JO SCHOOL

الوافي في الرياضيات

| التكامل وتطبيقاته
| الإحصاء والاحتمالات

RAMI AL-BEJAWI

للفرع الادبي

الفصل الدراسي الثاني

أ. رامي البيجاوي
0788565614
جو سكول التعليم الالكتروني

● قاعدة ١: $\int P\,dس = P س + جـ$ حيث P ثابت

أمثلة:

١) $\int 3\,dس = 3س + جـ$

٢) $\int -2\,dس = -2س + جـ$

٣) $\int \frac{1}{4}\,dس = \frac{1}{4}س + جـ$

٤) $\int dس = 1س + جـ$

٥) $\int -\frac{1}{2}\,dس = -\frac{1}{2}س + جـ$

٦) $\int \frac{dس}{5} = \frac{1}{5}س + جـ$

٧) $\int \sqrt{7}\,dس = \sqrt{7}س + جـ$

٨) $\int هـ\,dس = هـس + جـ$
حيث هـ العدد النيبري

٩) $\int هـ^{س}\,dس = هـ^{س} + جـ$
حيث هـ العدد النيبري

١٠) $\int ك^{س}\,dس = \frac{ك^{س}}{\ln ك} + جـ$
حيث ك ثابت

١١) $\int ص\,dص = \frac{1}{2}ص^{2} + جـ$

١٢) $\int -\sqrt{7}\,dع = -\sqrt{7}ع + جـ$

● قاعدة ٢: $\int س^{ن}\,dس = \frac{س^{ن+1}}{ن+1} + جـ$ بشرط $ن \neq -1$

أمثلة:

١) $\int س^{4}\,dس = \frac{1}{5}س^{5} + جـ$

٢) $\int س^{3}\,dس = \frac{1}{4}س^{4} + جـ$

٣) $\int س\,dس = \frac{1}{2}س^{2} + جـ$

٤) $\int 5س^{2}\,dس = \frac{5}{3}س^{3} + جـ$

٥) $\int 2س\,dس = \frac{2}{2}س^{2} + جـ = س^{2} + جـ$

٦) $\int -6س^{2}\,dس = -\frac{6}{3}س^{3} + جـ = -2س^{3} + جـ$

٧) $\int 3س^{2}\,dس = \frac{3}{3}س^{3} + جـ = س^{3} + جـ$

٨) $\int س^{-5}\,dس = \frac{1}{-4}س^{-4} + جـ$

٩) $\int س^{-2}\,dس = \frac{1}{-1}س^{-1} + جـ$

١٠) $\int 3س^{-4}\,dس = \frac{3}{-3}س^{-3} + جـ = -س^{-3} + جـ$

١١) $\int -4س^{-6}\,dس = \frac{-4}{-5}س^{-5} + جـ = \frac{4}{5}س^{-5} + جـ$

١٢) $\int \frac{س^{2}}{5}\,dس = \frac{1}{5}\int س^{2}\,dس = \frac{1}{5}\times\frac{1}{3}س^{3} + جـ$
$= \frac{1}{15}س^{3} + جـ$

١٣) $\int \frac{1}{2}س^{2}\,dس = \frac{1}{2}\times\frac{1}{3}س^{3} + جـ = \frac{1}{6}س^{3} + جـ$

١٤) $\int \frac{2}{3}س^{3}\,dس = \frac{2}{3}\times\frac{1}{4}س^{4} + جـ = \frac{1}{6}س^{4} + جـ$

١٥) $\int \frac{1}{3}س^{-3}\,dس = \frac{1}{3}\int س^{-3}\,dس = \frac{1}{3}\times\frac{1}{-2}س^{-2} + جـ$
$= -\frac{1}{6}س^{-2} + جـ$

١٦) $\int س^{\frac{2}{3}}\,dس = \frac{1}{\frac{5}{3}}س^{\frac{5}{3}} + جـ$

١٧) $\int س^{\frac{1}{3}}\,dس = \frac{3}{4}س^{\frac{4}{3}} + جـ$

١٨) $\int 5س^{\frac{2}{3}}\,dس = 5\times\frac{3}{5}س^{\frac{5}{3}} + جـ = 3س^{\frac{5}{3}} + جـ$

١٩) $\int س^{-\frac{5}{3}}\,dس = \frac{1}{-\frac{2}{3}}س^{-\frac{2}{3}} + جـ$

٢٠) $\int س^{-\frac{1}{3}}\,dس = \frac{3}{2}س^{\frac{2}{3}} + جـ$

٢١) $\int 3س^{\frac{1}{2}}\,dس = 3\times\frac{2}{1}س^{\frac{1}{2}} + جـ$
$= 6س^{\frac{1}{2}} + جـ$

RAMI AL-BEJAWI

تذكر: • $\sqrt[n]{س^m} = س^{\frac{m}{n}}$

• $\frac{1}{س^n} = س^{-n}$ أو $\frac{1}{س^{-n}} = س^n$

ملاحظة: التكامل توزع على الجمع والطرح فقط

22) $\int \frac{-2}{س^5} \, دس$

$= \int -2 س^{-5} \, دس$ بحيث

$= -2 \frac{س^{-4}}{-4} + جـ$

23) $\int \frac{1}{س^4} \, دس$ ، $س \neq 0$

$= \int س^{-4} \, دس$ بحيث

$= \frac{س^{-3}}{-3} + جـ$

24) $\int \frac{دس}{س^5}$ ، $س \neq 0$

$= \int س^{-5} \, دس$ بحيث

$= \frac{س^{-4}}{-4} + جـ$

25) $\int \sqrt{س} \, دس$ ، $س \geq 0$

$= \int س^{\frac{1}{2}} \, دس$ بحيث

$= \frac{2}{3} س^{\frac{3}{2}} + جـ$

26) $\int \sqrt[3]{س} \, دس$

$= \int س^{\frac{1}{3}} \, دس$ بحيث

$= \frac{3}{4} س^{\frac{4}{3}} + جـ$

27) $\int \sqrt[5]{س} \, دس$ ، $س > 0$

$= \int س^{\frac{1}{5}} \, دس$ بحيث

$= \frac{5}{6} س^{\frac{6}{5}} + جـ$

28) $\int \frac{5}{\sqrt[4]{س}} \, دس$ ، $س \neq 0$

$= \int \frac{5}{س^{\frac{1}{4}}} \, دس$

$= \int 5 س^{-\frac{1}{4}} \, دس$ بحيث

$= 5 \times \frac{4}{3} س^{\frac{3}{4}} + جـ$

29) $\int (2 - س^2) \, دس$

$= 2س - \frac{س^3}{3} + جـ$

30) $\int (3س^2 - 5س + 9) \, دس$

$= س^3 - \frac{5}{2} س^2 + 9س + جـ$

31) $\int \frac{دس}{\sqrt{س}}$ ، $س > 0$

$= \int س^{-\frac{1}{2}} \, دس$ بحيث

$= 2 س^{\frac{1}{2}} + جـ$

32) $\int (\frac{1}{س^2} + 4س - 1) \, دس$ ، $س \neq 0$

$= \int (س^{-2} + 4س - 1) \, دس$ بحيث

$= \frac{س^{-1}}{-1} + 2س^2 - س + جـ$

33) $\int (4س + \frac{1}{\sqrt[3]{س}} - 1) \, دس$ ، $س \neq 0$

$= \int (4س + س^{-\frac{1}{3}} - 1) \, دس$ بحيث

$= 2س^2 + \frac{س^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} - س + جـ$

34) $\int (3س^2 - \frac{6}{\sqrt{س}}) \, دس$ ، $س > 0$

$= \int (3س^2 - 6س^{-\frac{1}{2}}) \, دس$ بحيث

$= س^3 - 6 \times 2 س^{\frac{1}{2}} + جـ$

35) $\int (\sqrt{س} + 2\sqrt[3]{س} + \frac{3}{س} - \frac{6}{\sqrt{س}}) \, دس$

$= \int (س^{\frac{1}{2}} + 2س^{\frac{1}{3}} + 3س^{-1} - 6س^{-\frac{1}{2}}) \, دس$ بحيث

$= \frac{2}{3} س^{\frac{3}{2}} + 2 \times \frac{3}{4} س^{\frac{4}{3}} + 3 \ln|س| - 6 \times 2 س^{\frac{1}{2}} + جـ$

RAMI AL-BEJAWI

ملاحظة : التكامل لا يتوزع على الضرب والقسمة

٣٦) $\int س(٢س^{٢}-١)\,دس$ نجهز

$= \int (٢س^{٣}-س)\,دس$

$= \frac{٢س^{٤}}{٤} - \frac{س^{٢}}{٢} + جـ$

تذكر: الاس في حالة الضرب نجمع

٣٧) $\int ٢س^{٣}(٥س - س^{\frac{١}{٢}} + ٣)\,دس$

$= \int (١٠س^{٤} - ٢س^{\frac{٥}{٢}} + ٦س^{٣})\,دس$

$= \frac{١٠س^{٥}}{٥} - \frac{٢س^{\frac{٧}{٢}}}{\frac{٧}{٢}} + \frac{٦س^{٤}}{٤} + جـ$

٣٨) $\int (٢-س)(٤س+١)\,دس$ نجهز

$= \int (٨س + ٢ - ٤س^{٢} - س)\,دس$

$= ٨\frac{س^{٢}}{٢} + ٢س - ٤\frac{س^{٣}}{٣} - \frac{س^{٢}}{٢} + جـ$

٣٩) $\int (س-٣)(س+٢)\,دس$ نجهز

$= \int س^{٢} + ٢س - ٣س - ٦\,دس$

$= \frac{س^{٣}}{٣} - \frac{س^{٢}}{٢} - ٦س + جـ$

٤٠) $\int (س^{٢}+٣)^{٢}\,دس$ نجهز

$= \int (س^{٢}+٣)(س^{٢}+٣)\,دس$

$= \int س^{٤} + ٣س^{٢} + ٣س^{٢} + ٩\,دس$

$= \frac{س^{٥}}{٥} + \frac{٣س^{٣}}{٣} + \frac{٣س^{٣}}{٣} + ٩س + جـ$ full

$= \frac{س^{٥}}{٥} + ٢س^{٣} + ٩س + جـ$

٤١) $\int (٢-س^{٢})^{٢}\,دس$ نجهز

$= \int (٢-س^{٢})(٢-س^{٢})\,دس$

$= \int ٤ - ٢س^{٢} - ٢س^{٢} + س^{٤}\,دس$

$= ٤س - \frac{٢س^{٣}}{٣} - \frac{٢س^{٣}}{٣} + \frac{س^{٥}}{٥} + جـ$

٤٢) $\int \frac{س^{٢} - ٥س}{س}\,دس$ ، $س \neq ٠$

ملاحظة

* الأسس في حالة القسمة تطرح.

* واذا كان المقام حدّ وحيد نستطيع توزيع البسط على المقام.

$\int (\frac{س^{٢}}{س} - \frac{٥س}{س})\,دس$

$\int (س - ٥)\,دس$

$= \frac{س^{٢}}{٢} - ٥س + جـ$

٤٣) $\int \frac{س^{٢} - ٧س + ١}{\sqrt{س^{٣}}}\,دس$ ، $س \neq ٠$

$= \int \frac{س^{٢}}{س^{\frac{٣}{٢}}} - \frac{٧س}{س^{\frac{٣}{٢}}} + \frac{١}{س^{\frac{٣}{٢}}}\,دس$ نجهز

$= \int س^{\frac{١}{٢}} - ٧س^{-\frac{١}{٢}} + س^{-\frac{٣}{٢}}\,دس$

$= \frac{س^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}} - \frac{٧س^{\frac{١}{٢}}}{\frac{١}{٢}} + \frac{س^{-\frac{١}{٢}}}{-\frac{١}{٢}} + جـ$

$= \frac{٢}{٣}س^{\frac{٣}{٢}} - ١٤س^{\frac{١}{٢}} - ٢س^{-\frac{١}{٢}} + جـ$

٤٤) $\int \frac{٥س - \sqrt{س}}{س^{٣}}\,دس$ ، $س \neq ٠$

$= \int \frac{٥س}{س^{٣}} - \frac{س^{\frac{١}{٢}}}{س^{٣}}\,دس$ نجهز

$= \int ٥س^{-٢} - س^{-\frac{٥}{٢}}\,دس$

$= ٥\frac{س^{-١}}{-١} - \frac{س^{-\frac{٣}{٢}}}{-\frac{٣}{٢}} + جـ$

٤٥) $\int \frac{س^{٣} - ٥\sqrt{س} + ٣}{\sqrt{س}}\,دس$ ، $س > ٠$

$= \int \frac{س^{٣}}{س^{\frac{١}{٢}}} - \frac{٥\sqrt{س}}{\sqrt{س}} + \frac{٣}{\sqrt{س}}\,دس$ نجهز

$= \int س^{\frac{٥}{٢}} - ٥ + ٣س^{-\frac{١}{٢}}\,دس$

$= \frac{س^{\frac{٧}{٢}}}{\frac{٧}{٢}} - ٥س + ٣\times٢س^{\frac{١}{٢}} + جـ$

$= \frac{٢}{٧}س^{\frac{٧}{٢}} - ٥س + ٦س^{\frac{١}{٢}} + جـ$

RAMI AL-BEJAWI

ملاحظة:

أحياناً قد نحتاج إلى التعديل ثم الاختصار قبل إجراء التكامل

٤٦) $\int \frac{س^2 + 2س - 15}{س - 3}$ د س ، $س \neq 3$

$= \int \frac{(س+5)(س-3)}{(س-3)}$ د س بتبسيط

$= \int (س+5)$ د س

$= \frac{س^2}{2} + 5س + ج$

٤٧) $\int \frac{س^2 + 6س + 8}{س + 2}$ د س ، $س \neq -2$

$= \int \frac{(س+4)(س+2)}{(س+2)}$ د س بتبسيط

$= \int س + 4$ د س

$= \frac{س^2}{2} + 4س + ج$

٤٨) $\int \frac{س^3 + 64}{س + 4}$ د س ، $س \neq -4$

$= \int \frac{(س+4)(س^2 - 4س + 16)}{(س+4)}$ د س بتبسيط

$= \int (س^2 - 4س + 16)$ د س

$= \frac{س^3}{3} - 2س^2 + 16س + ج$

٤٩) $\int \frac{س^3 - 8}{س - 2}$ د س

$= \int \frac{(س-2)(س^2 + 2س + 4)}{(س-2)}$ د س

$= \int (س^2 + 2س + 4)$ د س

$= \frac{س^3}{3} + س^2 + 4س + ج$

RAMI AL-BEJAWI

قاعدة ٢ :

- $\int جا(س)\,د س = -جتا س + جـ$
- $\int جتا س\,د س = جا س + جـ$
- $\int تا^2 س\,د س = ظا س + جـ$
- $\int \frac{1}{س}\,د س = \ln|س| + جـ$

وبشكل عام :

- $\int جا(أس+ب)\,د س = \frac{-جتا(أس+ب)}{أ} + جـ$
- $\int جتا(أس+ب)\,د س = \frac{جا(أس+ب)}{أ} + جـ$
- $\int تا^2(أس+ب)\,د س = \frac{ظا(أس+ب)}{أ} + جـ$

ملاحظتان وهمتان جداً :

① $\frac{1}{جتا^2 س} = تا^2 س$ ② $ظا س = \frac{جا س}{جتا س}$

مثالان على الملاحظتان :

١) $\int \frac{1}{جتا^2 س}\,د س$

$= \int تا^2 س\,د س$

$= ظا س + جـ$

٢) $\int ظا س\,جتا س\,د س$

$= \int \frac{جا س}{جتا س} \times جتا س\,د س$

$= \int جا س\,د س$

$= -جتا س + جـ$

أمثلة:

١) $\int (٤س - ٣جا س)\,د س$

$= ٤\frac{س^2}{2} + ٣جتا س + جـ$

$= ٢س^2 + ٣جتا س + جـ$

٢) $\int (١٠\sqrt{س^3} - \frac{1}{س^2} + ٣تا^2 س)\,د س$

$= \int ١٠س^{\frac{3}{2}} - س^{-2} + ٣تا^2 س\,د س$ نجزئ

$= ١٠\frac{س^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - \frac{س^{-1}}{-1} + ٣ظا س + جـ$

$= ٤س^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{س} + ٣ظا س + جـ$

٥) $\int ٦جتا(٢س-١)\,د س$

$= ٦\frac{جا(٢س-١)}{2} + جـ$

$= ٣جا(٢س-١) + جـ$

٦) $\int ٢تا^2(٢-س)\,د س$

$= ٢\frac{ظا(٢-س)}{-1} + جـ$

$= -٢ظا(٢-س) + جـ$

٨) $\int ١٢جا(١-٤س)\,د س$

$= \frac{-١٢جتا(١-٤س)}{-٤} + جـ = ٣جتا(١-٤س) + جـ$

RAMI AL-BEJAWI

قاعدة ٤ : $\int (ا س + ب)^{ن} \, د س = \frac{(ا س + ب)^{ن+1}}{ا \times (ن+1)} + ج$

بشرط $ن \neq -1$

أمثلة :

١) $\int (٣س + ٢)^{٣} \, د س$

$= \frac{(٣س+٢)^{٤}}{٤ \times ٣} + ج$

$= \frac{(٣س+٢)^{٤}}{١٢} + ج$

٢) $\int (٣ - ٢س)^{٢} \, د س$

$= \frac{(٣-٢س)^{٣}}{٣ \times -٢} + ج$

$= \frac{(٣-٢س)^{٣}}{-٦} + ج$

٣) $\int ٦ (١ - ٣س)^{٥} \, د س$

$= \frac{٦ (١-٣س)^{٦}}{-٣ \times ٦} + ج$

$= \frac{(١-٣س)^{٦}}{-٣} + ج$

٤) $\int \frac{٥}{(٢س+١)^{٢}} \, د س$

بتجهيز

$= \int ٥ (٢س+١)^{-٢} \, د س$

$= \frac{٥ (٢س+١)^{-١}}{٢ \times -١} + ج$

٥) $\int \sqrt[٣]{(٣س-٢)^{٢}} \, د س$

$= \int (٣س-٢)^{\frac{٢}{٣}} \, د س$

$= \frac{(٣س-٢)^{\frac{٥}{٣}}}{\frac{٥}{٣} \times ٣} + ج$

٦) $\int \frac{١}{\sqrt{١+٥س}} \, د س$

$= \int \frac{١}{(١+٥س)^{\frac{١}{٢}}} \, د س = \int (١+٥س)^{-\frac{١}{٢}} \, د س$

$= \frac{(١+٥س)^{\frac{١}{٢}}}{\frac{١}{٢} \times ٥} + ج$

RAMI AL-BEJAWI

ظوابط الحل:

1) تكامل عادي ولا داعي لإضافة جـ

2) نعوض (الحد العلوي) - (الحد السفلي)

أمثلة:

1) $\int_{-1}^{9} 2س \, دس$

$= س^2]_{-1}^{9}$

$= (9^2) - (-1)^2$

$= (81) - (1)$

$= 80$

2) $\int_{-1}^{2} (3س^2 - 12س + 5) \, دس$

$= س^3 - 6س^2 + 5س]_{-1}^{2}$

$= ((2)^3 - 6(2)^2 + 5(2)) - ((-1)^3 - 6(-1)^2 + 5(-1))$

$= (8 - 24 + 10) - (-1 - 6 - 5)$

$= (-6) - (-12)$

$= -6 + 12 = 6$

3) $\int_{-1}^{1} (2س + 8س^3 - 5س^4 + 7) \, دس$

$= س^2 + 2س^4 - س^5 + 7س]_{-1}^{1}$

$= (1)^2 + 2(1)^4 - (1)^5 + 7(1) - ((-1)^2 + 2(-1)^4 - (-1)^5 + 7(-1))$

$= (1 + 2 - 1 + 7) - (0)$

$= (9) - (0)$

$= 9$

5) $\int_{2}^{3} \frac{1}{س^4} \, دس$

$= \int_{2}^{3} س^{-4} \, دس$

$= \frac{س^{-3}}{-3}]_{2}^{3}$ مجهز

$= \frac{-1}{3س^3}]_{2}^{3}$

$= \left(\frac{-1}{3(3)^3}\right) - \left(\frac{-1}{3(2)^3}\right) = \frac{-1}{81} + \frac{1}{24} = \frac{-8+27}{8 \times 27} = \frac{19}{216}$

6) $\int_{1}^{8} 14 (س)^{\frac{1}{3}} \, دس$

$= 14 \times \frac{3}{4} س^{\frac{4}{3}}]_{1}^{8}$

$= 6 س^{\frac{4}{3}}]_{1}^{8}$ مجهز

$= 6 \sqrt[3]{س^4}]_{1}^{8}$

$= (6 \sqrt[3]{8^4}) - (6 \sqrt[3]{1^4})$

$= 1536 - 6 = 1530$

7) $\int_{1}^{8} \frac{1}{8 \sqrt[3]{س^2}} \, دس$

$= \frac{1}{8} \int_{1}^{8} س^{-\frac{2}{3}} \, دس$

$= \frac{1}{8} \times \frac{3}{1} س^{\frac{1}{3}}]_{1}^{8}$ مجهز

$= \frac{3}{8} \sqrt[3]{س}]_{1}^{8}$

$= \left(\frac{3}{8} \sqrt[3]{8}\right) - \left(\frac{3}{8} \sqrt[3]{1}\right) = (0) - \left(\frac{3}{8} \times \frac{3}{4}\right) = \frac{-3}{4}$

9) $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(\frac{1}{س^2} + \frac{1}{\sqrt{س}}\right) \, دس$

RAMI AL-BEJAWI

10) $\int_1^2 3s(4-2s^2)\,ds$

$= \int_1^2 12s - 6s^3\,ds$

$= \left[6s^2 - \frac{3}{2}s^4\right]_1^2$

$= (6(2)^2 - \frac{3}{2}(2)^4) - (6(1)^2 - \frac{3}{2}(1)^4)$

$= (24 - 24) - (6 - \frac{3}{2})$

$= (0) - (\frac{12}{2} - \frac{3}{2})$

$= \boxed{-\frac{9}{2}}$

11) $\int_{-2}^{-1} (3s-2)(s+1)\,ds$

$= \int_{-2}^{-1} (3s^2 + 3s - 2s - 2)\,ds$

$= \int_{-2}^{-1} (3s^2 + s - 2)\,ds$

$= \left[s^3 + \frac{s^2}{2} - 2s\right]_{-2}^{-1}$

$= ((-1)^3 + \frac{(-1)^2}{2} - 2(-1)) - ((-2)^3 + \frac{(-2)^2}{2} - 2(-2))$

$= (-1 + \frac{1}{2} + 2) - (-8 + 2 + 4)$

$= (\frac{3}{2}) - (-2) = \boxed{\frac{7}{2}}$

12) $\int_1^{-1} (2s-3)^2\,ds$

$= \left[\frac{(2s-3)^3}{3 \times 2}\right]_1^{-1}$

$= \left(\frac{(2(-1)-3)^3}{6}\right) - \left(\frac{(2(1)-3)^3}{6}\right)$

$= \frac{-125}{6} - (\frac{-1}{6})$

$= \boxed{\frac{-124}{6}}$

13) $\int_{-2}^{-1} 6(1-2s)^5\,ds$

$= \left[\frac{6(1-2s)^6}{-2 \times 6}\right]_{-2}^{-1}$

$= \frac{(1-2(-1))^6}{-2} - \frac{(1-2(-2))^6}{-2}$

$= \frac{729}{-2} - \frac{729}{-2} = \frac{729}{2}$

RAMI AL-BEJAWI

٥) $\int_{-1}^{1} \frac{س^2 + ٧س + ١٣}{س + ٤}$ د س

$= \int_{-1}^{1} \frac{(س+٣)(س+٤)}{(س+٤)}$ د س

$= \left[\frac{س^2}{٢} + ٣س \right]_{-1}^{1}$

$= \left(\frac{(١)^2}{٢} + ٣(١)\right) - \left(\frac{(-١)^2}{٢} + ٣(-١)\right)$

$= \left(\frac{١}{٢} + ٣\right) - \left(\frac{١}{٢} - ٣\right)$

$= \frac{١}{٢} + ٣ - \frac{١}{٢} + ٣$

$= ٦$

٦) $\int_{-٢}^{٠} \frac{س^2 + ٦س - ٧}{س - ١}$ د س

$= \int_{-٢}^{٠} \frac{(س+٧)(س-١)}{(س-١)}$ د س

$= \left[\frac{س^2}{٢} + ٧س \right]_{-٢}^{٠}$

$= \left(\frac{(٠)^2}{٢} + ٧(٠)\right) - \left(\frac{(-٢)^2}{٢} + ٧(-٢)\right)$

$= (٠) - (٢ - ١٤)$

$= -١٢$

قاعدة على الماشي:

