$= \int (\csc^2 x + \cot x \csc x + \sin x)\,dx$$

$$= -\cot x - \csc x - \cos x + C$$

22 $\int (\sec x + \tan x)^2\,dx$

$$= \int (\sec^2 x + 2\sec x \tan x + \tan^2 x)\,dx$$

$$= \int (\sec^2 x + 2\sec x \tan x + \sec^2 x - 1)\,dx$$

$$= \int (2\sec^2 x + 2\sec x \tan x - 1)\,dx$$

$$= 2\tan x + 2\sec x - x + C$$

23 $\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\,dx$

$$\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\,dx = \ln(e^x + e^{-x}) + C$$

24 $\int \frac{x^2}{x^3-3}\,dx$

$$\int \frac{x^2}{x^3-3}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2}{x^3-3}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x^3-3| + C$$

25 $\int (9\cos^2 x - \sin^2 x - 6\sin x \cos x)\,dx$

$$\int (9\cos^2 x - \sin^2 x - 6\sin x \cos x)\,dx$$

$$= \int (9\cos^2 x - (1-\cos^2 x) - 6\sin x \cos x)\,dx$$

$$= \int (10\cos^2 x - 1 - 6\sin x \cos x)\,dx$$

$$= \int \left(10\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right) - 1 - 3\sin 2x\right)dx$$

$$= \int (5 + 5\cos 2x - 1 - 3\sin 2x)\,dx$$

$$= \int (4 + 5\cos 2x - 3\sin 2x)\,dx$$

$$= 4x + \frac{5}{2}\sin 2x + \frac{3}{2}\cos 2x + C$$

26 $\int (\cos^4 x - \sin^4 x)dx$

$$= \int (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x)dx$$
$$= \int (\cos^2 x - \sin^2 x)dx$$
$$= \int \cos 2x dx$$
$$= \frac{1}{2}\sin 2x + C$$

أجد قيمة كلٍّ من التكاملات الآتية:

27 $\int_0^{\pi} 2\cos\frac{1}{2}x\, dx$

$$\int_0^{\pi} 2\cos\frac{1}{2}x dx = 4\sin\frac{1}{2}x\Big|_0^{\pi}$$
$$= 4(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0) = 4$$

28 $\int_0^{2\pi} |\sin x|\, dx$

$$|\sin x| = \begin{cases} \sin x, 0 \le x \le \pi \\ -\sin x, \pi < x \le 2\pi \end{cases}$$
$$\int_0^{2\pi} |\sin x| dx = \int_0^{\pi} \sin x dx + \int_{\pi}^{2\pi} -\sin x dx$$
$$= -\cos x\Big|_0^{\pi} + \cos x\Big|_{\pi}^{2\pi}$$
$$= -(\cos\pi - \cos 0) + \cos 2\pi - \cos\pi$$
$$= -(-2) + 1 - (-1) = 4$$

29 $\int_{\pi/6}^{\pi/3} 3\tan^2 x\, dx$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} 3(\sec^2 x - 1)dx$$
$$= 3(\tan x - x)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$$
$$= 3(\tan\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3}) - 3(\tan\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6})$$
$$= 2\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}$$

30 $\displaystyle\int_1^e \frac{8x}{x^2+1}\,dx$

$$\int_1^e \frac{8x}{x^2+1}dx = 4\int_1^e \frac{2x}{x^2+1}dx$$
$$= 4\ln|x^2+1|\Big|_1^e$$
$$= 4\ln(e^2+1) - 4\ln 2$$
$$= 4\ln\left(\frac{e^2+1}{2}\right)$$

---

31 $\displaystyle\int_0^{\pi/6} \sin 3x \cos x\,dx$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} (\sin 4x + \sin 2x)dx$$
$$= \left(-\frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{4}\cos 2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}$$
$$= -\frac{1}{8}\cos\frac{4\pi}{6} - \frac{1}{4}\cos\frac{2\pi}{6}$$
$$-\left(-\frac{1}{8}\cos 0 - \frac{1}{4}\cos 0\right)$$
$$= \frac{5}{16}$$

32 $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\cot^2 x}{1+\cot^2 x}\,dx$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cot^2 x}{\csc^2 x}dx$$
$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^2 x}{\sin^2 \csc^2 x}dx$$
$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x\left(\frac{1}{\sin^2 x}\right)}dx$$
$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 x\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} (1+\cos 2x)dx$$
$$= \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}$$
$$= \frac{\pi}{6} + \frac{1}{4}\sin\frac{2\pi}{3} - \left(\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\sin\frac{2\pi}{4}\right)$$

---

33 $\displaystyle\int_0^3 (x - 5^x)\,dx$

$$\int_0^3 (x-5^x)dx = \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{5^x}{\ln 5}\right)\Big|_0^3$$
$$= \frac{9}{2} - \frac{125}{\ln 5} - \left(0 - \frac{1}{\ln 5}\right)$$
$$= \frac{9}{2} - \frac{124}{\ln 5}$$

34 $\int_0^4 |x^2 - 4x + 3|\, dx$

$|x^2-4x+3|$

$$= \begin{cases} x^2-4x+3 & ,x<1 \\ -x^2+4x-3, & 1\le x\le 3 \\ x^2-4x+3 & ,x>3 \end{cases}$$

$$\int_0^4 |x^2-4x+3|dx$$

$$= \int_0^1 (x^2-4x+3)dx + \int_1^3 (-x^2+4x-3)dx + \int_3^4 (x^2-4x+3)dx$$

$$(\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x)\Big|_0^1 + (-\frac{1}{3}x^3+2x^2-3x)\Big|_1^3 + (\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x)\Big|_3^4$$

$$\frac{1}{3}-2+3-0+(-9+18-9) -(-\frac{1}{3}+2-3)+\frac{64}{3}-32+12 \ \mathbf{=4}$$

35 $\int_1^4 (3 - |x-3|)\, dx$

$$|x-3| = \begin{cases} 3-x & ,x\le 3 \\ x-3 & ,x>3 \end{cases}$$

$$\int_1^4 (3-|x-3|)dx$$

$$= \int_1^3 (3-(3-x))dx + \int_3^4 (3-(x-3))dx$$

$$= \int_1^3 x dx + \int_3^4 (6-x)dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2\Big|_1^3 + (6x-\frac{1}{2}x^2)\Big|_3^4$$

$$= \frac{9}{2}-\frac{1}{2}+24-8-(18-\frac{9}{2})$$

$$= \frac{13}{2}$$

36 إذا كان: $f(x)=\begin{cases} x^2+4 & ,x<0 \\ 4-x & ,x\geq 0\end{cases}$

فأجد قيمة: $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$.

الحل

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx$$

$$=\int_{-1}^{0}(x^2+4)dx+\int_{0}^{1}(4-x)dx$$

$$=(\frac{1}{3}x^3+4x)\Big|_{-1}^{0}+(4x-\frac{1}{2}x^2)\Big|_{0}^{1}$$

$$=0-(-\frac{1}{3}-4)+4-\frac{1}{2}-0$$

$$=\frac{47}{6}$$

38 إذا كان: $\int_{a}^{3a}\frac{2x+1}{x}dx=\ln 12$،

فأجد قيمة الثابت a، حيث: $a>0$.

الحل

$$\int_{0}^{a}\frac{x}{x^2+a^2}dx=\frac{1}{2}\int_{0}^{a}\frac{2x}{x^2+a^2}dx$$

$$=\frac{1}{2}\ln(x^2+a^2)\Big|_{0}^{a}$$

$$=\frac{1}{2}(\ln(2a^2)-\ln(a^2))$$

$$=\frac{1}{2}\ln 2=\ln\sqrt{2}$$

39 أُثبِت أنّ: $\int_{0}^{a}\frac{x}{x^2+a^2}dx=\ln\sqrt{2}$

حيث: $a\neq 0$.

الحل

$$=\frac{1}{2}\int_{0}^{a}\frac{2x}{x^2+a^2}dx$$

$$=\frac{1}{2}\ln(x^2+a^2)\Big|_{0}^{a}$$

$$=\frac{1}{2}(\ln(2a^2)-\ln(a^2))$$

$$=\frac{1}{2}\ln 2=\ln\sqrt{2}$$

41 إذا كان: $f(x) = \int \cos\left(\frac{1}{2}x + \pi\right) dx$،

وكان: $f(\pi) = 3$، فأجد $f(0)$.

الحل

$$f(x) = \int \cos(\frac{1}{2}x + \pi)dx$$

$$= 2\sin(\frac{1}{2}x + \pi) + C$$

$$f(\pi) = 2\sin(\frac{1}{2}\pi + \pi) + C$$

$$3 = 2\sin\frac{3\pi}{2} + C$$

$$3 = -2 + C \Rightarrow C = 5$$

$$\Rightarrow f(x) = 2\sin(\frac{1}{2}x + \pi) + 5$$

$$\Rightarrow f(0) = 2\sin\pi + 5 = 5$$

42 إذا كان: $y = \int \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) dx$، وكان: $y = 1$ عندما $x = \frac{\pi}{4}$، فأُثبِت أنَّه يُمكِن كتابة y في صورة: $y = \frac{1 + \sin 2x}{2}$.

الحل

$$y = \int \sin(\frac{\pi}{2} - 2x)dx$$

$$= \frac{-\cos(\frac{\pi}{2} - 2x)}{-2} + C$$

$$= \frac{1}{2}\cos(\frac{\pi}{2} - 2x) + C$$

$$y|_{x=\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}) + C$$

$$1 = \frac{1}{2} + C \Rightarrow C = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2}\cos(\frac{\pi}{2} - 2x) + \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow y = \frac{1 + \sin 2x}{2}$$

43 يُمثِّل الاقتران: $\frac{dy}{dx} = e^{2x} - 2e^{-x}$ ميل المماس لمنحنى الاقتران y. أجد قاعدة الاقتران y إذا علمْتُ أنَّ منحناه يمرُّ بالنقطة $(0, 1)$.

الحل

$$y=\int(e^{2x}-2e^{-x})dx$$

$$=\frac{1}{2}e^{2x}+2e^{-x}+C$$

$$y|_{x=0}=\frac{1}{2}+2+C$$

$$1=\frac{5}{2}+C\Rightarrow C=-\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow y=\frac{1}{2}e^{2x}+2e^{-x}-\frac{3}{2}$$

---

44 إذا كان:

$$\int_{\pi/9}^{\pi}(9+\sin 3x)\,dx=a\pi+b$$

فأجد قيمة الثابتين النسبيين: a، و b.

الحل

$$\int_{\frac{\pi}{9}}^{\pi}(9+\sin 3x)dx=(9x-\frac{1}{3}\cos 3x)\Big|_{\frac{\pi}{9}}^{\pi}$$

$$=9\pi-\frac{1}{3}\cos 3\pi-\pi+\frac{1}{3}\cos\frac{\pi}{3}$$

$$=8\pi+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$$

$$=8\pi+\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 8\pi+\frac{1}{2}=a\pi+b$$

ونظراً لأن a و b نسبيان، فلا يوجد حل لهذه المعادلة سوى أن يكون:

$$a=8,b=\frac{1}{2}$$

---

45 يُمثِّل الاقتران: $f'(x)=\cos^2 x$ ميل المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$. أجد قاعدة الاقتران f إذا علمْتُ أنَّ منحناه يمرُّ بنقطة الأصل.

الحل

$$f(x)=\int\cos^2 x\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int(1+\cos 2x)dx$$

$$=\frac{1}{2}(x+\frac{1}{2}\sin 2x)+C$$

$$f(0)=\frac{1}{2}(0+\frac{1}{2}\sin 0)+C$$

$$0=0+C\Rightarrow C=0$$

$$f(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x$$

يتحرَّك جُسَيْم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران: $v(t) = e^{-2t}$، حيث t الزمن بالثواني، و v سرعته المتجهة بالمتر لكل ثانية. إذا كان الموقع الابتدائي للجُسَيْم هو $3\ m$، فأجد كلًا ممّا يأتي:

46 موقع الجُسَيْم بعد t ثانية.

47 موقع الجُسَيْم بعد 100 ثانية

الحل

46)

$$s(t) = \int e^{-2t}dt = -\frac{1}{2}e^{-2t} + C$$

$$s(0) = -\frac{1}{2} + C = 3 \Rightarrow C = \frac{7}{2}$$

$$3 = -\frac{1}{2} + C \Rightarrow C = \frac{7}{2}$$

$$s(t) = -\frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{7}{2}$$

47)

$$s(100) = -\frac{1}{2}e^{-200} + \frac{7}{2} \approx 3.5m$$

بيئة: في دراسة تناولت أحد أنواع الحيوانات المُهدَّدة بالانقراض في غابة، تَبيَّن أنَّ عدد حيوانات هذا النوع $P(t)$ يتغيَّر بمُعدّل $P'(t) = -0.51e^{-0.03t}$، حيث t الزمن بالسنوات بعد بَدْء الدراسة:

48 أجد قاعدة الاقتران $P(t)$ عند أيِّ زمن t، علمًا بأنَّ عدد حيوانات هذا النوع عند بَدْء الدراسة هو 500 حيوان.

49 أجد عدد الحيوانات بعد 10 سنوات من بَدْء الدراسة، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقرب عدد صحيح.

الحل

48)

$$P(t) = \int -0.51e^{-0.03t}dt$$

$$= \frac{-0.51}{-0.03}e^{-0.03t} + C = 17e^{-0.03t} + C$$

$$P(0) = 17 + C$$

$$500 = 17 + C \Rightarrow C = 483$$

$$P(t) = 17e^{-0.03t} + 483$$

49)

$$P(10) = 17e^{-0.3} + 483 \approx 496$$

طــب: في تجربة لــدواء جديد أُعطِي لمريض لديــه ورم حميد، حجمــه $30\ cm^3$، تَبيَّن أنَّ حجم الــورم بعد t يومًا مــن بَدْء التجربــة يتغيَّــر بمُعــدَّل:

$P'(t) = 0.15 - 0.9e^{0.006t}$ مَقيسًا بوحدة (cm^3/day):

50 أجد قاعدة حجم الورم بعد t يومًا من بَدْء التجربة

51 أجد حجم الورم بعد 10 أيام من بَدْء التجربة.

الحل

50)

$$P(t) = \int (0.15 - 0.9e^{0.006t})\,dt$$

$$= 0.15t - \frac{0.9}{0.006}e^{0.006t} + C$$

$$= 0.15t - 150e^{0.006t} + C$$

$$P(0) = -150 + C$$

$$30 = -150 + C \Rightarrow C = 180$$

$$P(t) = 0.15t - 150e^{0.006t} + 180$$

51)

$$P(10) = 1.5 - 150e^{0.06} + 180 \approx 22.2cm^3$$

مهارات التفكير العليا

تحدٍّ: أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

54 $\displaystyle\int \frac{\sec x}{\sin x - \cos x}\,dx$

55 $\displaystyle\int \frac{\cot x}{2 + \sin x}\,dx$

56 $\displaystyle\int \frac{1}{x \ln x^3}\,dx$

الحل

54)

$$\int \frac{\sec x}{\sin x - \cos x}dx = \int \frac{\frac{\sec x}{\cos x}}{\left(\frac{\sin x}{\cos x} - 1\right)}dx$$

$$= \int \frac{\sec^2 x}{(\tan x - 1)}dx$$

$$= \ln|\tan x - 1| + C$$

55)

$$\int \frac{\cot x}{2+\sin x}dx = \int \frac{\cot x \csc x}{2\csc x + 1}dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{-2\cot x \csc x}{2\csc x + 1}dx$$

$$= -\frac{1}{2}\ln|2\csc x + 1| + C$$

$$= -\frac{1}{2}\ln|2\csc x + 1| + C$$

56)

$$\int \frac{1}{x\ln x^3}dx = \int \frac{1}{3x\ln x}dx$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}dx = \frac{1}{3}\ln|\ln x| + C$$

---

57 تبرير: إذا كان:

$\int_1^a \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x+3}\right) dx = 0.5 \ln 5$ ،

فأجد قيمة الثابت a، حيث: $a > 0$.

الحل

$$\int_1^a \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x+3}\right)dx$$

$$= \left(ln|x| - \frac{1}{2}ln|2x+3|\right)\Big|_1^a$$

$$= \left(lna - \frac{1}{2}ln(2a+3)\right) - \left(-\frac{1}{2}ln5\right)$$

$$= lna - \frac{1}{2}ln(2a+3) + \frac{1}{2}ln5$$

$$= ln\frac{a}{\sqrt{2a+3}} + \frac{1}{2}ln5$$

$$\Rightarrow ln\frac{a}{\sqrt{2a+3}} + \frac{1}{2}ln5 = 0.5ln5$$

$$\Rightarrow ln\frac{a}{\sqrt{2a+3}} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{a}{\sqrt{2a+3}} = 1$$

$$\Rightarrow a = \sqrt{2a+3}$$

$$\Rightarrow a^2 = 2a+3$$

$$\Rightarrow a^2 - 2a - 3 = 0$$

$$\Rightarrow (a-3)(a+1) = 0$$

$\Rightarrow a = 3, a = -1$ (مرفوضة لأن $a > 0$)

58 تبرير: أُثبِت بطريقتين مختلفتين أنَّ:

$$\int_0^{\pi/4} \cos x \cos 3x \, dx - \int_0^{\pi/4} \sin x \sin 3x \, dx = 0$$

الحل

الطريقة الأولى

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x \cos 3x dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos 4x + \cos 2x) dx$$

$$= \left(\frac{1}{8}\sin 4x + \frac{1}{4}\sin 2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \left(\frac{1}{8}\sin \pi + \frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{2}\right) - (0+0) = \frac{1}{4} \ldots\ldots\ldots(1)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x \sin 3x dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos 2x - \cos 4x) dx$$

$$= \left(\frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{8}\sin 4x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \left(\frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{2} - \frac{1}{8}\sin \pi\right) - (0-0) = \frac{1}{4} \ldots\ldots\ldots(2)$$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x \cos 3x dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x \sin 3x dx$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$$

الطريقة الثانية

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x \cos 3x dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x \sin 3x dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x \cos 3x - \sin x \sin 3x) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(x+3x) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 4x dx = \frac{1}{4}\sin 4x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{1}{4}(\sin \pi - \sin 0) = 0$$

---

59 تبرير: إذا كان:

$$\int_{\pi/4k}^{\pi/3k} (1 - \pi \sin kx) \, dx = \pi(7 - 6\sqrt{2})$$

فأجد قيمة الثابت k، مُبرِّرًا إجابتي.

الحل

$$\int_{\frac{\pi}{4k}}^{\frac{\pi}{3k}} (1 - \pi \sin kx) dx = \left(x + \frac{\pi}{k}\cos kx\right)\Big|_{\frac{\pi}{4k}}^{\frac{\pi}{3k}}$$

$$= \frac{\pi}{3k} + \frac{\pi}{k}\cos\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4k} - \frac{\pi}{k}\cos\frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{\pi}{k}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{12k}(7 - 6\sqrt{2})$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{12k}(7 - 6\sqrt{2}) = \pi(7 - 6\sqrt{2})$$

$$\Rightarrow k = \frac{1}{12}$$

تحدٍّ: يتحرَّك جُسَيْم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران:

$$v(t)=\begin{cases}2t+4 & ,0\le t\le 6\\ 20-(t-8)^2 & ,6<t\le 10\end{cases}$$

حيث t الزمن بالثواني، و v سرعته المتجهة بالمتر لكل ثانية . إذا بدأ الجُسَيْم حركته من نقطة الأصل، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

60 موقع الجُسَيْم بعد 5 ثوانٍ من بَدْء الحركة.

61 موقع الجُسَيْم بعد 9 ثوانٍ من بَدْء الحركة.

الحل

60)

$$v(t)=\begin{cases}2t+4, & 0\le t\le 6\\ 16t-t^2-44, & 6<t\le 10\end{cases}$$

$$s(t)=\int v(t)dt$$

(عندما $0\le t\le 6$)

$$s(t)=\int(2t+4)dt=t^2+4t+C_1$$

$$s(0)=0\Rightarrow C_1=0$$

$$\Rightarrow s(t)=t^2+4t, 0\le t\le 6$$

$$s(5)=25+20=45\text{m}$$

61)

(عندما $6<t\le 10$)

$$s(t)=\int(16t-t^2-44)dt$$

$$=8t^2-\frac{1}{3}t^3-44t+C_2$$

لإيجاد قيمة C_2 نستعمل موقع الجسم عند $t=6$ موقعًا ابتدائيًا بالنسبة للفترة $(6,10]$

$$s(6)=8(6)^2-\frac{1}{3}(6)^3-44(6)+C_2$$

ونحسب $s(6)$ من اقتران الموقع الذي وجدناه في السؤال السابق بالنسبة للفترة $[0,6]$

$$s(t)=t^2+4t, 0\le t\le 6$$

$$s(6)=6^2+4(6)=60$$

$$60=8(6)^2-\frac{1}{3}(6)^3-44(6)+C_2$$

$$60=-48+C_2\Rightarrow C_2=108$$

$$\Rightarrow s(t)=8t^2-\frac{1}{3}t^3-44t+108,\quad 6<t\le 10$$

$$s(9)=117\text{m}$$

تمارين ومسائل كتاب التمارين صفحة 11

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1) $\int 4e^{-5x}\,dx$

$$\int 4e^{-5x}\,dx = -\frac{4}{5}e^{-5x} + C$$

2) $\int (\sin 2x - \cos 2x)\,dx$

$$\int (\sin 2x - \cos 2x)\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{2}\sin 2x + C$$

3) $\int \cos^2 2x\,dx$

$$\int \cos^2 2x\,dx = \frac{1}{2}\int (1 + \cos 4x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}\sin 4x + C$$

4) $\int \frac{e^x + 4}{e^{2x}}\,dx$

$$\int \frac{e^x + 4}{e^{2x}}\,dx = \int (e^{-x} + 4e^{-2x})\,dx$$

$$= -e^{-x} - 2e^{-2x} + C$$

5) $\int \left(\frac{\cos x}{\sin^2 x} - 2e^x\right)dx$

$$\int (\cot x \csc x - 2e^x)\,dx$$

$$= -\csc x - 2e^x + C$$

6) $\int (3\cos 3x - \tan^2 x)\,dx$

$$\int (3\cos 3x - \tan^2 x)\,dx$$

$$= \int (3\cos 3x - (\sec^2 x - 1))\,dx$$

$$= \sin 3x - \tan x + x + C$$

7 $\int \cos x\,(1+\csc^2 x)\,dx$

$$\int \cos 3x(1+\csc^2 x)dx$$

$$=\int \cos x(1+\frac{1}{\sin^2 x})\,dx$$

$$=\int \cos x+\cot x \csc x\,dx$$

$$=\sin x-\csc x+C$$

---

8 $\int \frac{x^2+x-4}{x+2}\,dx$

$$\int \frac{x^2+x-4}{x+2}\,dx=\int (x-1-\frac{2}{x+2})\,dx$$

$$=\frac{1}{2}x^2-x-2\ln|x+2|+C$$

---

9 $\int \frac{1}{\sqrt{e^x}}\,dx$

$$\int \frac{1}{\sqrt{e^x}}\,dx=\int e^{-\frac{1}{2}x}\,dx=-2e^{-\frac{1}{2}x}+C$$

10 $\int (\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{x^2})\,dx$

$$\int (\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{x^2})\,dx$$

$$=\int (\sec^2 x+x^{-2})\,dx$$

$$=\tan x-\frac{1}{x}+C$$

---

11 $\int \frac{x^2-2x}{x^3-3x^2}\,dx$

$$\int \frac{x^2-2x}{x^3-3x^2}\,dx=\frac{1}{3}\int \frac{3x^2-6x}{x^3-3x^2}\,dx$$

$$=\frac{1}{3}\ln|x^3-3x^2|+C$$

---

12 $\int \ln e^{\cos x}\,dx$

$$\int \ln e^{\cos x}\,dx=\int \cos x\,dx=\sin x+C$$

أجد قيمة كلٍّ من التكاملات الآتية:

13 $\int \sin^2 \frac{x}{2}\, dx$

$$\int \sin^2 \frac{x}{2}\, dx = \frac{1}{2}\int (1-\cos x)\, dx$$

$$= \frac{1}{2}(x - \sin x) + C$$

---

14 $\int \frac{3}{2x-1}\, dx$

$$\int \frac{3}{2x-1}\, dx = \frac{3}{2}\int \frac{2}{2x-1}\, dx$$

$$= \frac{3}{2}\ln|2x-1| + C$$

---

15 $\int \frac{3 - 2\cos \frac{1}{2}x}{\sin^2 \frac{1}{2}x}\, dx$

$$= \int \left(3\csc^2 \frac{1}{2}x - 2\cot \frac{1}{2}x \csc \frac{1}{2}x\right) dx$$

$$= -6\cot \frac{1}{2}x + 4\csc \frac{1}{2}x + C$$

16 $\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+4}\, dx$

$$\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+4}\, dx = \ln|e^x+4|\Big|_0^1$$

$$= \ln(e+4) - \ln 5 = \ln\frac{e+4}{5}$$

17 $\int_1^2 \frac{dx}{3x-2}$

$$\int_1^2 \frac{1}{3x-2}\, dx = \frac{1}{3}\int_1^2 \frac{3}{3x-2}\, dx$$

$$= \frac{1}{3}\ln|3x-2|\Big|_1^2 = \frac{1}{3}\ln 4 - 0$$

$$= \frac{1}{3}\ln 4$$

18 $\int_0^{\pi/3} \sin x \cos x \, dx$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x \cos x \, dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin 2x \, dx$$

$$= -\frac{1}{4}\cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$$

19 $\int_{-1}^{1} |3x-2| \, dx$

$$\int_{-1}^{1} |3x-2| dx =$$

$$\int_{-1}^{\frac{2}{3}} (2-3x)dx + \int_{\frac{2}{3}}^{1} (3x-2)dx$$

$$= \left(2x - \frac{3}{2}x^2\right)\Big|_{-1}^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{3}{2}x^2 - 2x\right)\Big|_{\frac{2}{3}}^{1}$$

$$= \frac{13}{3}$$

20 $\int_0^{\pi/4} (\cos x + 3\sin x)^2 \, dx$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x + 3\sin x)^2 dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^2 x + 6\sin x\cos x + 9\sin^2 x)dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \sin^2 x + 6\sin x\cos x + 9\sin^2 x)dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + 8\sin^2 x + 3\sin 2x)dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + 4(1-\cos 2x) + 3\sin 2x)dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (5 - 4\cos 2x + 3\sin 2x)dx$$

$$= \left(5x - 2\sin 2x - \frac{3}{2}\cos 2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{5\pi - 2}{4}$$

21 $\int_0^{\pi/4} \tan x \, dx$

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{-\sin x}{\cos x} dx$$

$$= -\ln|\cos x|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = -\ln\frac{1}{\sqrt{2}} - 0$$

$$= \frac{1}{2}\ln 2$$

22 $\int_0^{\pi/16} (\cos^2 2x - 4\sin^2 x\cos^2 x)\, dx$

$$\int_0^{\frac{\pi}{16}} (\cos^2 2x - (2\sin x\cos x)^2) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{16}} (\cos^2 2x - \sin^2 2x) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{16}} \cos 4x\, dx = \frac{1}{4}\sin 4x \Big|_0^{\frac{\pi}{16}}$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}}$$

24 $\int_0^1 \frac{6x}{3x+2}\, dx$

$$\int_0^1 \frac{6x}{3x+2} dx = \int_0^1 \left(2 - \frac{4}{3x+2}\right) dx$$

$$= \left(2x - \frac{4}{3}\ln|3x+2|\right)\Big|_0^1$$

$$= 2 - \frac{4}{3}\ln 5 + \frac{4}{3}\ln 2 = 2 + \frac{4}{3}\ln\frac{2}{5}$$

25 إذا كان:

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & , x \le 3 \\ 10-x & , x > 3 \end{cases}$$

فأجد قيمة: $\int_1^5 f(x)\, dx$.

$$= \int_1^3 (2x+1)dx + \int_3^5 (10-x)dx$$

$$= (x^2+x)\Big|_1^3 + \left(10x - \frac{1}{2}x^2\right)\Big|_3^5$$

$$= 12 - 2 + 50 - \frac{25}{2} - 30 + \frac{9}{2}$$

$$= 22$$

---

26 إذا كان: $\int_1^k \frac{4}{2x-1}\, dx = 1$،

فأجد قيمة الثابت k، حيث: $k > \frac{1}{2}$.

$$\int_1^k \frac{4}{2x-1}dx = 1$$

$$\Rightarrow 2\ln|2x-1||_1^k = 1$$

$$\Rightarrow 2\ln|2k-1| = 1$$

$$\Rightarrow 2\ln(2k-1) = 1$$

$$\Rightarrow \ln(2k-1) = \frac{1}{2}$$ لأن $k > \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow 2k-1 = e^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow k = \frac{e^{\frac{1}{2}}+1}{2}$$

---

27 إذا كان: $\int_0^{\ln a} (e^x + e^{-x})\, dx = \frac{48}{7}$، فأجد قيمة الثابت a، حيث: $a > 0$.

$$\int_0^{\ln a} (e^x + e^{-x})dx = \frac{48}{7}$$

$$\Rightarrow (e^x - e^{-x})|_0^{\ln a} = \frac{48}{7}$$

$$\Rightarrow \left(a - \frac{1}{a}\right) - (1-1) = \frac{48}{7}$$

$$\Rightarrow a - \frac{1}{a} - \frac{48}{7} = 0$$

$$\Rightarrow 7a^2 - 48a - 7 = 0$$

$$\Rightarrow (7a+1)(a-7) = 0$$

$$\Rightarrow a = -\frac{1}{7}\ (\text{تُرفض}) \quad , \quad a = 7$$

في كلٍّ ممّا يأتي المشـــتقة الأولى للاقتران $f(x)$ ونقطة يمرُّ بها منحنى $y=f(x)$. أستعمل المعلومات المعطاة لإيجاد قاعدة الاقتران $f(x)$:

29 $f'(x) = e^{-x} + x^2$; $(0, 4)$

30 $f'(x) = \frac{3}{x} - 4$; $(1, 0)$

الحل

29)

$$f(x) = \int (e^{-x} + x^2)dx$$

$$= -e^{-x} + \frac{1}{3}x^3 + C$$

$$f(x) = -e^{-x} + \frac{1}{3}x^3 + C$$

$$f(0) = -1 + C$$

$$4 = -1 + C \Rightarrow C = 5$$

$$\Rightarrow f(x) = -e^{-x} + \frac{1}{3}x^3 + 5$$

30)

$$f(x) = \int \left(\frac{3}{x} - 4\right) dx$$

$$= 3\ln|x| - 4x + C$$

$$f(x) = 3\ln|x| - 4x + C$$

$$f(1) = -4 + C$$

$$0 = -4 + C \Rightarrow C = 4$$

$$\Rightarrow f(x) = 3\ln|x| - 4x + 4$$

يتحرَّك جُسَيْم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران: $v(t) = \frac{-t}{1+t^2}$، حيث t الزمن بالثواني، و v سرعته المتجهة بالمتر لكل ثانية:

31 أجد إزاحة الجُسَيْم في الفترة $[0, 3]$.

32 أجد المسافة الكلية التي قطعها الجُسَيْم في الفترة $[0, 3]$.

الحل

31)

$$s(3) - s(0)$$

$$= \int_0^3 v(t)\, dt = \int_0^3 \frac{-t}{1+t^2} dt$$

$$= -\frac{1}{2}\ln(1+t^2)\Big|_0^3 = -\frac{1}{2}\ln 10 \text{ m}$$

32)

$$d = \int_0^3 |v(t)|\, dt = \int_0^3 \frac{t}{1+t^2}\, dt$$

$$= \frac{1}{2}\ln(1+t^2)\Big|_0^3 = \frac{1}{2}\ln 10 \text{ m}$$

يتحرَّك جُسَيْم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران: $v(t) = 6\sin 3t$، حيث t الزمن بالثواني، و v سرعته المتجهة بالمتر لكل ثانية:

33 أجد إزاحة الجُسَيْم في الفترة $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

34 أجد المسافة الكلية التي قطعها الجُسَيْم في الفترة $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

الحل

33)

$$s\left(\frac{\pi}{2}\right) - s(0) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} v(t)\, dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 6\sin 3t\, dt = -2\cos 3t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 2\text{ m}$$

34)

$$6\sin 3t = 0 \Rightarrow 3t = 0, \pi$$

$$\Rightarrow t = 0, \frac{\pi}{3}$$

$$d = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |v(t)|\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |6\sin 3t| dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} 6\sin 3t\, dt + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} -6\sin 3t\, dt$$

$$= -2\cos 3t\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} + 2\cos 3t\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 2 + 2 + 0 - 2(-1) \quad = 6\text{ m}$$

35 يتحرَّك جُسَيْم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران:

$$v(t) = \begin{cases} 8t - t^2 & , 0 \le t \le 6 \\ 15 - \frac{1}{2}t & , t > 6 \end{cases}$$

حيث t الزمن بالثوانى، وv سرعته المتجهة بالمتر لكل ثانية. إذا انطلق الجُسَيْم من نقطة الأصل، فأجد موقعه بعد 40 ثانية من بَدْء الحركة.

الحل

عندما $0 \le t \le 6$

$$s(t) = \int (8t - t^2)dt = 4t^2 - \frac{1}{3}t^3 + C_1$$

$$s(0) = 0 - 0 + C_1$$

$$0 = 0 + C_1 \Rightarrow C_1 = 0$$

$$\Rightarrow s(t) = 4t^2 - \frac{1}{3}t^3 \quad , 0 \le t \le 6$$

عندما $t > 6$

$$s(t) = \int \left(15 - \frac{1}{2}t\right) dt = 15t - \frac{1}{4}t^2 + C_2$$

الموقع الابتدائي للجسيم في هذه الفترة هو موقعه في

نهاية الفترة الأولى أي $s(6)$

نحسب $s(6)$ من قاعدة الموقع السابقة

$$s(6) = 144 - \frac{216}{3} = 72$$

$$s(6) = 90 - 9 + C_2$$

$$72 = 81 + C_2 \Rightarrow C_2 = -9$$

$$\Rightarrow s(t) = 15t - \frac{1}{4}t^2 - 9 \quad ,t > 6$$

$$\Rightarrow s(40) = 15(40) - \frac{1}{4}(1600) - 9$$

$$= 191 \text{ m}$$

الدرس 2

التكامل بالتعويض

يستخدم لايجاد تكامل حاصل ضرب اوقسمة اقترانين احدهما مشتقة الاخر

طريقة **التكامل بالتعويض**

تتضمَّن استعمال مُتغيِّر جديد بدلًا من مُتغيِّر التكامل.

يُمكِن إيجاد: $\int 2x\sqrt{x^2+6}\,dx$ باستعمال مُتغيِّر جديد، وليكن u، بدلًا من المُتغيِّر x، باتِّباع الخطوات الآتية:

الخطوة 1: أفترض أنَّ u هو المقدار أسفل الجذر التربيعي؛ أيْ إنَّ: $u = x^2 + 6$.

الخطوة 2: أجد مشتقة u، وهي: $\frac{du}{dx} = 2x$.

الخطوة 3: أحُلُّ المعادلة لـ dx: $dx = \frac{du}{2x}$.

الخطوة 4: أستعمل المُتغيِّر u بدلًا من المُتغيِّر x في التكامل.

بتعويض $u = x^2 + 6,\ dx = \frac{du}{2x}$

$$\int 2x\sqrt{x^2+6}\,dx = \int 2x\sqrt{u} \times \frac{du}{2x}$$

بالتبسيط $= \int \sqrt{u}\,du$

الصورة الأُسِّيَّة $= \int u^{1/2}\,du$

تكامل اقترانات القوَّة $= \frac{2}{3}u^{3/2} + C$

بتعويض $u = x^2 + 6$ $= \frac{2}{3}(x^2+6)^{3/2} + C$

التكامل بالتعويض للتكاملات غير المحدودة

مفهوم أساسي

إذا كان: $u = g(x)$ اقترانًا قابلًا للاشتقاق، ومداه الفترة I

وكان f اقترانًا متصلًا على I، فإنَّ:

$$\int f(g(x))\, g'(x)dx = \int f(u)\, du$$

خطوات حلِّ التكامل بالتعويض

مفهوم أساسي

الخطوة 1: أُحدِّد التعويض u الذي يُمكِن به تبسيط المُكامَل.

الخطوة 2: أُعبِّر عن المُكامَل بدلالة u و du، وأحذف مُتغيِّر التكامل الأصلي ومشتقته حذفًا كاملًا. ثم أكتب المُكامَل الجديد في أبسط صورة.

الخطوة 3: أجد التكامل الجديد.

الخطوة 4: أُعبِّر عن الاقتران الأصلي الذي أوجدته في الخطوة السابقة باستعمال المُتغيِّر الأصلي عن طريق التعويض.

مثال (1)

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1) $\int 6x^2 (2x^3 - 3)^4\, dx$

أفترض أنَّ: $u = 2x^3 - 3$. ومن ثَمَّ، فإنَّ:

$$\frac{du}{dx} = 6x^2 \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{du}{6x^2}$$

بتعويض $u = 2x^2 - 3,\ dx = \frac{du}{6x^2}$

$$\int 6x^2 (2x^3 - 3)^4\, dx$$

$$= \int 6x^2 (u)^4 \times \frac{du}{6x^2}$$

$$= \int u^4\, du \qquad \text{بالتبسيط}$$

$$= \frac{1}{5} u^5 + C \qquad \text{تكامل اقتران القوَّة}$$

بتعويض $u = 2x^2 - 3$

$$= \frac{1}{5}(2x^3 - 3)^5 + C$$

2 $\int \sin x\, e^{\cos x}\, dx$

أفترض أنَّ: $u = \cos x$. ومن ثَمَّ، فإنَّ:

$$\frac{du}{dx} = -\sin x \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{du}{-\sin x}$$

بتعويض $u = \cos x,\ dx = \frac{du}{-\sin x}$

$$\int \sin x\, e^{\cos x}\, dx$$

$$= \int \sin x\, e^{u} \times \frac{du}{-\sin x}$$

$$= \int -e^{u}\, du$$ بالتبسيط

تكامل الاقتران الأُسِّي الطبيعي المضروب في ثابت

$$= -e^{u} + C$$

$$= -e^{\cos x} + C$$ بتعويض $u = \cos x$

3 $\int \frac{\ln x}{x}\, dx$

أفترض أنَّ: $u = \ln x$. ومن ثَمَّ، فإنَّ:

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad dx = x\, du$$

بإعادة كتابة المُكامَل

$$\int \frac{\ln x}{x}\, dx = \int \frac{1}{x} \times \ln x\, dx$$

بتعويض $u = \ln x,\ dx = x\, du$

$$= \int \frac{1}{x} \times u \times x\, du$$

$$= \int u\, du$$ بالتبسيط

$$= \frac{1}{2} u^2 + C$$ تكامل اقتران القوَّة

$$= \frac{1}{2} (\ln x)^2 + C$$ بتعويض $u = \ln x$

4 $\int x^3 \cos (x^4 - 5)\, dx$

أفترض أنَّ: $u = x^4 - 5$. ومن ثَمَّ، فإنَّ:

$$\frac{du}{dx} = 4x^3 \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{du}{4x^3}$$

بتعويض $u = x^4 - 5,\ dx = \frac{du}{4x^3}$

$$\int x^3 \cos (x^4 - 5)\, dx$$

$$= \int x^3 \cos (u) \times \frac{du}{4x^3}$$

$$= \int \frac{1}{4} \cos u\, du$$ بالتبسيط

تكامل $\cos u$ المضروب في ثابت

$$= \frac{1}{4} \sin u + C$$

بتعويض $u = x^4 - 5$

$$= \frac{1}{4} \sin (x^4 - 5) + C$$

5 $\int \sin^3 2x \cos 2x \, dx$

أفترض أنَّ: $u = \sin 2x$. ومن ثَمَّ، فإنَّ:

$$\frac{du}{dx} = 2\cos 2x \quad \Rightarrow dx = \frac{du}{2\cos 2x}$$

بتعويض $u = \sin 2x$, $dx = \frac{du}{2\cos 2x}$

$$\int \sin^3 2x \cos 2x \, dx$$

$$= \int u^3 \cos 2x \times \frac{du}{2\cos 2x}$$

$$= \int \frac{1}{2} u^3 \, du$$ بالتبسيط

تكامل اقتران القوَّة المضروب في ثابت

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} u^4 + C$$

بتعويض $u = \sin 2x$، والتبسيط

$$= \frac{1}{8} \sin^4 2x + C$$

مثال (2) تحقق من فهمك صفحة 32

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

a) $\int 4x^2 \sqrt{x^3 - 5} \, dx$

الحل

$$u = x^3 - 5 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 3x^2 \Rightarrow dx = \frac{du}{3x^2}$$

$$\int 4x^2 \sqrt{x^3 - 5} \, dx = \int 4x^2 \sqrt{u} \times \frac{du}{3x^2}$$

$$= \int \frac{4}{3} u^{\frac{1}{2}} \, du$$

$$= \frac{8}{9} u^{\frac{3}{2}} + C$$

$$= \frac{8}{9} \sqrt{(x^3 - 5)^3} + C$$

b) $\int \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}} \, dx$

الحل

$$u = \sqrt{x} \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow dx = 2\sqrt{x} \, du$$

$$\int \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}} \, dx = \int \frac{1}{2\sqrt{x}} e^u \times 2\sqrt{x} \, du$$

$$= \int e^u \, du$$

$$= e^u + C$$

$$= e^{\sqrt{x}} + C$$

c) $\int \frac{(\ln x)^3}{x} \, dx$

الحل

$$u = \ln x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow dx = x\,du$$

$$\int \frac{(\ln x)^3}{x} dx = \int \frac{u^3}{x} \times x\,du$$

$$= \int u^3 du$$

$$= \frac{1}{4} u^4 + C$$

$$= \frac{1}{4} (\ln x)^4 + C$$

d) $\displaystyle\int \frac{\cos(\ln x)}{x}\, dx$

الحل

$$u = \ln x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow dx = x\,du$$

$$\int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx = \int \frac{\cos u}{x} \times x\,du$$

$$= \int \cos u\, du$$

$$= \sin u + C$$

$$= \sin(\ln x) + C$$

e) $\displaystyle\int \cos^4 5x \sin 5x\, dx$

الحل

$$u = \cos 5x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -5\sin 5x$$

$$\Rightarrow dx = \frac{du}{-5\sin 5x}$$

$$\int \cos^4 5x \sin 5x\, dx$$

$$= \int u^4 \sin 5x \times \frac{du}{-5\sin 5x}$$

$$= \int -\frac{1}{5} u^4 du \quad = -\frac{1}{25} u^5 + C$$

$$= -\frac{1}{25} \cos^5 5x + C$$

مثال (3)

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

a)

$$\int x\, e^{x^2+1}\, dx$$

الحل

النوع الثاني

في هذا النوع بعد الفرض والاختصار تبقى بقايا من المتغير الأول نرجع للفرض ونكتب المتغير (x) بدلالة المتغير u

مثال (1)

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1) $\int x\sqrt{2x+5}\,dx$

أفترض أنَّ: $u = 2x+5$. ومن ثَمَّ، فإنَّ:

$$\frac{du}{dx} = 2 \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{du}{2}$$

بكتابة x بدلالة u

$$u = 2x+5 \Rightarrow x = \frac{1}{2}(u-5)$$

بتعويض $u = 2x+5, dx = \frac{du}{2}$

$$\int x\sqrt{2x+5}\,dx = \int x \times u^{1/2} \times \frac{du}{2}$$

بتعويض $x = \frac{1}{2}(u-5)$

$$= \int \frac{1}{2}(u-5)\,u^{1/2} \times \frac{du}{2}$$

بالتبسيط

$$= \frac{1}{4}\int (u^{3/2} - 5u^{1/2})\,du$$

$$u = x^2+1 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x$$

$$\Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$$

$$\int xe^{x^2+1}dx = \int xe^u \times \frac{du}{2x}$$

$$= \int \frac{1}{2}e^u du \qquad = \frac{1}{2}e^u + C$$

$$= \frac{1}{2}e^{x^2+1} + C$$

b)

$$\int \frac{4x+8}{\sqrt{2x^2+8x}}\,dx$$

$$u = 2x^2+8x \Rightarrow \frac{du}{dx} = 4x+8$$

$$\Rightarrow dx = \frac{du}{4x+8}$$

$$\int \frac{4x+8}{\sqrt{2x^2+8x}}dx$$

$$= \int \frac{4x+8}{\sqrt{u}} \times \frac{du}{4x+8}$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{u}}du$$

$$= \int u^{-\frac{1}{2}}du = 2u^{\frac{1}{2}} + C$$

$$= 2\sqrt{2x^2+8x} + C$$

تكامل اقتران القوَّة

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{2}{5}u^{5/2} - \frac{10}{3}u^{3/2}\right) + C$$

بتعويض $u = 2x + 5$

$$= \frac{1}{10}(2x+5)^{5/2} - \frac{5}{6}(2x+5)^{3/2} + C$$

الصورة الجذرية

$$= \frac{1}{10}\sqrt{(2x+5)^5} - \frac{5}{6}\sqrt{(2x+5)^3} + C$$

---

2 $\int x^5 (1+x^2)^3 \, dx$

أفترض أنَّ: $u = 1 + x^2$. ومن ثَمَّ، فإنَّ:

$$\frac{du}{dx} = 2x \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{du}{2x}$$

بكتابة x^2 بدلالة u

$$u = 1 + x^2 \Rightarrow x^2 = u - 1$$

بتعويض $u = 1 + x^2, dx = \frac{du}{2x}$

$$\int x^5 (1+x^2)^3 \, dx$$

$$= \int x^5 \times u^3 \times \frac{du}{2x}$$

بالتبسيط

$$= \frac{1}{2}\int x^4 \times u^3 \, du$$

بتعويض $x^2 = u - 1$

$$= \frac{1}{2}\int (u-1)^2 \times u^3 \, du$$

بالتبسيط

$$= \frac{1}{2}\int (u^2 - 2u + 1) \times u^3 \, du$$

خاصية التوزيع

$$= \frac{1}{2}\int (u^5 - 2u^4 + u^3) \, du$$

تكامل اقتران القوَّة

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}u^6 - \frac{2}{5}u^5 + \frac{1}{4}u^4\right) + C$$

بتعويض $u = 1 + x^2$، والتبسيط

$$= \frac{1}{12}(1+x^2)^6 - \frac{1}{5}(1+x^2)^5 + \frac{1}{8}(1+x^2)^4 + C$$

3 $\int \frac{e^{2x}}{e^x+1}\,dx$

أفترض أنَّ: $u = e^x + 1$. ومن ثَمَّ، فإنَّ:

$$\frac{du}{dx} = e^x \Rightarrow dx = \frac{du}{e^x}$$

بكتابة e^x بدلالة u

$$u = e^x + 1 \Rightarrow e^x = u - 1$$

بتعويض $u = e^x + 1,\ dx = \frac{du}{e^x}$

$$\int \frac{e^{2x}}{e^x+1}\,dx = \int \frac{e^{2x}}{u} \times \frac{du}{e^x}$$

بالتبسيط

$$= \int \frac{e^x}{u}\,du$$

بتعويض $e^x = u - 1$

$$= \int \frac{u-1}{u}\,du$$

بتوزيع المقام على كل حدٍّ في البسط

$$= \int \left(1 - \frac{1}{u}\right) du$$

تكامل الثابت، وتكامل $\frac{1}{u}$

$$= u - \ln|u| + C$$

بتعويض $u = e^x + 1$

$$= (e^x + 1) - \ln|e^x + 1| + C$$

مثال (2) تحقق من فهمك صفحة 34

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

a) $\int \frac{x}{\sqrt{1+2x}}\,dx$

الحل

$$u = 1 + 2x \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2 \Rightarrow$$

$$dx = \frac{du}{2} \quad , x = \frac{u-1}{2}$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+2x}}\,dx = \int \frac{\frac{1}{2}(u-1)}{u^{\frac{1}{2}}} \times \frac{du}{2}$$

$$= \frac{1}{4}\int \left(u^{\frac{1}{2}} - u^{-\frac{1}{2}}\right) du$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} - 2u^{\frac{1}{2}}\right) + C$$

$$= \frac{1}{6}(1+2x)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}(1+2x)^{\frac{1}{2}} + C$$

$$= \frac{1}{6}\sqrt{(1+2x)^3} - \frac{1}{2}\sqrt{1+2x} + C$$

b) $\int x^7 (x^4 - 8)^3 \, dx$

الحل

$$u = x^4 - 8 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 4x^3$$

$$\Rightarrow dx = \frac{du}{4x^3} \quad , x^4 = u + 8$$

$$\int x^7 (x^4 - 8)^3 dx = \int x^7 u^3 \times \frac{du}{4x^3}$$

$$= \frac{1}{4}\int x^4 u^3 du = \frac{1}{4}\int (u+8) u^3 du$$

$$= \frac{1}{4}\int (u^4 + 8u^3) du$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}u^5 + 2u^4\right) + C$$

$$= \frac{1}{20}(x^4 - 8)^5 + \frac{1}{2}(x^4 - 8)^4 + C$$

---

c) $\int \frac{e^{3x}}{(1 - e^x)^2} \, dx$

الحل

$$u = 1 - e^x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -e^x$$

$$\Rightarrow dx = \frac{du}{-e^x} \quad , e^x = 1 - u$$

$$\int \frac{e^{3x}}{(1-e^x)^2} dx = \int \frac{e^{3x}}{u^2} \times \frac{du}{-e^x}$$

$$= \int -\frac{e^{2x}}{u^2} du \quad = \int \frac{-(1-u)^2}{u^2} du$$

$$= \int \frac{-1 + 2u - u^2}{u^2} du$$

$$= \int \left(-u^{-2} + \frac{2}{u} - 1\right) du$$

$$= \left(u^{-1} + 2\ln|u| - u\right) + C$$

$$= \frac{1}{1-e^x} + 2\ln|1-e^x| - 1 + e^x + C$$

التكامل بالتعويض لتكاملات تحوي المقدار $\sqrt[n]{ax+b}$

يُمكِن استعمال التكامل بالتعويض عند وجود المقدار $\sqrt[n]{ax+b}$ في بعض التكاملات، وذلك بافتراض أنَّ:

$u=\sqrt[n]{ax+b}$؛ بُغْيَةَ التخلُّص من الجذر.