$\int_{أ}^{ب} جـ$ د س $= جـ(ب - أ)$ حيث جـ ثابت

أمثلة:

١) $\int_{١}^{٦} -٢$ د س $= -٢(٦-١) = -٢(٥) = -١٠$

٢) $\int_{-٢}^{١} ٥$ د س $= ٥(١ - -٢) = ١٥$

٣) $\int_{٠}^{٥} \sqrt{٥}$ د س $= \sqrt{٥}(٥-٠) = ٥\sqrt{٥}$

٤) $\int_{١}^{٤} هـ$ د س $= هـ(٤-١) = ٣هـ$

حيث هـ العدد النيبيري

RAMI AL-BEJAWI

١) إذا كان $\int_{-1}^{م} 4 \, س \, د س = 20$ ، فجد قيمة الثابت م

$[4س]_{-1}^{م} = 20$

$(4م) - (4(-1)) = 20$

$4م + 4 = 20$

$4م = 16$

$م = 4$

٢) اذا كان $\int_{-1}^{3} 2ب \, س \, د س = 12$ ، فجد قيمة الثابت ب

$[2ب س]_{-1}^{3} = 12$

$(2ب(3)) - (2ب(-1)) = 12$

$6ب + 2ب = 12$

$8ب = 12 \leftarrow ب = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$

٣) إذا كان $\int_{0}^{3} (ب س^2 + 2س) \, د س = -21$ ، فجد قيمة ب

$[\frac{ب}{3} س^3 + س^2]_{0}^{3} = -21$

$(\frac{ب}{3}(3)^3 + (3)^2) - (\frac{ب}{3}(0)^3 + (0)^2) = -21$

$9ب + 9 - 0 = -21$

$9ب = -30$

$ب = -3$

٤) إذا كان $\int_{1}^{ب} 6س^2 \, د س = 9$ ، فجد قيمة ب

$[3س^2]_{1}^{ب} = 9$

$(3ب^2) - (3(1)^2) = 9$

$3ب^2 - 3 = 9$

$3ب^2 = 12$

$ب^2 = 4$

$ب = \pm 2$

٥) إذا كان $\int_{2}^{ب} (1 - 4س) \, د س = 5ب$ ، فجد قيمة ب

$[س - 2س^2]_{2}^{ب} = 5ب$

$(ب - 2ب^2) - (2 - 2(2)^2) = 5ب$

$(ب - 2ب^2) - (2 - 8) = 5ب$

$ب - 2ب^2 + 6 = 5ب$

$\div 2 \quad -2ب^2 - 4ب + 6 = 0$

$ب^2 + 2ب - 3 = 0$

$(ب + 3)(ب - 1) = 0$

$ب = -3$, $ب = 1$

٦) إذا كان $\int_{1}^{ب} (2س - 1) \, د س = 0$ ، فجد قيمة ب

$[س^2 - س]_{1}^{ب} = 0$

$(ب^2 - ب) - (1^2 - 1) = 0$

$ب^2 - ب - 0 = 0$

$ب^2 - ب = 0$

$ب(ب - 1) = 0$

$ب = 0$, $ب = 1$

٧) إذا كان $\int_{4}^{ب} (2س - 1) \, د س = 0$ ، فجد قيمة ب

$[س^2 - س]_{4}^{ب} = 0$

$(ب^2 - ب) - (4^2 - 4) = 0$

$ب^2 - ب - (12) = 0$

$ب^2 - ب - 12 = 0$

$(ب - 4)(ب + 3) = 0$

$ب = 4$, $ب = -3$

RAMI AL-BEJAWI

٨) إذا كان $\int_{-2}^{م} (٢ - ٤س) \, دس = ٠$ ، فجد قيمة الثابت م

$[س^٢ - ٢س]_{-2}^{م} = ٠$

$(م^٢ - ٢م) - (٤ - ٢(-٢)) = ٠$

$م^٢ - ٢م - (٤ + ٤) = ٠$

$م^٢ - ٢م - ٨ = ٠$

$م^٢ - ٢م - ١٢ + ٤ = ٠$

$\frac{م^٢}{-٢} - \frac{٢م}{-٢} + \frac{١٢}{-٢} = \frac{٠}{-٢}$ / ÷ -٢ ثم نرتب

$م^٢ - ٣ - ٦ = ٠$

$(م - ٣)(م + ٢) = ٠$

$م = ٣$ | $م = -٢$

٩) إذا كان $\int_{١}^{ن} (٢س - ٣) \, دس = ٠$ ، فجد قيمة الثابت ن

$[س^٢ - ٣س]_{١}^{ن} = ٠$

$(ن^٢ - ٣ن) - (١ - ٣) = ٠$

$(ن^٢ - ٣ن) - (-٢) = ٠$

$ن^٢ - ٣ن + ٢ = ٠$ / × -١ ثم نرتب

$ن^٢ - ٣ن + ٢ = ٠$

$(ن - ٢)(ن - ١) = ٠$

$ن = ٢$ | $ن = ١$

RAMI AL-BEJAWI

خطوات الحل:

أمثلة:

١) $\int 2س جتا(1-س^2)\, دس$

[١] $ص = 1-س^2$

[٢] $دس = \frac{دص}{-2س}$

$\int \frac{}{-2س} جتا(ص)\, دص$

$= -\int جتا ص\, دص$

$= - جا ص + ج$

$= - جا(1-س^2) + ج$

٢) $\int 2س^3 جا(س^4+1)\, دس$

[١] $ص = س^4+1$

[٢] $دس = \frac{دص}{4س^3}$

$\int \frac{}{4س^3} جا(ص)\, دص$

$\frac{1}{4}\int جا(ص)\, دص$

$-\frac{1}{4} جتا(ص) + ج$

$= -\frac{1}{4} جتا(س^4+1) + ج$

٣) $\int (2س-3س^2)\, قا^2(س^3-س^2)\, دس$

$\int (2س-3س^2) قا^2(ص) \frac{دص}{(3س^2-2س)}$ [١] $ص = س^3-س^2$

[٢] $دس = \frac{دص}{3س^2-2س}$

$-1\int قا^2(ص)\, دص$

$-1 ظا ص + ج$

$- ظا(س^3-س^2) + ج$

٤) $\int \frac{2س+1}{جتا^2(س^2+س)}\, دس$ نخمن

[١] $ص = س^2+س$

$\int (2س+1) قا^2(س^2+س)\, دس$ [٢] $دس = \frac{دص}{2س+1}$

$\int (2س+1) قا^2(ص) \frac{دص}{(2س+1)}$

$\int قا^2 ص\, دص$

$= ظا ص + ج$

$= ظا(س^2+س) + ج$

* تذكر $\frac{1}{جتا^2 س} = قا^2 س$ مهم جداً

RAMI AL-BEJAWI

٨) $\int 3س(س^2+1)^{-5}\,دس$ $\quad$ [1] $ع = س^2+1$

$= \int 3س\,ع^{-5}\,\frac{دع}{2س}$ $\quad$ [2] $دس = \frac{دع}{2س}$

$= \frac{3}{2}\int ع^{-5}\,دع$

$= \frac{3}{2}\times\frac{ع^{-4}}{-4} + ج$

$= -\frac{3}{8}(س^2+1)^{-4} + ج$

٩) $\int 3س^2(س^3+5)^2\,دس$ $\quad$ [1] $ع = س^3+5$

$= \int 3س^2\,ع^2\,\frac{دع}{3س^2}$ $\quad$ [2] $دس = \frac{دع}{3س^2}$

$= \int ع^2\,دع$

$= \frac{ع^3}{3} + ج$

$= \frac{(س^3+5)^3}{3} + ج$

١٠) $\int (1-2س)(س-س^2)^4\,دس$ $\quad$ [1] $ع = س-س^2$

$= \int (1-2س)\,ع^4\,\frac{دع}{(1-2س)}$ $\quad$ [2] $دس = \frac{دع}{(1-2س)}$

$= \int ع^4\,دع$

$= \frac{ع^5}{5} + ج$

$= \frac{(س-س^2)^5}{5} + ج$

١١) $\int (س-1)(2س^2-4س+1)^5\,دس$ $\quad$ [1] $ع = 2س^2-4س+1$

$= \int (س-1)\,ع^5\,\frac{دع}{4(س-1)}$ $\quad$ [2] $دس = \frac{دع}{4س-4}$

$= \frac{1}{4}\int ع^5\,دع$

$= \frac{1}{4}\times\frac{ع^6}{6} + ج$

$= \frac{1}{24}(2س^2-4س+1)^6 + ج$

١٢) $\int 12(3س^2+4س)(س^3+2س^2)^7\,دس$ $\quad$ [1] $ع = س^3+2س^2$

$= \int 12(3س^2+4س)\,ع^7\,\frac{دع}{(3س^2+4س)}$ $\quad$ [2] $دس = \frac{دع}{3س^2+4س}$

$= 12\int ع^7\,دع$

$= \frac{12}{8}ع^8 + ج$

$= \frac{12}{8}(س^3+2س^2)^8 + ج$

RAMI AL-BEJAWI

١٣) $\int \frac{٣س - ٩}{(س^{٢} - ٦س)^{٢}} \, دس$

$= \int (٣س - ٩)(س^{٢} - ٦س)^{-٢} \, دس$ [١] $هـ = س^{٢} - ٦س$

$= \int (٣س - ٩)(هـ)^{-٢} \frac{دهـ}{٢س - ٦}$ [٢] $دس = \frac{دهـ}{٢س - ٦}$

$= \int ٣(س - ٣)(هـ)^{-٢} \frac{دهـ}{٢(س - ٣)}$

$= \frac{٣}{٢} \int هـ^{-٢} \, دهـ$

$= \frac{٣}{٢} \times \frac{هـ^{-١}}{-١} + جـ$

$= -\frac{٣}{٢} (س^{٢} - ٦س)^{-١} + جـ$

١٤) $\int (٢س + ١)\sqrt{س^{٢} + س - ٥} \, دس$

$= \int (٢س + ١)(س^{٢} + س - ٥)^{\frac{١}{٢}} \, دس$ [١] $هـ = س^{٢} + س - ٥$

$= \int (٢س + ١)(هـ)^{\frac{١}{٢}} \frac{دهـ}{(٢س + ١)}$ [٢] $دس = \frac{دهـ}{٢س + ١}$

$= \int هـ^{\frac{١}{٢}} \, دهـ$

$= \frac{٢}{٣} هـ^{\frac{٣}{٢}} + جـ$

$= \frac{٢}{٣} (س^{٢} + س - ٥)^{\frac{٣}{٢}} + جـ$

١٥) $\int ٦س^{٢}\sqrt[٥]{(٢س^{٣} - ٢)^{٢}} \, دس$

$= \int ٦س^{٢}(٢س^{٣} - ٢)^{\frac{٢}{٥}} \, دس$ [١] $هـ = ٢س^{٣} - ٢$

$= \int ٦س^{٢}(هـ)^{\frac{٢}{٥}} \frac{دهـ}{٦س^{٢}}$ [٢] $دس = \frac{دهـ}{٦س^{٢}}$

$= \int هـ^{\frac{٢}{٥}} \, دهـ$

$= \frac{٥}{٧} هـ^{\frac{٧}{٥}} + جـ$

$= \frac{٥}{٧} (٢س^{٣} - ٢)^{\frac{٧}{٥}} + جـ$

RAMI AL-BEJAWI

١٩) $\int_{1}^{2} \frac{3-2س}{(س^2-3س)^2}$ ك س

① ص = $س^2 - 3س$

② ك س = $\frac{ك ص}{2س - 3}$

$\int_{1}^{2} (3-2س)(س^2-3س)^{-2}$ ك س

$\int_{-2}^{-1} (2س-3)\, ص^{-2}\, \frac{ك ص}{2س-3}$

③ عندما

س = ٢ ← ص = -2

س = ١ ← ص = -2

$\int_{-2}^{-2} ص^{-2}$ ك ص

= صفر

٢٠) $\int_{1}^{3} 2س \sqrt[3]{س^2-1}$ ك س

① ص = $س^2 - 1$

$\int_{1}^{3} 2س (س^2-1)^{\frac{1}{3}}$ ك س

② ك س = $\frac{ك ص}{2س}$

$\int_{-1}^{1} 2س\, ص^{\frac{1}{3}}\, \frac{ك ص}{2س}$

③ عندما

س = ٠ ← ص = -1

س = ١ ← ص = ٠

$\int_{-1}^{1} ص^{\frac{1}{3}}$ ك ص

$\left[\frac{3}{4} ص^{\frac{4}{3}}\right]_{-1}^{1}$

$\frac{3}{4}\sqrt[3]{ص^4}\,]_{-1}^{1} = \left(\frac{3}{4}\sqrt[3]{(1)^4}\right) - \left(\frac{3}{4}\sqrt[3]{(0)^4}\right)$

$= \frac{3}{4} - 0 = \boxed{\frac{3}{4}}$

٢١) $\int_{0}^{1} \frac{6س}{\sqrt[3]{س^2+1}}$ ك س

① ص = $س^2 + 1$

$\int_{1}^{2} 6س (س^2+1)^{-\frac{1}{3}}$ ك س

② ك س = $\frac{ك ص}{2س}$

$\int_{1}^{2} 3س\, ص^{-\frac{1}{3}}\, \frac{ك ص}{2س}$

③ عندما

س = ٢ ← ص = ٥

س = ٠ ← ص = ١

$\int_{1}^{5} ص^{-\frac{1}{3}}$ ك ص

$3 \times \frac{3}{2} ص^{\frac{2}{3}}\,]_{1}^{5}$

$\frac{9}{2}\sqrt[3]{ص^2}\,]_{1}^{5}$

$\frac{9}{2}\sqrt[3]{(5)^2} - \frac{9}{2}\sqrt[3]{(1)^2}$

$\frac{9}{2}\sqrt[3]{25} - \frac{9}{2}$

RAMI AL-BEJAWI

$\int_{أ}^{ب} مـ(س)\,د س = مـ(ب) - مـ(أ)$

برهان: $\int_{أ}^{ب} مـ'(س)\,د س = مـ(ب) - مـ(أ)$

وكذلك: $\int_{أ}^{ب} ك\,(س)\,د س = ك(ب) - ك(أ)$ وهكذا ...

أمثلة:

١) إذا كان $مـ(-١) = ٣$ ، $مـ(٢) = ٥$

فجد قيمة $\int_{-١}^{٢} ٤\,مـ(س)\,د س$

$= ٤ \int_{-١}^{٢} مـ(س)\,د س$

$= ٤\,(مـ(٢) - مـ(-١))$

$= ٤\,(٥ - ٣)$

$= ٤\,(٢) = \boxed{٨}$

٢) إذا كان $\int_{٥}^{٢} مـ(س)\,د س = ١٣$ ، وكان $مـ(٥) = -١٧$

فجد قيمة $مـ(٢)$

$\int_{٥}^{٢} مـ(س)\,د س = مـ(٢) - مـ(٥)$

$١٣ = مـ(٢) - (-١٧)$

$١٣ = مـ(٢) + ١٧$

$-١٧ \quad -١٧$

$\boxed{-٤ = مـ(٢)}$

٣) اذا علمت أن $مـ(-٨) = ٥$ ، $مـ(٢٧) = -٦$

فجد قيمة التكامل الآتي: $\int_{-٨}^{٢٧} ٣س^{٢}\,مـ'(س^{٣})\,د س$

$\int_{-٨}^{٢٧} ٣س^{٢}\,مـ'(س^{٣})\,د س$

① $ص = س^{٣}$

② $د س = \frac{د ص}{٣س^{٢}}$

③ عندما

$س = ٣ \longrightarrow ص = ٢٧$

$س = -٢ \longrightarrow ص = -٨$

$\int_{-٨}^{٢٧} مـ'(ص)\,د ص$

$مـ(٢٧) - مـ(-٨)$

$-٦ - ٥$

$\boxed{-١١}$

٤) اذا كان الاقتران $مـ$ متصلاً على الفترة $[١، ٥]$

وكان $مـ(س) = ٢س + ١$ ، فجد قيمة $مـ(٥) - مـ(١)$

$\int_{١}^{٥} مـ'(س)\,د س = مـ(٥) - مـ(١)$

$\int_{١}^{٥} ٢س + ١\,د س = مـ(٥) - مـ(١)$

$[س^{٢} + س]_{١}^{٥} = مـ(٥) - مـ(١)$

$((٥)^{٢} + (٥)) - ((١)^{٢} + (١)) = مـ(٥) - مـ(١)$

$(٣٠) - (٢) = مـ(٥) - مـ(١)$

$٢٨ = مـ(٥) - مـ(١)$

RAMI AL-BEJAWI

٦) إذا كان هـ(٥) = ٧ ، هـ(٢) = ١ ،
وكان $\int_{٢}^{٥} P$ هـ(س) دس = -١٨ ، فجد قيمة الثابت P

$$P \int_{٢}^{٥} هـ(س)\,دس = P\,(هـ(٥) - هـ(٢))$$
$$-١٨ = P\,(٧ - ١)$$
$$-١٨ = P\,(٦)$$
$$\frac{-١٨}{٦} = \frac{P\,٦}{٦}$$
$$\boxed{P = -٣}$$

٧) إذا كان هـ(P) = ٥ ، هـ(-٣) = -٩ ،
وكان $\int_{-٣}^{P} (هـ(س) - ٢س)\,دس = ٧$ ، فجد قيمة الثابت P

$$\int_{-٣}^{P} (هـ(س) - ٢س)\,دس = \int_{-٣}^{P} هـ(س)\,دس - \int_{-٣}^{P} ٢س\,دس$$
$$٧ = [هـ(P) - هـ(-٣)] - [س^{٢}]_{-٣}^{P}$$
$$٧ = (٥ - (-٩)) - (P^{٢} - (-٣)^{٢})$$
$$٧ = (١٤) - (P^{٢} - ٩)$$
$$٧ = ١٤ - P^{٢} + ٩$$
$$٧ = ٢٣ - P^{٢}$$
$$-٢٣ \quad\quad -٢٣$$
$$-١٦ = -P^{٢} \quad (\times -١)$$
$$١٦ = P^{٢}$$
$$\boxed{P = \pm ٤}$$

RAMI AL-BEJAWI

قاعدة ①: مشتقة التكامل غير المحدود تساوي ما داخل التكامل

قاعدة ②: مشتقة التكامل المحدود تساوي صفر

أمثلة:

١) جد $\frac{د ص}{د س}$ في كل مما يأتي:

ا) $ص = \int \frac{٤س - ١}{س^٢ + ٥}\, د س$

نشتقه الطرفين: $\frac{د ص}{د س} = \frac{٤س - ١}{س^٢ + ٥}$

ب) $ص = \int ظا(٤ + س)\, د س$

نشتقه الطرفين: $\frac{د ص}{د س} = ظا(٤ + س)$

ج) $ص = \int_{١-}^{٣} (٣س)(٤س - ٢)\, د س$

نشتقه الطرفين: $\frac{د ص}{د س} =$ صفر

٢) اذا كان $ص = \int (٤س^٢ - ٣س)\, د س$

فجد $\frac{د ص}{د س}$ عندما $س = ٢$

نشتقه الطرفين: $\frac{د ص}{د س} = ٤س^٢ - ٣س$

نعوض: $\left.\frac{د ص}{د س}\right|_{س=٢} = ٤(٢)^٢ - ٣(٢)$

$= ١٦ - ٦$

$= \boxed{١٠}$

٣) اذا كان $هـ(س) = \int \frac{٤س - ١}{س^٢ + ١}\, د س$، فجد $هـ'(-١)$

نشتقه الطرفين: $هـ'(س) = \frac{٤س - ١}{س^٢ + ١}$

نعوض: $هـ'(-١) = \frac{٤(-١) - ١}{(-١)^٢ + ١} = \frac{-٤ - ١}{١ + ١} = \boxed{\frac{-٥}{٢}}$

٤) جد $\frac{د ص}{د س}$ عندما $س = ٥$، حيث $ص = \int \frac{٤س + ١}{س}\, د س$ ، $س \neq ٠$

نشتقه الطرفين: $\frac{د ص}{د س} = \frac{٤س + ١}{س}$

نعوض: $\left.\frac{د ص}{د س}\right|_{س=٥} = \frac{٤(٥) + ١}{٥} = \boxed{\frac{٢١}{٥}}$

٥) اذا كان $\int ع'(س)\, د س = ٦س^٣ - ٣س^٢ + ٦س - ٥$

فجد $ع'(١)$

نشتقه الطرفين: $ع''(س) = ١٨س^٢ - ٦س + ٦$

نعوض: $ع''(١) = ١٨(١)^٢ - ٦(١) + ٦$

$= ١٨ - ٦ + ٦$

$= \boxed{١٨}$

RAMI AL-BEJAWI

٧) إذا كان ∫ مَـ(س) دس = س³ − ٢ س² + ١

وكان مَـ(٢) = ١٠ ، فجد قيمة الثابت ٢

نشتق الطرفين: مَـ(س) = ٣ س² − ٤ س

نعوض: مَـ(٣) = ٣(٣)² − ٢(٣)

١٠ = ١٢ − ٤ ٢

١٢− ١٢−

٤− ٤− = ٤ ٢−

$\boxed{٢ = \frac{١}{٢}}$

RAMI AL-BEJAWI

● خاصية ①: $\int_{ب}^{ب} ل\, م(س)\, د س = ل \int_{ا}^{ب} م(س)\, د س$ حيث ل ثابت

أمثلة:

١) إذا كان $\int_{١}^{٣} م(س)\, د س = ٨$ ، فجد قيمة $\int_{١}^{٣} ٢\, م(س)\, د س$

$\int_{١}^{٣} ٢\, م(س)\, د س = ٢ \int_{١}^{٣} م(س)\, د س = ٢ \times ٨ =$ **١٦**

٢) إذا كان $\int_{٢}^{٣-} ٥\, م(س)\, د س = ١٠$ ، فجد قيمة $\int_{٢}^{٣-} \frac{٣}{٤} م(س)\, د س$

بخبز المعطيات:

$\frac{\int_{٢}^{٣-} ٥\, م(س)\, د س}{٥} = \frac{١٠}{٥}$

$\int_{٢}^{٣-} م(س)\, د س = -٢$

بخبز المطلوب:

$\int_{٢}^{٣-} \frac{٣}{٤} م(س)\, د س$

$\frac{٣}{٤} \int_{٢}^{٣-} م(س)\, د س$

$\frac{٣}{٤} \times -٢$

$\frac{-٣}{٢}$

● خاصية ②:

$\int_{ا}^{ب} (م(س) \pm ع(س))\, د س = \int_{ا}^{ب} م(س)\, د س \pm \int_{ا}^{ب} ع(س)\, د س$

يعني: التكامل يتوزع على الجمع والطرح

أمثلة:

١) إذا كان $\int_{١}^{٣} م(س)\, د س = ٦$ ، $\int_{١}^{٣} هـ(س)\, د س = -٢$

فجد قيمة $\int_{١}^{٣} (٣\, هـ(س) - ٦\, م(س) + ٤)\, د س$

لاحظ أن المعطيات جاهزة

$\int_{١}^{٣} ٣\, هـ(س)\, د س - \int_{١}^{٣} ٦\, م(س)\, د س + \int_{١}^{٣} ٤\, د س$

$٣ \int_{١}^{٣} هـ(س)\, د س - ٦ \int_{١}^{٣} م(س)\, د س + (٣-١) \times ٤$

$٣ \times -٢ - ٦ \times ٦ + ٨$

$-٦ - ٣٦ + ٨$

-٣٤

٢) إذا كان $\int_{١}^{٢} ٢\, ل(س)\, د س = -٢$ ، $\int_{١}^{٢} ٤\, ع(س)\, د س = ٥$

فجد قيمة كل مما يأتي:

أ) $\int_{١}^{٢} \frac{٥\, ع(س)}{٢}\, د س$

ب) $\int_{١}^{٢} (٢\, ع(س) - ٣\, ل(س) - ٢ س)\, د س$

بخبز المعطيات: $\int_{١}^{٢} ٢\, ل(س)\, د س = -٢ \div ٢ \Leftarrow \int_{١}^{٢} ل(س)\, د س = -١$

بخبز المطلوب:

أ) $\int_{١}^{٢} \frac{٥\, ع(س)}{٢}\, د س = \frac{٥}{٢} \int_{١}^{٢} ع(س)\, د س$

$= \frac{٥}{٢} \times ٥ =$ $\frac{٢٥}{٢}$

ب) $\int_{١}^{٢} ٢\, ع(س)\, د س - \int_{١}^{٢} ٣\, ل(س)\, د س - \int_{١}^{٢} ٢ س\, د س$

$٢ \int_{١}^{٢} ع(س)\, د س - ٣ \int_{١}^{٢} ل(س)\, د س - س^{٢}_{١}$

$٢ \times ٥ - ٣ \times -١ - (٤ - ١)$

$١٠ - ٣- - ٣$

$١٠ + ٣ - ٣$

$=$ **١٠**

٣) إذا كان $\int_{٢}^{٥} (٣\, م(س) - ٤)\, د س = ١٨$

فجد قيمة التكامل الآتي: $\int_{٢}^{٥} م(س)\, د س$

بخبز المعطيات:

$\int_{٢}^{٥} (٣\, م(س) - ٤)\, د س = ١٨$

$٣ \int_{٢}^{٥} م(س)\, د س - \int_{٢}^{٥} ٤\, د س = ١٨$

$٣ \int_{٢}^{٥} م(س)\, د س - ٤ \times (٥-٢) = ١٨$

$٣ \int_{٢}^{٥} م(س)\, د س - ١٢ = ١٨$

$+١٢ \quad +١٢$

$٣ \int_{٢}^{٥} م(س)\, د س = ٣٠$

$\frac{٣}{٣} \quad \frac{٣٠}{٣}$

$\int_{٢}^{٥} م(س)\, د س = ١٠$ وهو المطلوب

RAMI ALBEJAWI

خاصية ③: $\int_{م}^{م} ه(س)\,دس = صفر$

أمثلة:

١) جد قيمة $\int_{-٢}^{٢} (٣س^٢ - ٦س + ٧)\,دس = صفر$

٣) إذا كان $\int_{١-م}^{٧+م٥} ه(س)\,دس = ٠$ فجد قيمة م

$$٧+م٥ = ١-م$$
$$-م \quad -م$$
$$٧+م٤ = -١$$
$$-٧ \quad -٧$$
$$\frac{م٤}{٤} = \frac{-٨}{٤}$$
$$م = -٢$$

٤) إذا كان $\int_{١+م^٣}^{-٧} ه(س)\,دس = ٠$ ، فجد قيمة م

$$-٧ = م^٣ + ١$$
$$-١ \quad -١$$
$$\sqrt[٣]{-٨} = \sqrt[٣]{م^٣}$$
$$م = -٢$$

٥) إذا كان $\int_{٢+م}^{م^٢-٤} ه(س)\,دس = ٠$ ، فجد قيمة م

$$م^٢ - ٤ = ٢ + م$$
$$م^٢ - م - ٤ - ٢ = ٠$$
$$م^٢ - م - ٦ = ٠$$
$$(م-٣)(م+٢) = ٠$$
$$م = ٣ \quad م = -٢$$

٦) إذا كان $\int_{ب^٢+ب}^{-ب+٣} ه(س)\,دس = صفر$، فجد قيمة ب

$$-ب + ٣ = ب^٢ + ب$$
$$٠ = ب^٢ + ب + ب - ٣$$
$$٠ = ب^٢ + ٢ب - ٣$$
$$٠ = (ب+٣)(ب-٢)$$
$$ب = -٣ \quad ب = ٢$$

RAMI AL-BEJAWI

● خاصية ④: $\int_{ب}^{ج} د(س)\,دس = -\int_{ج}^{ب} د(س)\,دس$

أمثلة:

١) إذا كان $\int_{٢}^{٦} (د(س)+١)\,دس = ٩$

فجد قيمة $\int_{٦}^{٢} \frac{١}{٢} د(س)\,دس$

تجزيء المعطيات: $\int_{٢}^{٦} د(س)\,دس + \int_{٢}^{٦} ١\,دس = ٩$

$\int_{٢}^{٦} د(س)\,دس + ٤ = ٩$

$\int_{٢}^{٦} د(س)\,دس = ٥$

تجزيء المطلوب: $\frac{١}{٢}\int_{٦}^{٢} د(س)\,دس$

$\frac{١}{٢} \times -٥$

$= \frac{-٥}{٢}$

٢) إذا كان $\int_{٣}^{٥} ٢د(س)\,دس = ٨$ ،

فجد قيمة $\int_{٥}^{٣} (٣د(س) + ٣س^{٢} - ١)\,دس$

تجزيء المعطيات: $\int_{٣}^{٥} ٢د(س)\,دس = ٨ \leftarrow \div ٢$

$\int_{٣}^{٥} د(س)\,دس = ٤$

تجزيء المطلوب:

$\int_{٥}^{٣} ٣د(س)\,دس + \int_{٥}^{٣} ٣س^{٢}\,دس - \int_{٥}^{٣} ١\,دس$

$٣ \times -٤ + س^{٣}]_{٥}^{٣} - (٥-٣) \times ١$

$-١٢ + (٢٧ - ١٢٥) - ٢$

$-١٢ + (-٩٨) + ٢$

$-١٢ - ٩٨ + ٢$

-١٠٨

٣) إذا كان $\int_{ج}^{ب} (د(س) - ٣)\,دس = ١$ ، فجد قيمة $\int_{ب}^{ج} د(س)\,دس$

تجزيء المعطيات:

$\frac{١}{٢}\int_{ب}^{ج} د(س)\,دس - \int_{ب}^{ج} ٣\,دس = ١$

$\frac{١}{٢}\int_{ب}^{ج} د(س)\,دس - ٣(٠-٢) = ١$

$\frac{١}{٢}\int_{ب}^{ج} د(س)\,دس - ٦ = ١$

$\frac{١}{٢}\int_{ب}^{ج} د(س)\,دس = ٧ \times ٢$

$\int_{ب}^{ج} د(س)\,دس = ١٤$

تجزيء المطلوب:

$\int_{ج}^{ب} د(س)\,دس = -١٤$

٤) إذا كان $\int_{٤}^{١} (٣د(س) - ٥)\,دس = ٩$

فجد قيمة: $\int_{٤}^{١} (٢د(س) + ١)\,دس$

تجزيء المعطيات: $٣\int_{٤}^{١} د(س)\,دس - \int_{٤}^{١} ٥\,دس = ٩$

$٣\int_{٤}^{١} د(س)\,دس - (١-٤) \times ٥ = ٩$

$٣\int_{٤}^{١} د(س)\,دس - -١٥ = ٩$

$٣\int_{٤}^{١} د(س)\,دس + ١٥ = ٩$

$٣\int_{٤}^{١} د(س)\,دس = -٦ \quad (\div ٣)$

$\int_{٤}^{١} د(س)\,دس = -٢$

تجزيء المطلوب: $\int_{٤}^{١} د(س)\,دس + \int_{٤}^{١} ١\,دس$

$٢ \times -٢ + (١-٤) \times ١$

$-٤ + ٣ = -١$

٥) إذا كان $\int_{-١}^{ج} ل(س)\,دس = ٣$ ، $\int_{ج}^{-١} (هـ(س)+١)\,دس = ٥$

فجد قيمة: $\int_{-١}^{ج} (٢هـ(س) - ٢س + ٣ل(س))\,دس$

تجزيء المعطيات:

$٢ \times \frac{١}{٣}\int_{-١}^{ج} ل(س)\,دس = ٣ \times ٢$

$\int_{-١}^{ج} ل(س)\,دس = ٦$

$\int_{ج}^{-١} هـ(س)\,دس + \int_{ج}^{-١} ١\,دس = ٥$

$\int_{ج}^{-١} هـ(س)\,دس + (-١-٢) \times ١ = ٥$

$\int_{ج}^{-١} هـ(س)\,دس - ٣ = ٥$

$+٣ \quad +٣$

$\int_{ج}^{-١} هـ(س)\,دس = ٨$

تجزيء المطلوب:

$٣\int_{-١}^{ج} هـ(س)\,دس - ٢س^{٢}]_{-١}^{ج} + ٣ \times ٦$

$٣ \times ٨ - س^{٢}]_{-١}^{ج} + ١٨$

$٢٤ - (٤ - ١) + ١٨$

$٢٤ - ٣ + ١٨ = -٩$

٦) إذا علمت أن $\int_{٥}^{٣} د(س)\,دس = ٣$

فجد قيمة: $\int_{١}^{٢} ٨س(د(س^{٢}+١))\,دس$

① $ص = س^{٢}+١$

② $دس = \frac{دص}{٢س}$

③ عندما $س=٢ \leftarrow ص=٥$

$س=١ \leftarrow ص=٢$

$\int_{٢}^{٥} ٨س\,د(ص)\,\frac{دص}{٢س}$

$٤\int_{٢}^{٥} د(ص)\,دص$

$٤ \times ٣ = ١٢$

RAMI AL-BEJAWI

خاصية ⊙ : خاصية الإضافة

$$\int_{\text{م}}^{\text{ب}} \text{هـ}(س)\,ds = \int_{\text{م}}^{\text{ج}} \text{هـ}(س)\,ds + \int_{\text{ج}}^{\text{ب}} \text{هـ}(س)\,ds$$

أمثلة :

١) إذا كان $\int_{1}^{5} 2\,\text{هـ}(س)\,ds = 2$ ، $\int_{1}^{6} \text{هـ}(س)\,ds = 4$

جد كلاً مما يأتي :

أ) $\int_{5}^{1} \text{هـ}(س)\,ds$

ب) $\int_{5}^{6} \text{هـ}(س)\,ds$

جـ) $\int_{6}^{-6} \text{هـ}(س)\,ds$

الحل :

$\int_{1}^{5} 2\,\text{هـ}(س)\,ds = 2 \xleftarrow{\div 2} \int_{1}^{5} \text{هـ}(س)\,ds = 1$

الحل :

أ) $\int_{5}^{1} \text{هـ}(س)\,ds = -1$

ب) $\int_{5}^{6} \text{هـ}(س)\,ds = \int_{5}^{1} \text{هـ}(س)\,ds + \int_{1}^{6} \text{هـ}(س)\,ds$

$= -1 + 4$

$= 3$

جـ) $\int_{-6}^{-6} \text{هـ}(س)\,ds =$ صفر

٢) إذا كان $\int_{1}^{-1} \frac{\text{هـ}(س)}{3}\,ds = 5$ ، $\int_{1}^{6} \text{هـ}(س)\,ds = 4$

جد قيمة :

أ) $\int_{-1}^{2} 2\,\text{هـ}(س)\,ds$

ب) $\int_{2}^{6} \text{هـ}(س)\,ds$

الحل :

$\int_{-1}^{2} \frac{\text{هـ}(س)}{3}\,ds = 5 \xleftarrow{\times 3} \int_{-1}^{2} \text{هـ}(س)\,ds = 15$

الحل :

أ) $\int_{-1}^{2} 2\,\text{هـ}(س)\,ds = 2 \times 15 = 30$

ب) $\int_{6}^{-1} \text{هـ}(س)\,ds = \int_{6}^{1} \text{هـ}(س)\,ds + \int_{1}^{-1} \text{هـ}(س)\,ds$

$= -4 + 15$

$= 11$

٣) إذا كان $\int_{1}^{4} 2\,\text{هـ}(س)\,ds = 12$ ، $\int_{1}^{5} \text{هـ}(س)\,ds = 4$

جد قيمة :

أ) $\int_{5}^{1} \text{هـ}(س)\,ds$

ب) $\int_{5}^{4} (\text{هـ}(س) + 2س)\,ds$

الحل : $\int_{1}^{4} 2\,\text{هـ}(س)\,ds = 12 \xleftarrow{\div 2} \int_{1}^{4} \text{هـ}(س)\,ds = 6$

الحل :

أ) $\int_{5}^{1} \text{هـ}(س)\,ds = \int_{5}^{4} \text{هـ}(س)\,ds + \int_{4}^{1} \text{هـ}(س)\,ds$

$= -4 + -6$

$= -10$

ب) $\int_{5}^{4} \text{هـ}(س)\,ds + \int_{5}^{4} 2س\,ds$

$-4 + س^2 \Big]_{5}^{4}$

$-4 + (16 - 25)$

$-4 + (-9) = -13$

٤) إذا كان $\int_{1}^{-1} \text{هـ}(س)\,ds = 4$ ، $\int_{-1}^{5} (\text{هـ}(س) + 3)\,ds = 20$

جد قيمة كل مما يأتي :

أ) $\int_{5}^{-1} \text{هـ}(س)\,ds$

ب) $\int_{1}^{-1} \text{هـ}(س)\,ds$

جـ) $\int_{5}^{1} (3\,\text{هـ}(س) - 4س)\,ds$

الحل : $\int_{-1}^{5} \text{هـ}(س)\,ds + \int_{-1}^{5} 3\,ds = 20$

$\int_{-1}^{5} \text{هـ}(س)\,ds + 3 \times (5 - -1) = 20$

$\int_{-1}^{5} \text{هـ}(س)\,ds + 18 = 20$

$\int_{-1}^{5} \text{هـ}(س)\,ds = 2$

الحل :

أ) $\int_{5}^{-1} \text{هـ}(س)\,ds = -2$

ب) $\int_{1}^{-1} \text{هـ}(س)\,ds = \int_{1}^{5} \text{هـ}(س)\,ds + \int_{5}^{-1} \text{هـ}(س)\,ds$

$= 4 + -2 = 2$

جـ) $3\int_{5}^{1} \text{هـ}(س)\,ds - \int_{5}^{1} 4س\,ds$

$3 \times -4 - 2س^2 \Big]_{5}^{1}$

$-12 - (2 - 50) = -12 - (-48) = 36$

RAMI AL-BEJAWI

٥) إذا علمت أن $\int_{-1}^{3} f(x)\,dx = 8$ ،

$\int_{-1}^{5} (2 - f(x))\,dx = -3$

فجد قيمة $\int_{3}^{5} (f(x) + x)\,dx$

لخواص المعطيات: $\int_{-1}^{5} 2\,dx - \int_{-1}^{5} f(x)\,dx = -3$

$(5 - -1) \times 2 - \int_{-1}^{5} f(x)\,dx = -3$

$12 - \int_{-1}^{5} f(x)\,dx = -3$

$-12 \qquad -12$

$-\int_{-1}^{5} f(x)\,dx = -15$ (x -1)

$\boxed{\int_{-1}^{5} f(x)\,dx = 15}$

لخواص التكامل: $\int_{3}^{5} f(x)\,dx + \int_{3}^{5} x\,dx$

$\int_{-1}^{3} f(x)\,dx + \int_{-1}^{5} f(x)\,dx + \left[\frac{x^2}{2}\right]_{3}^{5}$

$= -8 + 15 + \left(\frac{25}{2} - \frac{9}{2}\right)$

$7 + \left(\frac{16}{2}\right)$

$7 + 8 = \boxed{15}$

٦) إذا كان $\int_{1}^{6} (2 - f(x))\,dx = 7$ ، $\int_{1}^{6} f(x)\,dx = -5$

فجد: $\int_{1}^{6} \left(\frac{1}{2} f(x) - 6x^2\right)\,dx$

لخواص المعطيات: $\int_{1}^{6} 2\,dx - \int_{1}^{6} f(x)\,dx = 7$

$(6 - 1) \times 2 - \int_{1}^{6} f(x)\,dx = 7$

$10 - \int_{1}^{6} f(x)\,dx = 7$

$-10 \qquad -10$

$-\int_{1}^{6} f(x)\,dx = -3$ (x -1)

$\boxed{\int_{1}^{6} f(x)\,dx = 3}$

لخواص التكامل:

$\frac{1}{2}\int_{1}^{6} f(x)\,dx - \int_{1}^{6} 6x^2\,dx$

$\frac{1}{2}\left(\int_{1}^{6} f(x)\,dx + \int_{6}^{2} f(x)\,dx\right) - 2\left[x^3\right]_{1}^{2}$

$\frac{1}{2}(3 + 5) - (2(2)^3 - 2(1)^3)$

$\frac{1}{2} \times 13 = 14$

$\frac{13}{2} - 14 = \frac{13}{2} - \frac{28}{2} = \boxed{\frac{-15}{2}}$

RAMI AL-BEJAWI

ملاحظة: قاعدة الاقتران تساوي تكامل المشتقة

يعني: $\text{قـ}(س) = \int \text{قـ}'(س)\,د س$ تابعونا الدرس

انتبه! ميل المماس تعني قـ'(س)

أمثلة:

1) إذا كان قـ اقتراناً قابلاً للاشتقاق، وكان $\text{قـ}'(س) = 6س - 8س^3 + 5$، وكان قـ(-1) = 2

فجد قاعدة الاقتران قـ

$\text{قـ}(س) = \int \text{قـ}'(س)\,د س$

$\text{قـ}(س) = \int (6س - 8س^3 + 5)\,د س$

$\text{قـ}(س) = 3س^2 - 2س^4 + 5س + ج$ ← قـ(-1) = 2

$\text{قـ}(س) = 3س^2 - 2س^4 + 5س + 6$

$3(-1)^2 - 2(-1)^4 + 5(-1) + ج = 2$

$3 - 2 - 5 + ج = 2$

$-4 + ج = 2$

$ج = 6$

2) جد قاعدة الاقتران قـ الذي تحقق شروط القاعدة

$\text{قـ}'(س) = 3س^2 - 6س + 5$ علماً بأن قـ(0) = 7

$\text{قـ}(س) = \int \text{قـ}'(س)\,د س$

$\text{قـ}(س) = \int (3س^2 - 6س + 5)\,د س$

$\text{قـ}(س) = س^3 - 3س^2 + 5س + ج$ ← قـ(0) = 7

$\text{قـ}(س) = س^3 - 3س^2 + 5س + 7$

$(0)^3 - 3(0)^2 + 5(0) + ج = 7$

$ج = 7$

3) إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران صـ = قـ(س) عند النقطة (س، صـ) يساوي $(6 - 2س + 9س^3)$ فجد قاعدة الاقتران قـ، علماً بأن قـ(0) = 5

$\text{قـ}(س) = \int \text{قـ}'(س)\,د س$

$\text{قـ}(س) = \int (6 - 2س + 9س^3)\,د س$

$\text{قـ}(س) = 6س - س^2 + \frac{9}{4}س^4 + ج$ ← قـ(0) = 5

$\text{قـ}(س) = 6س - س^2 + \frac{9}{4}س^4 + 5$

$6(0) - (0)^2 + \frac{9}{4}(0)^4 + ج = 5$

$ج = 5$

4) إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ل عند النقطة (س، ص) يعطى بالقاعدة: $\text{لـ}'(س) = 2س(4 - 3س)$، فجد قاعدة الاقتران ل، علماً بأن منحناه يمر بالنقطة (0، 3)

$\text{لـ}(س) = \int \text{لـ}'(س)\,د س$

$\text{لـ}(س) = \int 2س(4 - 3س)\,د س$

$\text{لـ}(س) = \int 8س - 6س^2\,د س$

$\text{لـ}(س) = 4س^2 - 2س^3 + ج$ ← (0، 3)

$\text{لـ}(س) = 4س^2 - 2س^3 + 3$

$\text{قـ}(0) = 3$

$4(0)^2 - 2(0)^3 + ج = 3$

$ج = 3$

5) إذا كان قـ اقتراناً قابلاً للاشتقاق وكان $\text{قـ}'(س) = 2س(6 - 5س) + 4س^3$، وكان قـ(2) = -1، فجد قـ(س)

$\text{قـ}(س) = \int \text{قـ}'(س)\,د س$

$\text{قـ}(س) = \int 2س(6 - 5س) + 4س^3\,د س$

$\text{قـ}(س) = \int 18س - 10س^2 + 4س^3\,د س$

$\text{قـ}(س) = 9س^2 - 5س^3 + س^4 + ج$ ← قـ(2) = -1

$\text{قـ}(س) = 9س^2 - 5س^3 + س^4 - 13$

$9(2)^2 - 5(2)^3 + (2)^4 + ج = -1$

$36 - 40 + 16 + ج = -1$

$12 + ج = -1$

$ج = -13$

RAMI AL-BEJAWI

٦) اذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران يعطى بالقاعدة $(1+س)(3س+2)$، فجد قاعدة الاقتران ق علماً أن منحناه يمر بالنقطة $(2، -1)$

$ق(س) = \int ق'(س)\, د س$

$ق(س) = \int (1+س)(3س+2)\, د س$

$ق(س) = \int 3س + 2 + 3س^2 + 2س\, د س$

$ق(س) = \int 3س^2 + 5س + 2\, د س$

$ق(س) = س^3 + \frac{5}{2}س^2 + 2س + جـ$ ← $(2، -1)$

$ق(2) = -1$

$(2)^3 + \frac{5}{2}(2)^2 + 2(2) + جـ = -1$

$8 + 10 + 4 + جـ = -1$

$جـ = -23$

٧) اذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران هـ يعطى بالقاعدة $هـ'(س) = 2س^2 - 5س$، فجد هـ(2) علماً بأن منحنى الاقتران هـ يمر بالنقطة $(-1، 5)$

$هـ(س) = \int هـ'(س)\, د س$

$هـ(س) = \int 2س^2 - 5س\, د س$

$هـ(س) = \int 2س^2 - 5س\, د س$

$هـ(س) = \int 2 - 5س^{-1}\, د س$

$هـ(س) = س^2 - 5س + جـ$

$هـ(س) = س^2 - 5س - 1$

$هـ(2) = (2)^2 - 5(2) - 1$

$هـ(2) = 4 - 10 - 1 = -7$

$(-1، 5)$

$ق(-1) = 5$

$(-1)^2 - 5(-1) + جـ = 5$

$1 + 5 + جـ = 5$

$6 + جـ = 5$

$جـ = -1$

٨) جد قيمة ه(1)، علماً بأن ميل المماس لمنحنى ق يساوي $25(5س+4)^4$، وأن منحنى الاقتران يمر بـ $(-1، 7)$

$ق(س) = \int ق'(س)\, د س$

$ق(س) = \int 25(5س+4)^4\, د س$

$ق(س) = 25\frac{(5س+4)^5}{5 \times 5} + جـ$

$ق(س) = (5س+4)^5 + جـ$

$ق(س) = (5س+4)^5 + 8$ ،

$(-1، 7)$

$ق(-1) = 7$

$(5(-1)+4)^5 + جـ = 7$

$(-5+4)^5 + جـ = 7$

$(-1)^5 + جـ = 7$

$-1 + جـ = 7$

$جـ = 8$

١) جد قيمة ه(14)، علماً بأن ميل المماس لمنحنى ق هو: $ق'(س) = 6\sqrt[3]{3س-1}$، وأن منحناه يمر بالنقطة $(0، 5)$

$ق(س) = \int ق'(س)\, د س$

$ق(س) = \int 6\sqrt[3]{3س-1}\, د س$

$ق(س) = \int 6(3س-1)^{\frac{1}{3}}\, د س$

$ق(س) = 6\frac{(3س-1)^{\frac{4}{3}}}{3 \times \frac{4}{3}} + جـ$

$ق(س) = \frac{6}{\frac{4}{3}}(3س-1)^{\frac{4}{3}} + جـ$

$ق(س) = \frac{18}{8}(3س-1)^{\frac{4}{3}} + جـ$

$(0، 5)$

$ق(0) = 5$

$\frac{18}{8}(3(0)-1)^{\frac{4}{3}} + جـ = 5$

$\frac{18}{8}(-1)^{\frac{4}{3}} + جـ = 5$

$\frac{9}{4} \times 1 + جـ = 5$

$جـ = 5 - \frac{9}{4}$

$جـ = \frac{1}{4}$

RAMI AL-BEJAWI

● المسافة = تكامل السرعة ● السرعة = تكامل التسارع

ف(ن) = ∫ ع(ن) دن | ع(ن) = ∫ ت(ن) دن

أمثلة:

١) يتحرك جسيم على خط مستقيم وتعطى سرعته بالعلاقة:
ع(ن) = (٢ن − ٥) م/ث ، حيث ن الزمن بالثواني
جد موقع الجسيم بعد ثانيتين من بدء الحركة ،
علماً بأن موقعه الابتدائي ف(٠) = ٣ م .