مثال (1)

أجد كُلًّا من التكاملين الآتيين:

1) $\displaystyle\int \frac{dx}{x-\sqrt{x}}$

أفترض أنَّ: $u=\sqrt{x}$. ومن ثَمَّ، فإنَّ:

بتربيع طرفي المعادلة

$$u=\sqrt{x} \Rightarrow u^2=x$$

$$2u\frac{du}{dx}=1 \Rightarrow dx=2u\,du$$

بتعويض $u=\sqrt{x},\ u^2=x,\ dx=2u\,du$

$$\int \frac{dx}{x-\sqrt{x}}=\int \frac{2u}{u^2-u}\,du$$

بالتبسيط

$$=\int \frac{2}{u-1}\,du$$

تكامل $\frac{1}{au+b}$

$$=2\ln|u-1|+C$$

بتعويض $u=\sqrt{x}$

$$=2\ln|\sqrt{x}-1|+C$$

مثال (2) تحقق من فهمك صفحة 35

أجد كُلًّا من التكاملين الآتيين:

b) $\displaystyle\int x\sqrt[3]{(1-x)^2}\,dx$

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x+\sqrt[3]{x}}$

الحل

a)

$$u=\sqrt[3]{x} \Rightarrow \frac{du}{dx}=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$$

$$\Rightarrow dx=3x^{\frac{2}{3}}du, \qquad x=u^3$$

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt[3]{x}}=\int \frac{3x^{\frac{2}{3}}du}{u^3+u}$$

$$=\int \frac{3u^2}{u^3+u}du=\int \frac{3u}{u^2+1}du$$

$$=\frac{3}{2}\int \frac{2u}{u^2+1}du$$

$$=\frac{3}{2}\ln(u^2+1)+C$$

$$=\frac{3}{2}\ln(x^{\frac{2}{3}}+1)+C$$

b)

$$u = 1 - x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -1 \Rightarrow$$

$$dx = -du, \quad x = 1 - u$$

$$\int x\sqrt[3]{(1-x)^2}\,dx = \int x\sqrt[3]{u^2} \times -du$$

$$= \int -(1-u)\sqrt[3]{uu^2}\,du$$

$$= \int -(1-u)u^{\frac{2}{3}}\,du$$

$$= \int (-u^{\frac{2}{3}} + u^{\frac{5}{3}})\,du$$

$$= -\frac{3}{5}u^{\frac{5}{3}} + \frac{3}{8}u^{\frac{8}{3}} + C$$

$$= -\frac{3}{5}(1-x)^{\frac{5}{3}} + \frac{3}{8}(1-x)^{\frac{8}{3}} + C$$

$$= -\frac{3}{5}\sqrt[3]{(1-x)^5} + \frac{3}{8}\sqrt[3]{(1-x)^8} + C$$

مثال (3)

من الحياة

زراعة: يُمثِّل الاقتران $V(t)$ سعر دونم أرض زراعية بالدينار بعد t سنة من الآن. إذا كان:

$$V'(t) = \frac{0.4t^3}{\sqrt{0.2t^4 + 8000}}$$

هو مُعدَّل تغيُّر سعر دونم الأرض، فأجد $V(t)$ علمًا بأنَّ سعر دونم الأرض الآن هو JD 5000.

الحل

الخطوة 1: أجد تكامل الاقتران: $V'(t)$.

$$V(t) = \int V'(t)\,dt$$

$$V(t) = \int \frac{0.4t^3}{\sqrt{0.2t^4 + 8000}}\,dt$$

أفترض أنَّ: $u = 0.2t^4 + 8000$. ومن ثَمَّ، فإنَّ:

$$\frac{du}{dt} = 0.8t^3 \quad \Rightarrow \quad dt = \frac{du}{0.8t^3}$$

بتعويض $u = 0.2t^4 + 8000$, $dt = \frac{du}{0.8t^3}$

$$V(t) = \int \frac{0.4t^3}{\sqrt{0.2t^4 + 8000}}\,dt$$

$$= \int \frac{0.4t^3}{\sqrt{u}} \times \frac{du}{0.8t^3}$$

بالتبسيط، والصورة الأُسِّية

$$= \frac{1}{2}\int u^{-1/2}\,du$$

تكامل اقتران القوَّة المضروب في ثابت

$$= u^{1/2} + C$$

$$= \sqrt{u} + C \qquad \text{الصورة الجذرية}$$

بتعويض $u = 0.2t^4 + 8000$

$$= \sqrt{0.2t^4 + 8000} + C$$

الخطوة 2: أجد ثابت التكامل C.

قاعدة الاقتران $V(t)=\sqrt{0.2t^4+8000}+C$

بتعويض $t=0,\ V(0)=5000$

$$5000=\sqrt{0.2(0)^4+8000}+C$$

بالتبسيط $5000=40\sqrt{5}+C$

بحلّ المعادلة $C=5000-40\sqrt{5}$

إذن، اقتران سعر دونم الأرض بعد t سنة من الآن هو:

$$V(t)=\sqrt{0.2t^4+8000}+5000-40\sqrt{5}.$$

مثال (2) تحقق من فهمك صفحة 37

أسعار: يُمثِّل الاقتران $p(x)$ سعر قطعة (بالدينار) تُستعمَل في أجهزة الحاسوب، حيث x عدد القطع المَبيعة منها بالمئات. إذا كان: $p'(x)=\frac{-135x}{\sqrt{9+x^2}}$ هو مُعدَّل تغيُّر سعر هذه القطعة، فأجد $p(x)$، علمًا بأنَّ سعر القطعة الواحدة هو 30 JD عندما يكون عدد القطع المَبيعة منها 400 قطعة.

الحل

$$p(x)=\int\frac{-135x}{\sqrt{9+x^2}}dx$$

$$u=9+x^2\Rightarrow\frac{du}{dx}=2x\Rightarrow dx=\frac{du}{2x}$$

$$p(x)=\int\frac{-135x}{\sqrt{u}}\times\frac{du}{2x}$$

$$=\frac{-135}{2}\int u^{-\frac{1}{2}}du$$

$$=-135u^{\frac{1}{2}}+C$$

$$p(x)=-135\sqrt{9+x^2}+C$$

$$p(4)=-135\sqrt{9+16}+C$$

$$=-135(5)+C$$

$$30=-675+C\Rightarrow C=705$$

$$p(x)=705-135\sqrt{9+x^2}$$

مسألة اليوم

يُمثِّل الاقتران $G(t)$ الكتلة الحيوية لمجتمع أسماك في بحيرة بعد t سنة من بَدْء دراستها، حيث G مَقيسة بالكيلو غرام. إذا كان مُعدَّل تغيُّر الكتلة الحيوية للأسماك هو

$G'(t) = \frac{60000e^{-0.6t}}{(1+5e^{-0.6t})^2}$ مَقيسًا بوحدة (kg/year)،

وكانت الكتلة الحيوية للأسماك عند بَدْء الدراسة هي 25000 kg، فأجد الكتلة الحيوية المُتوقّعة للأسماك بعد 20 سنة من بَدْء الدراسة.

الحل

$$u = 1 + 5e^{-0.6t}$$

$$\frac{du}{dt} = -3e^{-0.6t} \Rightarrow dt = \frac{du}{-3e^{-0.6t}}$$

$$G(t) = \int \frac{60000e^{-0.6t}}{u^2} \times \frac{du}{-3e^{-0.6t}}$$

$$= \int -20000u^{-2}\, du$$

$$= 20000u^{-1} + C$$

$$G(t) = \frac{20000}{1+5e^{-0.6t}} + C$$

$$G(0) = \frac{20000}{1+5} + C$$

$$25000 = \frac{10000}{3} + C \Rightarrow C = \frac{65000}{3}$$

$$G(t) = \frac{20000}{1+5e^{-0.6t}} + \frac{65000}{3}$$

$$G(20) = \frac{20000}{1+5e^{-12}} + \frac{65000}{3}$$

$$\approx 41666 \text{ kg}$$

التكامل بالتعويض لاقترانات تتضمَّن اقترانـي الجيب وجيب التمام

1) اذا كانت قوة (اس) sin او cos زوجية نستخدم المتطابقتان

$$\sin^2\theta = \frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)$$

$$\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)$$

2) اذا كانت قوة (اس) sin او cos فردية

1) نجعل اس sin او cos يساوي (1)

والباقي بدلالة الاخر باستخدام المتطابقة

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

مثال (1)

أجد كُلًّا من التكاملين الآتيين:

1 $\int \cos^3 x\, dx$

بتحليل $\cos^3 x$ إلى $\cos^2 x \cos x$

$$\int \cos^3 x\, dx = \int \cos^2 x \cos x\, dx$$

متطابقات فيثاغورس

$$= \int (1-\sin^2 x)\cos x\, dx$$

أفترض أنَّ: $u = \sin x$. ومن ثَمَّ، فإنَّ:

$$\frac{du}{dx} = \cos x \Rightarrow dx = \frac{du}{\cos x}$$

إذن:

$$\int \cos^3 x\, dx = \int (1-\sin^2 x)\cos x\, dx$$

بتعويض $u = \sin x,\ dx = \frac{du}{\cos x}$

$$= \int (1-u^2)\cos x \times \frac{du}{\cos x}$$

بالتبسيط

$$= \int (1-u^2)\, du$$

تكامل اقتران القوَّة، وتكامل الثابت

$$= u - \frac{1}{3}u^3 + C$$

بتعويض $u = \sin x$

$$= \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + C$$

2 $\int \cos^4 x \sin^3 x \; dx$

أفترض أنَّ: $u = \cos x$. ومن ثَمَّ، فإنَّ:

$$\frac{du}{dx} = -\sin x \Rightarrow dx = \frac{du}{-\sin x}$$

إذن:

بتعويض $u = \cos x,\ dx = \frac{du}{-\sin x}$

$$\int \cos^4 x \sin^3 x \; dx$$

$$= \int u^4 \sin^3 x \times \frac{du}{-\sin x}$$

$$= -\int u^4 \sin^2 x \, du$$ بالتبسيط

متطابقات فيثاغورس

$$= -\int u^4 (1 - \cos^2 x) \, du$$

$$= -\int u^4 (1 - u^2) \, du$$ بالتعويض

$$= -\int \left(u^4 - u^6\right) du$$ بالتبسيط

تكامل اقتران القوَّة

$$= -\left(\frac{1}{5} u^5 - \frac{1}{7} u^7\right) + C$$

بتعويض $u = \cos x$

$$= -\frac{1}{5} \cos^5 x + \frac{1}{7} \cos^7 x + C$$

مثال (2) تحقق من فهمك صفحة 39

أجد كُلًّا من التكاملين الآتيين:

a) $\int \sin^3 x \; dx$

b) $\int \cos^5 x \; \sin^2 x \; dx$

الحل

a)

$$\int \sin^3 x dx = \int \sin x \sin^2 x dx$$

$$= \int \sin x (1 - \cos^2 x) dx$$

$$u = \cos x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\sin x$$

$$\Rightarrow dx = \frac{du}{-\sin x}$$

$$\int \sin^3 x dx = \int \sin x (1 - u^2) \frac{du}{-\sin x}$$

$$= \int (u^2 - 1) du$$

$$= \frac{1}{3} u^3 - u + C$$

$$= \frac{1}{3} \cos^3 x - \cos x + C$$

b)

$$u=\sin x \Rightarrow \frac{du}{dx}=\cos x \Rightarrow dx=\frac{du}{\cos x}$$

$$\int \cos^5 x \sin^2 x dx=\int \cos^5 x u^2 \frac{du}{\cos x}$$

$$=\int \cos^4 x u^2 du$$

$$=\int (1-\sin^2 x)^2 u^2 du$$

$$=\int (1-u^2)^2 u^2 du$$

$$=\int (u^2-2u^4+u^6)du$$

$$=\frac{1}{3}u^3-\frac{2}{5}u^5+\frac{1}{7}u^7+C$$

$$=\frac{1}{3}\sin^3 x-\frac{2}{5}\sin^5 x+\frac{1}{7}\sin^7 x+C$$

التكامل بالتعويض لاقترانات تتضمَّن الظلَّ، أو ظلَّ التمام، أو القاطع، أو قاطع التمام

يُمكِن استعمال التكامل بالتعويض لإيجاد تكاملات تحوي اقتران الظلِّ، أو اقتران ظلِّ التمام أو القاطع، أو قاطع التمام، وتكون جميعها مرفوعة إلى أُسٍّ صحيح موجب، إضافةً إلى استعمال المتطابقتين المثلثيتين: $\tan^2 x=\sec^2 x-1$، و $\cot^2 x=\csc^2 x-1$.

ملاحظة :

1) اذا كانت قوة sec فردية نفرض ان

u = secx

2) اذا كانت قوة sec زوجية نفرض ان

u = tan

3) نستخدم المتطابقتان

$$\tan^2 x=\sec^2 x-1$$
$$\cot^2 x=\csc^2 x-1$$

مثال (1)

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1 $\int \tan^3 x\, dx$

بتحليل $\tan^3 x$ إلى $\tan^2 x \tan x$

$$\int \tan^3 x\, dx = \int \tan^2 x \tan x\, dx$$

متطابقات فيثاغورس

$$= \int (\sec^2 x - 1) \tan x\, dx$$

خاصية التوزيع

$$= \int (\sec^2 x \tan x - \tan x)\, dx$$

تكامل الفرق

$$= \int \sec^2 x \tan x\, dx - \int \tan x\, dx$$

للتكامل الأوَّل، أفترض أنَّ: $u = \tan x$. ومن ثَمَّ،

فإنَّ: $\frac{du}{dx} = \sec^2 x \Rightarrow dx = \frac{du}{\sec^2 x}$

إذن:

$$\int \tan^3 x\, dx = \int \sec^2 x \tan x\, dx - \int \tan x\, dx$$

بتعويض $u = \tan x,\ dx = \frac{du}{\sec^2 x}$

$$= \int \sec^2 x \times u \times \frac{du}{\sec^2 x} - \int \tan x\, dx$$

بالتبسيط

$$= \int u\, du - \int \frac{\sin x}{\cos x}\, dx$$

تكامل اقتران القوَّة، وتكامل $\frac{f'(x)}{f(x)}$

$$= \frac{1}{2} u^2 + \ln|\cos x| + C$$

بتعويض $u = \tan x$

$$= \frac{1}{2} \tan^2 x + \ln|\cos x| + C$$

2 $\int \cot^4 x\, dx$

بتحليل $\cot^4 x$ إلى $\cot^2 x\ \ \cot^2$

$$\int \cot^4 x\, dx = \int \cot^2 x \cot^2 x\, dx$$

إذن:

$$\int \cot^4 x\, dx = \int \cot^2 x \csc^2 x\, dx - \int \cot^2 x\, dx$$

بتعويض $u = \cot x,\quad dx = \frac{du}{-\csc^2 x}$

$$= \int u^2 \times \csc^2 x \times \frac{du}{-\csc^2 x} - \int (\csc^2 x - 1)\, dx$$

بالتبسيط

$$= -\int u^2 \times du - \int (\csc^2 x - 1)\, dx$$

تكامل اقتران القوَّة، وتكامل $\csc^2 x$

$$= -\frac{1}{3} u^3 + \cot x + x + C$$

بتعويض $u = \cot x$

$$= -\frac{1}{3} \cot^3 x + \cot x + x + C$$

متطابقات فيثاغورس

$$= \int \cot^2 x\,(\csc^2 x - 1)\,dx$$

خاصية التوزيع

$$= \int (\cot^2 x\ \csc^2 x - \cot^2 x)\,dx$$

تكامل الفرق

$$= \int \cot^2 x\ \csc^2 x\,dx - \int \cot^2 x\,dx$$

للتكامل الأوّل، أفترض أنّ: $u = \cot x$.

ومن ثَمَّ، فإنَّ:

$$\frac{du}{dx} = -\csc^2 x \implies dx = \frac{du}{-\csc^2 x}$$

---

3 $$\int \sec^4 x \tan^3 x\ dx$$

أفترض أنَّ: $u = \tan x$. ومن ثَمَّ، فإنَّ:

$$\frac{du}{dx} = \sec^2 x \implies dx = \frac{du}{\sec^2 x}$$

إذن:

بتعويض $u = \tan x,\ dx = \dfrac{du}{\sec^2 x}$

$$\int \sec^4 x\ \tan^3 x\ dx =$$

$$\int \sec^4 x \times u^3 \times \frac{du}{\sec^2 x}$$

$$\frac{du}{dx} = \sec^2 x \implies dx = \frac{du}{\sec^2 x}$$

إذن: بتعويض $u = \tan x,\ dx = \dfrac{du}{\sec^2 x}$

$$\int \sec^4 x\ \tan^3 x\ dx$$

$$= \int \sec^4 x \times u^3 \times \frac{du}{\sec^2 x}$$

بالتبسيط

$$= \int \sec^2 x \times u^3\ du$$

متطابقات فيثاغورس

$$= \int (1 + \tan^2 x)\, u^3\, du$$

بالتبسيط

$$= \int (1 + u^2) u^3\, du$$

خاصية التوزيع

$$= \int (u^3 + u^5)\, du$$

تكامل اقتران القوّة

$$= \frac{1}{4} u^4 + \frac{1}{6} u^6 + C$$

بتعويض $u = \tan x$

$$= \frac{1}{4} \tan^4 x + \frac{1}{6} \tan^6 x + C$$

مثال (2) تحقق من فهمك صفحة 41

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

a) $\int \tan^4 x\ dx$ b) $\int \cot^5 x\ dx$

c) $\int \sec^4 x \tan^6 x\ dx$

الحل

a)

$$\int \tan^4 x dx = \int \tan^2 x \tan^2 x dx$$
$$= \int \tan^2 x(\sec^2 x - 1)dx$$
$$= \int \tan^2 x \sec^2 x - \tan^2 x dx$$
$$= \int \tan^2 x \sec^2 x dx - \int \tan^2 x dx$$
$$= \int \tan^2 x \sec^2 x dx - \int (\sec^2 x - 1)dx$$
$$u = \tan x \quad \Rightarrow \frac{du}{dx} = \sec^2 x \Rightarrow dx = \frac{du}{\sec^2 x}$$
$$\Rightarrow \tan x \quad dx$$
$$= \int u^2 \sec^2 x \times \frac{du}{\sec^2 x} - \int (\sec^2 x - 1)dx$$
$$= \int u^2 du - \int (\sec^2 x - 1)dx$$
$$= \frac{1}{3}u^3 - \tan x + x + C$$
$$= \frac{1}{3}\tan^3 x - \tan x + x + C$$

b)

$$\int \cot^5 x dx = \int \cot x \cot^4 x dx$$
$$= \int \cot x (\cot^2 x)^2 dx$$
$$= \int \cot x (\csc^2 x - 1)^2 dx$$
$$u = \csc x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\csc x \cot x$$
$$\Rightarrow dx = \frac{du}{-\csc x \cot x}$$
$$\Rightarrow \int \cot^5 x dx$$
$$= \int \cot x (u^2 - 1)^2 \times \frac{du}{-\csc x \cot x}$$
$$= \int (u^2 - 1)^2 \frac{du}{-u}$$
$$= \int \frac{u^4 - 2u^2 + 1}{-u} du$$
$$= \int (-u^3 + 2u - \frac{1}{u}) du$$
$$= -\frac{1}{4}u^4 + u^2 - \ln|u| + C$$
$$= -\frac{1}{4}\csc^4 x + \csc^2 x - \ln|\csc x| + C$$

c)

$$u = \tan x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \sec^2 x$$

$$\Rightarrow dx = \frac{du}{\sec^2 x}$$

$$\int \sec^4 x \tan^6 x dx$$

$$= \int \sec^4 x u^6 \times \frac{du}{\sec^2 x}$$

$$= \int \sec^2 x u^6 du$$

$$= \int (1 + \tan^2 x) u^6 du$$

$$= \int (1 + u^2) u^6 du$$

$$= \int (u^6 + u^8) du$$

$$= \frac{1}{7} u^7 + \frac{1}{9} u^9 + C$$

$$= \frac{1}{7} \tan^7 x + \frac{1}{9} \tan^9 x + C$$

التكامل بالتعويض للتكاملات المحدودة

توجد طريقتان لإيجاد قيمة تكامل محدود بالتعويض، هما:

1) إيجاد التكامل أوَّلًا بدلالة المُتغيِّر الأصلي، ثم تعويض حدود التكامل

2) تغيير حدود التكامل عند تغيير مُتغيِّر التكامل، وهذه الطريقة هي أكثر تفضيلًا.

مفهوم أساسي

إذا كان g' متصلًا على $[a, b]$، وكان f متصلًا على مدى $u = g(x)$، فإن:

$$\int_a^b f(g(x))\, g'(x)\, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\, du$$

مثال (1)

أجد قيمة كلٍّ من التكاملين الآتيين:

1) $\int_0^{\pi/2} \cos x \sqrt{1 + \sin x}\, dx$

- أفترض أنَّ: $u = 1 + \sin x$. ومن ثَمَّ، فإنَّ:

$$\frac{du}{dx} = \cos x \Rightarrow dx = \frac{du}{\cos x}$$

- أُغيِّر حدود التكامل:

الحدُّ العلوي

$$x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow u = 1 + \sin\frac{\pi}{2} = 2$$

الحدُّ السفلي

$$x = 0 \Rightarrow u = 1 + \sin(0) = 1$$

بتعويض $u = 1 + \sin x$, $dx = \dfrac{du}{\cos x}$

$$\int_0^{\pi/2} \cos x \sqrt{1+\sin x}\, dx$$

$$= \int_1^2 \cos x \sqrt{u}\, \frac{du}{\cos x}$$

بالتبسيط

$$= \int_1^2 \sqrt{u}\, du$$

الصورة الأُسِّية $= \int_1^2 u^{1/2}\, du$

تكامل اقتران القوَّة $= \frac{2}{3} u^{3/2} \Big|_1^2$

الصورة الجذرية $= \frac{2}{3} \sqrt{u^3} \Big|_1^2$

بالتعويض $= \frac{2}{3}\left(\sqrt{2^3} - \sqrt{1^3}\right)$

بالتبسيط $= \frac{2}{3}\left(\sqrt{8} - 1\right)$

---

2 $\int_1^{25} \frac{x}{\sqrt{2x-1}}\, dx$

أفترض أنَّ: $u = \sqrt{2x-1}$. ومن ثَمَّ، فإنَّ:

بتربيع طرفي المعادلة

$$u = \sqrt{2x-1} \Rightarrow u^2 = 2x - 1$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2}(u^2 + 1)$$

$$2u \frac{du}{dx} = 2 \Rightarrow dx = u\, du$$

- أُغيِّر حدود التكامل:

الحدُّ العلوي

$$x = 25 \Rightarrow u = \sqrt{2(25) - 1} = 7$$

الحدُّ السفلي

$$x = 1 \Rightarrow u = \sqrt{2(1) - 1} = 1$$

بتعويض $u = \sqrt{2x-1}$,

$$x = \frac{1}{2}(u^2 + 1),\ dx = u du$$

$$\int_1^{25} \frac{x}{\sqrt{2x-1}}\, dx = \int_1^7 \frac{1}{2} \times \frac{u^2+1}{u} \times u\, du$$

بالتبسيط

$$= \frac{1}{2} \int_1^7 (u^2 + 1)\, du$$

تكامل اقتران القوَّة

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}u^3 + u\right) \Big|_1^7$$

بالتعويض

$$= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{3}(7)^3 + 7\right) - \left(\frac{1}{3}(1)^3 + 1\right)\right)$$

$$= 60$$

بالتبسيط

مثال (2) تحقق من فهمك صفحة 43

أجد قيمة كلٍّ من التكاملين الآتيين:

a) $\int_0^2 x(x+1)^3\, dx$

b) $\int_0^{\pi/3} \sec x \tan x \sqrt{\sec x + 2}\, dx$

الحل

a)

$u = x+1 \Rightarrow \frac{u}{dx} = 1 \Rightarrow dx = du, x = u-1$

$x = 0 \Rightarrow u = 1$

$x = 2 \Rightarrow u = 3$

$\int_0^2 x(x+1)^3 dx = \int_1^3 (u-1)u^3 du$

$= \int_1^3 (u^4 - u^3) du$

$= (\frac{1}{5}u^5 - \frac{1}{4}u^4)\Big|_1^3$

$= \frac{1}{5}(3)^5 - \frac{1}{4}(3)^4 - (\frac{1}{5}(1)^5 - \frac{1}{4}(1)^4)$

$= \frac{142}{5} = 28.4$

b)

$u = \sec x + 2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = \sec x \tan x$

$\Rightarrow dx = \frac{du}{\sec x \tan x}$

$x = 0 \Rightarrow u = 3$

$x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow u = 4$

$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sec x \tan x \sqrt{\sec x + 2}\, dx$

$= \int_3^4 \sec x \tan x \sqrt{u} \frac{du}{\sec x \tan x}$

$= \int_3^4 \sqrt{u}\, du \qquad = \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}}\Big|_3^4$

$= \frac{2}{3}(8 - 3\sqrt{3}) \approx 1.87$

أتدرّب وأحُلُّ المسائل

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1 $\int x^2 (2x^3+5)^4 \, dx$

$u = 2x^3 + 5 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 6x^2 \Rightarrow dx = \frac{du}{6x^2}$

$\int x^2(2x^3+5)^4 dx = \int x^2 u^4 \times \frac{du}{6x^2}$

$= \int \frac{1}{6} u^4 du$

$= \frac{1}{30} u^5 + C$

$= \frac{1}{30}(2x^3+5)^5 + C$

2 $\int x^2 \sqrt{x+3} \, dx$

$u = x+3 \Rightarrow dx = du, x = u-3$

$x^2\sqrt{x+3}\,dx = \int x^2 \sqrt{u}\,du$

$= \int (u-3)^2 \sqrt{u}\,du$

$= \int (u^{\frac{5}{2}} - 6u^{\frac{3}{2}} + 9u^{\frac{1}{2}})du$

$= \frac{2}{7}u^{\frac{7}{2}} - \frac{12}{5}u^{\frac{5}{2}} + 6u^{\frac{3}{2}} + C$