ف(ن) = ∫ ع(ن) دن

ف(ن) = ∫ (٢ن − ٥) دن | ف(٠) = ٣

ف(ن) = ن² − ٥ن + جـ | ٠² − ٥(٠) + جـ = ٣

ف(ن) = ن² − ٥ن + ٣ | جـ = ٣

ف(٢) = (٢)² − ٥(٢) + ٣ = −٣ م

٢) يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث انطلاقه من الموقع الابتدائي ف(٠) = ٤ م ، إذا كانت سرعته بعد مرور ن ثانية تعطى بالعلاقة: ع(ن) = (٦ − ٢ن + ٦ن²) م/ث
فجد موقعه بعد مرور ثلاث ثوان من بدء الحركة .

ف(ن) = ∫ ع(ن) دن

ف(ن) = ∫ ٦ − ٢ن + ٦ن² دن | ف(٠) = ٤

ف(ن) = ٦ن − ن² + ٢ن³ + جـ | ٦(٠) − (٠)² + ٢(٠)³ + جـ = ٤

ف(ن) = ٦ن − ن² + ٢ن³ + ٤ | جـ = ٤

ف(٣) = ٦(٣) − (٣)² + ٢(٣)³ + ٤

ف(٣) = ٦٤ م

٣) يتحرك جسيم على خط مستقيم وبتسارع ثابت مقداره ت(ن) = −١٢ م/ث² . إذا كانت سرعته الابتدائية ع(٠) = ٥ م/ث ، وموقعه الابتدائي ف(٠) = ٣ م ، فجد:

أ) سرعة الجسيم بعد مرور أربع ثوان من بدء الحركة

ع(ن) = ∫ ت(ن) دن

ع(ن) = ∫ −١٢ دن | ع(٠) = ٥

ع(ن) = −١٢ن + جـ | −١٢(٠) + جـ = ٥

ع(ن) = −١٢ن + ٥ | جـ = ٥

ع(٤) = −١٢(٤) + ٥

ع(٤) = −٤٣ م/ث

ب) موقع الجسيم بعد مرور ثلاث ثوان من بدء الحركة

ف(ن) = ∫ ع(ن) دن

ف(ن) = ∫ (−١٢ن + ٥) دن | ف(٠) = ٣

ف(ن) = −٦ن² + ٥ن + جـ | −٦(٠)² + ٥(٠) + جـ = ٣

ف(ن) = −٦ن² + ٥ن + ٣ | جـ = ٣

ف(٣) = −٦(٣)² + ٥(٣) + ٣

ف(٣) = −٥٤ + ١٥ + ٣ = −٣٦ م

RAMI ALBEJAWI

٦) تتحرك نقطة مادية على خط مستقيم بتسارع مقداره
ت(ن) = ١٢ن(١ - ن) م/ث² ، حيث ن الزمن بالثواني .
فإذا كانت سرعتها الابتدائية ع(٠) = ٣ م/ث ،
وموقعها الابتدائي ف(٠) = ٢ م فجد:

أ) سرعة النقطة المادية بعد مرور أربع ثوان من بدء الحركة

ع(ن) = ∫ ت(ن) دن

ع(ن) = ∫ ١٢ن(١ - ن) دن

ع(ن) = ∫ ١٢ن - ١٢ن² دن

ع(ن) = ٦ن² - ٤ن³ + د

ع(ن) = ٦ن² - ٤ن³ + ٣

ع(٤) = ٦(٤)² - ٤(٤)³ + ٣ = -١٥٧ م/ث

ع(٠) = ٣
٦(٠)² - ٤(٠)³ + د = ٣
د = ٣

ب) موقع النقطة المادية بعد مرور ثانيتين من بدء الحركة

ف(ن) = ∫ ع(ن) دن

ف(ن) = ∫ ٦ن² - ٤ن³ + ٣ دن

ف(ن) = ٢ن³ - ن⁴ + ٣ن + د

ف(ن) = ٢ن³ - ن⁴ + ٣ن + ك

ف(٠) = ٢
٢(٠)³ - (٠)⁴ + ٣(٠) + د = ٢
د = ٢

ف(٢) = ٢(٢)³ - (٢)⁴ + ٣(٢) + ٢

ف(٢) = ٨ م

٧) يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث أن سرعته بعد مرور ن
ثانية من بدء الحركة تعطى بالقاعدة: ع(ن) = (٣ن - ١)(٤ن + ١) م/ث
جد: أ) القاعدة التي تمثل موقع الجسيم بعد مرور ن ثانية من بدء الحركة

ف(ن) = ∫ ع(ن) دن

ف(ن) = ∫ (٣ن - ١)(٤ن + ١) دن

ف(ن) = ∫ ١٢ن² + ٣ن - ٤ن - ١ دن

ف(ن) = ∫ ١٢ن² - ن - ١ دن

ف(ن) = ١٢ن³/٣ - ن²/٢ - ن + د

ب) موقع الجسيم بعد مرور ثانيتين من بدء الحركة ،
علماً بأن موقعه الابتدائي ف(٠) = ٧ م

ف(ن) = ١٢ن³/٣ - ن²/٢ - ن + د
ف(٠) = ٧
د = ٧

ف(ن) = ١٢ن³/٣ - ن²/٢ - ن + ٧

ف(٢) = ١٢(٢)³/٣ - (٢)²/٢ - ٢ + ٧

ف(٢) = ١٦ - ٢ - ٢ + ٧

ف(٢) = ١٩ م

٨) يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث أن سرعته بعد مرور
ن ثانية من بدء الحركة تعطى بالعلاقة: ع(ن) = ٦(١ - ٢ن)²
جد موقعه بعد مرور ثانية واحدة من بدء الحركة ،
علماً بأن موقعه الابتدائي ف(٠) = ٥ م

ف(ن) = ∫ ع(ن) دن

ف(ن) = ∫ ٦(١ - ٢ن)² دن

ف(ن) = ٦(١ - ٢ن)³ / (٣ × -٢) + د

ف(ن) = -(١ - ٢ن)³ + د

ف(١) = -(١ - ٢(١))³ + ٦

ف(١) = ٧ م

ف(٠) = ٥
-(٠ - ١)³ + د = ٥
-(١)³ + د = ٥
-١ + د = ٥
د = ٦

RAMI AL-BEJAWI

11) يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث أن سرعته بعد مرور ن ثانية من بدء حركته تعطى بالعلاقة:

ع(ن) = (١٢ جتا(٢ن - ١)) م/ث . جد القاعدة التي تمثل موقع الجسيم بعد مرور ن ثانية من بدء الحركة.

ف(ن) = ∫ ع(ن) دن

ف(ن) = ∫ ١٢ جتا(٢ن - ١) دن

ف(ن) = $\frac{١٢ \text{ جا}(٢ن - ١)}{٢}$ + جـ

ف(ن) = ٦ جا(٢ن - ١) + جـ

RAMI AL-BEJAWI

خطوات الحل:

أمثلة:

١) احسب مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران
ص = ه(س) = ٩ − س² ومحور السينات

قه(س) = ٠
٩ − س² = ٠
(٣ − س)(٣ + س) = ٠
س = ٣ ، س = −٣
حدود التكامل

م = ∫ من −٣ إلى ٣ (٩ − س²) دس
م = [٩س − س³/٣] من −٣ إلى ٣
م = (٩(٣) − (٣)³/٣) − (٩(−٣) − (−٣)³/٣)
م = (٢٧ − ٩) − (−٢٧ + ٩)
م = (١٨) − (−١٨)
م = ٣٦ وحدة مربعة

٢) جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران
ص = ه(س) = س² + ٣س ومحور السينات

قه(س) = ٠
س² + ٣س = ٠
س(س + ٣) = ٠
س = ٠ ، س = −٣
حدود التكامل

م = ∫ من −٣ إلى ٠ (س² + ٣س) دس
م = [س³/٣ + ٣س²/٢] من −٣ إلى ٠
م = (٠) − ((−٣)³/٣ + ٣(−٣)²/٢)
م = (٠) − (−٩ + ٢٧/٢)
م = (٠) − (−١٨/٢ + ٢٧/٢)
م = (٠) − (٩/٢)
م = |−٩/٢|
م = ٩/٢ وحدة مربعة

٣) جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران
ص = ه(س) = ٤س − س² ومحور السينات

قه(س) = ٠
٤س − س² = ٠
س(٤ − س) = ٠
س = ٠ ، س = ٤
حدود التكامل

م = ∫ من ٠ إلى ٤ (٤س − س²) دس
م = |[٢س² − س³/٣] من ٠ إلى ٤|
م = |(٢(٤)² − (٤)³/٣) − (٠)|
م = |٣٢ − ٦٤/٣ − ٠|
م = |٩٦/٣ − ٦٤/٣|
م = ٣٢/٣ وحدة مربعة

٤) جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران
ص = ه(س) = ٤س³ − ١٢س² ومحور السينات

قه(س) = ٠
٤س³ − ١٢س² = ٠
٤س² (س − ٣) = ٠
س = ٠ ، س = ٣
حدود التكامل

م = ∫ من ٠ إلى ٣ (٤س³ − ١٢س²) دس
م = [س⁴ − ٤س³] من ٠ إلى ٣
م = |((٣)⁴ − ٤(٣)³) − (٠)|
م = |٨١ − ١٠٨|
م = |−٢٧|
م = ٢٧ وحدة مربعة

٥) جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران
ص = ه(س) = س² − ٢س − ٣ ومحور السينات

قه(س) = ٠
س² − ٢س − ٣ = ٠
(س − ٣)(س + ١) = ٠
س = ٣ ، س = −١
حدود التكامل

م = ∫ من −١ إلى ٣ (س² − ٢س − ٣) دس
م = [س³/٣ − س² − ٣س] من −١ إلى ٣
م = ((٣)³/٣ − (٣)² − ٣(٣)) − ((−١)³/٣ − (−١)² − ٣(−١))
م = (٩ − ٩ − ٩) − (−١/٣ − ١ + ٣)
م = (−٩) − (−١/٣ + ٢)
م = (−٩) − (٥/٣)
م = |−٢٧/٣ − ٥/٣|
م = |−٣٢/٣|
م = ٣٢/٣ وحدة مربعة

RAMI AL-BEJAWI

ملاحظة :

١) جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران $ق(س) = س^2 + 4س + 4$ ومحور السينات والمستقيمين: $س = 1$ ، $س = 4$

$م = \int_1^4 |س^2 + 4س + 4| \, دس$

$م = |\frac{س^3}{3} + 2س^2 + 4س]_1^4|$

$م = |(\frac{64}{3} + 32 + 16) - (\frac{1}{3} + 2 + 4)|$

$م = |\frac{112}{3} - \frac{19}{3}| = \frac{93}{3}$

$م = 31$ وحدة مربعة

$ق(س) = 0$
$س^2 + 4س + 4 = 0$
$(س+2)^2 = 0$
$س = -2$ تهمل
خارج الفترة

٢) جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران $ق(س) = 12 - 4س$ ومحور السينات في الفترة $[-1, 3]$

$م = \int_{-1}^{3} |12 - 4س| \, دس$

$م = |12س - 2س^2]_{-1}^{3}|$

$م = |(12(3) - 2(3)^2) - (12(-1) - 2(-1)^2)|$

$م = |(18) - (-10)|$

$م = 28$ وحدة مربعة

$ق(س) = 0$
$12 - 4س = 0$
$-4س = -12$
$س = 3$ تهمل
خارج الفترة

٣) جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران $ق(س) = 6 - 2س$ ومحور السينات في الفترة $[1, 4]$

$م = \int_1^4 |6 - 2س| \, دس$

$م = |6س - س^2]_1^3|$

$م = |(6(3) - (3)^2) - (6(1) - (1)^2)|$

$م = 4$ وحدة مربعة

$م = \int_3^4 |6 - 2س| \, دس$

$م = |6س - س^2]_3^4|$

$م = |(6(4) - (4)^2) - (6(3) - (3)^2)|$

$م = |(8) - (9)|$

$م = 1$ وحدة مربعة

$ق(س) = 0$
$6 - 2س = 0$
$-2س = -6$
$س = 3$
داخل الفترة

$م = م_1 + م_2$

$م = 4 + 1$

$م = 5$ وحدة مربعة

٤) جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران $ق(س) = 5 - 2س$ ومحور السينات والمستقيمين: $س = -2$ ، $س = 1$

$م = \int_{-2}^{1} |5 - 2س| \, دس$

$م = |5س - س^2]_{-2}^{1}|$

$م = |(5(1) - (1)^2) - (5(-2) - (-2)^2)|$

$م = |(4) - (-14)|$

$م = |18|$

$م = 18$ وحدة مربعة

$ق(س) = 0$
$5 - 2س = 0$
$-2س = -5$
$س = \frac{5}{2}$
تهمل
خارج الفترة

٥) جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران $ق(س) = 4س^3$ ومحور السينات في الفترة $[-1, 1]$

$م = \int_{-1}^{1} |4س^3| \, دس$

$م = |س^4]_{-1}^{1}|$

$م = |(1) - (1)|$

$م = 0$ وحدة مربعة

$م = \int_{-1}^{0} 4س^3 \, دس + \int_{0}^{1} 4س^3 \, دس$

$م = [س^4]_{-1}^{0} + [س^4]_{0}^{1}$

$م = |(0) - (1)| + |(1) - (0)|$

$م = 1 + 1$

$م = 2$ وحدة مربعة

$ق(س) = 0$
$4س^3 = 0$
$س^3 = 0$
$س = 0$
داخل الفترة

٦) جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران $ق(س) = 3س^2 - 3$ ومحور السينات والمستقيمين: $س = -2$ ، $س = -4$

$م = \int_{-4}^{-2} |3س^2 - 3| \, دس$

$م = |س^3 - 3س]_{-4}^{-2}|$

$م = |(-2)^3 - 3(-2)) - ((-4)^3 - 3(-4))|$

$م = |(-8 + 6) - (-64 + 12)|$

$م = |(-2) - (-52)|$

$م = |-2 + 52|$

$م = 50$ وحدة مربعة

$ق(س) = 0$
$3س^2 - 3 = 0$
$3س^2 = 3$
$س^2 = 1$
$(س-1)(س+1) = 0$
$س = 1$ تهمل ، $س = -1$ تهمل
خارجي الفترة

RAMI AL-BEJAWI

٧) جد مساحة المنطقة المخلقة المحصورة بين منحنى الاقترانين ص = ه(س) = ٣س² - ١٢ ومحور السينات والمستقيمين: س = -١ ، س = ٣

م = $\int_{-1}^{2} |3س^2 - 12| \, دس$

م = $|س^3 - 12س|_{-1}^{2}$

م = $|((2)^3 - 12(2)) - ((-1)^3 - 12(-1))|$

م = $|(8 - 24) - (-1 + 12)|$

م = $|(-16) - (11)|$

م = $|-27|$

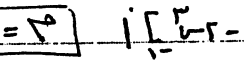
م = 27 وحدة مربعة

تقاطع: $3س^2 - 12 = 0$

$3(س^2 - 4) = 0$

$(س-2)(س+2) = 0$

س = 2 (مقبول) ، س = -2 (مرفوض)



٨) جد مساحة المنطقة المخلقة المحصورة بين منحنى الاقترانين ص = ه(س) = ٣س² - ٢٧ ومحور السينات على الفترة [-٤ ، ٠]

$م = \int_{-4}^{-3} |3س^2 - 27| \, دس$

$= |س^3 - 27س|_{-4}^{-3}$

$= |((-3)^3 - 27(-3)) - ((-4)^3 - 27(-4))|$

$= |(-27 + 81) - (-64 + 108)|$

$= |(54) - (44)|$

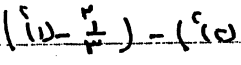
م = 10 وحدة مساحة

تقاطع: $3س^2 - 27 = 0$

$3(س^2 - 9) = 0$

$3(س-3)(س+3) = 0$

س = 3 (مرفوض) ، س = -3 (مقبول)



$م = \int_{-4}^{-3} |3س^2 - 27| \, دس$

$= |س^3 - 27س|_{-4}^{-3}$

$= |((-3)^3 - 27(-3)) - ((-4)^3 - 27(-4))|$

$= |(-27 + 81) - (-64 + 108)|$

$= |(54) - (44)|$

م = 10 وحدة مساحة

م = 10 + 54 = 64 وحدة مساحة

٩) جد مساحة المنطقة المخلقة المحصورة بين منحنى الاقترانين

ص = ه(س) = ٣س² - ٤٨ ومحور السينات على الفترة [٣ ، ٥]

$م = \int_{3}^{5} |3س^2 - 48| \, دس$

$= |س^3 - 48س|_{3}^{5}$

$= |((5)^3 - 48(5)) - ((3)^3 - 48(3))|$

$= |(-115) - (-129)|$

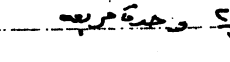
م = 14 وحدة مربعة

تقاطع: $3س^2 - 48 = 0$

$3(س^2 - 16) = 0$

$3(س-4)(س+4) = 0$

س = 4 (مقبول) ، س = -4 (مرفوض)



$م = \int_{3}^{4} |3س^2 - 48| \, دس + \int_{4}^{5} |3س^2 - 48| \, دس$

$= |س^3 - 48س|_{3}^{4} + |س^3 - 48س|_{4}^{5}$

$= |((4)^3 - 48(4)) - ((3)^3 - 48(3))| + |((5)^3 - 48(5)) - ((4)^3 - 48(4))|$

$= |(-128) - (-117)| + |(-115) - (-128)|$

م = 11 + 13

م = 24 وحدة مربعة

١٠) جد مساحة المنطقة المخلقة المحصورة بين منحنى الاقترانين

ص = ه(س) = ٦ - ٦س² ومحور السينات على الفترة [-٢ ، ٠]

$م = \int_{-2}^{-1} |6 - 6س^2| \, دس$

$= |6س - 2س^3|_{-2}^{-1}$

$= |(6(-1) - 2(-1)^3) - (6(-2) - 2(-2)^3)|$

$= |(-4) - (4)|$

م = 8 وحدة مربعة

$م = \int_{-1}^{0} |6 - 6س^2| \, دس$

$= |6س - 2س^3|_{-1}^{0}$

$= |0 - (6(-1) - 2(-1)^3)| = 4$ وحدة مساحة

م = 8 + 4

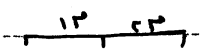
م = 12

تقاطع: $6 - 6س^2 = 0$

$6(1 - س^2) = 0$

$(1-س)(1+س) = 0$

س = 1 (مرفوض) ، س = -1 (مقبول)



١١) جد مساحة المنطقة المخلقة المحصورة بين منحنى الاقترانين

ص = ه(س) = س² - ٢س ومحور السينات على الفترة [١ ، ٤]

$م = \int_{1}^{2} |س^2 - 2س| \, دس$

$= |\frac{1}{3}س^3 - س^2|_{1}^{2}$

$= |(\frac{1}{3}(2)^3 - (2)^2) - (\frac{1}{3}(1)^2 - (1)^2)|$

$= |\frac{8}{3} - 4 + \frac{1}{3} + 1|$

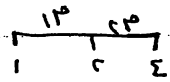
$= |\frac{9}{3} - 3|$

م = 0 وحدة مربعة

تقاطع: $س^2 - 2س = 0$

$س(س-2) = 0$

س = 0 (مرفوض) ، س = 2 (مقبول)



$م = \int_{1}^{2} |س^2 - 2س| \, دس + \int_{2}^{4} |س^2 - 2س| \, دس$

$= |\frac{1}{3}س^3 - س^2|_{1}^{2} + |\frac{1}{3}س^3 - س^2|_{2}^{4}$

$= |(\frac{1}{3}(2)^3 - (2)^2) - (\frac{1}{3}(1)^2 - (1)^2)| + |(\frac{1}{3}(4)^3 - (4)^2) - (\frac{1}{3}(2)^3 - (2)^2)|$

$= |\frac{8}{3} - 4 + \frac{1}{3} + 1| + |\frac{16}{3} - 16 + \frac{8}{3} + 4|$

$= |\frac{9}{3} - 3| + |\frac{24}{3} - \frac{36}{3}|$

$= 3 + 4$

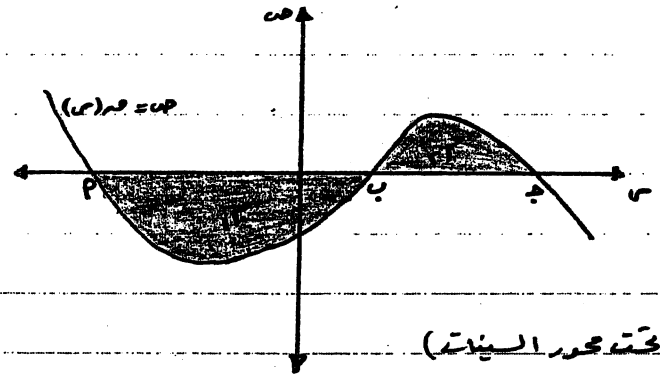
م = 7 وحدة مربعة

RAMI AL-BEJAWI

ملاحظة: * المساحة دائماً موجبة

* التكامل ← تكون قيمته موجبة عندما تكون المنطقة فوق محور السينات
← تكون قيمته سالبة عندما تكون المنطقة تحت محور السينات
(بشرط الحد العلوي هو الأكبر)

أمثلة:



١) يمثل الشكل المجاور منحنى الاقتران ص = ق(س).
فإذا كانت المساحة م١ = ٨ وحدات مربعة
والمساحة م٢ = ٥ وحدات مربعة،
فجد قيمة كل مما يأتي، مبرراً اجابتك:

أ) $\int_{م}^{ب} ق(س)\,دس = -٨$ (الجواب سالب لأن المنطقة تحت محور السينات)

ب) $\int_{ب}^{جـ} ق(س)\,دس = ٥$ (الجواب موجب لأن المنطقة فوق محور السينات)

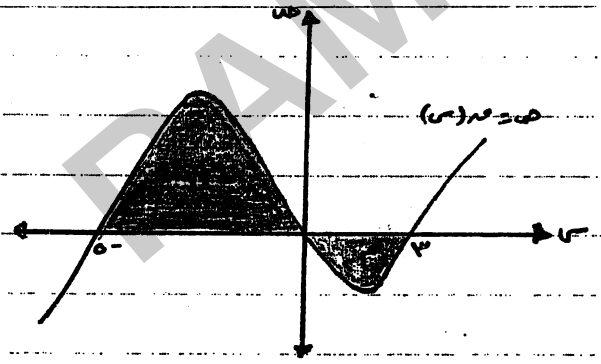
جـ) $\int_{م}^{جـ} ق(س)\,دس = \int_{م}^{ب} ق(س)\,دس + \int_{ب}^{جـ} ق(س)\,دس$

$= -٨ + ٥$

$= \boxed{-٣}$

د) مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق ومحور السينات على الفترة [م، جـ]

$م = م_١ + م_٢ = ٨ + ٥ = \boxed{١٣}$



٢) يمثل الشكل المجاور منحنى الاقتران ص = ق(س)
فإذا كانت المساحة م١ = ١٣ وحدة مربعة،
والمساحة م٢ = ٣ وحدات مربعة،
فجد قيمة $\int_{-٥}^{٣} ق(س)\,دس$، مبرراً إجابتك

$\int_{-٥}^{٣} ق(س)\,دس = \int_{-٥}^{٠} ق(س)\,دس + \int_{٠}^{٣} ق(س)\,دس$

$= ١٣ + -٣$ (سالب)

$= ١٠$ (موجب)

لأن المنطقة تحت محور س

لأن المنطقة فوق محور س

RAMI AL-BEJAWI

الوحده الثالثه

الأحصاء والأحتمالات

١) *معامل* الأرتباط بيرسون (الجدول):-

قانون الدرس:-

$$ر = \frac{\sum (س - \bar{س})(ص - \bar{ص})}{\sqrt{\sum (س - \bar{س})^{٢} (ص - \bar{ص})^{٢}}}$$

امثله:-

١) من خلال الجدول الاتي احسب معامل الأرتباط بيرسون بين المتغيرين(س،ص)؟

س	٧	6	٩	١٠	٨
ص	٨	٧	١٠	٨	١٢

الحل:-

س	ص	$(س - \bar{س})$	$(ص - \bar{ص})$	$(س - \bar{س})(ص - \bar{ص})$	$(س - \bar{س})^{٢}$	$(ص - \bar{ص})^{٢}$

RAMI AL-BEJAWI

٢) يبين الجدول الاتي علامات خمسة طلاب في مبحثي الرياضيات(س)والتاريخ(ص) في امتحان قصير النهايه العظمى له(١٠) احسب معامل الأرتباط بيرسون بين (س،ص)؟

س	٨	٦	٤	٦	٦
ص	٤	٥	٥	٧	٤

الحل:-

س	ص	$(س - \bar{س})$	$(ص - \bar{ص})$	$(س - \bar{س})(ص - \bar{ص})$	$(س - \bar{س})^{٢}$	$(ص - \bar{ص})^{٢}$

RAMI AL-BEJAWI

٣) من خلال الجدول الاتي احسب معامل الأرتباط بيرسون بين المتغيرين(س،ص)؟

س	٢	٥	٣	٧	٨
ص	٣	٩	٥	١٣	١٥

الحل:-

س	ص	$(س - \bar{س})$	$(ص - \bar{ص})$	$(س - \bar{س})(ص - \bar{ص})$	$(س - \bar{س})^{٢}$	$(ص - \bar{ص})^{٢}$

٢) أمثله مباشره على معامل الإرتباط بيرسون:-

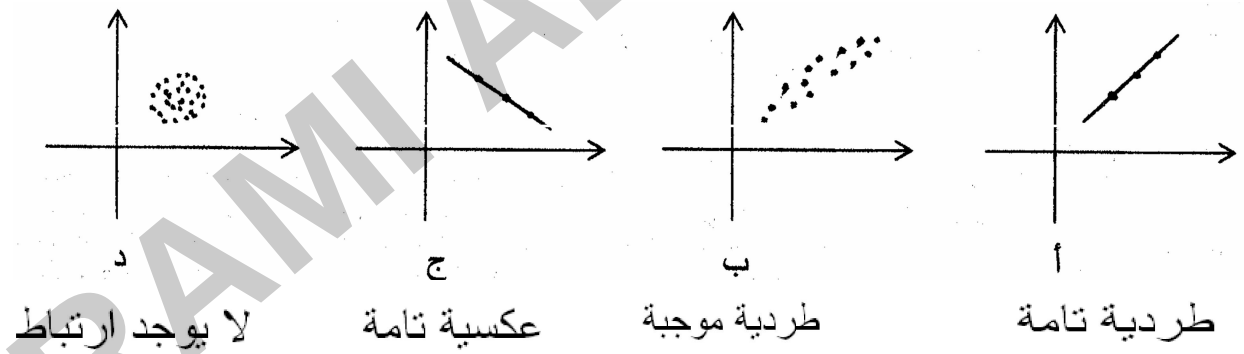
١)إذا كان س،ص متغيرين عدد كل منهما ١٠ وكان $\sum(ص - \bar{ص})^{٢} = ٢٠$، $\sum(س - \bar{س})^{٢} = ٨٠$

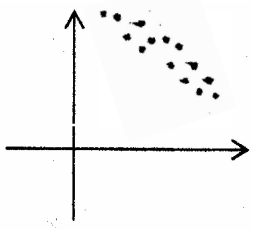
$\sum(س - \bar{س})(ص - \bar{ص})$= ٢٤ فجد معاما الارتباط بيرسون بين المتغيرين س،ص؟

٢) إذا كان س،ص متغيرين عدد كل منهما ١٠ وكان $\sum(ص - \bar{ص})^{٢} = ٤٠$، $\sum(س - \bar{س})^{٢} = ٩٠$

$\sum(س - \bar{س})(ص - \bar{ص})$= ٢٤ فجد معامل الارتباط بيرسون بين المتغيرين س،ص؟

٣) معامل الأرتباط بيرسون بيانيا:-





علاقة عكسية سالبة

RAMI AL-BEJAWI

معادلة خط الانحدار للتنبؤ بقيم (س)

قوانين الدرس:-

$$\hat{ص} = أ س + ب$$

$$أ = \frac{\sum (س - \bar{س})(ص - \bar{ص})}{\sum (س - \bar{س})^{٢}}$$

$$ب = \bar{ص} - أ \bar{س}$$

١)معادلة خط الأنحدار من خلال الجدول:-

١)من خلال الجدول الاتي احسب معادلة خط الانحدار للتنبؤ بقيم (ص) إذا علمت قيم (س)؟

س	٨	٥	٩	٦	٧
ص	٦	٧	٨	٤	٥

الحل:-

س	ص	$(س - \bar{س})$	$(ص - \bar{ص})$	$(س - \bar{س})(ص - \bar{ص})$	$(س - \bar{س})^{٢}$

RAMI AL-BEJAWI

٢)من خلال الجدول الاتي احسب معادلة خط الانحدار للتنبؤ بقيم (ص) إذا علمت قيم (س)؟

س	٨	٥	٩	٦	٧
ص	٦	٧	٨	٤	٥

الحل:-

س	ص	$(س - \bar{س})$	$(ص - \bar{ص})$	$(س - \bar{س})(ص - \bar{ص})$	$(س - \bar{س})^{٢}$

RAMI AL-BEJAWI

٢) أمثله كلاميه على معادلة خط الإنحدار:-

قانون الخطأ في التنبؤ:-

*** الخطأ في التنبؤ= القيمه الحقيقيه – القيمه المتوقعه**

امثله:-

١) إذا كان $\bar{س} = ٥، \bar{ص} = ٥، أ = ٣$ فجد

أ) معادلة خط الأنحدار؟

ب) الخطأ في التنبؤ إذا كانت س=٨ والقيمه المناظره لها(٨٢)؟

٢) إذا كان $\sum (س - \bar{س})^{٢} = ٤٠$ $\sum (س - \bar{س})(ص - \bar{ص}) = ٨٠$ $\bar{س} = ٦$ $\bar{ص} = ١٣$ **فجد معادلة خط الإنحدار؟**

٣) إذا كان $\sum (س - \bar{س})^{٢} = ٢٠٠٠$ $\sum (س - \bar{س})(ص - \bar{ص}) = ١٠٠٠$ $\bar{س} = ٣٠$ $\bar{ص} = ٦١$ **فجد معادلة خط الإنحدار؟**

٤) إذا كانت معادلة خط الإنحدار البسيط بين عدد ساعات الدراسه(س) والمعدل التحصيلي(ص)

هي $\hat{ص} = ٣٥ + ٥س$ **،أجب عمايلي:-**

أ) جد قيم (أ،ب)؟

ب) قدر أو توقع أو تنبأ بمعدل طالب درس (٥) ساعات؟

جـ) إذا كان معدل طالب درس (٨) ساعات هو (٩٥) فجد الخطأ في التنبؤ؟

RAMI AL-BEJAWI

طرائق العد

***المضروب (ن)! :-**

ن!= ن×(ن-١)×(ن-٢)×(ن-٣)×٠٠٠٠٠٠×١

قواعد المضروب:-

٧! =٧×٦×٥×٤×٣×٢×١=٥٠٤٠

٦! =٦×٤×٣×٢×١=٧٢٠

٥! = ٥×٤×٣×٢×١=١٢٠

٤! =٤×٣×٢×١=٢٤

٣! = ٣×٢×١=٦

٢! = ٢×١=٢

١! = ١

٠! = ١

أمثله:-

جد قيمة مايلي:-

$$\frac{٥!}{٥!} \qquad \frac{٢٠!}{١٩!}$$

$$\frac{٥!}{٤!} \qquad \frac{٥!}{٠!}$$

$$\frac{٥!}{٣!} \qquad \frac{٩!}{٦!}$$

RAMI AL-BEJAWI

ثوابت المضروب:-

جد قيمة الثابت (ن) ؟

١) ن! = ٧٢٠

٢) (ن-١)! = ٢٤

٣) (٢ن+١)! = ٥٠٤٠

٤) ٣× ن! =٧٢

٥) $\frac{\text{ن!}}{٢}$ =٣

٦) ن! +٣! =٣٠

٧) ٣(ن!) + ٣! = ٣٦٦

RAMI AL-BEJAWI

التباديل

***قانون التباديل:-**

$$ل(ن،ر) = \frac{ن!}{(ن-ر)!}$$

امثله:-

جد قيمة مايلي:-

١) ل(٤،٢) =

٢)ل(٦،٣) =

٣)ل(٥،٠) =

٤)ل(٥،١) =

٥)ل(٥،٤) =

٦)ل(٥،٥) =

*** قواعد حفظ:-**

*** ل(ن،٠) = ١**

*** ل(ن،١) = ن**

*** ل(ن،ن-١) = ن!**

*** ل(ن،ن) = ن!**

***طريقه مختصره لحل التباديل:-**

١) ل(٦،٣)=٦×٥×٤

٢) ل(٨،٢)=٨×٧

٣) ل(١٠،٤)=١٠×٩×٨×٧

***ثوابت التباديل (ن،ر):-**

١) ل(٦،ر)=١

٢) ل(٧،ر)=٧

٣) ل(٨،ر)=٨!

٤) ل(٥،ر)=٢٠

٥) ل(٧،ر)=٢١٠

٦) ل(ن،٢)= ٢٠

٧) ل(ن،٢)=٥٦

٨) ل(ن،٣)=٢١٠

RAMI AL-BEJAWI

***ثوابت التباديل مع التباديل:**

١) إذا كان ل(ن،٣)=٥ل(ن،٢) ، فجد قيمة الثابت(ن)

٢) إذا كان ل(ن،٣)= ل(ن،٢) ، فجد قيمة الثابت(ن)

٣) إذا كان $\frac{١}{٣}$ل(ن،٣) = ل(ن،٢) ، فجد قيمة الثابت(ن)

التوافيق

$$\binom{ن}{ر} = \frac{ن!}{(ن-ر)! \times ر!}$$ **أو** $$\binom{ن}{ر} = \frac{ل(ن،ر)}{ر!}$$

امثله:

جد قيمة كل ممايلي؟

١) $\binom{٥}{٣}$ =

٢) $\binom{٥}{٠}$ =

٣) $\binom{٥}{١}$ =

٤) $\binom{٥}{٤}$ =

٥) $\binom{٥}{٥}$ =

RAMI AL-BEJAWI

***قواعد حفظ:-**

١) $\binom{ن}{٠} = ١$

٢) $\binom{ن}{١} = ن$

٣) $\binom{ن}{ن-١} = ن$

٤) $\binom{ن}{ن} = ١$

***ثوابت التوافيق مع توافيق:-**

أمثله:-

جد قيمة الثابت (س) فيمايلي:-

١) $\binom{س}{٤} = \binom{س}{٨}$

٢) $\binom{س}{٣} = \binom{س}{٥}$

٣) $\binom{٧}{٣} = \binom{٧}{س}$

٤) $\binom{٨}{٢س} = \binom{٨}{٢}$

٥) $\binom{٩}{س+١} = \binom{٩}{٣}$

٦) $\binom{١٢}{٢س-١} = \binom{١٢}{٥}$

RAMI AL-BEJAWI

***ثوابت التوافيق مع التباديل:-**

أمثله:-

جد قيمة الثابت (ن) فيمايلي:-

١) $\binom{ن}{٣} = \frac{ل(ن،٢)}{!٣}$

٢) $\binom{ن}{٤} = ل(ن،٣)$

***ثوابت التوافيق / التباديل / المضروب:-**

أمثله:-

جد قيمة الثابت (ن) فيمايلي:-

١) $ن! = ل(٢،٥) + \binom{٤}{١}$

٢) $ن! = ل(٣،٥) + \frac{٤}{٣} \times \binom{١}{٢}$

RAMI AL-BEJAWI

٣) ن! = ل(٢،٦) + ٢ × $\binom{١٠}{٢}$

٤) (ن − ١)! = ل(٣،٦) × $\binom{٤}{٢}$

٥) ل(ن،٢) = ٥! + $\binom{٩}{٢}$

٦) إذا كان $\binom{ن}{٣}$ = ١٠ فجد قيمة ل(ن،٣)؟

***أمثله متنوعه:-**

١) $\frac{\text{ل}(٣،٥)}{!٣} \times \binom{٥}{٢}$

RAMI AL-BEJAWI

٢) $\binom{٦}{٢} \times \frac{٢ل(١٧٤)}{!٥}$

٣) $\binom{٥}{٣} \times \frac{ل(٢٧!٣)}{٥}$

٤) $\binom{٥}{٣} + \frac{!٤ + !٣}{(!٢) \times ٥}$

٥) $\binom{٦}{٤} + \frac{!٥ + !٤}{(!٣) \times ٦}$

٦) $\frac{ل(٢٧٤)}{٦} = \frac{!ن}{!(٢ - ن)}$

٧) $ل(٢٧٥) = \frac{!(٣ + ن)}{!(١ + ن)}$

RAMI AL-BEJAWI

الأسئله الكلاميه

مبدأ العد:-

١) ذهب السيد رائد الى مطعم لتناول وجبة الغداء فوجد قائمة الطعام لذلك اليوم تحتوي على(٣)انواع من الشوربه(عدس-خضار-فريكه)ونوعين من السمك (مشوي-مقلي)بكم طريقه يمكن اختيار وجبه واحده مكونه من نوع واحد من الشوربه ونوع واحد من السمك؟

٢) دخل احد الزبائن محلا للبيع اجهزة الحاسوب فوجد امامه(٣)انواع من شاشات العرض و(٤) انواع من لوحات المفاتيح و (٥) انواع لوحات التشغيل بكم طريقه يمكن اختيار جهاز مكون من شاشة عرض ولوحت مفاتيح ولوحة تشغيل؟

٣) ذهب ماهر لمكتبه لشراء قلم ودفتر ومسطره فوجد امامه (٣)انواع من الاقلام ونوعين من المساطر

واربع انواع من الدفاتر بكم طريقه يمكن شراء قلم ودفتر ومسطره؟

المضروب:- (ن!)

١) بكم طريقه يمكن جلوس (٥)طالبات على (٥) مقاعد في صف واحد؟

٢) بكم طريقه يمكن ترتيب (٤) كتب على رف واحد؟

٣) اذا اشترك اربعة رياضين في المباراه النهائية للسباحه فما التراتيب المختله لنتائج السباحه؟

الأعداد والأحرف:-

١) كم عدد مكون من منزلتين يمكن تكوينه من مجموعة الاعداد(١،٢،٣)؟

أ) اذا سمح بالتكرار

ب) لم يسمح بالتكرار

٢) كم عدد مكون من (٣)منازل يمكن تكوينه من مجموعة الاعداد(٤/٣/٦/٧)؟

أ) اذا سمح بالتكرار

ب) لم يسمح بالتكرار

RAMI AL-BEJAWI

٣) كم عدد مكون من (٣)منازل يمكن تكوينه من مجموعة الاعداد(٦/٥/٤/٣/٢/١)؟

أ) إذا سمح بالتكرار

ب) لم يسمح بالتكرار

٤) كم كلمه مكونه من (٣) حروف يمكن تكوينها من مجموعة الاحرف(ا/ب/ج/د)علما بانه ليس من الضروري ان يكون للكلمه معني(يعني لم يسمح بالتكرار)؟

<u>التباديل:-</u> ل(ن،ر)

١) بكم طريقه يمكن اختيار لجنه مكونه من رئيس ونائب للرئيس من بين (٤)اشخاص؟

٢) بكم طريقه يمكن اختيار لجنه مكونه من مديره ومساعده وقيمة مختبرمن بين (٥) معلمات؟

٣) من بين (٦) معلمين جامعين بكم طريق يمكن اختيار عميد ونائب للعميد للمشاركه في مؤتمرعالمي؟

<u>التوافيق:-</u> $\binom{ن}{ر}$

١)بكم طريق يمكن اختيار (٣) اشخاص من بين (٨) اشخاص؟

٢) بكم طريق يمكن اختيار (٤) كتب من بين (٥)كتب؟

٣) بكم طريق يمكن اختيار (٣)اسئله من بين (٧)اسئله؟

٤) ما عدد المجموعات الجزئيه الثنائيه التي يمكن تكوينها من مجموعة تحتوي (٥) عناصر؟

RAMI AL-BEJAWI

٥) بكم طريقه يمكن اختيار(٣) معلمين وطالبين من بين (٥)معلمين و(٩) طلاب؟

٦) اذا كان عدد اعضاء شركه (١٠) أعضاء وكان من منهم (٤) سيدات فما عدد طرق اختيار رجلين وسيده واحد من بينهم لتشكيل لجنه؟

٧) من بين (٩) طلاب يراد اختيار لجنه ما عدد طرق اختيار اللجنه في كل من الحالات الاتيه؟

١) تحتوي اللجنه على (٦) طلاب؟

٢)تحتوي اللجنه على طالبين على الاكثر؟

٣) تحتوي اللجنه على (٧) طلاب عل الاكثر؟

٨) مجموعه مكونه من (٨) معلمين و (٣) ادارين جد مايلي؟

١) جد عدد الطرق التي يمكن تكوين لجنه ثلاثيه مكونه من معلمين واداري؟

٢) جد عدد الطرق التي يمكن تكوين لجنه ثلاثيه مكونه من معلمين والباقي من الادارين؟

٣) جد عدد الطرق التي يمكن تكوين لجنه ثلاثيه مكونه من معلمين على الاقل؟

٤) جد عدد الطرق التي يمكن تكوين لجنه ثلاثيه مكونه من معلمين على الاكثر؟

٥) رئيس اللجنه ونائبه من المعلمين والباقي من الادارين؟

RAMI AL-BEJAWI

٩) مجموعه مكونه من (٤) معلمين و (٣) معلمات بكم طريق يمكن تكوين لجنه رباعيه منهم بحيث تتكون اللجنه من معلم واحد على الاقل؟

١٠) مجموعه مكونه من (٤) اطباء و(٦) ممرضين جد عدد الطرق التي يمكن بها تكوين لجنه رباعيه مكونه من رئيس ونائب للرئيس من الاطباء وعضوين من الممرضين؟

١١) مجموعه مكونه من (٤) معلمين و (٣) معلمات بكم طريق يمكن تكوين لجنه منهم مكونه من رئيس ونائب للرئيس وثلاث اعضاء من المجموعه بحيث يكون الرئيس من المعلمين ونائبه من المعلمات؟

١٢) مجموعه مكونه من (٤) معلمين و (٣) معلمات بكم طريق يمكن تكوين لجنه منهم مكونه من رئيس ونائب للرئيس وثلاث اعضاء من المجموعه بحيث يكون الرئيس ونائبه من المعلمات؟

١٣) مجموعة كتب مكونه من (٨) كتب علميه و (٦)كتب ادبيه يرغب طالب في اختيار (٣) كتب منها بكم طريقه يمكن اختيار الكتب الثلاثه بحيث يكون من بينها كتاب علمي واحد على الاقل؟

١٤) مجموعه مكونه من (٦) طلاب من كلية الاداب و (٥) طلاب من كلية العلوم يراد اختيار لجنه رباعيه منهم بحيث يكون رئيس اللجنه من الاداب ونائبه من العلوم؟

١٥) فريق رياضي مكون من (٦) لاعبين (٤) منهم ذكور يراد تشكيل لجنه ثلاثيه منهم بحيث يكون الرئيس ذكرا ونائبه انثى ؟

RAMI AL-BEJAWI

١٦) بكم طريقه يمكن اختيار (٣) كتب من بين (٥) كتب ومن ثمه ترتيبها على رف واحد؟

المتغير العشوائي

امثله:-

١) تم القاء قطعة نقد مرتين اذا دل المتغير العشوائي (س) على عدد مرات ظهور صوره اوجد مايلي؟

أ) الفضاء العيني

ب) قيم (س) الممكنه

جـ) كون جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي (س)

٢) تم القاء قطعة نقد(٣) مرات اذا دل المتغير العشوائي (س) على عدد مرات ظهور كتابه اوجد مايلي؟

أ) الفضاء العيني

ب) قيم (س) الممكنه

جـ) كون جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي (س)

٣) عائله لديها طفلين اذا دل المتغير العشوائي (س) على عددالاطفال الذكور اوجد مايلي؟

أ) الفضاء العيني

ب) قيم (س) الممكنه

RAMI AL-BEJAWI

جـ) كون جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي (س)

٣)عائله لديها ثلاث اطفال اذا دل المتغير العشوائي (س) على عددالاطفال الاناث اوجد مايلي؟

أ) الفضاء العيني

ب) قيم (س) الممكنه

جـ) كون جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي (س)

د) ل(س=٢)=

هـ) ل(س=٣)=

و) ل(س≥١)=

ز) ل(س≤٠)=

ح) ل(١ < س ≤ ٣)=

و) ما احتمال ان يكون جميع المواليد ذكور؟

ز) ما احتمال ان يكون لدى العائله بنتان على الاكثر؟

RAMI AL-BEJAWI

ثوابت جدول التوزيع الاحتمالي

١) اوجد قيمة الثابت (م) من خلال جدول التوزيع الاحتمالي التالي؟

س	٠	١	٢	٣
ل(س)	٠,٢	م	٠,٣	٠,١

نظرية ذات الحدين

قانون الدرس:-

$$ل(س=ر) = \binom{ن}{ر} (أ)^{ر} (١-أ)^{ن-ر}$$

١) <u>تطبيق مباشر:-</u>

أ) اذا كان(س) متغير عشوائي يتبع نظرية ذات الحدين معاملاته ن=٤، أ=٠,٣ اوجد كل مما يلي؟

١) قيم (س) الممكنه

٢) ل(س=٠)=

٣) ل(س=٢)=

٤)) ل(س<٢)=

٥) ل(س≤١)=

RAMI AL-BEJAWI

٦) ل(١< س < ٤)=

٢) جدول التوزيع الاحتمالي:-

١) اذا كان(س) متغير عشوائي يتبع نظرية ذات الحدين معاملاته ن=(٢)، أ $= \left(\frac{١}{٤}\right)$ كون جدول التوزيع الإحتمالي؟

٢) اذا كان(س) متغير عشوائي يتبع نظرية ذات الحدين معاملاته ن=(٢)، أ=(٠,٤) كون جدول التوزيع الاحتمالي؟

٣) الأسئله الكلاميه:-

١) مصنع به (٣) الات من نوع واحد اذا كان احتمال ان تحتاج اي اله الى الاصلاح في السنه الخامسه من عمرها (٠,٣) فما احتمال مايلي؟