$= \frac{2}{7}(x+3)^{\frac{7}{2}} - \frac{12}{5}(x+3)^{\frac{5}{2}} + 6(x+3)^{\frac{3}{2}} + C$

$= \frac{2}{7}\sqrt{(x+3)^7} - \frac{12}{5}\sqrt{(x+3)^5} + 6\sqrt{(x+3)^3} + C$

3 $\int x(x+2)^3 \, dx$

$u = x+2 \Rightarrow dx = du, x = u-2$

$\int x(x+2)^3 dx = \int x u^3 du$

$= \int (u-2)u^3 du$

$= \int (u^4 - 2u^3) du$

$= \frac{1}{5}u^5 - \frac{1}{2}u^4 + C$

$= \frac{1}{5}(x+2)^5 - \frac{1}{2}(x+2)^4 + C$

$$= u - \frac{2}{3}u^3 + C$$

$$= \cos x - \frac{2}{3}\cos^3 x + C$$

4 $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x+4}}\,dx$

$u = x + 4 \Rightarrow dx = du \quad ,x = u - 4$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x+4}}dx = \int \frac{x}{\sqrt{u}}du$$

$$= \int \frac{u-4}{\sqrt{u}}du$$

$$= \int (u^{\frac{1}{2}} - 4u^{-\frac{1}{2}})du$$

$$= \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} - 8u^{\frac{1}{2}} + C$$

$$= \frac{2}{3}(x+4)^{\frac{3}{2}} - 8(x+4)^{\frac{1}{2}} + C$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{(x+4)^3} - 8\sqrt{x+4} + C$$

5 $\displaystyle\int \sin x \, \cos 2x \, dx$

$$\int \sin x\cos 2x dx = \int \sin x(2\cos^2 x - 1)dx$$

$$u = \cos x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\sin x \Rightarrow dx = \frac{du}{-\sin x}$$

$$\int \sin x\cos 2x dx = \int \sin x(2u^2 - 1) \times \frac{du}{-\sin x}$$

$$= \int (1 - 2u^2)du$$

6 $\displaystyle\int \frac{e^{3x}}{e^x + 1}\,dx$

$$u = e^x + 1 \Rightarrow \frac{du}{dx} = e^x \Rightarrow dx = \frac{du}{e^x}$$

$e^x = u - 1$

$$\int \frac{e^{3x}}{e^x+1}dx = \int \frac{e^{3x}}{u} \times \frac{du}{e^x}$$

$$= \int \frac{e^{2x}}{u}du$$

$$= \int \frac{(u-1)^2}{u}du$$

$$= \int (u - 2 + \frac{1}{u})du$$

$$= \frac{1}{2}u^2 - 2u + \ln|u| + C$$

$$= \frac{1}{2}(e^x+1)^2 - 2(e^x+1) + \ln(e^x+1) + C$$

7 $\int \sec^4 x \, dx$

$$\int \sec^4 x dx = \int \sec^2 x \times \sec^2 x dx$$

$$= \int \sec^2 x (1 + \tan^2 x) dx$$

$$u = \tan x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \sec^2 x \Rightarrow dx = \frac{du}{\sec^2 x}$$

$$\int \sec^4 x dx = \int \sec^2 x (1 + u^2) \times \frac{du}{\sec^2 x}$$

$$= \int (1 + u^2) du \qquad = u + \frac{1}{3}u^3 + C$$

$$= \tan x + \frac{1}{3}\tan^3 x + C$$

---

8 $\int \frac{\tan x}{\cos^2 x} dx$

$$\int \frac{\tan x}{\cos^2 x} dx = \int \tan x \sec^2 x dx$$

$$u = \tan x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \sec^2 x \Rightarrow dx = \frac{du}{\sec^2 x}$$

$$\int \frac{\tan x}{\cos^2 x} dx = \int u \sec^2 x \times \frac{du}{\sec^2 x}$$

$$= \int u du \quad = \frac{1}{2}u^2 + C \quad = \frac{1}{2}\tan^2 x + C$$

---

9 $\int \frac{\sin(\ln x)}{x} dx$

$$u = \ln x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow dx = x du$$

$$\int \frac{\sin(\ln x)}{x} dx = \int \frac{\sin u}{x} \times x du$$

$$= \int \sin u du$$

$$= -\cos u + C$$

$$= -\cos(\ln x) + C$$

---

10 $\int \frac{\sin x \cos x}{1 + \sin^2 x} dx$

$$\int \frac{\sin x \cos x}{1 + \sin^2 x} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2\sin x \cos x}{1 + \sin^2 x} dx$$

$$= \frac{1}{2} \ln(1 + \sin^2 x) + C$$

---

11 $\int \frac{2e^x - 2e^{-x}}{(e^x + e^{-x})^2} dx$

$$u = e^x + e^{-x} \Rightarrow \frac{du}{dx} = e^x - e^{-x}$$

$$\Rightarrow dx = \frac{du}{e^x - e^{-x}}$$

13 $\int x\sqrt[3]{x+10}\,dx$

$u = x+10 \Rightarrow dx = du, x = u-10$

$\int x\sqrt[3]{x+10}\,dx = \int (u-10)u^{\frac{1}{3}}\,du$

$= \int (u^{\frac{4}{3}} - 10u^{\frac{1}{3}})\,du$

$= \frac{3}{7}u^{\frac{7}{3}} - \frac{15}{2}u^{\frac{4}{3}} + C$

$= \frac{3}{7}(x+10)^{\frac{7}{3}} - \frac{15}{2}(x+10)^{\frac{4}{3}} + C$

$= \frac{3}{7}\sqrt[3]{(x+10)^7} - \frac{15}{2}\sqrt[3]{(x+10)^4} + C$

14 $\int \left(\sec^2\frac{x}{2}\tan^7\frac{x}{2}\right)dx$

$u = \tan\frac{x}{2} \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}$

$\Rightarrow dx = \frac{2du}{\sec^2\frac{x}{2}}$

$\int \sec^2\frac{x}{2}\tan^7\frac{x}{2}\,dx$

$= \int \sec^2\frac{x}{2}u^7 \times \frac{2du}{\sec^2\frac{x}{2}}$

$= 2\int u^7 du \qquad = \frac{1}{4}u^8 + C$

$= \frac{1}{4}\tan^8\frac{x}{2} + C$

$\int \frac{2e^x - 2e^{-x}}{(e^x+e^{-x})^2}\,dx$

$= \int \frac{2(e^x - e^{-x})}{u^2} \times \frac{du}{e^x - e^{-x}}$

$= \int 2u^{-2}du \qquad = -2u^{-1} + C$

$= -\frac{2}{e^x + e^{-x}} + C$

12 $\int \frac{-x}{(x+1)\sqrt{x+1}}\,dx$

$u = x+1 \Rightarrow dx = du, x = u-1$

$\int \frac{-x}{(x+1)\sqrt{x+1}}\,dx = \int \frac{1-u}{u\sqrt{u}}\,du$

$= \int \frac{1-u}{u^{\frac{3}{2}}}\,du$

$= \int (u^{-\frac{3}{2}} - u^{-\frac{1}{2}})\,du$

$= -2u^{-\frac{1}{2}} - 2u^{\frac{1}{2}} + C$

$= -2(x+1)^{-\frac{1}{2}} - 2(x+1)^{\frac{1}{2}} + C$

$= \frac{-2}{\sqrt{x+1}} - 2\sqrt{x+1} + C$

15 $\int \frac{\sec^3 x + e^{\sin x}}{\sec x}\, dx$

$$\int \frac{\sec^3 x + e^{\sin x}}{\sec x} dx$$

$$= \int (\sec^2 x + \cos x\, e^{\sin x})\, dx$$

$$= \int \sec^2 x\, dx + \int \cos x\, e^{\sin x}\, dx$$

$$u = \sin x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \cos x \Rightarrow dx = \frac{du}{\cos x}$$

$$\int \frac{\sec^3 x + e^{\sin x}}{\sec x} dx$$

$$= \int \sec^2 x\, dx + \int \cos x\, e^{u} \times \frac{du}{\cos x}$$

$$= \tan x + \int e^u\, du \qquad = \tan x + e^u + C$$

$$= \tan x + e^{\sin x} + C$$

16 $\int (1 + \sqrt[3]{\sin x}) \cos^3 x\, dx$

$$u = \sin x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \cos x \Rightarrow dx = \frac{du}{\cos x}$$

$$\int (1 + \sqrt[3]{\sin x}) \cos^3 x\, dx$$

$$= \int (1 + u^{\frac{1}{3}}) \cos^3 x \frac{du}{\cos x}$$

$$= \int (1 + u^{\frac{1}{3}}) \cos^2 x\, du$$

$$= \int (1 + u^{\frac{1}{3}})(1 - \sin^2 x)\, du$$

$$= \int (1 + u^{\frac{1}{3}})(1 - u^2)\, du$$

$$= \int (1 + u^{\frac{1}{3}})(1 - u^2)\, du$$

$$= \int (1 - u^2 + u^{\frac{1}{3}} - u^{\frac{7}{3}})\, du$$

$$= u - \frac{1}{3}u^3 + \frac{3}{4}u^{\frac{4}{3}} - \frac{3}{10}u^{\frac{10}{3}} + C$$

$$= \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + \frac{3}{4}\sin^{\frac{4}{3}} x - \frac{3}{10}\sin^{\frac{10}{3}} x + C$$

17 $\int \sin x \sec^5 x\, dx$

$$\int \sin x \sec^5 x\, dx = \int \sin x \cos^{-5} x\, dx$$

$$u = \cos x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\sin x \Rightarrow dx = \frac{du}{-\sin x}$$

$$\int \sin x \sec^5 x\, dx = \int \sin x\, u^{-5} \times \frac{du}{-\sin x}$$

$$= -\int u^{-5}\, du \qquad = \frac{1}{4}u^{-4} + C$$

$$= \frac{1}{4}\cos^{-4} x + C \qquad = \frac{1}{4}\sec^4 x + C$$

18 $\displaystyle\int \frac{\sin x + \tan x}{\cos^3 x}\, dx$

$$\int \frac{\sin x + \tan x}{\cos^3 x} dx$$

$$= \int (\tan x \sec^2 x + \tan x \sec^3 x) dx$$

$$= \int \tan x \sec x (\sec x + \sec^2 x) dx$$

$$u = \sec x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \tan x \sec x$$

$$\Rightarrow dx = \frac{du}{\tan x \sec x}$$

$$\int \frac{\sin x + \tan x}{\cos^3 x} dx$$

$$= \int \tan x \sec x (u + u^2) \frac{du}{\tan x \sec x}$$

$$= \int (u + u^2) du = \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3 + C$$

$$= \frac{1}{2}\sec^2 x + \frac{1}{3}\sec^3 x + C$$

أجد قيمة كلٍّ من التكاملات الآتية:

19 $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \sin x \sqrt{1 - \cos^2 2x}\, dx$

$$\sqrt{1 - \cos^2 2x} = \sqrt{\sin^2 2x} = |\sin 2x|$$

لكن الزاوية 2x تكون ضمن الربع الأول

عندما $0 < x < \frac{\pi}{4}$

لذا فإن $\sin 2x > 0$ ويكون

$$|\sin 2x| = \sin 2x$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x \sqrt{1 - \cos^2 2x}\, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x \sin 2x\, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\sin^2 x \cos x\, dx$$

$$u = \sin x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \cos x \Rightarrow dx = \frac{du}{\cos x}$$

$$x = 0 \Rightarrow u = 0$$

$$x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow u = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x \sqrt{1 - \cos^2 2x}\, dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} 2u^2 \cos x \frac{du}{\cos x}$$

$$= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} 2u^2 du = \frac{2}{3}u^3 \Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{3\sqrt{2}}$$

20 $\int_{0}^{\pi/2} x\sin x^2\,dx$

$u=x^2 \Rightarrow \frac{du}{dx}=2x \Rightarrow dx=\frac{du}{2x}$

$x=\frac{\pi}{2} \Rightarrow u=\frac{\pi^2}{4}$

$x=0 \Rightarrow u=0$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x\sin x^2 dx=\int_{0}^{\frac{\pi^2}{4}} x\sin u\frac{du}{2x}$$

$$=\frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi^2}{4}} \sin u\,du$$

$$=-\frac{1}{2}\cos u\Big|_{0}^{\frac{\pi^2}{4}}$$

$$=-\frac{1}{2}(\cos\frac{\pi^2}{4}-1)\approx 0.891$$

---

21 $\int_{0}^{1} \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$

$u=1+x^2 \Rightarrow \frac{du}{dx}=2x \Rightarrow dx=\frac{du}{2x}$

$x^2=u-1$

$x=0 \Rightarrow u=1$

$x=1 \Rightarrow u=2$

$$\int_{0}^{1}\frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}dx=\int_{1}^{2}\frac{x^3}{\sqrt{u}}\times\frac{du}{2x}$$

$$=\frac{1}{2}\int_{1}^{2}\frac{x^2}{\sqrt{u}}du=\frac{1}{2}\int_{1}^{2}\frac{u-1}{\sqrt{u}}du$$

$$=\frac{1}{2}\int_{1}^{2}(u^{\frac{1}{2}}-u^{-\frac{1}{2}})du$$

$$=\frac{1}{2}(\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}-2u^{\frac{1}{2}})\Big|_{1}^{2}$$

$$=\frac{1}{2}(\frac{2}{3}(2)^{\frac{3}{2}}-2(2)^{\frac{1}{2}}$$

$$-(\frac{2}{3}(1)-2(1)))$$

$$=\frac{2-\sqrt{2}}{3}$$

22 $\int_{0}^{\pi/3} \sec^2 x\ \tan^5 x\ dx$

$u=tanx \Rightarrow \frac{du}{dx}=sec^2x \Rightarrow dx=\frac{du}{sec^2x}$

$x=0 \Rightarrow u=0$

$x=\frac{\pi}{3} \Rightarrow u=\sqrt{3}$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} sec^2x tan^5x dx$$

$$=\int_{0}^{\sqrt{3}} sec^2x u^5\frac{du}{sec^2x}$$

$$=\int_{0}^{\sqrt{3}} u^5 du \qquad =\frac{1}{6}u^6\Big|_{0}^{\sqrt{3}} \qquad =\frac{9}{2}$$

25 $\int_0^1 \frac{10\sqrt{x}}{(1+\sqrt{x^3})^2}\,dx$

$u = 1 + x^{\frac{3}{2}} \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow dx = \frac{2}{3}\frac{du}{x^{\frac{1}{2}}}$

$x = 0 \Rightarrow u = 1$

$x = 1 \Rightarrow u = 2$

$\int_0^1 \frac{10\sqrt{x}}{(1+\sqrt{x^3})^2}dx = \int_1^2 \frac{10\sqrt{x}}{u^2}\frac{2}{3}\frac{du}{x^{\frac{1}{2}}}$

$= \frac{20}{3}\int_1^2 u^{-2}du = -\frac{20}{3}u^{-1}\Big|_1^2 = \frac{10}{3}$

26 $\int_0^{\pi/6} 2^{\cos x}\sin x\,dx$

$u = \cos x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\sin x \Rightarrow dx = \frac{du}{-\sin x}$

$x = 0 \Rightarrow u = 1$

$x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow u = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\int_0^{\frac{\pi}{6}} 2^{\cos x}\sin x\,dx = \int_1^{\frac{\sqrt{3}}{2}} 2^u \sin x \frac{du}{-\sin x}$

$= -\int_1^{\frac{\sqrt{3}}{2}} 2^u du$

$= -\frac{2^u}{\ln 2}\Big|_1^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$= -\frac{1}{\ln 2}(2^{\frac{\sqrt{3}}{2}} - 2) \approx 0.256$

23 $\int_0^2 (x-1)e^{(x-1)^2}\,dx$

$u = (x-1)^2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2(x-1)$

$\Rightarrow dx = \frac{du}{2(x-1)}$

$x = 0 \Rightarrow u = 1$

$x = 2 \Rightarrow u = 1$

$\int_0^2 (x-1)e^{(x-1)^2}dx$

$= \int_1^1 (x-1)e^u \frac{du}{2(x-1)} = 0$

24 $\int_1^4 \frac{\sqrt{2+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

$u = 2 + \sqrt{x} \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$\Rightarrow dx = 2\sqrt{x}\,du$

$x = 1 \Rightarrow u = 3$

$x = 4 \Rightarrow u = 4$

$\int_1^4 \frac{\sqrt{2+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = \int_3^4 \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{x}}2\sqrt{x}\,du$

$= \int_3^4 2\sqrt{u}\,du = \frac{4}{3}u^{\frac{3}{2}}\Big|_3^4 = \frac{4(8-3\sqrt{3})}{3}$

27 $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} \csc^2 x \cot^5 x \ dx$

$$u = \cot x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\csc^2 x$$

$$\Rightarrow dx = \frac{du}{-\csc^2 x}$$

$$x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow u = 0$$

$$x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow u = 1$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \csc^2 x \cot^5 x dx$$

$$= \int_1^0 \csc^2 x u^5 \frac{du}{-\csc^2 x}$$

$$= \int_1^0 -u^5 du \quad = -\frac{1}{6} u^6 \Big|_1^0$$

$$= \frac{1}{6}$$

في كلٍّ ممّا يأتي المشـــتقة الأولى للاقتران $f(x)$، ونقطة يمرُّ بها منحنى $y=f(x)$. أســـتعمل المعلومات المعطاة لإيجاد قاعدة الاقتران $f(x)$:

32 $f'(x) = 2x(4x^2 - 10)^2 \,;\, (2, 10)$

33 $f'(x) = x^2 e^{-0.2x^3} \,;\, (0, \frac{3}{2})$

الحل

32)

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int 2x(4x^2 - 10)^2 dx$$

$$u = 4x^2 - 10 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 8x \Rightarrow dx = \frac{du}{8x}$$

$$f(x) = \int 2xu^2 \frac{du}{8x} = \int u^2 \frac{du}{4}$$

$$= \frac{1}{4} \int u^2 du$$

$$= \frac{1}{12} u^3 + C$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{12}(4x^2 - 10)^3 + C$$

$$f(2) = \frac{1}{12}(216) + C = 10 \Rightarrow C = -8$$

$$10 = 18 + C \Rightarrow C = -8$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{12}(4x^2 - 10)^3 - 8$$

33)

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int x^2 e^{-0.2x^3} dx$$

$$u = -0.2x^3 \Rightarrow \frac{du}{dx} = -0.6x^2 \Rightarrow dx = \frac{du}{-0.6x^2}$$

$$f(x) = \int x^2 e^u \frac{du}{-0.6x^2} = -\frac{10}{6} \int e^u du$$

$$= -\frac{5}{3} e^u + C \qquad \Rightarrow f(x) = -\frac{5}{3} e^{-0.2x^3} + C$$

$$f(0) = -\frac{5}{3} + C \qquad \frac{3}{2} = -\frac{5}{3} + C \Rightarrow C = \frac{19}{6}$$

$$\Rightarrow f(x) = -\frac{5}{3} e^{-0.2x^3} + \frac{19}{6}$$

36 يتحرَّك جُسَيْم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران:

$v(t) = \sin \omega t \cos^2 \omega t$،

حيث t الزمن بالثواني، و v سرعته المتجهة بالمتر لكل ثانية، و ω ثابت. إذا انطلق الجُسَيْم من نقطة الأصل فأجد موقعه بعد t ثانية.

الحل

$$s(t) = \int v(t)\ dt$$

$$= \int \sin wt \cos^2 wt\ dt$$

$$u = \cos wt \implies \frac{du}{-w \sin wt} = dt$$

$$\int \sin wt \frac{u^2\ du}{-w\ \sin wt} = \frac{-1}{w}\ \frac{u^3}{3} + c$$

$$= \frac{-1}{3w} \cos^3 wt + c$$

$$s(0) = 0 \implies \frac{-1}{3w} + c = 0$$

$$\implies c = \frac{1}{3w}$$

$$s(t) = \frac{-1}{3w} \cos^3 wt + \frac{1}{3w}$$

37 طب: يُمثِّل الاقتران $C(t)$ تركيز دواء في الدم بعد t دقيقة من حقنه في جسم مريض، حيث C مَقيسة بالملّيغرام لكل سنتيمتر مُكعَّب (mg/cm^3). إذا كان تركيز الدواء لحظة حقنه في جسم المريض $0.5\ mg/cm^3$ وأخذ يتغيَّر بمُعدَّل $C'(t) = \frac{-0.01e^{-0.01t}}{(1+e^{-0.01t})^2}$، فأجد $C(t)$

الحل

$$C(t) = \int C'(t)dt = \int \frac{-0.01e^{-0.01t}}{(1+e^{-0.01t})^2} dt$$

$$u = 1 + e^{-0.01t} \Rightarrow \frac{du}{dt}$$

$$= -0.01e^{-0.01t} \Rightarrow dt = \frac{du}{-0.01e^{-0.01t}}$$

$$C(t) = \int \frac{-0.01e^{-0.01t}}{u^2} \times \frac{du}{-0.01e^{-0.01t}}$$

$$= -u^{-1} + K$$

$$= \int u^{-2} du$$

(استعمل الرمز K لثابت التكامل بدل C المعتاد لتمييز ثابت التكامل عن رمز الاقتران C).

$$C(t) = -(1+e^{-0.01t})^{-1} + K$$
$$C(0) = -(2)^{-1} + K$$
$$\frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow K = 1$$
$$\Rightarrow C(t) = -(1+e^{-0.01t})^{-1} + 1$$
$$C(t) = \frac{-1}{1+e^{-0.01t}} + 1$$

38 أجد قيمة: $\int_{\ln 3}^{\ln 4} \frac{e^{4x}}{e^x - 2}\, dx$، ثم أكتب الإجابة بالصيغة الآتية: $\frac{a}{b} + c\ln d$، حيث: a، وb، وc، وd ثوابت صحيحة.

الحل

$$u = e^x - 2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = e^x \Rightarrow dx = \frac{du}{e^x}$$
$$e^x = u + 2$$
$$x = \ln 3 \Rightarrow u = e^{\ln 3} - 2 = 3 - 2 = 1$$
$$x = \ln 4 \Rightarrow u = e^{\ln 4} - 2 = 4 - 2 = 2$$
$$\int_{\ln 3}^{\ln 4} \frac{e^{4x}}{e^x - 2} dx = \int_1^2 \frac{e^{4x}}{u} \frac{du}{e^x}$$
$$= \int_1^2 \frac{e^{3x}}{u} du$$
$$= \int_1^2 \frac{(u+2)^3}{u} du$$
$$= \int_1^2 \frac{u^3 + 6u^2 + 12u + 8}{u} du$$
$$= \int_1^2 (u^2 + 6u + 12 + \frac{8}{u}) du$$
$$= (\frac{1}{3}u^3 + 3u^2 + 12u + 8\ln|u|)\Big|_1^2$$

39 إذا كان: $f'(x) = \tan x$، وكان: $f(3) = 5$، فأُثبِت أنَّ: $f(x) = \ln\left|\frac{\cos 3}{\cos x}\right| + 5$.

الحل

$$f(x) = \int \tan x dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x} dx$$
$$= -\ln|\cos x| + C$$
$$f(3) = -\ln|\cos 3| + C$$
$$5 = -\ln|\cos 3| + C \Rightarrow C = 5 + \ln|\cos 3|$$
$$f(x) = -\ln|\cos x| + 5 + \ln|\cos 3|$$
$$= \ln\left|\frac{\cos 3}{\cos x}\right| + 5$$

مهارات التفكير العليا

43 تحدٍّ: أجد قيمة: $\int_{1}^{16} \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x^3}}\, dx$.