إ) ان تحتاج إثنتان فقط الى الاصلاح؟

ب) ان لا تحتاج اي اله الى الاصلاح؟

RAMI AL-BEJAWI

٢) أذا كان احتمال ان يصيب شخص هدفا ما في كل طلقه يطلقها على الهدف يساوي (٠,٦) فاذا اطلق الصياد(٤) طلقات على هدف فما احتمال ان يصيب الهدف مره واحد على الاقل؟

٣) أذا كان احتمال نجاح عمليه جراحيه واحده (٨٠%) فاذا اجريت عمليتان فاجب عما يلي؟

أ) اكتب قيم (س) المحتمله؟

ب) كون جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي (س)؟

٤) صندوق يحتوي على أربع كرات بيضاء وست كرات حمراء سحبت من الصندوق كرتان على التوالي مع الارجاع اذا دل المتغير العشوائي (س) على عدد الكرات البيضاء المسحوبه كون جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي (س)؟

٥) صندوق يحتوي على خمسة بطاقات مرقمه من واحد الى خمسه سحبت من الصندوق بطاقتان على التوالي مع الارجاع ما احتمال ان تكون البطاقه المسحوبه تحمل رقما زوجيا؟

RAMI AL-BEJAWI

٦) اذا كانت نسبة القطع الصالحه في انتاج احد المصانع $\left(\frac{١}{٣}\right)$ فاذا اخذت (٤) قطع من انتاج المصنع بطريقه عشوائيه

١) ما احتمال ان لايكون بينها قطعه معيبه؟

٢) ان لايزيد عدد القطع المعيبه عن قطعه واحده فقط؟

٤) ثوابت نظرية ذات الحدين

١) إذا كان (س) متغير عشوائي ذو حدين معاملاته ن= ٣، $ل(س \leq ١) = \left(\frac{١٩}{٢٧}\right)$، جد قيمة الثابت (أ)؟

٢) إذا كان (س) متغير عشوائي ذو حدين معاملاته ن= ٤، $ل(س \leq ١) = \left(\frac{١٥}{١٦}\right)$ جد قيمة كل مما يلي

١) الثابت (أ)

٢) ل(س=٢)=

RAMI AL-BEJAWI

العلامه المعياريه

قانون الدرس:-

$$ز = \frac{س - \bar{س}}{ع}$$

ز: العلامه المعياريه او القيمه المعياريه

س: العلامه الاصليه او العلامه الخام

$\bar{س}$: الوسط او المتوسط الحسابي

ع : العلامه المعياريه

١) أمثله مباشره :-

١) اذا كان المتوسط الحسابي لعلامات طلاب الصف السابع في العلوم(٦٧) والانحراف المعياري(٣) فجد العلامه المعياريه لطالب علامته في العلوم(٦١)؟

٢) في توزيع تكراري اذا كانت العلامه الخام(٦٨) تقابل العلامه المعياريه(٠,٥) ،وكان الوسط الحسابي (٦٥) ، جد الانحراف المعياري؟

٣) اذا كان المتوسط الحسابي لعلامات طلاب الصف السابع في العلوم(٨٠) والانحراف المعياري لها(٢) فأن العلامه المعياريه المقابله للعلامه(٨٦) تساوي؟

٤) اذا كان المتوسط الحسابي لعلامات طلاب الصف السابع في العلوم(٧٢) والانحراف المعياري لها(٤) فأن العلامه الخام المقابله للعلامه المعياريه (١,٥) تساوي؟

RAMI AL-BEJAWI

٥) في توزيع تكراري اذا كانت العلامه الخام(٧٠) تقابل العلامه المعياريه(-٣) ،وكان الانحراف المعياري لعلامات الصف(٤) فجد المتوسط الحسابي لعلامات الصف؟

٢) القانون سحري(فوق / تحت):-

$$س = \bar{س} \pm (ع \times ن)$$

امثله:-

١) اذا كان المتوسط الحسابي لمجموعة من القيم يساوي(٦٠) والانحراف المعياري لها يساوي (٤) فان القيمه التي تنحرف انحرافين معياريين فوق المتوسط تساوي؟

٢) اذا كان المتوسط الحسابي لمجموعة من القيم يساوي(٦٠) والانحراف المعياري لها يساوي (٤) فان القيمه التي تنحرف انحرافين ونص تحت المتوسط تساوي؟

٣) المقارنه باستخدام العلامه المعياريه:-

١) اذا كانت علامة سناء في العربي(٨٠) وفي العلوم (٧٠) وكان الوسط الحسابي للعربي (٦٨) والانحراف المعياري لها (٨) اما الوسط الحسابي لعلامات العلوم(٥٠) والانحراف المعياري لها (١٠) في اي المبحثين تحصيل سناء افضل؟

RAMI AL-BEJAWI

٢) معتمدا على الجدول المجاور الذي يبين العلامات المعياريه لاربعة طلاب في امتحان الرياضيات الطالب الذي تحصيله افضل؟

الاسم	محمد	علي	حسام	طارق
العلامه المعياريه	-٤	-١	٠	٣

٤) قانون الانحراف المعياري السحري:-

$$ع = \frac{س_٢ - س_١}{ز_٢ - ز_١}$$

*** يعني: الانحراف المعياري يساوي الفرق بين علامتين اصليتين او خام مقسوما على الفرق بين العلامتين المعياريتين المقابلتين لهم**

أمثله على القانون السحري:-

١) اذا كان الفرق بين العلامتين في الصف نفسه في مادة الرياضيات يساوي(١٢) و الفرق بين العلامتين المعياريتين المقابلتين لهما يساوي(١,٢) فجد الانحراف المعياري؟

٢) اذا كانت علامتا طالبين في الصف نفسه في مادة الرياضيات (٧٠،٨٥) والعلامتين المعياريتين المقابلتين لهما(١،-٢)، فجد الانحراف المعياري؟

٣) اذا كان المتوسط الحسابي لاعمار مجموعه من الاشخاص(٤٥) عاما ،والانحراف المعياري لها(٤) أجب عما يلي؟

أ) جد العمر الذي ينحرف انحرافين معيارين فوق الوسط الحسابي؟

ب) اذا كان الفرق بين عمري شخصين في المجموعه نفسها ١٠ سنوات اوجد الفرق بين العلامتين المعياريتين المقابلتبن لهذين العمرين؟

RAMI AL-BEJAWI

٤) اذا كانت العلامات المعياريه للطلاب(احمد،جاسر،وائل) هي (١,٥،-١،-٢) على الترتيب وكان الوسط الحسابي لعلامات الصف(٧٠) والفرق بين علامتي(احمد وجاسر) يساوي (١٠) فما العلامات الفعليه للطلاب الثلاثه؟

٥) صف مكون من (٢٠) طالبه اذا كانت علامات الطالبات تسنيم وهديل وغدير هي(٨٠،٩٠،س)على الترتيب وعلامتهن المعياريه (٢،٣،-١)،فما علامة غدير؟

RAMI AL-BEJAWI

التوزيع الطبيعي

قوانين الدرس:-

$$ز = \frac{س - \bar{س}}{ع}$$

ل(ز ≥ أ) من الجدول مباشره:-

١) ل(ز≤ أ) = ١ – ل(ز ≥ أ)

٢) ل(ز≤ - أ) = ل(ز ≥ أ)

٣) ل(ز ≤ أ) = ١ – ل(ز ≥ أ)

٤) ل(أ ≥ ز ≥ ب) = ل(ز ≥ ب) - ل(ز ≥ أ)

١) تطبيق مباشر على الجدول:-

من خلال الجدول الاتي اجب عما يلي:

ز	٠	٠,٥	١	١,٥	٢	٢,٥
ل(ز≥ أ)	٠,٥٠٠٠	٠,٦٩١٥	٠,٨٤١٣	٠,٩٣٣٢	٠,٩٧٧٢	٠,٩٩٣٨

١) ل(ز≥ ٠,٥)=

٢) ل(ز≤ -٢,٥)=

٣) ل(ز≤٢)=

٤) ل(ز≥ -١,٥)=

٥) ل(١ ≥ ز ≥ ٢,٥) =

RAMI AL-BEJAWI

٢) أمثله كلاميه على التوزيع الطبيعي

١) تتبع علامات طلبة في امتحان عام توزيعا طبيعيا متوسطه حسابي (٦٥) وانحرافه المعياري(١٠) اختير احد الطلاب عشوائيا ،فما احتمال ان تكون علامته اقل من او يساوي(٦٠)؟

أ	٠,٢	٠,٥	١	١,٥	٢	٢,٥
ل(ز≤ أ)	٠,٥٩٧٣	٠,٦٩١٥	٠,٨٤١٣	٠,٩٣٣٢	٠,٩٧٧٢	٠,٩٩٣٨

٢) تتبع كتل(٢٠٠٠) طفل حديث الولاده توزيعا طبيعيا متوسطه حسابي (٤) وانحرافه المعياري(٠,٥) ما عدد الاطفال الذين تكون كتلهم اكبر من او تساوي(٣٠٥)كغم؟

أ	٠,٢	٠,٥	١	١,٥	٢	٢,٥
ل(ز≤ أ)	٠,٥٩٧٣	٠,٦٩١٥	٠,٨٤١٣	٠,٩٣٣٢	٠,٩٧٧٢	٠,٩٩٣٨

٣) تتبع اطوال طلبة في احدى المدارس توزيعا طبيعيا متوسطه حسابي (١٥٥)سم وانحرافه المعياري(١٠) اختير احد الطلاب عشوائيا ،فما احتمال ان يكون طوله (١٥٠)سم على الاقل؟

أ	٠,٠١	٠,٠٢	٠,٠٥	٠,٢	٠,٥	٢,٥
ل(ز≤ أ)	٠,٥٠٤٠	٠,٥٠٨٠	٠,٥١٩٩	٠,٥٧٩٣	٠,٦٩١٥	٠,٩٩٣٨

RAMI AL-BEJAWI

٤) تتبع اوزان(١٠٠٠٠) صندوق تفاح توزيعا طبيعيا متوسطه حسابي (٦) وانحرافه المعياري(٠,٣) ما عدد الصناديق االتي يقل وزنها عن (٥,٧)كغم؟

أ	٠,٢	٠,٥	١	١,٥	٢	٢,٥
ل(ز≤ أ)	٠,٥٩٧٣	٠,٦٩١٥	٠,٨٤١٣	٠,٩٣٣٢	٠,٩٧٧٢	٠,٩٩٣٨

٥) تتبع اوزان(٢٠٠٠٠)شخص توزيعا طبيعيا متوسطه حسابي (٣,٢)كغم وانحرافه المعياري(٠,٤) ما عدد الاشخاص االذين يكون وزنهم (٤)كغم على الاكثر؟

أ	٠,٢	٠,٥	١	١,٥	٢	٢,٥
ل(ز≤ أ)	٠,٥٩٧٣	٠,٦٩١٥	٠,٨٤١٣	٠,٩٣٣٢	٠,٩٧٧٢	٠,٩٩٣٨

٦) تقدم لامتحان عام(٥٠٠٠) طالب وكانت علاماتهم تتبع التوزيع الطبيعي بوسط حسابي (٤١)،وانحراف معياري(٦)جد عدد الطلبه الناجحين علما بأن علامة النجاح (٥٠)؟

أ	٠,٢	٠,٥	١	١,٥	٢	٢,٥
ل(ز≤ أ)	٠,٥٩٧٣	٠,٦٩١٥	٠,٨٤١٣	٠,٩٣٣٢	٠,٩٧٧٢	٠,٩٩٣٨

RAMI AL-BEJAWI

٧) تقدم لامتحان الثانويه العامه (١٠٠٠٠) طالب وكانت علاماتهم تتبع التوزيع الطبيعي بوسط حسابي (٥٧)،وانحراف معياري(١٦) اذا علمت انع لايسمح للطالب الذي معدله اقل من (٦٥) بتقديم طلب الى الجامعه الحكوميه جد عدد الطلبه عدد الطلبه الذين يحق لهم تقديم طلب الى الجامعه؟

أ	٠,٢	٠,٥	١	١,٥	٢	٢,٥
ل(ز≤ أ)	٠,٥٩٧٣	٠,٦٩١٥	٠,٨٤١٣	٠,٩٣٣٢	٠,٩٧٧٢	٠,٩٩٣٨

٨) يخضع معامل الذكاء للطلبه المسجلين في احدى الجامعات وعددهم(٦٠٠٠) طالبا لتوزيع طبيعي وسطه الحسابي (١٠٨) وانحرافه المعياري(١٠)،فما عدد الطلبه الذين ينحصر معامل الذكاء بين (١٠٣)و(١١٨)؟

أ	٠,٢	٠,٥	١	١,٥	٢	٢,٥
ل(ز≤ أ)	٠,٥٩٧٣	٠,٦٩١٥	٠,٨٤١٣	٠,٩٣٣٢	٠,٩٧٧٢	٠,٩٩٣٨

٩) يخضع معامل الذكاء للطلبه المسجلين في احدى الجامعات وعددهم(١٠٠٠) طالبا لتوزيع طبيعي وسطه الحسابي (٣٥٠) وانحرافه المعياري(٢٥)،فما عدد الطلبه الذين ينحصر معامل الذكاء بين (٣٢٥)و(٤٠٠)؟

أ	٠,٢	٠,٥	١	١,٥	٢	٢,٥
ل(ز≤ أ)	٠,٥٩٧٣	٠,٦٩١٥	٠,٨٤١٣	٠,٩٣٣٢	٠,٩٧٧٢	٠,٩٩٣٨

RAMI AL-BEJAWI

٣)التوزيع الطبيعي العكسي:-

يطلب علامة النجاح

١) أذا كانت علامات (١٠٠٠٠) طالب تتبع توزيعا طبيعيا وكان الوسط الحسابي للعلامات(٦٢) والانحراف المعياري لها(١٠)،وكان عدد الناجحين(٥٧٩٣) طالبا فما علامة النجاح؟

أ	٠,٢	٠,٥	٠,٣	٠,٤	٢	٢,٥
ل(ز≥ أ)	٠,٥٩٧٣	٠,٦٩١٥	٠,٦١٧٩	٠,٩٣٣٢	٠,٩٧٧٢	٠,٩٩٣٨

٢) أذا كانت علامات (١٠٠٠٠) طالب تتبع توزيعا طبيعيا وكان الوسط الحسابي للعلامات(٥٨) والانحراف المعياري لها(١٠)،وكان عدد الناجحين(٦١٧٩) طالبا فما علامة النجاح؟

أ	٠,٢	٠,٥	٠,٣	٠,٤	٢	٢,٥
ل(ز≥ أ)	٠,٥٩٧٣	٠,٦٩١٥	٠,٦١٧٩	٠,٩٣٣٢	٠,٩٧٧٢	٠,٩٩٣٨

RAMI AL-BEJAWI

بسم الله الرحمن الرحيم

المملكة الأردنية الهاشمية
وزارة التربية والتعليم
إدارة الامتحانات والاختبارات
قسم الامتحانات العامة

امتحان شهادة الدراسة الثانوية العامة لعام ٢٠١٩

(وثيقة محمية/محدود)

المبحث : الرياضيات / الورقة الثانية (ف٢)　　مدة الامتحان: ٢ : ٠٠ د س

الفـــرع : الأدبي والشرعي والفندقي والسياحي (مسار الجامعات) / خطة ٢٠١٩　اليوم والتاريخ: الخميس ٢٠١٩/٦/١٣

ملحوظة : أجب عن الأسئلة الآتية جميعها وعددها (٥)، علمًا بأن عدد الصفحات (٤).

السـؤال الأول: (٤٠ علامة)

أ) انقل إلى دفتر إجابتك رقم الفقرة ورمز الإجابة الصحيحة لها: (١٢ علامة)

١) إذا كان ق اقترانًا متصلًا، وكان $\int_{١}^{٣}$ ق(س) دس = ٥ − س^{٣} ، فإن قيمة ق (١) تساوي:

أ) −٢　　ب) ٢　　ج) ٣　　د) −٣

٢) $\int$ (قا^{٢}س − جتاس) دس يساوي:

أ) ظاس + جاس + جـ　　ب) ظاس − جاس + جـ

ج) ظاس + جتاس + جـ　　د) ظاس − جتاس + جـ

٣) إذا كان ق اقترانًا معرّفًا على الفترة [١ ، ٣] ، وكان ق َ(س) = ٢س ، فإن قيمة ق (٣) − ق (١) تساوي:

أ) ٨　　ب) −٨　　ج) ٤　　د) −٤

٤) إذا كان $\int_{٤}^{١}$ م دس = ١٥ ، فإن قيمة الثابت م تساوي:

أ) −٥　　ب) ٥　　ج) ٣　　د) −٣

ب) جد كلًا من التكاملات الآتية:

١) $\int_{١}^{٢} \frac{س^{٢} - ٩س + ١٨}{س - ٣}$ دس (١٠علامات)

٢) $\int$ (جا٥س + ٤$\sqrt{س}$ + ٦س) دس (٨ علامات)

ج) إذا كان $\int_{١}^{أ}$ (ق(س) − ٧) دس = ٢ ، $\int_{٥}^{١}$ ٣ هـ (س) دس = ٩ ، فجد قيمة:

$\int_{١}^{أ}$ (ق(س) + هـ(س)) دس (١٠علامات)

يتبع الصفحة الثانية----....----

RAMI AL-BEJAWI JO SCHOOL

السـؤال الثاني: (٣٣ علامة)

أ) انقل إلى دفتر إجابتك رقم الفقرة ورمز الإجابة الصحيحة لها: (١٢ علامة)

١) إذا كان $\int_{٢}^{٣}$ ق(س) دس = −٤ ، $\int_{٣}^{٦}$ ق(س) دس = ٦ ، فإن قيمة $\int_{٢}^{٦}$ ق(س) دس تساوي:

أ) ٢ ب) −١٠ ج) −٢ د) ١٠

٢) $\int$ (١ − س)^{٥} دس يساوي:

أ) ٥(١ − س)^{٦} + جـ ب) −٥(١ − س)^{٦} + جـ

ج) $-\frac{(١-س)^{٦}}{٦}$ + جـ د) $\frac{(١-س)^{٦}}{٦}$ + جـ

٣) قيمة $\int_{-١}^{١}$ ٣ دس تساوي:

أ) ٦ ب) −٦ ج) −٣ د) صفر

٤) $\int \frac{٤}{س^{-٣}}$ دس يساوي:

أ) س^{٤} + جـ ب) س$^{-٤}$ + جـ ج) ٤ س^{٤} + جـ د) ٤ س$^{-٤}$ + جـ

ب) جد $\int$ (س^{٢} − ١) $\sqrt{س^{٣} - ٣س}$ دس (١٢ علامة)

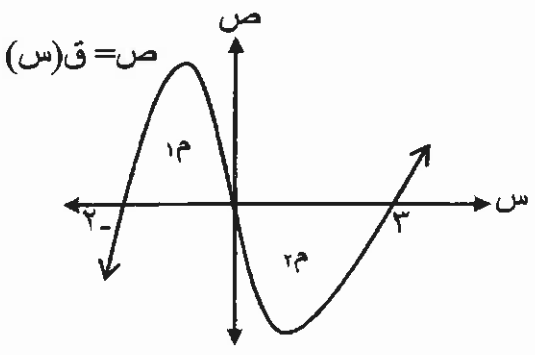
ج) إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ص = ق(س) عند النقطة (س ، ص) يساوي $(\frac{٣}{س^{٢}} - ٥)$ ، س ≠ ٠

فجد قاعدة الاقتران ق ، علمًا بأن منحناه يمرّ بالنقطة (١ ، ٢) (٩ علامات)

السـؤال الثالث: (٣٩ علامة)

أ) انقل إلى دفتر إجابتك رقم الفقرة ورمز الإجابة الصحيحة لها: (٩ علامات)

معتمدًا الشكل المجاور الذي يُمثّل منحنى الاقتران ص = ق(س) ، إذا علمت أن مساحة المنطقة م$_{١}$ تساوي (٣) وحدات مربعة، مساحة المنطقة م$_{٢}$ تساوي (٤) وحدات مربعة ، فأجب عن الفقرتين ١ ، ٢ الآتيتين:



١) قيمة $\int_{-٢}^{٣}$ ق(س) دس تساوي:

أ) ٧ ب) ١

ج) −١ د) −٧

٢) قيمة $\int_{-٢}^{٣}$ |ق(س)| دس تساوي:

أ) ٧ ب) ١ ج) ٨ د) ٩

يتبع الصفحة الثالثة ....

RAMI AL-BEJAWI
JO SCHOOL

٣) يتحرك جُسيم على خط مستقيم بتسارع ثابت مقداره ت(ن) = −١٠ م/ث^{٢} ، إذا كانت سرعته الابتدائية ع(٠) = ٥ م/ث ، فإن سرعته بعد مرور ن ثانية من بدء الحركة تُعطى بالعلاقة:

أ) ع(ن) = (−١٠ن − ٥) م/ث ب) ع(ن) = (−١٠ن + ٥) م/ث

ج) ع(ن) = (١٠ن − ٥) م/ث د) ع(ن) = (١٠ن + ٥) م/ث

ب) جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ص = ق(س) = ٤ − ٢س ، ومحور السينات على الفترة [١ ، ٣] (٨ علامات)

ج) أجب عن كلٍّ ممّا يأتي:

١) جد قيمة المقدار: $\frac{٣! + ٤!}{٥\ (٢!)} + \binom{٥}{٣}$ (١٢ علامة)

٢) جد قيمة ن التي تحقق المعادلة: $\frac{ن!}{(ن - ٢)!} = \frac{ل(٤ ، ٢)}{٦}$ (١٠علامات)

السـؤال الرابع: (٤٠ علامة)

أ) **انقل إلى دفتر إجابتك رقم الفقرة ورمز الإجابة الصحيحة لها:** (١٥ علامة)

١) بكم طريقة يمكن اختيار سيارة لشرائها من معرض سيارات فيه (٥) أنواع مختلفة من السيارات وكل نوع متوفر بـ(٤) ألوان؟

أ) ٥! × ٤! ب) ٥ × ٤ ج) ٥! + ٤! د) ٥ + ٤

٢) بكم طريقة يمكن اختيار (٣) طلاب من بين (١٠) طلاب للمشاركة في إحدى المسابقات الوطنية؟

أ) ل (١٠ ، ٣) ب) ٣! ج) $\binom{١٠}{٣}$ د) ١٠!

٣) إذا كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي س معطى بالجدول المجاور، فإن قيمة الثابت (م) تساوي:

س	٠	١	٢	٣
ل(س)	٠,٢	م	٠,٣	٠,١

أ) ٠,٦ ب) ٠,٠٦ ج) ٠,٠٤ د) ٠,٤

٤) معتمدًا الجدول المجاور الذي يُبيّن العلامات المعيارية لأربعة طلاب في امتحان الرياضيات، الطالب الذي تحصيله في الامتحان أفضل هو:

٠ الاسم	علي	محمد	طارق	يوسف
العلامة المعيارية	−٤	−١	٠	٣

أ) علي ب) محمد ج) طارق د) يوسف

٥) إذا كان (ز) متغيرًا عشوائيًا طبيعيًا معياريًا، وكان ل (ز ≤ ف) = ٠,٨ ، فإن قيمة ل (ز ≤ −ف) تساوي:

أ) ٠,٠٨ ب) ٠,٢ ج) ٠,٠٢ د) ٠,٨

ب) مجموعة مكونة من(٤) معلمين و(٣) معلمات، بكم طريقة يمكن تكوين لجنة رباعية منهم، بحيث تتكون اللجنة من معلم واحد على الأقل؟ (١٢ علامة)

يتبع الصفحة الرابعة ....