الحل

$$u = 1 + x^{\frac{3}{4}} \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{3}{4} x^{-\frac{1}{4}} \Rightarrow dx$$

$$= \frac{4}{3} x^{\frac{1}{4}} du, \quad x^{\frac{3}{4}} = u - 1$$

$$x = 1 \Rightarrow u = 2$$

$$x = 16 \Rightarrow u = 9$$

$$\int_{1}^{16} \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x^3}} dx = \int_{2}^{9} \frac{x^{\frac{1}{2}}}{u} \frac{4}{3} x^{\frac{1}{4}} du$$

$$= \frac{4}{3} \int_{2}^{9} \frac{x^{\frac{3}{4}}}{u} du = \frac{4}{3} \int_{2}^{9} \frac{u-1}{u} du$$

$$= \frac{4}{3} \int_{2}^{9} (1 - \frac{1}{u}) du$$

$$= \frac{4}{3} (u - \ln|u|)\Big|_{2}^{9} = \frac{4}{3} (7 - \ln\frac{9}{2})$$

44 تبرير: إذا كان f اقترانًا متصلًا، فأُثبِت أنَّ:

$$\int_{0}^{\pi/2} f(\cos x)\, dx = \int_{0}^{\pi/2} f(\sin x)\, dx.$$

الحل

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) dx$$

$$u = \frac{\pi}{2} - x \Rightarrow dx = -du$$

$$x = 0 \Rightarrow u = \frac{\pi}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow u = 0$$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} -f(\sin u) du$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\sin u) du = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx$$

45 تبرير: إذا كان a و b عددين حقيقيين موجبين، فأُثبِت أنَّ:

$$\int_0^1 x^a (1-x)^b \, dx = \int_0^1 x^b (1-x)^a \, dx$$

الحل

$u = 1 - x \Rightarrow dx = -du$

$, x = 1 - u$

$x = 0 \Rightarrow u = 1$

$x = 1 \Rightarrow u = 0$

$$\int_0^1 x^a (1-x)^b \, dx = \int_1^0 -(1-u)^a u^b \, du$$

$$= \int_0^1 u^b (1-u)^a \, du = \int_0^1 x^b (1-x)^a \, dx$$

تحدٍّ: أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

46 $\displaystyle\int \frac{dx}{x \ln x \, (\ln(\ln x))}$

الحل

$$u = \ln(\ln x) \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} = \frac{1}{x \ln x} \Rightarrow dx = x \ln x \, du$$

$$\int \frac{dx}{x \ln x \, (\ln(\ln x))} = \int \frac{x \ln x \, du}{u x \ln x}$$

$$= \ln|u| + C = \ln|\ln(\ln x)| + C$$

47 $\displaystyle\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} \, dx$

الحل

$$\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} \, dx$$

$$= -\int \frac{(\cos x - \sin x)}{\sin x + \cos x} \, dx$$

$$= -\ln|\sin x + \cos x| + c$$

48 $\int \sin 2x\,(1+\sin x)^3\;dx$

الحل

$$u = 1 + \sin x \quad \Rightarrow$$
$$du = \cos x \quad dx$$

$$\Rightarrow \int 2\sin x\,\cos x\;u^3 \times \frac{du}{\cos x}$$

$$= 2\int (u-1)u^3\;du$$

$$= 2\int (u^4 - u^3)\;du$$

$$= 2\left(\frac{u^5}{5} - \frac{u^4}{4}\right) + c$$

$$= \frac{2}{5}(1+\sin x)^5$$
$$-\frac{1}{2}(1+\sin x)^4 + c$$

تمارين ومسائل كتاب التمارين صفحة 13

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1 $$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\,dx$$

$$u = x^2+4 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}dx = \int \frac{x}{\sqrt{u}}\frac{du}{2x}$$

$$= \int \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}du = u^{\frac{1}{2}} + C = \sqrt{x^2+4} + C$$

2 $$\int \left(1-\cos\frac{x}{2}\right)^2 \sin\frac{x}{2}\,dx$$

$$u = 1-\cos\frac{x}{2} \Rightarrow \frac{du}{dx}$$

$$= \frac{1}{2}\sin\frac{x}{2} \Rightarrow dx = \frac{2}{\sin\frac{x}{2}}du$$

$$\int \left(1-\cos\frac{x}{2}\right)^2 \sin\frac{x}{2}dx$$

$$= \int u^2 \sin\frac{x}{2}\frac{2}{\sin\frac{x}{2}}du$$

$$= \int 2u^2 du = \frac{2}{3}u^3 + C$$

$$= \frac{2}{3}\left(1-\cos\frac{x}{2}\right)^3 + C$$

3 $$\int \csc^5 x \cos^3 x\; dx$$

$$\int \csc^5 x\cos^3 x dx = \int \frac{\cos^3}{\sin^5 x}xdx$$

$$= \int \cot^3 x\csc^2 x dx$$

$$u = \cot x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\csc^2 x$$

$$\Rightarrow dx = \frac{du}{-\csc^2 x}$$

$$\int \csc^5 x\cos^3 x dx = \int \cot^3 x\csc^2 x dx$$

$$= \int u^3\csc^2\frac{du}{-\csc^2 x} = \int -u^3 du$$

$$= -\frac{1}{4}u^4 + C$$

$$= -\frac{1}{4}\cot^4 x + C$$

4 $\int x\sin x^2\,dx$

$u = x^2 \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$

$\int x\sin x^2 dx = \int \frac{1}{2}\sin u\,du$

$= -\frac{1}{2}\cos u + C = -\frac{1}{2}\cos x^2 + C$

5 $\int x^3 (x+2)^7\,dx$

$u = x+2 \Rightarrow dx = du, \quad x = u-2$

$\int x^3(x+2)^7 dx = \int (u-2)^3 u^7 du$

$= \int (u^{10} - 6u^9 + 12u^8 - 8u^7)du$

$= \frac{1}{11}u^{11} - \frac{3}{5}u^{10} + \frac{4}{3}u^9 - u^8 + C$

$= \frac{1}{11}(x+2)^{11} - \frac{3}{5}(x+2)^{10}$

$+ \frac{4}{3}(x+2)^9 - (x+2)^8 + C$

6 $\int \frac{\ln\sqrt{x}}{x}\,dx$

$\int \frac{\ln\sqrt{x}}{x}dx = \int \frac{\frac{1}{2}\ln x}{x}dx$

$u = \ln x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow dx = x\,du$

$\int \frac{\ln\sqrt{x}}{x}dx = \int \frac{\frac{1}{2}\ln x}{x}dx$

$= \int \frac{1}{2}u\,du = \frac{1}{4}u^2 + C = \frac{1}{4}(\ln x)^2 + C$

7 $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

$u = \sqrt{x} \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$\Rightarrow dx = 2\sqrt{x}\,du$

$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = \int \frac{e^u}{\sqrt{x}} \times 2\sqrt{x}\,du$

$= 2\int e^u du = 2e^u + C = 2e^{\sqrt{x}} + C$

8 $\displaystyle\int \frac{\sin\left(\ln 4x^2\right)}{x}\,dx$

$$\int \frac{\sin(\ln 4x^2)}{x}dx = \int \frac{\sin(2\ln 2x)}{x}dx$$

$$u = 2\ln 2x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{2}{x} \Rightarrow dx = \frac{x}{2}du$$

$$\int \frac{\sin(\ln 4x^2)}{x}dx = \int \frac{\sin u}{x} \times \frac{x}{2}du$$

$$= \frac{1}{2}\int \sin u\, du = -\frac{1}{2}\cos u + C$$

$$= -\frac{1}{2}\cos(2\ln 2x) + C$$

$$= -\frac{1}{2}\cos(\ln 4x^2) + C$$

9 $\displaystyle\int \sec^2 x\, \cos^3(\tan x)\, dx$

$$u = \tan x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \sec^2 x$$

$$\Rightarrow \sec^2 x\, dx = du$$

$$\int \sec^2 x \cos^3(\tan x)\, dx$$

$$= \int \cos^3 u\, du$$

$$= \int \cos u \cos^2 u\, du$$

$$= \int \cos u(1 - \sin^2 u)\, du$$

$$v = \sin u \Rightarrow \frac{dv}{dx} = \cos u \Rightarrow \cos u\, dx = dv$$

$$\int \cos u(1 - \sin^2 u)\, du = \int (1 - v^2)\, dv$$

$$= v - \frac{1}{3}v^3 + C \quad = \sin u - \frac{1}{3}\sin^3 u + C$$

$$= \sin(\tan x) - \frac{1}{3}\sin^3(\tan x) + C$$

أجد قيمة كلٍّ من التكاملات الآتية:

10 $\displaystyle\int_6^{20} \frac{8x}{\sqrt{4x+1}}\,dx$

$$u = 4x + 1 \Rightarrow 4dx = du$$

$$4x = u - 1$$

$$x = 20 \Rightarrow u = 81$$

$$x = 6 \Rightarrow u = 25$$

$$\int_6^{20} \frac{8x}{\sqrt{4x+1}}dx = \int_{25}^{81} \frac{u-1}{2\sqrt{u}}du$$

$$= \int_{25}^{81} \left(\frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}\right) du$$

$$= \left(\frac{1}{3}u^{\frac{3}{2}} - u^{\frac{1}{2}}\right)\Big|_{25}^{81}$$

$$= (243 - 9) - \left(\frac{125}{3} - 5\right) = \frac{592}{3}$$

مثال (1)

11 $$\int_2^5 \frac{1}{1+\sqrt{x-1}}\,dx$$

$$u=\sqrt{x-1} \Rightarrow u^2 = x-1$$
$$\Rightarrow 2u\,du = dx$$
$$x=5 \Rightarrow u=2$$
$$x=2 \Rightarrow u=1$$
$$\int_2^5 \frac{1}{1+\sqrt{x-1}}dx = \int_1^2 \frac{2u}{1+u}du$$
$$= \int_1^2 \left(2-\frac{2}{u+1}\right)du$$
$$= (2u-2\ln|u+1|)|_1^2$$
$$= (4-2\ln 3)-(2-2\ln 2)$$
$$= 2-2\ln\frac{2}{3}$$

12 $$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{1+\cos x}\,dx$$

$$n = 1+\cos x \qquad \frac{du}{dx} = -\sin x$$
$$x=0 \to u=2 \qquad x=\frac{\pi}{2} \to u=1$$
$$\int_2^1 \frac{2\sin x\cos x}{u}\frac{du}{-\sin x}$$
$$= -2\int_2^1 \frac{\cos x}{u}du$$
$$= -2\int \frac{u-1}{u}du$$
$$-2\int_2^1 \left(1-\frac{1}{u}\right)du = -2(u-\ln u|_2^1) =$$
$$2-2\ln 2$$

13 $$\int_1^4 \frac{(1+\sqrt{x})^3}{\sqrt{x}}\,dx$$

$$u = 1+\sqrt{x} \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$
$$\Rightarrow dx = 2\sqrt{x}du$$
$$x=4 \Rightarrow u=3$$
$$x=1 \Rightarrow u=2$$
$$\int_1^4 \frac{(1+\sqrt{x})^3}{\sqrt{x}}dx = \int_2^3 \frac{u^3}{\sqrt{x}} \times 2\sqrt{x}du$$
$$= \int_2^3 2u^3 du = \frac{1}{2}u^4\Big|_2^3 = \frac{81}{2}-\frac{16}{2}$$
$$= \frac{65}{2}$$

14 $$\int_0^{\pi/4} \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}\,dx$$

$$u = \tan x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \sec^2 x \Rightarrow$$
$$dx = \frac{du}{\sec^2 x} = \cos^2 x\,du$$
$$x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow u=1$$
$$x=0 \Rightarrow u=0$$
$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}dx = \int_0^1 \frac{e^u}{\cos^2 x} \times \cos^2 x du$$
$$= \int_0^1 e^u du = e^u|_0^1 = e-1$$

15 $\int_0^{\pi/3} \cos^2 x \sin^3 x \, dx$

$$u = \cos x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\sin x$$

$$\Rightarrow dx = \frac{du}{-\sin x}$$

$$x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow u = \frac{1}{2}$$

$$x = 0 \Rightarrow u = 1$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 x \sin^3 x \, dx$$

$$= \int_1^{\frac{1}{2}} u^2 \sin^3 x \times \frac{du}{-\sin x}$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1} u^2(1-u^2)\, du$$

$$= \int_{\frac{1}{2}} (u^2 - u^4)\, du$$

$$= \left(\frac{1}{3}u^3 - \frac{1}{5}u^5\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}$$

$$= \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) - \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{160}\right) = \frac{47}{480}$$

في كلٍّ ممّا يأتي المشـــتقة الأولى للاقتران $f(x)$ ونقطة يمرُّ بها منحنى $y=f(x)$. أستعمل المعلومات المعطاة لإيجاد قاعدة الاقتران $f(x)$:

17 $f'(x) = 16 \sin x \cos^3 x \,; \left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$

$$f(x) = \int 16 \sin x \cos^3 x \, dx$$

$$u = \cos x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\sin x$$

$$\Rightarrow dx = \frac{du}{-\sin x}$$

$$f(x) = \int 16 \sin x \, u^3 \times \frac{du}{-\sin x}$$

$$= \int -16\, u^3 \, du = -4u^4 + C$$

$$= -4\cos^4 x + C$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = -4\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 + C$$

$$0 = -1 + C \Rightarrow C = 1$$

$$\Rightarrow f(x) = -4\cos^4 x + 1$$

18 $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+5}}; (2, 1)$

$$u = x^2 + 5 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$$

$$f(x) = \int \frac{x}{\sqrt{u}} \times \frac{du}{2x} = \int \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}}\, du$$

$$= u^{\frac{1}{2}} + C = \sqrt{x^2+5} + C$$

$$f(2) = 3 + C$$

$$1 = 3 + C \Rightarrow C = -2$$

$$\Rightarrow f(x) = \sqrt{x^2+5} - 2$$

19 يتحرَّك جُسَـيْم في مسار مستقيم، وتعطى سـرعته المتجهة بالاقتران: $v(t) = \dfrac{-2t}{(1+t^2)^{3/2}}$ حيث t الزمن بالثواني، وv سرعته المتجهة بالمتر لكل ثانية. إذا كان الموقع الابتدائي للجُسَيْم هو 4 m، فأجد موقع الجُسَيْم بعد t ثانية.

$$s(t) = \int \frac{-2t}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}} dx$$

$$u = 1 + t^2 \Rightarrow \frac{du}{dt} = 2t \Rightarrow dt = \frac{du}{2t}$$

$$s(t) = \int \frac{-2t}{u^{\frac{3}{2}}} \times \frac{du}{2t} = \int -u^{-\frac{3}{2}}\, du$$

$$= 2u^{-\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{\sqrt{1+t^2}} + C$$

$$s(0) = 2 + C =$$

$$4 = 2 + C \Rightarrow C = 2$$

$$\Rightarrow s(t) = \frac{2}{\sqrt{1+t^2}} + 2$$

الدرس 3

التكامل بالاجزاء

التكامل بالأجزاء

يستخدم التكامل بالاجزاء لايجاد تكامل حاصل ضرب اقترانين ليس احدهما مشتقة الاخر مثل

$$\int x \sin x \; dx \;,\quad \int e^{x} \cos x \; dx \;,\quad \int x^{2} \ln x \; dx$$

يُمكِن الاســـتفادة من قاعدة مشـــتقة الضرب في إيجاد طريقة لتكامل هذا النوع من الاقترانات على النحو الآتي إذا كان u و v اقترانين قابلين للاشتقاق بالنسبة إلى x فإنَّ مشتقة ضربهما هي:

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

وبمُكامَلة طرفي المعادلة بالنسبة إلى x، تنتج المعادلة الآتية

بمُكامَلة طرفي المعادلة

$$uv = \int u\frac{dv}{dx}\,dx + \int v\frac{du}{dx}\,dx$$

بإعادة ترتيب المعادلة

$$\int u\frac{dv}{dx}\,dx = uv - \int v\frac{du}{dx}\,dx$$

بالتبسيط

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

مفهوم أساسي

إذا كان u و v اقترانين قابلين للاشتقاق، فإنَّ:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

خطوات إيجاد التكامل بالأجزاء

مفهوم أساسي

لإيجاد التكامل $\int f(x)\,dx$ بالأجزاء، أتَّبع الخطوات الثلاث الآتية

الخطوة 1: أختـــار الاقترانين: u و v، بحيث $f(x)\,dx = u\,dv$، مراعيًا عند اختيار u أنْ تكون du أبسط من u، وأنْ يكون سهلًا إيجادُ تكامل dv

الخطوة 2: أُنظِّم خطوات إيجاد du و v كما يأتي:

$$u \qquad dv$$

$$du \qquad v = \int dv$$

الخطوة 3: أُكمِل التكامل بإيجاد $\int v\,du$.

$$\int f(x)\,dx = \int u\,dv = uv - \int v\,du$$

مثال (1)

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1 $\int x \cos x\, dx$

أفترض أنَّ: $u = x$، وأنَّ: $dv = \cos x\, dx$. ومن ثَمَّ، فإنَّ:

$$u = x \qquad dv = \cos x\; dx$$

$$du = dx \qquad v = \int \cos x\; dx = \sin x$$

إذن:

صيغة التكامل بالأجزاء

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

بالتعويض

$$\int x\cos x\,dx = x\sin x - \int \sin x\; dx$$

$$= x\sin x + \cos x + C$$ تكامل $\sin x$

---

2 $\int \ln x\, dx$

أفترض أنَّ: $u = \ln x$، وأنَّ: $dv = dx$.
ومن ثَمَّ، فإنَّ:

$$u = \ln x \qquad dv = dx$$

$$du = \frac{1}{x}\,dx \qquad v = \int dx = x$$

...

إذن:

صيغة التكامل بالأجزاء

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

بالتعويض

$$\int \ln x\ dx = x\ln x - \int x \times \frac{1}{x}\,dx$$

بالتبسيط

$$= x\ln x - \int dx$$

تكامل 1

$$= x\ln x - x + C$$

3 $\int x(2x+7)^5\ dx$

أفترض أنَّ: $u = x$، وأنَّ: $dv = (2x+7)^5\ dx$ ومن ثَمَّ، فإنَّ:

$$u = x \qquad dv = (2x+7)^5\ dx$$

$$du = dx$$

$$v = \int (2x+7)^5\ dx = \frac{1}{12}(2x+7)^6$$

إذن:

صيغة التكامل بالأجزاء

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

بالتعويض

$$\int x(2x+7)^5\,dx$$

$$= \frac{1}{12}x\,(2x+7)^6 - \int \frac{1}{12}(2x+7)^6\,dx$$

تكامل $(ax+b)^n$ المضروب في ثابت

$$= \frac{1}{12}x\,(2x+7)^6 - \frac{1}{168}\,(2x+7)^7 + C$$

4 $\int x\,e^{3-x}\ dx$

أفترض أنَّ: $u = x$، وأنَّ: $dv = e^{3-x}$.

ومن ثَمَّ، فإنَّ:

$$u = x \qquad dv = e^{3-x}\,dx$$

$$du = dx \qquad v = \int e^{3-x}\ dx = -e^{3-x}$$

إذن:

صيغة التكامل بالأجزاء

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

بالتعويض

$$\int x\,e^{3-x}\,dx$$

$$= -\,x\,e^{3-x} - \int -\,e^{3-x}\,dx$$

تكامل الاقتران الأُسِّي الطبيعي

$$= -x\,e^{3-x} - e^{3-x} + C$$

مثال (2) تحقق من فهمك صفحة 63

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

a) $\int x \sin x \, dx$ b) $\int x^2 \ln x \, dx$

c) $\int 2x\sqrt{7-3x} \, dx$ d) $\int 3x e^{4x} \, dx$

الحل

a)

$u = x \qquad dv = \sin x dx$

$du = dx \qquad v = -\cos x$

$$\int x \sin x dx = -x\cos x - \int -\cos x dx$$
$$= -x\cos x + \sin x + C$$

b)

$u = \ln x \qquad dv = x^2 dx$

$du = \frac{1}{x}dx \qquad v = \frac{1}{3}x^3$

$$\int x^2 \ln x dx = \frac{1}{3}x^3 \ln x - \int \frac{1}{3}x^2 dx$$
$$= \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{9}x^3 + C$$

c)

$u = x \qquad dv = (7-3x)^{\frac{1}{2}} dx$

$du = dx \qquad v = -\frac{2}{9}(7-3x)^{\frac{3}{2}}$

$$\int x\sqrt{7-3x}\,dx$$
$$= -\frac{2}{9}x(7-3x)^{\frac{3}{2}} - \int -\frac{2}{9}(7-3x)^{\frac{3}{2}} dx$$
$$= -\frac{2}{9}x(7-3x)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{135}(7-3x)^{\frac{5}{2}} + C$$

d)

$u = 3x \qquad dv = e^{4x} dx$

$du = 3dx \qquad v = \frac{1}{4}e^{4x}$

$$\int 3xe^{4x} dx = \frac{3}{4}xe^{4x} - \int \frac{3}{4}e^{4x} dx$$
$$= \frac{3}{4}xe^{4x} - \frac{3}{16}e^{4x} + C$$

مثال (3)

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

a $\int \ln(x+1)dx$

الحل:

$\int \ln(x+1)dx$

$u = \ln(x+1) \qquad dv = dx$

$du = \frac{1}{x+1}dx \qquad v = x$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\int \ln(x+1)dx$$
$$= x\ln(x+1) - \int \frac{x}{x+1}dx$$
$$= x\ln(x+1) - \int \frac{x+1-1}{x+1}dx$$
$$= x\ln(x+1) - \int \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)dx$$
$$= x\ln(x+1) - x + \ln|x+1| + C$$
$$= x\ln(x+1) - x + \ln(x+1) + C$$

b $\int 3x\,e^{2x+1}\,dx$

الحل:

$u = 3x \qquad dv = e^{2x+1}\,dx$

$du = 3dx \qquad v = \frac{1}{2}e^{2x+1}$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\int 3x\,e^{2x+1}\,dx = \frac{3}{2}x\,e^{2x+1} - \frac{3}{2}\int e^{2x+1}\,dx$$
$$= \frac{3}{2}x\,e^{2x+1} - \frac{3}{4}e^{2x+1} + C$$

c $\int x\ln x\,dx$

الحل:

$\int x\ln x\,dx$

$u = \ln x \qquad dv = x\,dx$

$du = \frac{1}{x}dx \qquad v = \frac{x^2}{2}$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\int x\ln x\,dx = \frac{1}{2}x^2\ln x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,dx$$
$$= \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{2}\int x\,dx$$
$$= \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2 + C$$

تكرار التكامل بالأجزاء

يتطلَّب إيجاد بعض التكاملات استعمال التكامل بالأجزاء أكثر من مَرَّة

مثال (1)

أجد: $\int x^2 e^{2x}\, dx$.

أفترض أنَّ: $u = x^2$، وأنَّ: $dv = e^{2x}\, dx$

. ومن ثَمَّ، فإنَّ:

$u = x^2 \qquad dv = e^{2x}\, dx$

$du = 2x\, dx \qquad v = \int e^{2x}\, dx = \frac{1}{2} e^{2x}$

إذن:

صيغة التكامل بالأجزاء

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du$$

بالتعويض

$$\int x^2 e^{2x}\, dx = \frac{1}{2} x^2 e^{2x} - \int \frac{1}{2} e^{2x} \times 2x\, dx$$

بالتبسيط

$$= \frac{1}{2} x^2 e^{2x} - \int x e^{2x}\, dx \quad \dots (1)$$

لإيجاد التكامل: $\int x e^{2x}\, dx$، أستعمل التكامل بالأجزاء مَرَّة أخرى

أفترض أنَّ: $u = x$، وأنَّ: $dv = e^{2x}\, dx$.

ومن ثَمَّ، فإنَّ:

$u = x \qquad dv = e^{2x}\, dx$

$du = dx \qquad v = \int e^{2x}\, dx = \frac{1}{2} e^{2x}$

إذن:

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du$$ صيغة التكامل بالأجزاء

بالتعويض

$$\int x e^{2x}\, dx = \frac{1}{2} x e^{2x} - \int \frac{1}{2} e^{2x}\, dx$$

تكامل الاقتران الأُسِّي الطبيعي

$$= \frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + C \dots (2)$$

بتعويض المعادلة (2) في المعادلة (1)،

يصبح التكامل الأصلي في الصورة الآتية:

بالتعويض

$$\int x^2 e^{2x}\, dx = \frac{1}{2} x^2 e^{2x} - \left(\frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x}\right) + C$$

بالتبسط

$$= \frac{1}{2} x^2 e^{2x} - \frac{1}{2} x e^{2x} + \frac{1}{4} e^{2x} + C$$

مثال (2) تحقق من فهمك صفحة 64

أجد كُلًّا من التكاملين الآتيين:

a) $\int x^2 \sin x \, dx$ b) $\int x^3 e^{4x} \, dx$

الحل

a)

$\int x^2 sinx dx$

$= -x^2 cosx + \int 2x cosx dx$

$u = 2x \quad dv = cosx dx$

$u = x^2 \quad dv = sinx dx$

$du = 2x dx \quad v = -cosx$

$\int x^2 sinx dx$

$= -x^2 cosx - \int -2x cosx dx$

$du = 2dx \quad v = sinx$

$\int x^2 sinx dx$

$= -x^2 cosx + 2x sinx - \int 2 sinx dx$

$= -x^2 cosx + 2x sinx + 2cosx + C$

b)

$u = x^3 \quad dv = e^{4x} dx$

$du = 3x^2 dx \quad v = \frac{1}{4} e^{4x}$

$\int x^3 e^{4x} dx = \frac{1}{4} x^3 e^{4x} - \int \frac{3}{4} x^2 e^{4x} dx$

$u = \frac{3}{4} x^2 \quad dv = e^{4x} dx$

$du = \frac{3}{2} x dx \quad v = \frac{1}{4} e^{4x}$

$\int x^3 e^{4x} dx$

$= \frac{1}{4} x^3 e^{4x} - \frac{3}{16} x^2 e^{4x} + \int \frac{3}{8} x e^{4x} dx$

$u = \frac{3}{8} x \quad dv = e^{4x} dx$

$du = \frac{3}{8} dx \quad v = \frac{1}{4} e^{4x}$

$\int x^3 e^{4x} dx$

$= \frac{1}{4} x^3 e^{4x} - \frac{3}{16} x^2 e^{4x}$

$+ \frac{3}{32} x e^{4x} - \int \frac{3}{32} e^{4x} dx$

$= \frac{1}{4} x^3 e^{4x} - \frac{3}{16} x^2 e^{4x} + \frac{3}{32} x e^{4x}$

$- \frac{3}{128} e^{4x} + C$

مثال (3)

أوجد: $\int x^2 \cos x \, dx$

الحل

$$\int x^2 \cos x \, dx$$

$u = x^2 \qquad dv = \cos x \, dx$

$du = 2x \, dx \qquad v = \sin x$

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

$$\int x^2 \cos x \, dx = x^2 \sin x - 2\int x \sin x \, dx$$

نستخدم الاجزاء مرّة ثانية لإيجاد:

$$\int x \sin x \, dx$$

$u = x \qquad dv = \sin x \, dx$

$du = dx \qquad v = -\cos x$

$$\int x \sin x \, dx = -x\cos x - \int -\cos x \, dx = -x\cos x + \sin x$$

$$\int x^2 \cos x \, dx$$

$$= x^2 \sin x - 2(-x\cos x + \sin x)$$

$$= x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C$$

مثال (4)

جد $\int ln^2 x \, dx$

الحل

$u = ln^2 x \qquad dv = dx$

$du = 2\, ln\, x \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{2\, ln\, x}{x} dx \qquad v = x$

إذن،

$$\int ln^2 x \, dx = x\, ln^2 x - \int x \cdot \frac{2\, ln\, x}{x} dx$$

$$= x\, ln^2 x - 2\int ln\, x \, dx$$

$$\int \ln x \, dx$$

أفترض أنَّ: $u = \ln x$، وأنَّ: $dv = dx$.