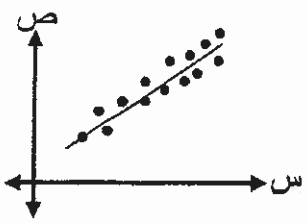
RAWI AL-BEJAWI SCHOOL

ج) في تجربة إلقاء قطعة نقد (٣) مرات متتالية، إذا دلّ المتغير العشوائي س على عدد مرات ظهور صورة، فاكتب جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي س (١٣ علامة)

السـؤال الخامس: (٤٨ علامة)

أ) **انقل إلى دفتر إجابتك رقم الفقرة ورمز الإجابة الصحيحة لها:** (١٢ علامة)

١) ما نوع العلاقة التي تربط بين المتغيرين س ، ص في شكل الانتشار المجاور؟



أ) طردية تامة ب) عكسية تامة

ج) طردية (موجبة) د) عكسية (سالبة)

٢) إذا كان المتوسط الحسابي لمجموعة من القيم يساوي (٦٠) والانحراف المعياري لها يساوي (٤) ، فإن القيمة التي تنحرف انحرافين معياريين تحت المتوسط الحسابي هي:

أ) ٥٦ ب) ٥٨ ج) ٦٨ د) ٥٢

٣) إذا علمت أن معادلة خط الانحدار للعلاقة بين رأس المال (س) والأرباح السنوية (ص) هي:

$\hat{ص}$ = ٠,٤ س + ١٠ ، فما قيمة الأرباح بالدينار التي يمكن التنبؤ بها لشركة رأس مالها (١٠٠٠٠) دينار؟

أ) ٤٠٠ ب) ٤٠١٠ ج) ٤١٠ د) ٤٠٠٠

٤) إذا كان معامل الارتباط بين المتغيرين س ، ص هو (٠,٦) ، فإن قيمة معامل الارتباط بين س* ، ص* حيث: س* = س − ٥ ، ص* = ٣ − ص تساوي:

أ) −٠,٦ ب) ٠,٦ ج) ٠,٠٦ د) −٠,٠٦

ب) تتبع كتل (٢٠٠٠٠) طفل حديثي الولادة توزيعًا طبيعيًا متوسطه الحسابي (٤) كغم، وانحرافه المعياري (٠,٥) ، ما عدد الأطفال الذين تكون كتلهم أكبر من أو يساوي (٣,٥) كغم؟ (١٤ علامة)

ملاحظة: يمكنك الاستفادة من الجدول الآتي الذي يمثل جزءًا من جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

ف	٠	٠,٥	١	١,٥	٢
ل (ز ≤ ف)	٠,٥٠٠٠	٠,٦٩١٥	٠,٨٤١٣	٠,٩٣٣٢	٠,٩٧٧٢

ج) احسب معامل ارتباط بيرسون بين المتغيرين س ، ص للقيم المبيّنة في الجدول المجاور. (١٣ علامة)

س	٢	٥	٣	٧	٨
ص	٣	٩	٥	١٣	١٥

د) إذا كان س ، ص متغيرين عدد قيم كل منهما (٥) ، وكان $\bar{س}$ = ٣٠ ، $\bar{ص}$ = ٦١ ،

$\sum_{ك=١}^{٥} (س_ك - \bar{س})^٢ = ١٠٠٠$ ، $\sum_{ك=١}^{٥} (س_ك - \bar{س})(ص_ك - \bar{ص}) = ٢٠٠٠$ ، فجد معادلة خط الانحدار للتنبؤ بقيم ص إذا علمت قيم س (٩ علامات)

﴿ انتهت الأسئلة ﴾

RAMI ALBEJAWI

بسم الله الرحمن الرحيم

امتحان شهادة الدراسة الثانوية العامة لعام ٢٠١٩

صفحة رقم (١)

وزارة التربية والتعليم
إدارة الامتحانات والاختبارات
قسم الامتحانات العامة

المبحث : الرياضيات / الورقة الثانية (ف٢)　　مدة الامتحان: د/٢ س/٢

الفرع : الادبي والشرعي والفندقي والسياحي (مسار الجامعات)/خطة ٢٠١٩م　التاريخ : ١ حزيران ٢٠١٩/٦/١٣م

الإجابة النموذجية:	رقم الصفحة في الكتاب

السؤال الأول : (٤٠ علامة)

(أ)

١٦١ ١٦٢ ١٦٧ ٢١٧

رقم الفقرة	١	٢	٣	٤
رمز الاجابة الصحيحة	ك	ب	م	م
الاجابة الصحيحة	-٣	ظاس - حاس + جـ	٨	-٥
	(٣)	(٣)	(٣)	(٣)

(ب)

١٦٦

$$\int_{٢}^{} \frac{س^٢ - ٩س + ١٨}{س - ٣} \, دس = \int_{٢}^{} \frac{(س-٣)(س-٦)}{(س-٣)} \, دس$$

(١) (١)

$$= \int_{٢}^{} (س - ٦) \, دس = \left[\frac{س^٢}{٢} - ٦س \right]_{٢}^{}$$

(٢) (٢)

$$= \left(\frac{٤}{٢} - ٦ \times ٢ \right) - (٠ - ٠) = -١٠$$

(٢)

١٦٢ ١٦٣

$$\int (حاه س + \sqrt[٤]{س} + ٦س) \, دس$$

$$= \int (حاه س + س^{\frac{١}{٤}} + ٦س) \, دس$$

(٣) (٢) (٢) (٢)

$$= -\frac{١}{٥} حتاه س + \frac{٤}{٥} س^{\frac{٥}{٤}} + ٣س^٢ + جـ$$

(ج)

١٧٧

$$\int_{١}^{٥} (ه(س) - ٧) \, دس = ٢ \Leftarrow \int_{١}^{٥} ه(س) \, دس - \int_{١}^{٥} ٧ \, دس = ٢$$

(١)

$$\int_{١}^{٥} ه(س) \, دس - ٧(٥-١) = ٢ \Leftarrow \int_{١}^{٥} ه(س) \, دس = ٢٨+٢$$

(ج)

$$\therefore \int_{١}^{٥} ه(س) \, دس = ٣٠ \quad ، \quad \int_{٥}^{١} ٣هـ(س) = ٩ \Leftarrow \int_{٥}^{١} هـ(س) \, دس = ٣$$

(١) (٢)

$$\therefore \int_{١}^{٥} (ه(س) + هـ(س)) \, دس = \int_{١}^{٥} ه(س) \, دس + \int_{١}^{٥} هـ(س) \, دس$$

(١)

$$= ٣٠ + (-٣) = ٢٧$$

(١)

RAMI ALBEJAWI
JO SCHOOL

رقم الصفحة في الكتاب

الإجابة النموذجية:

السؤال الثاني: (٣٣ علامة)

١٧٧ ١٨٣ ١٧٤ ١٦٦

أ) ١٢

رقم الفقرة	١	٢	٣	٤
رمز الاجابة الصحيحة	P	جـ	ك	P
الاجابة الصحيحة	٢	$-\frac{(١-س)^{٦}}{٦}+$ جـ	صفر	$س^{٤}+$ جـ
	(٣)	(٣)	(٣)	(٣)

١٧٩

ب) ١٢

$$\int (س^{٢}-١)\sqrt{س^{٣}-٣س}\ د س$$

نفرض أن $ص = س^{٣}-٣س \Leftarrow \frac{د ص}{د س} = ٣س^{٢}-٣$ ②

ومنه $د ص = (٣س^{٢}-٣)\ د س$

$$= \int (س^{٢}-١)\sqrt{س^{٣}-٣س}\ د س$$

$$= \int (س^{٢}-١)\sqrt{ص}\ \frac{د ص}{٣(س^{٢}-١)}$$

$$= \frac{١}{٣}\int \sqrt{ص}\ د ص = \frac{١}{٣}\int (ص)^{\frac{١}{٢}}\ د ص$$

$$= \frac{١}{٣}\cdot\frac{(ص)^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}} + جـ$$

$$= \frac{٢}{٩}(س^{٣}-٣س)^{\frac{٣}{٢}} + جـ$$

١٨٨

جـ) ٩

$$د ر(س) = \frac{٣}{س^{٤}} - ٥ \quad ①$$

بإجراء التكامل بالنسبة إلى المتغير س لكل من الطرفين، ينتج أن:

$$\int د ر(س)\ د س = \int \left(\frac{٣}{س^{٤}} - ٥\right) د س$$

$$= -٣س^{-٣} - ٥س + جـ = \frac{-٣}{س^{٣}} - ٥س + جـ$$

$$\therefore ر(س) = \frac{-٣}{س^{٣}} - ٥س + جـ$$

لكن منحنى الاقتران ر يمر بالنقطة (١، ٢)، أي ر(١) = ٢

$$\therefore ر(١) = \frac{-٣}{١} - ٥ + جـ = ٢ \Leftarrow جـ = ١٠$$

$$\therefore \text{قاعدة الاقتران } ر(س) = \frac{-٣}{س^{٣}} - ٥س + ١٠$$

RAMI AL-BEJAWI SCHOOL

الإجابة النموذجية:

السؤال الثالث : (٣٩ علامة)

رقم الصفحة في الكتاب

أ)

رقم الفقرة	١	٢	٣
رمز الاجابة الصحيحة	جـ	أ	ب
الاجابة الصحيحة	-١	٧	ع(٣) = (-١٠ ن + ٥)%

١٩٠ ١٩٩ ١٩٣

(٣) (٣) (٣)

ب) مـ(س) = ٠ ①

٤ - ٢س = ٠ ①، ٤ = ٢س ، س = ٢ ① تقع ضمن الفترة [١، ٣]

$$\int_1^2 (4-2س)\,د س = \int_1^2 4\,د س - \int_1^2 2س\,د س$$

$$= 4 - [س^2]_1^2 = 4 - (4-1) = 1$$

$$\int_2^3 (4-2س)\,د س = \int_2^3 4\,د س - \int_2^3 2س\,د س$$

$$= 4 - [س^2]_2^3 = 4 - (9-4) = -1$$

∴ المساحة المطلوبة $= \int_1^3 |مـ(س)|\,د س = \int_1^2 مـ(س)\,د س + \int_2^3 -مـ(س)\,د س$

= ١ + ١ = ٢ وحدة مربعة

جـ) ١) $\frac{!3 + !4}{!2 \times 5} = \binom{5}{3}$

$$\frac{!5}{!3 \times !2} + \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 + 1 \times 2 \times 3}{1 \times 2 \times 5} = \frac{!3 \times 4 \times 5}{!3 \times 2 \times 1} + \frac{6 + 4}{10}$$

= ١٠ + ٣ = ١٣

٢) $\frac{!ن}{!(ن-2)} = \frac{ل(4، 2)}{6} \Leftarrow \frac{ن(ن-1)(ن-2)!}{!(ن-2)} = \frac{3 \times 4}{6} = 2$

$ن^2 - ن - 2 = 0 \Leftarrow (ن+1)(ن-2) = 0 \Leftarrow ن = -1$ نرفض

ن = ٢ ①

RAMI ALBEJAWI SCHOOL

رقم الصفحة في الكتاب

الإجابة النموذجية:

السؤال الرابع : (٤٠ علامة)

رقم الفقرة	١	٢	٣	٤	٥
رمز الاجابة الصحيحة	ب	جـ	د	هـ	ب
الاجابة الصحيحة	٤×٥	$\frac{١}{٣}$	٤ر	يوسف	٢ر٠
	③	③	③	③	③

٢٢٢
٢٣٥
٢٤١
٢٤٨
٢٥٤

ب)

عدد طرائق اختيار اللجنة =

$$\binom{٣}{٠}\binom{٤}{٤} + \binom{٣}{١}\binom{٤}{٣} + \binom{٣}{٢}\binom{٤}{٢} + \binom{٣}{٣}\binom{٤}{١}$$

$$= \frac{!٤}{!٤\times!٠} + \frac{!٣}{!١\times!٢}\times\frac{!٤}{!٣\times!١} + \frac{!٣}{!٢\times!١}\times\frac{!٤}{!٢\times!٢} + \frac{!٣}{!٣\times!٠}\times\frac{!٤}{!٣\times!١}$$

$$= ١ + ٣\times٤ + ٣\times٦ + ٤ = ٣٥ \text{ طريقة}$$

٢٣٧

حـ) $ك = \{$ (ص ص ص) ، (ص ص له) ، (ص له ص) ، (له ص ص) ، (ص له له) ، (له ص له) ، (له له ص) ، (له له له) $\}$

٢٤١

قيم س هي $\{٠، ١، ٢، ٣\}$

$ل(س=٠) = ل(له له له) = \frac{١}{٨}$ ②

$ل(س=١) = ل(ص له له) + ل(له ص له) + ل(له له ص) = \frac{٣}{٨}$ ④

$ل(س=٢) = ل(ص ص له) + ل(ص له ص) + ل(له ص ص) = \frac{٣}{٨}$ ③

$ل(س=٣) = ل(ص ص ص) = \frac{١}{٨}$ ②

∴ جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي س هو :

①

س	٠	١	٢	٣
ل(س)	$\frac{١}{٨}$	$\frac{٣}{٨}$	$\frac{٣}{٨}$	$\frac{١}{٨}$

RAMI ALBEBAWI TEACHER

رقم الصفحة في الكتاب	الإجابة النموذجية:

السؤال الخامس : (٤٨ علامة)

أ)

رقم الفقرة	١	٢	٣	٤	٢٦٣
رمز الاجابة الصحيحة	حـ	ك	ب	م	٢٤٨
الاجابة الصحيحة	طردية موجبة	٥٢	٤٠١٠	-٦ر	٢٧٥ ٢٦٨
	③	③	③	③	

ب) ④ ② ③

$$ل(س \leq ٣٫٥) = ل\left(\frac{س - \bar{س}}{ع} \leq \frac{٣٫٥ - ٤}{٠٫٥}\right)$$ ٢٥٩

$$= ل(ز \leq -١)$$ ②

$$= ل(ز \geq ١)$$ ②

$$= ٠٫٨٤١٣$$ ②

∴ عدد الاطفال $= ٢٠٠٠٠ \times ٠٫٨٤١٣ = ١٦٨٢٦$ طفلاً ③

جـ)

س	ص	س - $\bar{س}$	ص - $\bar{ص}$	(س - $\bar{س}$)(ص - $\bar{ص}$)	(س - $\bar{س}$)^٢	(ص - $\bar{ص}$)^٢	
٢	٣	-٣	-٦	١٨	٩	٣٦	٢٦٧
٥	٩	٠	٠	٠	٠	٠	
٣	٥	-٢	-٤	٨	٤	١٦	
٧	١٣	٢	٤	٨	٤	١٦	
٨	١٥	٣	٦	١٨	٩	٣٦	
المجموع		⑩ ①	٠ ①	٥٢ ①	٢٦ ①	١٠٤ ①	

$$\bar{س} = \frac{٢+٥+٣+٧+٨}{٥} = \frac{٢٥}{٥} = ٥$$ ①

$$\bar{ص} = \frac{٣+٩+٥+١٣+١٥}{٥} = \frac{٤٥}{٥} = ٩$$ ①

$$ر = \frac{\sum (س - \bar{س})(ص - \bar{ص})}{\sqrt{\sum (س - \bar{س})^٢ \sum (ص - \bar{ص})^٢}} = \frac{٥٢}{\sqrt{٢٦ \times ١٠٤}} = \frac{٥٢}{٥٢} = ١$$ ① ①

RAMI AL-BEJAWI JO SCHOOL

الإجابة النموذجية:	رقم الصفحة في الكتاب
	٢٧٥

د) $\overline{س} = ٣٠$ ، $\overline{ص} = ٦١$ ، $\sum_{ل=١}^{٥} (س_ل - \overline{س})^٢ = ١٠٠٠$

$\sum_{ل=١}^{٥} (س_ل - \overline{س})(ص_ل - \overline{ص}) = ٢٠٠٠$

$$م = \frac{\sum_{ل=١}^{٥} (س_ل - \overline{س})(ص_ل - \overline{ص})}{\sum_{ل=١}^{٥} (س_ل - \overline{س})^٢} = \frac{٢٠٠٠}{١٠٠٠} = ٢$$

$ب = \overline{ص} - م\overline{س} = ٦١ - ٢ \times ٣٠ = ٦١ - ٦٠ = ١$

∴ معادلة خط الانحدار :

$ص^ = م س + ب$

$ص^ = ٢س + ١$

RAMI AL-BEJAWI
JO SCHOOL

السؤال الأول

أ) في حالة الاختلاف بين الرمز والإجابة يعتمد الرمز والإجابة يعتمد الرمز

ب)

١) إذا طلب حدود التكامل في التعويض وعوض بشكل صحيح يخصم علامة

- إذا لم يظهر تعويض الصف (الحد السفلي) يأخذ العلامة على ١٠

٢) التكامل بدون إشارات يعتبر صحيح

ج) * إذا كتب الطالب $\int_1^5 (٣٠) \, ds = ٣٠$ مباشرة يأخذ (٥) علامات

* إذا كتب الطالب $\int_1^5 (ح(س) + ٣٠) \, ds = \int_1^5 ح(س) \, ds + \int_1^5 ٣٠ \, ds$

$= ٣٠ + ٣- = ٢٧$ يأخذ (٨) علامات

* إذا كتب بشكل مباشر $\int_1^5 ٣٠ \, ds = ٣٠$ ، $\int_1^5 ح(س) \, ds = ٣-$

$\therefore \int_1^5 (٣٠ + ح(س)) \, ds = ٣٠ + ٣- = ٢٧$ يأخذ (١٠) علامات

* إذا كتب $\int_1^5 (٣٠ + ح(س)) \, ds = \int_1^5 ٣٠ \, ds + \int_1^5 ح(س) \, ds$

$= ٣٠ + ٣- = ٢٧$

أو $= ٣٠ + ٣٣ = ٢٧$

* إذا كتب $\int_1^5 (٣٠ + ح(س)) \, ds = ٢٧$

RAMI ALBEJAMI JO SCHOOL

السؤال الثاني

ب) اذا كان $\int (س^{4}-1)\sqrt{س^{2}-3-س}$ دس

$= \int (س^{4}-1)\sqrt{ص} \times \frac{دص}{3(س^{4}-1)}$ ①

$= \int \frac{1}{3}\sqrt{ص}$ دص ①

ثم يكمل الحل -----

RAMI AL-BEJAWI
JO SCHOOL

السؤال الثالث

ب) اذا كان الطالب

$$م = \int_{1}^{3} (٤ - ٢س - س^{٢}) \, دس = \int_{1}^{3} ٤ \, دس - \int_{1}^{3} ٢س \, دس - \int_{1}^{3} س^{٢} \, دس$$

$$= ٤(٣-١) - [س^{٢}]_{1}^{3}$$

$$= ٨ - (٩ - ١)$$

$$= ٨ - ٨$$

$$= صفر$$

ج) اذا كان

$$٢ = ن(ن-١)$$

$$\therefore ن = ٢$$

RAMI AL-BEJAWI
JO SCHOOL

السؤال الرابع

ب) اذا كتبت الطالبة

عدد طالبة اختيار الخبز = ٤ + ١٨ + ١٢ + ١ = ٣٥ طريقة

(١) (١) (١) (١)

ج) اذا كتبت الجدول صاحبه

(١) الجدول ≠

س	٠	١	٢	٣
ل(س)	١/٨	٣/٨	٣/٨	١/٨

(١) (١) (١) (١) (١)

طريقة أخرى: ن = ٣ ، ح = ١/٢ ، ١ - ح = ١/٢

ل(ر = ٠) = (٣ ، ٠) (١/٢)^٠ (١/٢)^٣ = ١/٨ ①

ل(ر = ١) = (٣ ، ١) (١/٢)^١ (١/٢)^٢ = ٣/٨ ①

ل(ر = ٢) = (٣ ، ٢) (١/٢)^٢ (١/٢)^١ = ٣/٨ ①

ل(ر = ٣) = (٣ ، ٣) (١/٢)^٣ (١/٢)^٠ = ١/٨ ①

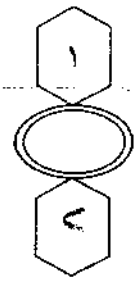
(١) الجدول ≠

س	٠	١	٢
ل(س)	١/٨	٣/٨	١/٨

(١) (١) (١) (١)

RAMI AL-BEJAWI
JO SCHOOL

بسم الله الرحمن الرحيم



المملكة الأردنية الهاشمية
وزارة التربية والتعليم
إدارة الامتحانات والاختبارات
قسم الامتحانات العامة

JO SCHOOL

امتحان شهادة الدراسة الثانوية العامة لعام ٢٠١٩ / التكميلي

(وثيقة محمية/محدود)

المبحث : الرياضيات / الورقة الثانية (ف٢) — مدة الامتحان: ٠٠ : ٢ د س

الفرع : الأدبي والشرعي والفندقي والسياحي (مسار الجامعات) / خطة ٢٠١٩ — اليوم والتاريخ: الأحد ٢٠١٩/٨/٤

ملحوظة : أجب عن الأسئلة الآتية جميعها وعددها (٥)، علمًا بأن عدد الصفحات (٤).

السؤال الأول: (٤٠ علامة)

أ) انقل إلى دفتر إجابتك رقم الفقرة ورمز الإجابة الصحيحة لها: (١٢ علامة)

١) إذا كان ق اقترانًا متصلًا، وكان ق(س) = $\int$ (٤ س^{٣} + ١) دس ، فإن قيمة ق`(١) تساوي:

أ) ٢ ب) ٥ ج) ١٢ د) ١٣

٢) $\int \frac{١}{\text{جتا}^{٢}\text{س}}$ دس يساوي:

أ) ق$\text{ا}^{٢}$س + جـ ب) ظاس + جـ ج) قاس+ جـ د) ظا^{٢}س + جـ

٣) إذا كان ق اقترانًا متصلًا، وكان ق(٠) = −١ ، ق(١) = ٢ ، فإن قيمة $\int_{٠}^{١}$ ق`(س) دس تساوي:

أ) −٣ ب) −١ ج) ١ د) ٣

٤) إذا كان $\int_{٥}^{٦}$ ٢م دس = −١٢ ، فإن قيمة الثابت م تساوي:

أ) −٦ ب) −٤ ج) صفر د) ٤

ب) جد كلًا من التكاملات الآتية:

١) $\int_{-١}^{٠}$ $\frac{\text{س}^{٢} + ٧\text{س} + ٦}{\text{س} + ١}$ دس (١٠علامات)

٢) $\int$ (٤س^{٣} + $\sqrt{\text{س}}$ − جاس) دس (٨ علامات)

ج) إذا كان $\int_{٣}^{٥}$ ٦ق(س) دس = ٢٤ ، $\int_{٣}^{٥}$ (هـ(س) + ٧) دس = ١٦ ، فجد:

$\int_{٥}^{٣}$ (٢ق(س) − ٣هـ(س)) دس (١٠علامات)

يتبع الصفحة الثانية ....