ومن ثَمَّ، فإنَّ:

$u = \ln x \qquad dv = dx$

$du = \frac{1}{x} dx \qquad v = \int dx = x$

إذن:

صيغة التكامل بالأجزاء

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

بالتعويض

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - \int x \times \frac{1}{x} dx$$

بالتبسيط

$$= x \ln x - \int dx$$

تكامل 1

$$= x \ln x - x + C$$

$$= x\, ln^2 x - 2x\, ln\, x + 2x + C$$

تكرار التكامل بالأجزاء باستعمال طريقة الجدول

تعلَّمْتُ في مثال سابق أنَّه يُمكِن إيجاد تكامل في صورة: $\int f(x)g(x)\,dx$، وذلك بتكرار استعمال التكامل بالأجزاء إذا أمكن اشتقاق f بصورة مُتكرِّرة حتى يصبح 0، ومُكامَلة $g(x)$ على نحوٍ مُتكرِّر بسهولة. ولكنْ، إذا تطلَّب الأمر تكرار التكامل الأجزاء مرّات عديدة، فإنَّ ذلك يجعل إيجاد الناتج عملية مُعقدة، تتطلب إجراء كثير من الخطوات. وفي هذه الحالة، يُمكِن استعمال **طريقة الجدول** لتنظيم خطوات الحلِّ

ملاحظة:

يُمكِن استعمال طريقة الجدول لإيجاد التكاملات التي صورها:

- $\int f(x)\sin ax\,dx$
- $\int f(x)\cos ax\,dx$
- $\int f(x)\,(ax+b)^n\,dx$
- $\int f(x)\,e^{ax}\,dx$

حيث: $f(x)$ كثير حدود، و $a \neq 0$، و $n > 0$.

مثال (1)

أجد: $\int x^3 \sin x\,dx$

أفترض أنَّ: $f(x) = x^3$، وأنَّ: $g(x) = \sin x$، ثم أتَّبِع الخطوتين الآتيتين:

الخطوة 1: أنشِئ جدولًا للمشتقات والتكاملات المُتكرِّرة.

تكامل $g(x)$ بصورة مُتكرِّرة	إشارة الضرب	اشتقاق $f(x)$ بصورة مُتكرِّرة
$\sin x$		x^3
$-\cos x$	$(+)$	$3x^2$
$-\sin x$	$(-)$	$6x$
$\cos x$	$(+)$	6
$\sin x$	$(-)$	0
	$(+)\int$	

أستمرُّ في الاشتقاق حتى تصبح المشتقة صفرًا.

الخطوة 2: أجمع نواتج ضرب الاقترانات المرتبطة بأسهم. لحلِّ التكامل، أجمع نواتج ضرب الاقترانات المرتبطة بالأسهم، وَفقًا لإشارة العملية المُحدَّدة لكل سهم، كما يأتي:

$$\int x^3 \sin x\,dx$$
$$= -x^3\cos x + 3x^2\sin x + 6x\cos x - 6\sin x + C$$

مثال (2) تحقق من فهمك **صفحة 67**

أجد كُلًّا من التكاملين الآتيين:

a) $\int x^4 \cos 4x \, dx$ b) $\int x^5 e^x \, dx$

الحل

a)

افرض أن: $g(x) = \cos 4x$ ، $f(x) = x^4$ ،

استخدم طريقة الجدول للتكامل بالأجزاء:

$f(x)$ ومشتقاته المتكررة		$g(x)$ وتكاملاته المتكررة
		$\cos 4x$
x^4	+	$\frac{1}{4}\sin 4x$
$4x^3$	-	$-\frac{1}{16}\cos 4x$
$12x^2$	+	$-\frac{1}{64}\sin 4x$
$24x$	-	$\frac{1}{256}\cos 4x$
24	+	$\frac{1}{1024}\sin 4x$
0		

$$\int x^4 \cos 4x \, dx =$$

$$\frac{1}{4}x^4 \sin 4x + \frac{1}{4}x^3 \cos 4x -$$

$$\frac{3}{16}x^2 \sin 4x - \frac{3}{32}x \cos 4x + \frac{3}{128}\sin 4x + C$$

b

افرض أن: $f(x) = x^5, \quad g(x) = e^x$

استخدم طريقة الجدول للتكامل بالأجزاء:

$f(x)$ ومشتقاته المتكررة		$g(x)$ وتكاملاته المتكررة
		e^x
x^5	+	e^x
$5x^4$	-	e^x
$20x^3$	+	e^x
$60x^2$	-	e^x
$120x$	+	e^x
120	-	e^x
0		

$$\int x^5 e^x dx =$$

$$e^x(x^5 - 5x^4 + 20x^3 - 60x^2 + 120x - 120) + C$$

مثال (3)

جد قيمة $\int (x^2 - 5x) e^x \, dx$

$x^2 - 5x$	+	e^x
$2x - 5$	−	e^x
2	+	e^x
0		e^x

$$\int (x^2-5x)e^x\,dx$$

$$= (x^2-5x)e^x - (2x-5)e^x + 2e^x + C$$

$$= (x^2-7x+7)e^x + C$$

مثال (4)

جد $\int (x^2-x)\sin 2x\,dx$

الحل

$f(x) = x^2 - x \qquad g(x) = \sin 2x$

$f(x)$ ومشتقاته المتكررة	الإشارة	$g(x)$ وتكاملاته المتكررة
$x^2 - x$		$\sin 2x$
$2x-1$	$+$	$-\dfrac{\cos 2x}{2}$
2	$-$	$-\dfrac{\sin 2x}{4}$
0	$+$	$-\dfrac{\cos 2x}{8}$

$$-\frac{1}{2}(x^2-x)\cos 2x + \frac{1}{4}(2x-1)\left(\frac{\sin 2x}{4}\right) - \frac{1}{4}\cos 2x + C$$

مثال (5)

جد $\int x^2(2x+1)^5\,dx$

$f(x) = x^2 \qquad g(x) = (2x+1)^5$

الحل

استخدم طريقة الجدول للتكامل بالأجزاء:

$f(x)$ ومشتقاته المتكررة	الإشارة	$g(x)$ وتكاملاته المتكررة
x^2		$(2x+1)^5$
$2x$	$+$	$\dfrac{(2x+1)^6}{12}$
2	$-$	$\dfrac{(2x+1)^7}{84}$
0	$+$	$\dfrac{(2x+1)^8}{672}$

$$\frac{x^2}{12}(2x+1)^6 - \frac{1}{42}x(2x+1)^7 + \frac{(2x+1)^8}{336} + c$$

مثال (6)

جد قيمة التكامل $\int x^2 e^{-2x}\,dx$

x^2	$+$	e^{-2x}
$2x$	$-$	$\frac{e^{-2x}}{-2}$
2	$+$	$\frac{e^{-2x}}{4}$
0		$\frac{e^{-2x}}{-8}$

$$\int x^2 e^{-2x}\,dx = -\frac{1}{2}x^2 e^{-2x}$$

$$-\frac{1}{2}x\,e^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + C$$

تطبيقات اقتصادية

ملاحظة :

التكلفة الكلية $= C(x)$
التكلفة الحدية $= C'(x)$

الايراد الكلي $= R(x)$
الايراد الحدي $= R'(x)$

الربح الكلي $= P(x)$

الربح الحدي $= P'(x)$

$$\int C'(x)\,dx = C(x) + C$$

$$\int R'(x)\,dx = R(x) + C$$

$$\int P'(x)\,dx = P(x) + C$$

مثال (1)

من الحياة

الربح الحدِّي:

يُمثِّل الاقتران: $P'(x) = 1000x^2 e^{-0.2x}$ الربح الحـدِّي (بالدينار) لـكل مُكيِّـف تبيعه إحدى الشركات، حيث x عدد المُكيِّفات المَبيعة، و $P(x)$ مقدار الربح بالدينار عند بيع x مُكيِّفًا. أجد اقتران الربح $P(x)$ علمًا بأنَّ $P(0) = -2000$.

الحل

الخطوة 1: أجد تكامل الاقتران: $P'(x)$.

$$P(x) = \int P'(x)\,dx$$

$$P(x) = \int 1000x^2 e^{-0.2x}\,dx$$

أُلاحِـظ أنَّه يُمكِـن إيجاد التكامـل بالأجزاء باسـتعمال طريقة الجدول؛ لذا أُنشِـئ جدولًا للمشتقات والتكاملات المُتكرِّرة.

تكامل $g(x)$ بصورة مُتكرِّرة	إشارة الضرب	اشتقاق $f(x)$ بصورة مُتكرِّرة
$e^{-0.2x}$		$1000x^2$
$-5e^{-0.2x}$	$(+)$	$2000x$
$25\,e^{-0.2x}$	$(-)$	2000
$-125e^{-0.2x}$	$(+)$	0
	$(-)\int$	

لحِلّ التكامل، أجمع نواتج ضرب الاقترانات المرتبطة بالأسهم، وَفقًا لإشارة العملية المُحدَّدة لكل سهم، كما يأتي:

$$P(x) = \int 1000x^2\, e^{-0.2x}\, dx$$

$$= -5000x^2\, e^{-0.2x} - 50000x\, e^{-0.2x} - 250000e^{-0.2x} + C$$

الخطوة 2: أجد ثابت التكامل C.

لإيجاد ثابت التكامل C، أستعمل الشرط الأوَّلي المعطى في المسألة، وهو: $P(0) = -2000$.

قاعدة الاقتران

$$P(x) = -5000x^2\, e^{-0.2x} - 50000x\, e^{-0.2x} - 250000e^{-0.2x} + C$$

بتعويض $x = 0,$

$P(0) = -2000$

$$-2000 = -5000(0)^2\, e^{-0.2(0)} - 50000(0)\, e^{-0.2(0)} - 250000e^{-0.2(0)} + C$$

$C = 248000$ بحلّ المعادلة

إذن، اقتران الربح هو:

$$P(x) = -5000x^2\, e^{-0.2x} - 50000x\, e^{-0.2x} - 250000e^{-0.2x} + 248000$$

مثال (2) تحقق من فهمك صفحة 69

التكلفة الحدِّية

يُمثِّل الاقتران: $C'(x) = (0.1x + 1)e^{0.03x}$ التكلفة الحدِّية لكل قطعة (بالدينار) تُنتَج في إحدى الشركات حيث x عدد القطع المُنتَجة، و $C(x)$ تكلفة إنتاج x قطعة بالدينار. أجد اقتران التكلفة $C(x)$، علمًا بأنَّ $C(10) = 200$.

الحل

$$C(x) = \int (0.1x + 1)e^{0.03x}\, dx$$

$$u = 0.1x + 1 \qquad dv = e^{0.03x}\, dx$$

$$du = 0.1\, dx \qquad v = \frac{1}{0.03}e^{0.03x}$$

$$\int (0.1x+1)e^{0.03x}dx$$

$$= (0.1x+1)\left(\frac{1}{0.03}e^{0.03x}\right) - \int \frac{0.1}{0.03}e^{0.03x}dx$$

$$= \frac{10}{3}(x+10)e^{0.03x} - \frac{1000}{9}e^{0.03x} + C$$

$$C(10) = \frac{200}{3}e^{0.3} - \frac{1000}{9}e^{0.3} + C = 200$$

$$\Rightarrow C \approx 260$$

$$\Rightarrow C(x) = \frac{10}{3}e^{0.03x}\left(x - \frac{70}{3}\right) + 260$$

التكامل بالأجزاء لتكاملات محدودة

يُمكِن إيجاد تكاملات محدودة باستخدام طريقة الأجزاء، وذلك بإجراء التكامل أوَّلًا، ثم التعويض في حدود التكامل باستعمال الصيغة الآتية:

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du$$

مثال (1)

أجد قيمة: $\int_1^2 x^3 \ln x\, dx$.

أفترض أنَّ: $u = \ln x$، وأنَّ: $dv = x^3\,dx$.

$u = \ln x \qquad dv = x^3\,dx$

$du = \frac{1}{x}dx \qquad v = \int dx = \frac{1}{4}x^4$

إذن:

صيغة التكامل المحدود بالأجزاء

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du$$

بالتعويض

$$\int_1^2 x^3 \ln x\, dx$$

$$= \frac{1}{4}x^4 \ln x\Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{4}x^4 \times \frac{1}{x}\,dx$$

بالتبسيط

$$= \frac{1}{4}x^4 \ln x\Big|_1^2 - \frac{1}{4}\int_1^2 x^3\,dx$$

تكامل اقتران القوَّة

$$= \frac{1}{4}x^4 \ln x\Big|_1^2 - \frac{1}{16}x^4\Big|_1^2$$

بالتعويض

$$= (4\ln 2 - \frac{1}{4}\ln 1) - \frac{1}{16}(2^4 - 1^4)$$

$$= 4\ln 2 - \frac{15}{16}$$ بالتبسيط

مثال (2) تحقق من فهمك صفحة 70

أجد كُلًّا من التكاملين الآتيين:

a) $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}\,dx$ b) $\int_0^1 xe^{-2x}\,dx$

الحل

a)

$u = \ln x \qquad dv = x^{-2}dx$

$du = \frac{1}{x}dx \qquad v = -\frac{1}{x}$

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx = -\frac{\ln x}{x}\Big|_1^e + \int_1^e x^{-2}dx$$

$$= -\frac{\ln x}{x}\Big|_1^e + (-\frac{1}{x})\Big|_1^e$$

$$= -\frac{1}{e} - \frac{1}{e} + 1 = 1 - \frac{2}{e}$$

---

b)

$u = x \qquad dv = e^{-2x}dx$

$du = dx \qquad v = -\frac{1}{2}e^{-2x}$

$$\int_0^1 xe^{-2x}dx$$

$$= -\frac{1}{2}xe^{-2x}\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{2}e^{-2x}dx$$

$$= -\frac{1}{2}xe^{-2x}\Big|_0^1 + -\frac{1}{4}e^{-2x}\Big|_0^1$$

$$= -\frac{e^{-2}}{2} - \frac{e^{-2}}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} - \frac{3}{4e^2}$$

مثال (3)

أوجد: $\int_{-2}^{0} \frac{x}{e^x}\,dx$

الحل

$$\int_{-2}^{0} x\,e^{-x}\,dx$$

$u = x \qquad dv = e^{-x}\,dx$

$du = dx \qquad v = -e^{-x}$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\int_{-2}^{0} x\,e^{-x}\,dx$$

$$= -[x\,e^{-x}]_{-2}^{0} - \int_{-2}^{0} -e^{-x}\,dx$$

$$= -[x\,e^{-x}]_{-2}^{0} - [e^{-x}]_{-2}^{0}$$

$$= -(0 + 2e^2) - (1 - e^2)$$

$$= -2e^2 - 1 + e^2$$

$$= -e^2 - 1$$

مثال (4)

اوجد $\int_0^3 x\sqrt{x+1}\,dx$

الحل

$$\int_0^3 x\sqrt{x+1}\,dx$$

$u = x \qquad dv = (x+1)^{\frac{1}{2}}dx$

$du = dx \qquad v = \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\int_0^3 x\sqrt{x+1}\,dx$$

$$= \left[\frac{2x}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^3 - \frac{2}{3}\int_0^3 (x+1)^{\frac{3}{2}}\,dx$$

$$= \frac{2}{3}\left[x(x+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^3 - \frac{4}{15}\left[(x+1)^{\frac{5}{2}}\right]_0^3$$

$$= \frac{2}{3}\left[3\times(4)^{\frac{3}{2}}\right] - \frac{4}{15}\left[4^{\frac{5}{2}} - 1\right] = \frac{116}{15}$$

التكامل بالأجزاء، والتكامل بالتعويض

أحُلُّ بعض التكاملات باستعمال طريقة التعويض وطريقة الأجزاء معًا.

التكامل بطريقة الأجزاء، واختيار u

أمثلة	اختيار u	الاقترانان المضروبان
$x\cos x$ $x^2\sin x$	x^n	x^n، حيث n عدد صحيح موجب، مضروبًا في اقتران مثلثي.
xe^x x^3e^{-x}	x^n	x^n، حيث n عدد صحيح موجب، مضروبًا في اقتران أُسّي طبيعي.
$x\ln x$ $x^{2/3}\ln x$	الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي	x^n، حيث n عدد حقيقي، مضروبًا في اقتران لوغاريتمي طبيعي
$e^x\cos x$ $e^{-x}\sin x$	أيٌّ منهما	اقتران أُسّي طبيعي ، مضروبًا في اقتران مثلثي.

مثال (1)

أجد الاقتران: $\int e^{\sqrt{x}}\,dx$.

الخطوة 1: أُعوِّض.

أفترض أنَّ: $a=\sqrt{x}$. ومن ثَمَّ، فإنَّ:

$$\frac{da}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow$$

$$dx=2\sqrt{x}\,da \Rightarrow dx=2a\,da$$

إذن:

بتعويض $a=\sqrt{x}\,,\ dx=2a\,da$

$$\int e^{\sqrt{x}}dx=\int e^{a}\times 2a\,da$$

بإعادة الترتيب

$$=\int 2a\,e^{a}\,da$$

الخطوة 2: أجد ناتج التكامل بالأجزاء.

أفترض أنَّ: $u=2a$، وأنَّ: $dv=e^{a}\,da$. ومن ثَمَّ، فإنَّ:

$u=2a \qquad dv=e^{a}\,da$

$du=2da \qquad v=\int e^{a}\,da=e^{a}$

إذن:

صيغة التكامل بالأجزاء $\int u\,dv=uv-\int v\,du$

بالتعويض $\int 2a\,e^{a}\,da=2ae^{a}-\int 2\,e^{a}\,da$

تكامل e^{a} المضروب في ثابت $=2ae^{a}-2\,e^{a}+C$

بتعويض $a=\sqrt{x}$ $=2\sqrt{x}\,e^{\sqrt{x}}-2\,e^{\sqrt{x}}+C$

مثال (2) تحقق من فهمك صفحة 71

أجد قيمة كلٍّ من التكاملين الآتيين:

a) $\int (x^3 + x^5) \sin x^2 \, dx$

b) $\int x^5 e^{x^2} \, dx$

الحل

a)

$$\int (x^3 + x^5)\sin x^2 dx$$

$$= \int x^3 \sin x^2 dx + \int x^5 \sin x^2 dx$$

نجد كل تكامل على حدة. فنجد التكامل الأيسر كما يأتي:

$$y = x^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{dy}{2x}$$

$$\int x^3 \sin x^2 dx$$

$$= \int x^3 \sin y \frac{dy}{2x} = \frac{1}{2}\int x^2 \sin y dy$$

$$= \frac{1}{2}\int y \sin y dy$$

$u = y \qquad dv = \sin y$

$du = dy \qquad v = -\cos y$

$$\int y \sin y dy = -y\cos y - \int -\cos y dy$$

$$\int x^3 \sin x^2 dx$$

$$= -\frac{1}{2}x^2 \cos x^2 + \frac{1}{2}\sin x^2 + C$$

ونجد التكامل الأيمن كما يأتي

$$\int x^5 \sin x^2 dx = \int x^5 \sin y \frac{dy}{2x}$$

$$= \frac{1}{2}\int x^4 \sin y dy \quad = \frac{1}{2}\int y^2 \sin y dy$$

$u = y^2 \qquad dv = \sin y$

$du = 2y dy \qquad v = -\cos y$

$$\int y^2 \sin y dy = -y^2 \cos y - \int -2y\cos y dy$$

$$= -y^2\cos y + 2y \sin y - 2\int \sin y dy$$

$$= -y^2 \cos y + 2y\sin y + 2\cos y$$

$$\int x^5 \sin x^2 dx = \frac{-1}{2}x^4 \cos x^2 + x^2 \sin x^2 + \cos x^2 + C$$

$$\int (x^3 + x^5)\sin x^2 dx = -\frac{1}{2}x^2\cos x^2 + \frac{1}{2}\sin x^2$$

$$-\frac{1}{2}x^4 \cos x^2 + x^2 \sin x^2 + \cos x^2 + C$$

b)

$$y = x^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{dy}{2x}$$

$$\int x^5 e^{x^2} dx = \int x^5 e^y \frac{dy}{2x} =$$

$$\int \frac{1}{2} x^4 e^y dy = \frac{1}{2} \int y^2 e^y dy$$

$$u = y^2 \qquad dv = e^y dy$$

$$du = 2y dy \qquad v = e^y$$

$$\int y^2 e^y dy = y^2 e^y - \int 2y e^y dy$$

$$= y^2 e^y - 2y e^y + \int 2 e^y dy$$

$$= y^2 e^y - 2y e^y + 2e^y = (y^2 - 2y + 2)e^y$$

$$\int x^5 e^{x^2} dx = (\frac{1}{2} x^4 - x^2 + 1)e^{x^2} + C$$

مثال (3)

جد التكامل

$$\int \sin 2x \, e^{\cos x}$$

الحل

$$a = \cos x \qquad da = -\sin x \, dx$$

$$\int 2\sin x \cos x \, e^a \frac{da}{-\sin x}$$

$$= -2\int \cos x \, e^a \, da$$

$$-2\int a e^a \, da$$ يحل بالاجزاء

$$u = a \qquad dv = e^u$$

$$du = da \qquad v = e^u$$

$$a e^a - \int e^a \, da = a e^a - e^a$$

$$= \cos x \; e^{\cos x} - e^{\cos x} + c$$

أتدرّب وأحُلُّ المسائل

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1 $\int (x+1)\cos x \, dx$

$u = x+1 \qquad dv = \cos x dx$

$du = dx \qquad v = \sin x$

$\int (x+1)\cos x dx$

$= (x+1)\sin x - \int \sin x dx$

$= (x+1)\sin x + \cos x + C$

2 $\int x e^{x/2} \, dx$

$u = x \qquad dv = e^{\frac{1}{2}x} dx$

$du = dx \qquad v = 2e^{\frac{1}{2}x}$

$\int x e^{\frac{1}{2}x} dx = 2xe^{\frac{1}{2}x} - \int 2e^{\frac{1}{2}x} dx$

$= 2xe^{\frac{1}{2}x} - 4e^{\frac{1}{2}x} + C$

3 $\int (2x^2 - 1) e^{-x} \, dx$

$u = 2x^2 - 1 \qquad dv = e^{-x} dx$

$du = 4x dx \qquad v = -e^{-x}$

$\int (2x^2-1)e^{-x}dx$

$= -(2x^2-1)e^{-x} + \int 4xe^{-x}dx$

$u = 4x \qquad dv = e^{-x}dx$

$du = 4dx \qquad v = -e^{-x}$

$\int (2x^2-1)e^{-x}dx$:

$= -(2x^2-1)e^{-x} - 4xe^{-x} + \int 4e^{-x}dx$

$= -(2x^2-1)e^{-x} - 4xe^{-x} - 4e^{-x} + C$

$= -e^{-x}(2x^2+4x+3) + C$

4 $\int \ln\sqrt{x} \, dx$

$\int \ln\sqrt{x} dx = \int \frac{1}{2}\ln x dx$

$u = \ln x \qquad dv = \frac{1}{2}dx$

$du = \frac{1}{x}dx \qquad v = \frac{1}{2}x$

$\int \frac{1}{2}\ln x dx = \frac{1}{2}x\ln x - \int \frac{1}{2}dx$

$= \frac{1}{2}x\ln x - \frac{1}{2}x + C$

5 $\int x \sin x \cos x \, dx$

$$\int x\sin x\cos x\,dx = \int \frac{1}{2}x\sin 2x\,dx$$

$u = \frac{1}{2}x \qquad dv = \sin 2x\,dx$

$du = \frac{1}{2}dx \qquad v = -\frac{1}{2}\cos 2x$

$$\int x\sin x\cos x\,dx$$

$$= -\frac{1}{4}x\cos 2x + \int \frac{1}{4}\cos 2x\,dx$$

$$= -\frac{1}{4}x\cos 2x + \frac{1}{8}\sin 2x + C$$

6 $\int x \sec x \tan x \, dx$

$$\int x\sin x\cos x\,dx = \int \frac{1}{2}x\sin 2x\,dx$$

$u = \frac{1}{2}x \qquad dv = \sin 2x\,dx$

$du = \frac{1}{2}dx \qquad v = -\frac{1}{2}\cos 2x$

$$\int x\sin x\cos x\,dx$$

$$= -\frac{1}{4}x\cos 2x + \int \frac{1}{4}\cos 2x\,dx$$

$$= -\frac{1}{4}x\cos 2x + \frac{1}{8}\sin 2x + C$$

7 $\int \frac{x}{\sin^2 x}\,dx$

$$\int \frac{x}{\sin^2 x}dx = \int x\csc^2 x\,dx$$

$u = x \qquad dv = \csc^2 x\,dx$

$du = dx \qquad v = -\cot x$

$$\int x\csc^2 x\,dx$$

$$= -x\cot x + \int \cot x\,dx$$

$$= -x\cot x + \int \frac{\cos x}{\sin x}dx$$

$$= -x\cot x + \ln|\sin x| + C$$

8 $\int \frac{\ln x}{x^3}\,dx$

$u = \ln x \qquad dv = x^{-3}dx$

$du = \frac{1}{x}dx \qquad v = -\frac{1}{2}x^{-2}$

$$\int x^{-3}\ln x\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}x^{-2}\ln x - \int -\frac{1}{2}x^{-2}\frac{1}{x}dx$$

$$= -\frac{1}{2}x^{-2}\ln x + \int \frac{1}{2}x^{-3}dx$$

$$= -\frac{1}{2}x^{-2}\ln x - \frac{1}{4}x^{-2} + C$$

$$= -\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + C$$

9 $\int 2x^2 \sec^2 x \tan x \, dx$

$u = 2x^2 \qquad dv = \sec^2 x \tan x \, dx$

$du = 4x \, dx \qquad v = \frac{1}{2}\tan^2 x$

ملاحظة: لإيجاد v استخدمنا طريقة التعويض،

حيث: $y = \tan x \, , dx = \frac{dy}{\sec^2 x}$ ومنه:

$$v = \int \sec^2 x \tan x \, dx = \int \sec^2 x \, y \frac{dy}{\sec^2 x}$$

$$= \int y \, dy = \frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}\tan^2 x$$

$$\int 2x^2 \sec^2 x \tan x \, dx$$

$$= 2x^2\left(\frac{1}{2}\tan^2 x\right) - \int 2x \tan^2 x \, dx$$

$u = 2x \qquad dv = \tan^2 x \, dx$

$\qquad\qquad = (\sec^2 x - 1)\,dx$

$du = 2dx \qquad v = \tan x - x$

$$\int 2x^2 \sec^2 x \tan x \, dx$$

$$= x^2\tan^2 x - \left(2x(\tan x - x) - \int 2(\tan x - x)\,dx\right)$$

$$= x^2\tan^2 x - 2x\tan x + 2x^2 + 2\int \left(\frac{\sin x}{\cos x} - x\right)dx$$

$$= x^2\tan^2 x - 2x\tan x + 2x^2 - 2\ln|\cos x| - x^2 + C$$

$$= x^2\tan^2 x - 2x\tan x + x^2 - 2\ln|\cos x| + C$$

10 $\int (x-2)\sqrt{8-x} \, dx$

$u = x - 2 \qquad dv = (8-x)^{\frac{1}{2}} dx$

$du = dx \qquad v = -\frac{2}{3}(8-x)^{\frac{3}{2}}$

$$\int (x-2)\sqrt{8-x}\,dx = (x-2)\times -\frac{2}{3}(8-x)^{\frac{3}{2}} - \int -\frac{2}{3}(8-x)^{\frac{3}{2}} dx$$

$$= -\frac{2}{3}(x-2)(8-x)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{15}(8-x)^{\frac{5}{2}} + C$$

11 $\int x^3 \cos 2x \; dx$

بالأجزاء 3 مرات، نستخدم طريقة الجدول:

$g(x)$ وتكاملاته المتكررة $f(x)$ ومشتقاته المتكررة

$f(x)$		$g(x)$
		$\cos 2x$
x^3	+	$\frac{1}{2}\sin 2x$
$3x^2$	-	$-\frac{1}{4}\cos 2x$
$6x$	+	$-\frac{1}{8}\sin 2x$
6	-	$\frac{1}{16}\cos 2x$
0		

$$\int x^3 \cos 2x \; dx = \frac{1}{2}x^3 \sin 2x + \frac{3}{4}x^2 \cos 2x - \frac{3}{4}x \sin 2x - \frac{3}{8}\cos 2x + C$$

---

12 $\int \frac{x}{6^x} \, dx$

$$\int \frac{x}{6^x} dx = \int x 6^{-x} dx$$

$u = x \qquad dv = 6^{-x} dx$

$du = dx \qquad v = -\frac{6^{-x}}{\ln 6}$

$$\int x 6^{-x} dx = -x\frac{6^{-x}}{\ln 6} + \int \frac{6^{-x}}{\ln 6} dx$$

$$= -x\frac{6^{-x}}{\ln 6} - \frac{6^{-x}}{(\ln 6)^2} + C$$

13 $\int e^{-x} \sin 2x \; dx$

$u = e^{-x} \qquad dv = \sin 2x dx$

$du = -e^{-x} dx \qquad v = \frac{-1}{2}\cos 2x$

$$\int e^{-x} \sin 2x dx$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-x}\cos 2x - \int \frac{1}{2}e^{-x}\cos 2x dx$$

$u = \frac{1}{2}e^{-x} \qquad dv = \cos 2x dx$

$du = -\frac{1}{2}e^{-x} dx \qquad v = \frac{1}{2}\sin 2x$

$$\int e^{-x} \sin 2x dx$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-x}\cos 2x - \frac{1}{4}e^{-x}\sin 2x$$

$$-\frac{1}{4}\int e^{-x}\sin 2x dx$$

$$\int e^{-x}\sin 2x dx + \frac{1}{4}\int e^{-x}\sin 2x dx$$

$$= -\frac{1}{4}e^{-x}(\sin 2x + 2\cos 2x) + C$$

$$\frac{5}{4}\int e^{-x}\sin 2x dx$$

$$= -\frac{1}{4}e^{-x}(\sin 2x + 2\cos 2x) + C$$

$$\int e^{-x}\sin 2x dx$$

$$= -\frac{1}{5}e^{-x}(\sin 2x + 2\cos 2x) + C$$

أجد قيمة كلٍّ من التكاملات الآتية:

14 $\int \cos x \ln \sin x \, dx$

$u = \ln \sin x \qquad dv = \cos x dx$

$du = \frac{\cos x}{\sin x} dx \qquad v = \sin x$

$$\int \cos x \ln \sin x dx$$
$$= \sin x \ln \sin x - \int \cos x dx$$
$$= \sin x \ln \sin x - \sin x + C$$

15 $\int e^x \ln(1 + e^x) \, dx$

$u = \ln(1+e^x) \qquad dv = e^x dx$

$du = \frac{e^x}{1+e^x} dx \qquad v = e^x$

$$\int e^x \ln(1+e^x) dx$$
$$= e^x \ln(1+e^x) - \int \frac{e^{2x}}{1+e^x} dx$$
$$= e^x \ln(1+e^x) - \int (e^x + \frac{-1}{1+e^x}) dx$$
$$= e^x \ln(1+e^x) - \int (e^x + \frac{-e^{-x}}{e^{-x}+1}) dx$$
$$= e^x \ln(1+e^x) - e^x - \ln(1+e^{-x}) + C$$

16 $\int_0^{\pi/2} e^x \cos x \, dx$

$$\int e^x \cos x dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) + C$$
$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx$$
$$= \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= \frac{1}{2} e^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2} e^0 = \frac{1}{2} e^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}$$

17 $\int_1^e \ln x^2 \, dx$

$$\int_1^e \ln x^2 dx = \int_1^e 2\ln x dx$$

$u = 2\ln x \qquad dv = dx$

$du = \frac{2}{x} dx \qquad v = x$

$$\int_1^e 2\ln x dx = 2x \ln x \Big|_1^e - \int_1^e 2dx$$
$$= 2x \ln x \Big|_1^e - 2x \Big|_1^e$$
$$= 2e \ln e - 2\ln 1 - 2e + 2$$
$$= 2e - 0 - 2e + 2 = 2$$

18 $\int_1^2 \ln(xe^x)\ dx$

$$\int_1^2 \ln(xe^x)dx = \int_1^2 (\ln x + \ln e^x)dx$$

$$= \int_1^2 (\ln x + x)dx = \int_1^2 \ln x dx + \int_1^2 x dx$$

يحل التكامل التالي بالاجزاء

$$\int_1^2 \ln x dx$$

$$u = \ln x \qquad dv = dx$$

$$du = \frac{1}{x}dx \qquad v = x$$

$$\int_1^2 \ln x dx = x\ln x|_1^2 - \int_1^2 dx$$

$$= x\ln x|_1^2 - x|_1^2 = 2\ln 2 - \ln 1 - 2 + 1$$

$$= 2\ln 2 - 1$$

$$\int_1^2 x dx = \frac{1}{2}x^2\Big|_1^2 = \frac{4}{2} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \int_1^2 \ln(xe^x)dx = 2\ln 2 - 1 + \frac{3}{2}$$

$$= 2\ln 2 + \frac{1}{2}$$

19 $\int_{\pi/12}^{\pi/9} x\sec^2 3x\ dx$

$$\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{9}} x\sec^2 3x dx$$

$$= \frac{1}{3}x\tan 3x\Big|_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{9}} - \int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{9}} \frac{1}{3}\tan 3x dx$$

$$= \frac{1}{3}x\tan 3x\Big|_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{9}} - \int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{9}} \frac{1}{3}\frac{\sin 3x}{\cos 3x}dx$$

$$u = x \qquad dv = \sec^2 3x dx$$

$$du = dx \qquad v = \frac{1}{3}\tan 3x$$

$$= \frac{1}{3}x\tan 3x\Big|_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{9}} + \frac{1}{9}\ln\cos 3x\Big|_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{9}}$$

$$= \frac{\pi}{27}\tan\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{36}\tan\frac{\pi}{4}$$

$$+ \frac{1}{9}\ln\cos\frac{\pi}{3} - \frac{1}{9}\ln\cos\frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{\pi\sqrt{3}}{27} - \frac{\pi}{36} + \frac{1}{9}\ln\frac{1}{2} - \frac{1}{9}\ln\frac{1}{\sqrt{2}}$$

20 $\int_1^e x^4 \ln x \, dx$

$u = \ln x \qquad dv = x^4 dx$

$du = \dfrac{dx}{x} \qquad v = \dfrac{1}{5}x^5$

$$\int_1^e x^4 \ln x dx = \frac{1}{5}x^5 \ln x\Big|_1^e - \int_1^e \frac{1}{5}x^4 dx$$

$$= \frac{1}{5}x^5 \ln x\Big|_1^e - \frac{1}{25}x^5\Big|_1^e$$

$$= \frac{1}{5}e^5 - 0 - \frac{1}{25}e^5 + \frac{1}{25} = \frac{4e^5+1}{25}$$

21 $\int_0^{\pi/2} x^2 \sin x \, dx$

نجد $\int x^2 \sin x \, dx$ باستخدام طريقة الجدول:

$g(x)$ وتكاملاته المتكررة $\quad f(x)$ ومشتقاته المتكررة

$f(x)$		$g(x)$
x^2		$\sin x$
$2x$	+	$-\cos x$
2	-	$-\sin x$
0	+	$\cos x$

$$\int x^2 \sin x \, dx$$

$$= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2\cos x + C$$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x \, dx$$

$$= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \pi - 2$$

22 $\int_0^1 x(e^{-2x} + e^{-x}) \, dx$

$u = x \qquad dv = (e^{-2x} + e^{-x})dx$

$du = dx \qquad v = -\dfrac{1}{2}e^{-2x} - e^{-x}$

$$\int_0^1 x(e^{-2x} + e^{-x})dx$$

$$= -\frac{1}{2}xe^{-2x} - xe^{-x}\Big|_0^1 - \int_0^1 \left(-\frac{1}{2}e^{-2x} - e^{-x}\right)dx$$

$$= -\frac{1}{2}xe^{-2x} - xe^{-x}\Big|_0^1 - \left(\frac{1}{4}e^{-2x} + e^{-x}\right)\Big|_0^1$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-2} - e^{-1} - \frac{1}{4}e^{-2} - e^{-1} + \frac{1}{4} + 1$$

$$= -\frac{3}{4}e^{-2} - 2e^{-1} + \frac{5}{4}$$

23 $\int_0^1 \dfrac{xe^x}{(1+x)^2} \, dx$

$u = xe^x \qquad dv = (1+x)^{-2}dx$

$du = (xe^x + e^x)dx$

$\quad = e^x(x+1)dx \qquad v = -(1+x)^{-1}$

$$\int_0^1 \frac{xe^x}{(1+x)^2}dx$$

$$= -xe^x(1+x)^{-1}\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{e^x(x+1)}{(1+x)}dx$$

$$= -\frac{xe^x}{1+x}\Big|_0^1 + e^x\Big|_0^1$$

$$= -\frac{e}{2} + e - 1 = \frac{1}{2}e - 1$$

24 $\int_0^1 x\,3^x\ dx$

$u = x \quad dv = 3^x dx$

$du = dx \quad v = \frac{3^x}{\ln 3}$

$$\int_0^1 x3^x dx = x\frac{3^x}{\ln 3}\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{3^x}{\ln 3}dx$$

$$= x\frac{3^x}{\ln 3}\Big|_0^1 - \frac{3^x}{(\ln 3)^2}\Big|_0^1$$

$$= \frac{3}{\ln 3} - \frac{3}{(\ln 3)^2} + \frac{1}{(\ln 3)^2} = \frac{3\ln 3 - 2}{(\ln 3)^2}$$

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

25 $\int x^3 e^{x^2}\ dx$

$y = x^2 \Rightarrow dx = \frac{dy}{2x}$

$$\int x^3 e^{x^2} dx = \int x^3 e^y \frac{dy}{2x}$$

$$= \int \frac{1}{2}x^2 e^y dy = \int \frac{1}{2} y e^y dy$$

$u = \frac{1}{2}y \quad dv = e^y dy$

$du = \frac{1}{2}dy \quad v = e^y$

$$\int \frac{1}{2} y e^y dy = \frac{1}{2} y e^y - \int \frac{1}{2} e^y dy$$

$$= \frac{1}{2} y e^y - \frac{1}{2} e^y + C$$

$$\int x^3 e^{x^2} dx = \frac{1}{2} x^2 e^{x^2} - \frac{1}{2} e^{x^2} + C$$

26 $\int \cos(\ln x)\ dx$

$y = \ln x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow dx = x\,dy$

$, \quad x = e^y$

$$\int \cos(\ln x) dx = \int x \cos y\, dy$$

$$= \int e^y \cos y\, dy$$

$$\int e^y \cos y\, dy = \frac{1}{2} e^y (\sin y + \cos y) + C$$

$$\Rightarrow \int \cos(\ln x) dx$$

$$=\frac{1}{2}e^{\ln x}(\sin\ln x+\cos\ln x)+C$$

$$=\frac{1}{2}x(\sin\ln x+\cos\ln x)+C$$

---

27 $\int x^3 \sin x^2\, dx$

$$y=x^2 \Rightarrow dx=\frac{dy}{2x}$$

$$\int x^3\sin x^2 dx=\int x^3 \sin y\frac{dy}{2x}$$

$$=\int\frac{1}{2}x^2\sin y dy=\int\frac{1}{2}y\sin y dy$$

$$u=\frac{1}{2}y \qquad dv=\sin y dy$$

$$du=\frac{1}{2}dy \qquad v=-\cos y$$

$$\int\frac{1}{2}y\sin y dy$$

$$=-\frac{1}{2}y\cos y+\int\frac{1}{2}\cos y dy$$

$$=-\frac{1}{2}y\cos y+\frac{1}{2}\sin y+C$$

$$\int x^3\sin x^2 dx$$

$$=-\frac{1}{2}x^2\cos x^2+\frac{1}{2}\sin x^2+C$$

28 $\int e^{\cos x} \sin 2x\, dx$

$$y=\cos x \Rightarrow dx=\frac{ay}{-\sin x}$$

$$\int e^{\cos x}\sin 2x dx$$

$$=\int e^{y}(2\sin x\cos x)\frac{dy}{-\sin x}$$

$$=\int -2ye^{y}dy$$

$$u=-2y \qquad dv=e^{y}dy$$

$$du=-2dy \qquad v=e^{y}$$

$$\int -2ye^{y}dy=-2ye^{y}+\int 2e^{y}dy$$

$$=-2ye^{y}+2e^{y}+C$$

$$\Rightarrow \int e^{\cos x}\sin 2x dx$$

$$=-2\cos x e^{\cos x}+2e^{\cos x}+C$$

$$u=\frac{1}{2}ye^y \qquad dv=\frac{1}{(y+1)^2}dy$$

$$du=\frac{1}{2}(ye^y+e^y)dy$$

$$=\frac{1}{2}e^y(y+1)dy \qquad v=\frac{-1}{y+1}$$

$$\int\frac{\frac{1}{2}ye^y}{(y+1)^2}dy=\frac{-ye^y}{2(y+1)}+$$

$$\int\frac{1}{y+1}\times\frac{1}{2}e^y(y+1)dy$$

$$=\frac{-ye^y}{2(y+1)}+\frac{1}{2}\int e^y dy$$

$$=\frac{-ye^y}{2(y+1)}+\frac{1}{2}e^y+C$$

$$\int\frac{x^3e^{x^2}}{(x^2+1)^2}dx=\frac{-x^2e^{x^2}}{2(x^2+1)}+$$

$$\frac{1}{2}e^{x^2}+C=\frac{e^{x^2}}{2(x^2+1)}+C$$

29 $\int \sin\sqrt{x}\;dx$

$$y=\cos x\Rightarrow dx=\frac{ay}{-\sin x}$$

$$\int e^{\cos x}\sin 2x\,dx$$

$$=\int e^y(2\sin x\cos x)\frac{dy}{-\sin x}$$

$$=\int -2ye^y dy$$

$$u=-2y \qquad dv=e^y dy$$

$$du=-2dy \qquad v=e^y$$

$$\int -2ye^y dy=-2ye^y+\int 2e^y dy$$

$$=-2ye^y+2e^y+C$$

$$\Rightarrow \int e^{\cos x}\sin 2x\,dx$$

$$=-2\cos x\,e^{\cos x}+2e^{\cos x}+C$$

---

30 $\int\frac{x^3e^{x^2}}{(x^2+1)^2}dx$

$$y=x^2\Rightarrow\frac{dy}{dx}=2x\Rightarrow dx=\frac{dy}{2x}$$

$$\int\frac{x^3e^{x^2}}{(x^2+1)^2}dx=\int\frac{x^3e^y}{(y+1)^2}\frac{dy}{2x}$$

$$=\int\frac{1}{2}x^2\frac{e^y}{(y+1)^2}dy=\int\frac{\frac{1}{2}ye^y}{(y+1)^2}dy$$

33 يتحرَّك جُسَــيْم في مسار مستقيم، وتعطى ســرعته المتجهة بالاقتران: $v(t) = t\,e^{-t/2}$، حيث t الزمن بالثواني و v سرعته المتجهة بالمتر لكل ثانية. إذا بدأ الجُسَيْم الحركة من نقطة الأصل فأجد موقعه بعد t ثانية.

$$s(t) = \int te^{-\frac{t}{2}}dt$$

$$u = t \qquad dv = e^{-\frac{t}{2}}dt$$

$$du = dt \qquad v = -2e^{-\frac{t}{2}}$$

$$s(t) = -2te^{-\frac{t}{2}} - \int -2e^{-\frac{t}{2}}dt$$

$$= -2te^{-\frac{t}{2}} - 4e^{-\frac{t}{2}} + C$$

$$s(0) = 0 - 4 + C$$

$$0 = 0 - 4 + C \Rightarrow C = 4$$

$$\Rightarrow s(t) = -2te^{-\frac{t}{2}} - 4e^{-\frac{t}{2}} + 4$$

في كلٍّ ممّا يأتي المشـــتقة الأولى للاقتران $f(x)$، ونقطة يمرُّ بها منحنى $y = f(x)$. أســتعمل المعلومات المعطاة لإيجاد قاعدة الاقتران $f(x)$:

34 $f'(x) = (x+2)\sin x\,;\,(0, 2)$

35 $f'(x) = 2xe^{-x}\,;\,(0, 3)$

34)

$$f(x) = \int (x+2)\sin x\,dx$$

$$u = x+2 \qquad dv = \sin x\,dx$$

$$du = dx \qquad v = -\cos x$$

$$f(x) = -(x+2)\cos x + \int \cos x\,dx$$

$$= -(x+2)\cos x + \sin x + C$$

$$f(0) = -2 + 0 + C$$

$$2 = -2 + 0 + C \Rightarrow C = 4$$

$$f(x) = -(x+2)\cos x + \sin x + 4$$

35)

$$f(x) = \int 2xe^{-x}dx$$

$$u = 2x \qquad dv = e^{-x}dx$$

$$du = 2dx \qquad v = -e^{-x}$$

$$f(x) = -2xe^{-x} + \int 2e^{-x}dx$$

$$= -2xe^{-x} - 2e^{-x} + C$$

$$f(0) = 0 - 2 + C$$

$$3 = -2 + C \Rightarrow C = 5$$

$$f(x) = -2xe^{-x} - 2e^{-x} + 5$$

36

دورة تدريبية: تقدَّمــت دعاء لدورة تدريبية مُتقدِّمــة في الطباعة. إذا كان عــدد الكلمات التــي تطبعها دعاء فــي الدقيقة يــزداد بمُعدَّل $N'(t) = (t+6)e^{-0.25t}$، حيث $N(t)$ عــدد الكلمات التي تطبعها دعاء في الدقيقة بعد t أســبوعًا من التحاقها بالدورة، فأجد $N(t)$، علمًا بــأنَّ دعاء كانت تطبع 40 كلمة في الدقيقة عند بَدْء الدورة.

الحل

$$N(t) = \int (t+6)e^{-0.25t}dt$$

$u = t+6 \qquad dv = e^{-0.25t}dt$

$du = dt \qquad v = -4e^{-0.25t}$

$$N(t) = -4(t+6)e^{-0.25t} + \int 4e^{-0.25t}dt$$

$$= -4(t+6)e^{-0.25t} - 16e^{-0.25t} + C$$

$$N(0) = -24 - 16 + C$$

$$40 = -24 - 16 + C \Rightarrow C = 80$$

$$\Rightarrow N(t) = -4(t+6)e^{-0.25t} - 16e^{-0.25t} + 80$$

مهارات التفكير العليا

37 تبرير: أُثبِت أنَّ:

$$\int_{1/2}^{3} x^2 \ln 2x \; dx = 9\ln 6 - \frac{215}{72}.$$

الحل

$u = \ln 2x \qquad dv = x^2 dx$

$du = \frac{1}{x}dx \qquad v = \frac{1}{3}x^3$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{3} x^2 \ln 2x dx$$

$$= \frac{1}{3}x^3 \ln 2x \Big|_{\frac{1}{2}}^{3} - \int_{\frac{1}{2}}^{3} \frac{1}{3}x^2 dx$$

$$= \frac{1}{3}x^3 \ln 2x \Big|_{\frac{1}{2}}^{3} - \frac{1}{9}x^3 \Big|_{\frac{1}{2}}^{3}$$

$$= 9\ln 6 - 3 + \frac{1}{72} = 9\ln 6 - \frac{215}{72}$$

---

38 تبرير:

أُثبِت أنَّ: $\int_{0}^{\pi/4} x \sin 5x \sin 3x \; dx = \frac{\pi - 2}{16}.$

الحل

$u = x \qquad dv = \sin 5x \sin 3x\, dx$

$= \frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 8x)\, dx$

$du = dx \qquad v = \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{16}\sin 8x$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \sin 5x \sin 3x\, dx$$

$$= x\left(\frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{16}\sin 8x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$-\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{16}\sin 8x\right) dx$$

$$= x\left(\frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{16}\sin 8x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$-\left(-\frac{1}{8}\cos 2x + \frac{1}{128}\cos 8x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{4}\right) + 0 - \frac{1}{128} - \frac{1}{8} + \frac{1}{128}$$

$$= \frac{\pi - 2}{16}$$

39 تبرير: إذا كان: $\int_0^a xe^{x/2}\, dx = 6$،

فأثبِت أنَّ a يُحقِّق المعادلة: $x = 2 + e^{-x/2}$.

الحل

$u = x \qquad dv = e^{\frac{1}{2}x} dx$

$du = dx \qquad v = 2e^{\frac{1}{2}x}$

$$\int_0^a xe^{\frac{1}{2}x}\, dx = 2xe^{\frac{1}{2}x}\Big|_0^a$$

$$-\int_0^a 2e^{\frac{1}{2}x}\, dx$$

$$= 2xe^{\frac{1}{2}x}\Big|_0^a - 4e^{\frac{1}{2}x}\Big|_0^a$$

$$= 2ae^{\frac{1}{2}a} - 4e^{\frac{1}{2}a} + 4$$

$$\Longrightarrow 2ae^{\frac{1}{2}a} - 4e^{\frac{1}{2}a} + 4 = 6$$

$$2ae^{\frac{1}{2}a} = 4e^{\frac{1}{2}a} + 2$$

بقسمة طرفي المعادلة على $2e^{\frac{1}{2}a}$ نحصل على

$$a = 2 + e^{-\frac{1}{2}a}$$

لذا فإن a يحقق المعادلة $x = 2 + e^{-\frac{x}{2}}$

40 تبرير: أجد: $\int (\ln x)^2 \, dx$ بطريقتين مختلفتين، مُبرِّرًا إجابتي.

الحل

الطريقة الأولى بالتعويض:

$$u=\ln x \Rightarrow \frac{du}{dx}=\frac{1}{x} \Rightarrow dx = x\,du, x=e^{u}$$

$$\int(\ln x)^2dx=\int u^2 x\,du=\int u^2 e^{u}du$$

بالأجزاء مرتين، نستخدم الجدول:

$f(x)$ ومشتقاته المتكررة		$g(x)$ وتكاملاته المتكررة
u^2		e^u
$2u$	+	e^u
2	-	e^u
0	+	e^u

$$\int u^2e^u du = e^u(u^2-2u+2)+C$$

$$\int(\ln x)^2dx$$

$$=e^{\ln x}((\ln x)^2-2\ln x+2)+C$$

$$=x((\ln x)^2-2\ln x+2)+C$$

الطريقة الثانية: بالأجزاء مباشرة:

$$u=(\ln x)^2 \qquad dv=dx$$

$$du=\frac{2\ln x}{x}dx \qquad v=x$$

$$\int(\ln x)^2dx = x(\ln x)^2-\int 2\ln x\,dx$$

$$u=2\ln x \qquad dv=dx$$

$$du=\frac{2}{x}dx \qquad v=x$$

$$\int(\ln x)^2dx = x(\ln x)^2-2x\ln x+\int 2dx$$

$$=x(\ln x)^2-2x\ln x+2x+C$$

تحدٍّ: أستعمل التكامل بالأجزاء لإثبات كلٍّ ممّا يأتي، حيث: n عدد صحيح موجب، و $a \neq 0$:

43 $\int x^n \ln x\, dx$

$$=\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}(-1+(n+1)\ln x)+C$$

44 $\int x^n e^{ax}\, dx$

$$=\frac{x^n e^{ax}}{a}-\frac{n}{a}\int x^{n-1}e^{ax}\,dx$$

الحل

43)

$$u = \ln x \qquad dv = x^n dx$$

$$du = \frac{1}{x}dx \qquad v = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$$

$$\int x^n \ln x dx = \frac{x^{n+1}\ln x}{n+1} - \int \frac{1}{n+1}x^n dx$$

$$= \frac{x^{n+1}\ln x}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}x^{n+1} + C$$

$$= \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}(-1 + (n+1)\ln x) + C$$

44)

$$u = x^n \qquad dv = e^{ax}dx$$

$$du = nx^{n-1}dx \qquad v = \frac{1}{a}e^{ax}$$

$$\int x^n e^{ax} dx = \frac{1}{a}x^n e^{ax} - \frac{n}{a}\int x^{n-1}e^{ax}dx$$

تمارين ومسائل كتاب التمارين صفحة 15

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1 $\int x \cos 4x \; dx$

$u = x \qquad dv = \cos 4x \, dx$

$du = dx \qquad v = \frac{1}{4} \sin 4x$

$$\int x \cos 4x \, dx$$

$$= \frac{1}{4} x \sin 4x - \int \frac{1}{4} \sin 4x \, dx$$

$$= \frac{1}{4} x \sin 4x + \frac{1}{16} \cos 4x + C$$

---

2 $\int x\sqrt{x+1} \; dx$

$u = x \qquad dv = (x+1)^{\frac{1}{2}} dx$

$du = dx \qquad v = \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}$

$$\int x\sqrt{x+1} dx =$$

$$\frac{2}{3} x(x+1)^{\frac{3}{2}} - \int \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} dx$$

$$= \frac{2}{3} x(x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{15}(x+1)^{\frac{5}{2}} + C$$

---

3 $\int x e^{-x} \; dx$

$u = x \qquad dv = e^{-x} dx$

$du = dx \qquad v = -e^{-x}$

$$\int x e^{-x} dx = -x e^{-x} - \int -e^{-x} dx$$

$$= -x e^{-x} - e^{-x} + C$$

---

4 $\int (x^2 + 1) \ln x \, dx$

$u = \ln x \qquad dv = (x^2 + 1) dx$

$du = \frac{1}{x} dx \qquad v = \frac{1}{3} x^3 + x$

$$\int (x^2 + 1) \ln x \, dx$$

$$= \left(\frac{1}{3} x^3 + x\right) \ln x - \int \frac{1}{x}\left(\frac{1}{3} x^3 + x\right) dx$$

$$= \left(\frac{1}{3}x^3 + x\right)\ln x - \int \left(\frac{1}{3}x^2 + 1\right)dx$$

$$= \left(\frac{1}{3}x^3 + x\right)\ln x - \frac{1}{9}x^3 - x + C$$

---

5 $\int \ln x^3 \, dx$

$$\int \ln x^3 \, dx = \int 3\ln x \, dx$$

$u = 3\ln x \qquad dv = dx$

$du = \frac{3}{x}dx \qquad v = x$

$$\int 3\ln x \, dx$$

$$= 3x\ln x - \int 3dx$$

$$= 3x\ln x - 3x + C$$

6 $\int e^{2x}\sin x \, dx$

$u = e^{2x} \qquad dv = \sin x \, dx$

$du = 2e^{2x}dx \qquad v = -\cos x$

$$\int e^{2x}\sin x \, dx$$

$$= -e^{2x}\cos x + \int 2e^{2x}\cos x \, dx$$

$u = 2e^{2x} \qquad dv = \cos x \, dx$

$du = 4e^{2x}dx \qquad v = \sin x$

$$\Rightarrow \int e^{2x}\sin x \, dx$$

$$= -e^{2x}\cos x + 2e^{2x}\sin x - \int 4e^{2x}\sin x \, dx$$

$$\Rightarrow \int e^{2x}\sin x \, dx$$

$$= -e^{2x}\cos x + 2e^{2x}\sin x - 4\int e^{2x}\sin x \, dx$$

$$\Rightarrow 5\int e^{2x}\sin x \, dx =$$

$$-e^{2x}\cos x + 2e^{2x}\sin x + C$$

$$\Rightarrow \int e^{2x}\sin x \, dx =$$

$$-\frac{1}{5}e^{2x}\cos x + \frac{2}{5}e^{2x}\sin x + C$$

$$\Rightarrow \int e^{2x}\sin x \, dx$$

$$= \frac{1}{5}e^{2x}(2\sin x - \cos x) + C$$

أجد قيمة كلٍّ من التكاملات الآتية:

7 $\int_1^e \ln x \, dx$

$u = \ln x \qquad dv = dx$

$du = \frac{1}{x} dx \qquad v = x$

$\int_1^e \ln x \, dx = x \ln x |_1^e -$

$\int_1^e dx = x \ln x |_1^e - x |_1^e$

$= e - e + 1 = 1$

8 $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} \, dx$

$u = \ln x \qquad dv = x^{-2} dx$

$du = \frac{1}{x} dx \qquad v = \frac{-1}{x}$

$\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} \, dx = \frac{-\ln x}{x}\Big|_1^2 + \int_1^2 x^{-2} \, dx$

$= \frac{-\ln x}{x}\Big|_1^2 - \frac{1}{x}\Big|_1^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln 2$

9 $\int_0^\pi x \cos \frac{1}{4} x \, dx$

$u = x \qquad dv = \cos \frac{1}{4} x \, dx$

$du = dx \qquad v = 4 \sin \frac{1}{4} x$

$\int_0^\pi x \cos \frac{1}{4} x \, dx = 4x \sin \frac{1}{4} x \Big|_0^\pi$
$- \int_1^2 4 \sin \frac{1}{4} x \, dx$

$= 4x \sin \frac{1}{4} x \Big|_0^\pi + 16 \cos \frac{1}{4} x \Big|_0^\pi$

$= \frac{4\pi}{\sqrt{2}} + \frac{16}{\sqrt{2}} - 16 = 2\sqrt{2}\pi + 8\sqrt{2} - 16$

11 $\int_1^e \ln(x+1) \, dx$

$u = \ln(x+1) \qquad dv = dx$

$du = \frac{1}{x+1} dx \qquad v = x$

$\int_1^e \ln(x+1) \, dx = x \ln(x+1) |_1^e$
$- \int_1^e \frac{x}{x+1} \, dx$

$= x \ln(x+1) |_1^e - \int_1^e \left(1 + \frac{-1}{x+1}\right) dx$

$= x \ln(x+1) |_1^e - (x - \ln(x+1)) |_1^e$

$= e \ln(e+1) - \ln 2 - (e - \ln(e+1))$
$+ (1 - \ln 2)$

$= (1+e) \ln(e+1) - 2 \ln 2 - e + 1$

12 $\int_0^1 x^2 e^x \, dx$

$f(x)$ ومشتقاته المتكررة		$g(x)$ وتكاملاته المتكررة
x^2		e^x
$2x$	$+$	e^x
2	$-$	e^x
0	$+$	e^x

$$\Rightarrow \int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + C$$

$$\Rightarrow \int_0^1 x^2 e^x \, dx = e^x(x^2 - 2x + 2)\Big|_0^1$$

$$= e - 2$$

13 أُثبِت أنَّ: $\int_2^4 \ln x \, dx = 6 \ln 2 - 2$.

$$u = \ln x \qquad dv = dx$$

$$du = \frac{1}{x} dx \qquad v = x$$

$$\int_2^4 \ln x \, dx = x \ln x \Big|_2^4 - \int_2^4 dx$$

$$= x \ln x \Big|_2^4 - x \Big|_2^4$$

$$= 4 \ln 4 - 2 \ln 2 - 2$$

$$= 8 \ln 2 - 2 \ln 2 - 2$$

$$= 6 \ln 2 - 2$$

اختبار نهاية الوحدة

أختار رمز الإجابة الصحيحة في كلٍّ ممّا يأتي:

1 قيمة: $\int_0^2 e^{2x}\, dx$ هي:

a) $e^4 - 1$ b) $e^4 - 2$

c) $2e^4 - 2$ d) $\frac{1}{2}e^4 - \frac{1}{2}$

$$\int_0^2 e^{2x} = \frac{1}{2}e^{2x}\Big|_0^2 = \frac{1}{2}e^4 - \frac{1}{2}\text{............}(d)$$

2 قيمة: $\int_{-4}^{4} (4 - |x|)\, dx$ هي:

a) 0 b) 4

c) 16 d) 8

$$\int_{-4}^{4}(4-|x|)dx$$

$$= \int_{-4}^{0}(4+x)dx + \int_0^4 (4-x)dx$$

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

$$= (4x + \frac{1}{2}x^2)\Big|_{-4}^{0} + (4x - \frac{1}{2}x^2)\Big|_0^4$$

$$= -(-16+8) + (16-8)$$

$$= 16\text{..................}(c)$$

5 $\int \frac{1}{\sqrt{e^x}}\, dx$

$$\int \frac{1}{\sqrt{e^x}}dx = \int e^{-\frac{1}{2}x}dx = -2e^{-\frac{1}{2}x} + C$$

6 $\int \left(\tan 2x + e^{3x} - \frac{1}{x}\right) dx$

$$= \int \left(-\frac{1}{2} \times \frac{-2\sin 2x}{\cos 2x} + e^{3x} - \frac{1}{x}\right)dx$$

$$= -\frac{1}{2}\ln|\cos 2x| + \frac{1}{3}e^{3x} - \ln|x| + C$$

7 $\int \csc^2 x\,(1 + \tan^2 x)\, dx$

$$= \int \left(\csc^2 x + \frac{1}{\sin^2 x} \times \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\right) dx$$

$$= \int (\csc^2 x + \sec^2 x)\, dx$$

$$= -\cot x + \tan x + C$$

---

8 $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+5}\, dx$

$$\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+5}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{2e^{2x}}{e^{2x}+5}\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln(e^{2x}+5) + C$$

---

9 $\displaystyle\int \frac{2x^2+7x-3}{x-2}\, dx$

$$\int \frac{2x^2+7x-3}{x-2}\, dx = \int \left(2x + 11 + \frac{19}{x-2}\right) dx$$

$$= x^2 + 11x + 19\ln|x-2| + C$$

---

10 $\displaystyle\int \sec^2(2x-1)\, dx$

$$\int \sec^2(2x-1)\, dx = \frac{1}{2}\tan(2x-1) + C$$

---

11 $\displaystyle\int \cot(5x+1)\, dx$

$$= \frac{1}{5}\int \frac{5\cos(5x+1)}{\sin(5x+1)}\, dx$$

$$= \frac{1}{5}\ln|\sin(5x+1)| + C$$

---

12 $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin x \cos x\, dx$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x = -\frac{1}{4}\cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= -\frac{1}{4}(-1-1) = \frac{1}{2}$$

---

13 $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^2 0.5x\, dx$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} (1+\cos x)\, dx$$

$$= \frac{1}{2}(x+\sin x)\Big|_0^{\pi} = \frac{1}{2}((\pi)+(0)) - 0 = \frac{\pi}{2}$$

---

14 $\displaystyle\int_0^{2} |x^3 - 1|\, dx$

$$=\frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{8}}\sin 4x\,dx$$

$$=-\frac{1}{8}\cos 4x\Big|_{0}^{\frac{\pi}{8}}=0-(-\frac{1}{8})=\frac{1}{8}$$

20 $$\int \frac{x-1}{x^2-2x-8}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{2(x-1)}{x^2-2x-8}dx$$

$$=\frac{1}{2}\ln|x^2-2x-8|+C$$

25 $$\int \sec^2 x\,\tan x\sqrt{1+\tan x}\,dx$$

$$u=1+\tan x\Rightarrow dx=\frac{du}{\sec^2 x}$$

$$\int\sec^2 x\tan x\sqrt{1+\tan x}\,dx$$

$$=\int\sec^2 x(u-1)\sqrt{u}\frac{du}{\sec^2 x}$$

$$=\int(u^{\frac{3}{2}}-u^{\frac{1}{2}})du$$

$$=\frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}+C$$

$$=\frac{2}{5}(1+\tan x)^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}(1+\tan x)^{\frac{3}{2}}+C$$

$$=\int_0^1(1-x^3)dx+\int_1^2(x^3-1)dx$$

$$=(x-\frac{1}{4}x^4)\Big|_0^1+(\frac{1}{4}x^4-x)\Big|_1^2$$

$$=(\frac{3}{4})+(4-2+\frac{3}{4})=\frac{7}{2}$$

15 $$\int_0^{\pi/4}(\sec^2 x+\cos 4x)\;dx$$

$$=(\tan x+\frac{1}{4}\sin 4x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=(1)-(0)=1$$

16 $$\int_0^{\pi/3}\left(\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)-1+\cos 2x\right)\;dx$$

$$=(-\frac{1}{2}\cos(2x+\frac{\pi}{3})-x+\frac{1}{2}\sin 2x)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$=(\frac{1}{2}-\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4})-(-\frac{1}{4})$$

$$=\frac{3+\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{3}$$

17 $$\int_0^{\pi/8}\sin 2x\;\cos 2x\;dx$$

26 $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt[3]{4-3x}}\,dx$

$$u = 4-3x \Rightarrow dx = \frac{du}{-3}, x = \frac{4-u}{3}$$

$$\int \frac{x}{\sqrt[3]{4-3x}}\,dx = \int \frac{\frac{1}{3}(4-u)}{u^{\frac{1}{3}}} \times \frac{du}{-3}$$

$$= -\frac{1}{9}\int (4u^{-\frac{1}{3}} - u^{\frac{2}{3}})\,du$$

$$= -\frac{1}{9}(6u^{\frac{2}{3}} - \frac{3}{5}u^{\frac{5}{3}}) + C$$

$$= -\frac{2}{3}u^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{15}u^{\frac{5}{3}} + C$$

$$= -\frac{2}{3}(4-3x)^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{15}(4-3x)^{\frac{5}{3}} + C$$

27 $\displaystyle\int \frac{(\ln x)^6}{x}\,dx$

$$u = \ln x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{x}, dx = x\,du$$

$$\int \frac{(\ln x)^6}{x}\,dx = \int \frac{xu^6}{x}\,du$$

$$= \int u^6\,du = \frac{1}{7}u^7 + C = \frac{1}{7}(\ln x)^7 + C$$

$$u = \ln x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{x}, dx = x\,du$$

$$\int \frac{(\ln x)^6}{x}\,dx = \int \frac{xu^6}{x}\,du =$$

$$\int u^6\,du = \frac{1}{7}u^7 + C = \frac{1}{7}(\ln x)^7 + C$$

28 $\displaystyle\int (x+1)^2\sqrt{x-2}\,dx$

$$u = x-2 \Rightarrow x = u+2, dx = du$$

$$\int (x+1)^2\sqrt{x-2}\,dx$$

$$= \int (u+3)^2 u^{\frac{1}{2}}\,du$$

$$= \int (u^2+6u+9)u^{\frac{1}{2}}\,du$$

$$= \int (u^{\frac{5}{2}} + 6u^{\frac{3}{2}} + 9u^{\frac{1}{2}})\,du$$

$$= \frac{2}{7}u^{\frac{7}{2}} + \frac{12}{5}u^{\frac{5}{2}} + 6u^{\frac{3}{2}} + C$$

$$= \frac{2}{7}(x-2)^{\frac{7}{2}} + \frac{12}{5}(x-2)^{\frac{5}{2}}$$

$$+ 6(x-2)^{\frac{3}{2}} + C$$

29 $\int x\csc^2 x\ dx$

$\int x\csc^2 x dx$

$u = x \qquad dv = \csc^2 x dx$

$du = dx \qquad v = -\cot x$

$$\int x\csc^2 x dx = -x\cot x + \int \cot x dx$$

$$= -x\cot x + \int \frac{\cos x}{\sin x} dx$$

$$= -x\cot x + \ln|\sin x| + C$$

---

30 $\int (x^2 - 5x)\, e^x\ dx$

$u = x^2 - 5x \qquad dv = e^x dx$

$du = (2x-5)dx \qquad v = e^x$

$\int (x^2 - 5x)e^x dx$

$$= (x^2 - 5x)e^x - \int (2x-5)e^x dx$$

$u = 2x - 5 \qquad dv = e^x dx$

$du = 2dx \qquad v = e^x$

$\int (2x-5)e^x dx$

$$= (2x-5)e^x - \int 2e^x dx$$

$$= (2x-5)e^x - 2e^x + C$$

$$\int (x^2-5x)e^x dx = (x^2-5x)e^x -$$

$$(2x-5)e^x + 2e^x + C$$

$$= e^x(x^2 - 7x + 7) + C$$

---

31 $\int x\sin 2x\ dx$

$u = x \qquad dv = \sin 2x dx$

$du = dx \qquad v = -\frac{1}{2}\cos 2x$

$\int x\sin 2x dx$

$$= -\frac{1}{2}x\cos 2x - \int -\frac{1}{2}\cos 2x dx$$

$$= -\frac{1}{2}x\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

أجد قيمة كلٍّ من التكاملات الآتية:

32 $\int_0^1 t3^{t^2}\,dt$

$u = t^2 \Rightarrow dt = \frac{uv}{2t}$

$t = 0 \Rightarrow u = 0$

$t = 1 \Rightarrow u = 1$

$\int_0^1 t3^{t^2}dt = \int_0^1 t3^u \frac{du}{2t}$

$= \frac{1}{2}\int_0^1 3^u du = \frac{3^u}{2\ln 3}\Big|_0^1$

$= \frac{3}{2\ln 3} - \frac{1}{2\ln 3} = \frac{1}{\ln 3}$

---

33 $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \cot^3 x\,dx$

$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cot^3 x dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cot x(\csc^2 x - 1)dx$

$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cot x \csc^2 x dx - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cot x dx$

$u = \cot x \Rightarrow dx = \frac{du}{-\csc^2 x}$

$x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow u = 1$

$x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow u = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cot^3 x dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cot x(\csc^2 x - 1)dx$

$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cot x \csc^2 x dx - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cot x dx$

$u = \cot x \Rightarrow dx = \frac{du}{-\csc^2 x}$

$x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow u = 1$

$x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow u = \frac{1}{\sqrt{3}}$

---

34 $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos x}{\sqrt{4 + 3\sin x}}\,dx$

$u = 4 + 3\sin x \Rightarrow dx = \frac{du}{3\cos x}$

$x = -\pi \Rightarrow u = 4$

$x = \pi \Rightarrow u = 4$

$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos x}{\sqrt{4+3\sin x}}dx$

$$= \int_4^4 \frac{\cos x}{\sqrt{u}} \times \frac{du}{3\cos x}$$

$$= \frac{1}{3}\int_4^4 \frac{du}{\sqrt{u}} = 0$$

---

35 $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{x^2 - x}{x^2 + x - 2}\, dx$

$$\int_{-1}^{0} \frac{x^2 - x}{x^2 + x - 2} dx = \int_{-1}^{0} \frac{x(x-1)}{(x-1)(x+2)} dx$$

$$= \int_{-1}^{0} \frac{x}{x+2} dx = \int_{-1}^{0} \left(1 - \frac{2}{x+2}\right) dx$$

$$= (x - 2\ln|x+2|)\Big|_{-1}^{0}$$

$$= 0 - 2\ln 2 - (-1 - 2\ln 1) = 1 - 2\ln 2$$

---

37 $\displaystyle\int_{1/2}^{e/2} x \ln 2x \;\; dx$

$$u = \ln 2x \qquad dv = x\,dx$$

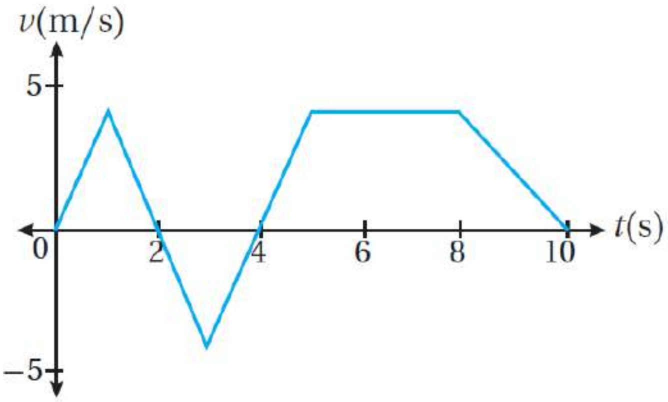
$$du = \frac{1}{x} \qquad v = \frac{x^2}{2}$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{e}{2}} x\ln 2x\, dx = \frac{x^2}{2}\ln 2x\Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{e}{2}} - \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{e}{2}} \frac{x}{2} dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln 2x\Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{e}{2}} - \frac{1}{4}x^2\Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{e}{2}}$$

$$= \frac{1}{16}(e^2 + 1)$$

يُبيِّن الشــكل الآتي منحنى السرعة المتجهة – الزمن لجُسَيْم يتحرَّك على المحــور x في الفترة الزمنيــة $[0, 10]$. إذا بدأ الجُسَيْم الحركة من $x = 0$ عندما $t = 0$، فأُجيب عن الأسئلة الثلاثة التالية تباعًا:



38 أجد إزاحة الجُسَيْم في الفترة الزمنية المعطاة

39 أجد المســافة التي قطعها الجُسَــيْم في الفترة الزمنية المعطاة.

40 أجد الموقع النهائي للجُسَيْم.

38)

$$s(10)-s(0)$$

$$=\int_0^{10} v(t)\,dt = R_1 - R_2 + R_3$$

$$=\frac{1}{2}(2)(4)-\frac{1}{2}(2)(4)+$$

$$\frac{1}{2}(3+6)(4)=18\text{m}$$

39)

$$\int_0^{10} |v(t)|\,dt = R_1 + R_2 + R_3$$

$$=4+4+18=26\text{m}$$

40)

$$s(10)-s(0)=18 \Rightarrow s(10)-0=18$$

$$\Rightarrow s(10)=18\text{m}$$

يتحرَّك جُسَــيْم في مسار مســتقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران: $v(t)=\frac{t}{9}-\frac{1}{\sqrt{t+6}}$، حيــث t الزمن بالثواني، و v سرعته المتجهة بالمتر لكل ثانية:

45 أجد إزاحة الجُسَيْم في الفترة $[1, 10]$

46 أجد المســـافة الكلية التـــي قطعها الجُسَـــيْم في الفترة $[1, 10]$.

45)

$$D=\int_1^{10} v(t)\,dt=\int_1^{10}\left(\frac{1}{9}t-(t+6)^{-\frac{1}{2}}\right)dt$$

$$=\left(\frac{1}{18}t^2-2\sqrt{t+6}\right)\Big|_1^{10}$$

$$=\left(2\sqrt{7}-\frac{5}{2}\right)\text{m}\approx 2.792\text{m}$$

46)

$$v(t)=\frac{1}{9}t-(t+6)^{-\frac{1}{2}}$$

لتكن d المسافة المقطوعة وهي تمثل المساحة بين منحنى $|v(t)|$ والمحور t بين المستقيمين t=1,t=10

$$d=\int_1^{10} |v(t)|\,dt$$

$$=\int_1^{10}\left|\frac{1}{9}t-(t+6)^{-\frac{1}{2}}\right|dt$$

$$\frac{1}{9}t-(t+6)^{\frac{1}{2}}=0 \Rightarrow \frac{t}{9}=\frac{1}{\sqrt{t+6}}$$

$$\Rightarrow t\sqrt{t+6}=9 \Rightarrow t^2(t+6)=81$$

$$\Rightarrow t^3+6t^2-81=0 \Rightarrow$$

$$(t-3)(t^2+9t+81)=0 \Rightarrow t=3$$

تمت بحمد الله

امنياتي لكم بالتوفيق والنجاح

ناجح الجمزاوي

0779192534 0795656881

دعواتكم لوالدي ووالدتي الرحمة والمغفرة