RAMI AL-BEJAWI JO SCHOOL

السـؤال الثاني: (٣٣ علامة)

أ) انقل إلى دفتر إجابتك رقم الفقرة ورمز الإجابة الصحيحة لها: (١٢ علامة)

١) إذا كان $\int_{١}^{٣}$ ق(س) دس = −٤ ، $\int_{١}^{٣}$ ق(س) دس = ٨ ، فإن $\int_{٣}^{١}$ ق(س) دس يساوي:

أ) −١٢ ب) −٤ ج) ٤ د) ١٢

٢) $\int$ (١ − س)^{٢} دس يساوي:

أ) ٢(١ − س) + جـ ب) −٢(١ − س) + جـ

ج) $\frac{١}{٣}$ (١ − س)^{٣} + جـ د) − $\frac{١}{٣}$ (١ − س)^{٣} + جـ

٣) قيمة $\int_{-٤}^{٤}$ ٢ دس تساوي:

أ) صفر ب) −١٦ ج) −٨ د) ١٦

٤) $\int$ جتا(٦س − ٣) دس يساوي:

أ) −٦ جا(٦س − ٣) + جـ ب) ٦ جا(٦س − ٣) + جـ

ج) $\frac{١}{٦}$ جا (٦س − ٣) + جـ د) − $\frac{١}{٦}$ جا (٦س − ٣) + جـ

ب) جد $\int$ س^{٢}(س^{٣} + ٧)$^{°}$ دس (١٢ علامة)

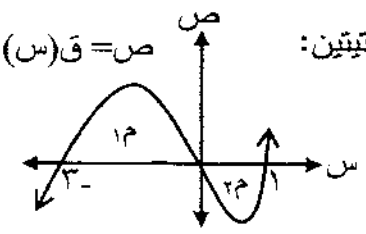
ج) إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ص = ق(س) عند النقطة (س ، ص) يساوي $\frac{١}{(س + ١)^{٢}}$ ، س ≠ −١

فجد قاعدة الاقتران ق ، علمًا بأن منحناه يمرّ بالنقطة (١ ، $\frac{١}{٢}$) (٩ علامات)

السـؤال الثالث: (٣٩ علامة)

أ) انقل إلى دفتر إجابتك رقم الفقرة ورمز الإجابة الصحيحة لها: (٩ علامات)

معتمدًا الشكل المجاور الذي يُمثّل منحنى الاقتران ص = ق(س) ، إذاعلمت أن مساحة المنطقة م١ تساوي (١٢) وحدة مربعة، $\int_{-٣}^{١}$ ق(س) دس = −٣ ، فأجب عن الفقرتين ١ ، ٢ الآتيتين:



١) قيمة $\int_{-٣}^{١}$ ق(س) دس تساوي:

أ) −١٥ ب) −٩ ج) ٩ د) ١٥

٢) مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق ومحور السينات في الفترة [−٣ ، ١] بالوحدات المربعة تساوي:

أ) ٣ ب) ٩ ج) ١٥ د) ٣٦

يتبع الصفحة الثالثة ....

RAMI AL-BEJAWI SCHOOL

٣) يتحرك جُسيم على خط مستقيم بحيث أن سرعته بعد مرور (ن) ثانية من بدء الحركة تعطى بالعلاقة:

ع (ن) = (١٢ن + ٥) م/ث ، إذا علمت أن موقعه الابتدائي ف(٠) = ٣م ، فإن موقعه بعد مرور ثانية واحدة من انطلاقه يساوي:

أ) ١١م ب) ١٤م ج) ١٧م د) ٢٠م

ب) جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ص = ق(س) = ٣ – س ، والمستقيمين س = –١ ، س = ٢ (٨ علامات)

ج) أجب عن كلٍّ ممّا يأتي:

١) جد قيمة المقدار: $\frac{!٤ + !٥}{٦\ (!٣)} + \binom{٦}{٤}$ (١٢ علامة)

٢) حلّ المعادلة: $\frac{(ن + ٣)!}{(ن + ١)!} = ل(٥ ، ٢)$ (١٠علامات)

السـؤال الرابع: (٤٠ علامة)

أ) **انقل إلى دفتر إجابتك رقم الفقرة ورمز الإجابة الصحيحة لها:** (١٥ علامة)

١) بكم طريقة يمكن اختيار قلم ودفتر لشرائهما من مكتبة تبيع أربعة أنواع من الأقلام وثلاثة أنواع من الدفاتر؟

أ) ٤! × ٣! ب) ٤ × ٣ ج) ٤! + ٣! د) ٤ + ٣

٢) ما عدد المجموعات الجزئية الثنائية التي يمكن تكوينها من مجموعة تحوي (٥) عناصر؟

أ) $\binom{٥}{٢}$ ب) ٥ × ٢ ج) ل (٥ ، ٢) د) ٥! × ٢!

٣) معتمدًا الجدول المجاور الذي يُمثّل التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي س ، ما قيمة الثابت ك؟

س	٠	١	٢	٣
ل(س)	٠,٢	٠,٤	ك	٠,١

أ) ٠,٠٣ ب) ٠,٠٧ ج) ٠,٣ د) ٠,٧

٤) الجدول المجاور يُبيّن العلامات المعيارية لفاطمة في أربعة مباحث، المبحث الذي يكون تحصيل فاطمة فيه أفضل هو:

المبحث	اللغة العربية	الرياضيات	التاريخ	العلوم
العلامة المعيارية	٢	٣	–١	٠

أ) اللغة العربية ب) الرياضيات ج) التاريخ د) العلوم

٥) إذا كان (ز) متغيرًا عشوائيًا طبيعيًا معياريًا، وكان ل (ز ≥ ف) = ٠,٦ ، فإن قيمة ل (ز ≤ – ف) تساوي:

أ) ٠,٠٤ ب) ٠,٠٦ ج) ٠,٤ د) ٠,٦

ب) مجموعة مكونة من (٣) نساء و(٤) رجال، بكم طريقة يمكن تكوين لجنة رباعية منهم، بحيث تتكون اللجنة من (٣) نساء على الأكثر؟ (١٢ علامة)

يتبع الصفحة الرابعة ....

JO SCHOOL
RAMI AL-BEJAWI

ج) في تجربة اختيار عشوائي لعائلة لديها ثلاثة أطفال وتسجيل المواليد حسب الجنس وتسلسل الولادة، إذا دلّ المتغير العشوائي س على عدد الأطفال الإناث في العائلة، فاكتب جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي س . (١٣ علامة)

السؤال الخامس: (٤٨ علامة)

أ) انقل إلى دفتر إجابتك رقم الفقرة ورمز الإجابة الصحيحة لها: (١٢ علامة)

١) أي قيم معامل الارتباط الآتية أقوى؟

أ) -٠,٩ ب) -٠,٢ ج) ٠,٦ د) ٠,٨

٢) إذا كان المتوسط الحسابي لعلامات طلبة في مبحث الرياضيات يساوي (٨٠) والانحراف المعياري لها (٢) ، فإن العلامة المعيارية المقابلة للعلامة (٨٦) هي:

أ) -٣ ب) ٣ ج) $-\frac{١}{٣}$ د) $\frac{١}{٣}$

٣) إذا علمت أن معادلة خط الانحدار للعلاقة بين المعدل في الثانوية العامة **س** والمعدل في الجامعة **ص** هي: $\hat{ص} = س - ٥$ ، فما المعدل المتوقع لطالب في الجامعة حصل على معدل (٧٨) في الثانوية العامة؟

أ) ٧٣ ب) ٨٣ ج) ٨٢ د) ٩٢

٤) إذا كان معامل الارتباط بين المتغيرين س ، ص هو (٠,٨) ، فإن قيمة معامل الارتباط بين س* ، ص* حيث: س* = ١٥ - ٢س ، ص* = ص - ٣ تساوي:

أ) -٠,٠٨ ب) ٠,٠٨ ج) -٠,٨ د) ٠,٨

ب) تتبع علامات طلبة في امتحان عام توزيعًا طبيعيًا متوسطه الحسابي (٦٥)، وانحرافه المعياري (١٠) ، إذا اختير طالب عشوائيًا، فما احتمال أن تكون علامته أقل من أو يساوي (٦٠)؟ (١٤ علامة)

ملاحظة: يمكنك الاستفادة من الجدول الآتي الذي يمثل جزءًا من جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

ز	٠,٢	٠,٥	١	١,٥	٢
ل (ز ≤ ز)	٠,٥٧٩٣	٠,٦٩١٥	٠,٨٤١٣	٠,٩٣٣٢	٠,٩٧٧٢

ج) احسب معامل ارتباط بيرسون بين المتغيرين س ، ص للقيم المُبيّنة في الجدول الآتي: (١٣ علامة)

س	٦	٨	١٠	٤	١٢
ص	٥	٦	٧	٤	٨

د) إذا كان س ، ص متغيرين عدد قيم كل منهما (٥) ، وكان $\overline{س} = ٧$ ، $\overline{ص} = ٦$ ،

$\sum_{ك=١}^{٥} (س_ك - \overline{س})^٢ = ١٠$ ، $\sum_{ك=١}^{٥} (س_ك - \overline{س})(ص_ك - \overline{ص}) = ٩$ ، فجد معادلة خط الانحدار للتنبؤ بقيم ص إذا عُلمت قيم س . (٩ علامات)

انتهت الأسئلة

RAMI AL-BEJAWI

بسم الله الرحمن الرحيم

امتحان شهادة الدراسة الثانوية العامة لعام ٢٠١٩

صفحة رقم (١)

وزارة التربية والتعليم
إدارة الامتحانات والاختبارات
قسم الامتحانات العامة

مدة الامتحان: ٢ ساعة

المبحث : الرياضيات / الورقة الثانية (ف ٢)

الفرع : الأدبي والشرعي والفندقي والسياحي (سار الجامعات) / دورة ٢٠١٩ التاريخ : الأحد ٤/٨/٢٠١٩ م

رقم الصفحة في الكتاب

الإجابة النموذجية:

السؤال الأول : (٤٠ علامة) .

١٦١ ١٦٢ ١٧١ ٢١٧

(أ) ١٢

رقم الفقرة	١	٢	٣	٤
رمز الإجابة	ب	ب	د	٩
الإجابة الصحيحة	٥	$\frac{1}{2}$ س + جـ	٣	$-\frac{1}{6}$

١٦٦

(ب) ١٨

١) $\int_{-1}^{1} \frac{س^2+7س+6}{س+1}\,عس = \int_{-1}^{1} \frac{(س+1)(س+6)}{س+1}\,عس$ ①

$= \int_{-1}^{1} (س+6)\,عس$ ①

$= \left[\frac{س^2}{2} + 6س\right]_{-1}^{1}$ ② ③

$= \left(\frac{1}{2} + 6\right) - \left(\frac{1}{2} - 6\right) = 12$ ② ④

١٦٢ ١٦٣

٢) $\int (٤س^3 + \sqrt{س} - جاس)\,عس = س^4 + \frac{2}{3}س^{\frac{3}{2}} + جتاس + جـ$

② ③ ③ ③

$= س^4 + \frac{2}{3}\sqrt{س^3} + جتاس + جـ$

١٧٧

(ب) ١٠

$\int_{3}^{5} ٦هـ(س)\,عس = ٢٤ \Leftarrow هـ(٣) = ٤$ ③

$\int_{3}^{5} (هـ(س)+٧)\,عس = ١٦ \Leftarrow \int_{3}^{5} هـ(س)\,عس + ١٤ = ١٦ \Leftarrow \int_{3}^{5} هـ(س)\,عس = ٢$

② ④ ⑤

$\int_{0}^{3} (٢هـ(س) - ٣هـ(س))\,عس = ٢(-٤) - ٣(-٢) = -٨ + ٦ = -٢$

① ① ① ①

RAMI AL-BEJAWI SCHOOL

رقم الصفحة في الكتاب

الإجابة النموذجية:

السؤال الثاني : (٣٣ علامة).

١٧٧ ١٨٣ ١٧٤ ١٦٦

(أ) ١٢

رقم الفقرة	١	٢	٣	٤
رمز الاجابة	جـ	د	د	جـ
الاجابة الصحيحة	٤	$-\frac{1}{3}(1-س)^3+جـ$	١٦	$\frac{1}{4}جا(س-3)+جـ$

(٣) (٣) (٣) (٣)

١٧٩

(ب)

$\int س^2(س^3+7)^5 \, د س$ امرض $ص = س^3+7$

$د ص = 3س^2 \, د س$ (٢)

$= \frac{1}{3}\int ص^5 \, د ص$ (٢)

١٢

$= \frac{1}{18} ص^6 + جـ$ (٢)

$= \frac{1}{18}(س^3+7)^6 + جـ$ (٢)

(جـ)

$م = ه'(س) = \frac{1}{(1+س)^2}$ (١)

١٨٨

$ه(س) = \int \frac{1}{(1+س)^2} د س = \int (1+س)^{-2} د س$ (١) (١)

٩

$ه(س) = -\frac{1}{1+س} + جـ$ ⇐ (١) (٢)

وبما أن منحنى الاقتران ه يمر بالنقطة $(1، \frac{1}{2})$

$\therefore ه(1) = -\frac{1}{2} + جـ = \frac{1}{2}$ ⇐ $جـ = 1$ (١) (١)

وعليه فإن : $ه(س) = 1 - \frac{1}{1+س}$ (١)

RAMI ALBEJAWI
JO SCHOOL

رقم الصفحة في الكتاب

الإجابة النموذجية:

السؤال الثالث : (٣٩ علامة) .

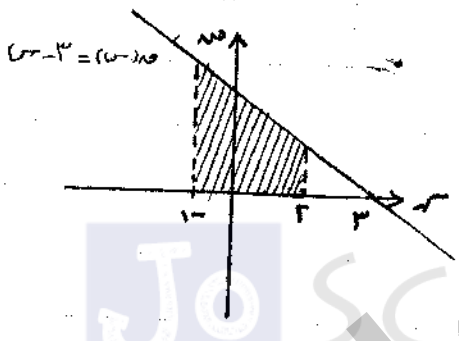
١٩٩
١٩٣
١٩٠

(م) ٩

رقم الفقرة	١ (٣)	٢ (٣)	٣ (٣)
رمز الإجابة	جـ	جـ	ب
الإجابة الصحيحة	٩	١٥	٢١٤

(ب) ٨

١) $د(س) = ٣ - س$ ؛ $٣ - س = ٠ \Leftarrow س = ٣$ ①



٢٠٠

$$\int_{-١}^{٢} د(س)\,ع س = \int_{-١}^{٢} (٣ - س)\,ع س$$

$$= \left[٣س - \frac{س^٢}{٢}\right]_{-١}^{٢}$$

$$= (٦ - ٢) - \left(-٣ - \frac{١}{٢}\right)$$

$$= ٧\frac{١}{٢}$$

∴ المساحة المطلوبة $= \int_{-١}^{٢} |د(س)|\,ع س = \int_{-١}^{٢} د(س)\,ع س = ٧\frac{١}{٢}$ وحدة مربعة.

(ب) ٢٢

١) $\binom{٦}{٤} + \frac{٤! + ٥!}{٦(٣!)} = \frac{٦!}{٤!(٦-٤)!} + \frac{٣ \times ٤ \times ٥! + ٤!}{٦(٣!)}$

$$= \frac{٦ \times ٥ \times ٤!}{٢ \times ٤!} + \frac{٢٠ + ٤}{٦}$$

$$= ١٥ + ٤ = ١٩$$

٢) $\frac{(ن+٣)!}{(ن+١)!} = ل(٥، ٢) \Leftarrow (ن+٣)(ن+٢) = ٤ \times ٥$

$\Leftarrow ن^٢ + ٥ن + ٦ = ٢٠ \Leftarrow ن^٢ + ٥ن - ١٤ = ٠$

$\Leftarrow (ن - ٢)(ن + ٧) = ٠ \Leftarrow ن = ٢ ، -٧$ (×) (✓)

∴ قيمة $ن = ٢$

RAMI ALBEJAWI

رقم الصفحة في الكتاب

الإجابة النموذجية:

السؤال الرابع: (٤٠ علامة).

أ) (٣) (٣) (٣) (٣) (٣)

رقم الفقرة	١	٢	٣	٤	٥
رمز الإجابة	ب	م	جـ	ب	د
الإجابة الصحيحة	٣×٤	$\binom{5}{2}$	٣٠و	الرياضيات	٦٠و

ب) (٢) (٢) (٢) (٢) (٣)

عدد طرق اختيار اللجنة $= \binom{4}{4}\binom{3}{0} + \binom{4}{3}\binom{3}{1} + \binom{4}{2}\binom{3}{2} + \binom{4}{1}\binom{3}{3}$ (١) (١) (١) (١)

$= \frac{!4}{!4 \times !0}\times\frac{!3}{!3 \times !0} + \frac{!4}{!3 \times !1}\times\frac{!3}{!2 \times !1} + \frac{!4}{!2 \times !2}\times\frac{!3}{!1 \times !2} + \frac{!4}{!1 \times !3}\times\frac{!3}{!0 \times !3}$ (١)

$= ١ + ١٢ + ١٨ + ٤ \times ١$

$= ٣٥$ طريقة.

ج) الفضاء العيني لهذه التجربة:

س = {(ووو)، (ووب)، (وبو)، (بوو)، (وبب)، (بوب)، (ببو)، (بببب)}

المتغير العشوائي س يأخذ القيم:

س = {٠، ١، ٢، ٣}

(١) (١) (١) (١)

ل(س = ٠) = ل(ووو) = $\frac{١}{٨}$ (٢)

ل(س = ١) = ل(ووب) + ل(وبو) + ل(بوو) = $\frac{٣}{٨}$ (٢)

ل(س = ٢) = ل(وبب) + ل(بوب) + ل(ببو) = $\frac{٣}{٨}$ (٢)

ل(س = ٣) = ل(بببب) = $\frac{١}{٨}$ (٢)

∴ جدول التوزيع الاحتمالي:

س	٠	١	٢	٣
ل(س)	$\frac{١}{٨}$	$\frac{٣}{٨}$	$\frac{٣}{٨}$	$\frac{١}{٨}$

(١)

RAMI ALBEJAWI JO SCHOOL

رقم الصفحة في الكتاب

الإجابة النموذجية:

السؤال الخامس: (٤٨ علامة)

٢٦٩
٢٤٨
٢٧٥
٢٦٨

(أ) ١٢

رقم الفقرة	١	٢	٣	٤
رمز الإجابة	أ	ب	أ	جـ
الإجابة الصحيحة	-٠٫٩	٣	٧٣	-٠٫٨

٢٥٩

(ب)

$$ل(س \geq ٦٠) = ل\left(\frac{س - \bar{س}}{ع} \geq \frac{٦٠ - ٦٥}{١٠}\right)$$

$$= ل(ز \geq -٠٫٥)$$

$$= ١ - ل(ز \leq ٠٫٥)$$

١٤

$$= ١ - ٠٫٦٩١٥$$

$$= ٠٫٣٠٨٥$$

(جـ) ١٣

$س_ك$	$ص_ك$	$س_ك - \bar{س}$	$ص_ك - \bar{ص}$	$(س_ك - \bar{س})(ص_ك - \bar{ص})$	$(س_ك - \bar{س})^٢$	$(ص_ك - \bar{ص})^٢$
٦	٥	-٢	-١	٢	٤	١
٨	٦	٠	٠	٠	٠	٠
١٠	٧	٢	١	٢	٤	١
٤	٤	-٤	-٢	٨	١٦	٤
١٢	٨	٤	٢	٨	١٦	٤
المجموع		٠	٠	٢٠	٤٠	١٠

٢٦٧

$$\bar{س} = \frac{\sum س_ك}{ك} = \frac{٦+٨+١٠+٤+١٢}{٥} = \frac{٤٠}{٥} = ٨$$ ١

$$\bar{ص} = \frac{\sum ص_ك}{ك} = \frac{٥+٦+٧+٤+٨}{٥} = \frac{٣٠}{٥} = ٦$$ ١

$$ر = \frac{\sum (س_ك - \bar{س})(ص_ك - \bar{ص})}{\sqrt{\sum (س_ك - \bar{س})^٢ \cdot \sum (ص_ك - \bar{ص})^٢}} = \frac{٢٠}{\sqrt{٤٠ \times ١٠}} = \frac{٢٠}{\sqrt{٤٠٠}} = \frac{٢٠}{٢٠} = ١$$ ١

RAMI ABEJAWI

رقم الصفحة في الكتاب	الإجابة النموذجية:
٢٧٥	تابع السؤال الخامس ،،، فرع (د) .

(د) ٩

$$م = \frac{\sum_{i=1}^{ن} (س_i - \bar{س})(ص_i - \bar{ص})}{\sum_{i=1}^{ن} (س_i - \bar{س})^2} = \frac{٩}{١٠} = ٠٫٩$$ ① ① ①

$$ب = \bar{ص} - م\bar{س} = ٦ - ٠٫٩(٧) = ٦ - ٦٫٣ = -٠٫٣$$ ① ①

معادلة خط الانحدار : $\hat{ص} = م س + ب$ ①

$\hat{ص} = ٠٫٩ س - ٠٫٣$ ①

RAMI AL-BEJAWI
JO SCHOOL

(١) السؤال الأول:

(أ) اذا كتب الاجابة فقط تعتمد

اذا كتب الرمز فقط تعتمد .

اذا كتب الرمز صحيح والاجابة خطأ تعتمد الرمز

(ب)

(١) علامة واحدة على التحليل وعلامة واحدة على الاختصار .

العلامة او جزأ .

(ج)

(١) وجود $\sqrt{3}$ يأخذ الطالب علامة (اذا كتب الطالب يأخذ العلامة .

اذا اخطأ في اشارة جذر علامة .

اذا لم يكتب (ج) غير ملاحظ

(٢) اذا اوجد $\theta = 30°$ يأخذ الملاحظ .

اذا اجرى الطالب $\sin\theta = \frac{1}{2}$ يأخذ الملاحظ

اذا اوجد $\theta = 30°, 150°$ يأخذ علامتان .

اذا لم يكتب جدول الاشارة وقيم θ ($\theta = 30°$ - $\theta = 150°$) .

غير ملاحظ

اذا عوض قيمة شرقة دون كتابة الجدول غير ملاحظ . علامة واحدة

اذا نقل (٧) بدل شرقة $\theta = 30°$ غير ملاحظ

اذا كتب الطالب الزاوية $\theta = 30°$ يأخذ

RAMI AL BEJAWI
JO SCHOOL

السؤال الثالث فرع ب :

اذا لم يجب الطالب صفر الامتحان غير علامة .

اذا اشار الطالب لـ ٣ على خط الاعداد يأخذ العلامة .

اذا كتب $م = \int_{-1}^{2} |هـ(س)| دس = \frac{1}{2}$ يأخذ ٣ علامات .

اذا كتب $م = \frac{1}{2}$ يأخذ ٣ علامات .

اذا كتب $م = \int_{-1}^{3} |هـ(س)| دس =$ يأخذ علامتين .

اذا لم يشر الى الاشارة نهائيا يصحح من ٥ علامات .

* اذا جزأ التكامل بوضع صفر وأجرى تكامل $\int_{-1}^{2} + \int_{2}^{}$ وكمل صحيح فقط تخسر علامة واحدة على جذر الاقتران $س = ٣$

فرع جـ ① اي خطأ في حسابات الجزئية تخسر علامتين .

② خطأ الاقتران كل حد بعلامة واضحة

$$(٤×٥) = \frac{!(١+ن)(٢+ن)(٣+ن)}{!(١+ن)}$$

① ② ③ ④

علامة لكل حد صحيحا .

اذا كتب $ن = ٢$ بالبداية ولم يعمل (-٧) يأخذ العلامة .

اذا كتب $(ن+٣)(ن+٢) = ٠$ حاصل ضرب عددين مساويين

$٠ =$

ركك $٥ × ٤$ واضعا $ن + ٣ = ٥ \leftarrow ن = ٢$

يأخذ علامات الخطوات كاملة (٤ علامات)

RAMI ALEBEJAWI

السؤال الرابع :

فرع (ب) : أكمل ما يلي بدقة

(أ) الكتب (٣٠) + (٤٠) تسمى عددين

أي خطأ في الكتابة غير الدقة .

(ب) الكتب الناتج = ٣٥ يأخذ الدقة

فرع (جـ) إذا كانت س = {١، ٥، ١٠، ٢٠، ٣٠}

وأردنا كتابة المجموعة س بصورة يأخذ الدقة .

كتابة الأعضاء الصحيح فقط دون حساب المجموعات

لا يأخذ علامات

(أ) اكتب س = {١، ٥، ١٠، ٢٠، ٣٠} بصورة صحيحة ٧

(ب) اكتب الجدول فقط يأخذ الدقة السؤال كله ١٣

إذا استخدم نظرية ذات الحدين

١- كتابة المفكوك ٤ حدود

١- تحديد ن ، أ ، ب ، م

حساب المعاملات ل(٠)

ل(١)

ل(٢)

ل(٣)

كل خطأ حسابي يخصم علامة

الجدول يأخذ علامة كاملة

RAMI AL-BEJAWI JO SCHOOL

السؤال الخامس:

(أ) اذا كان $(س \leq 60)$ و اكمل الفراغ بصورة صحيحة لما يلي:

$$ل(س \leq 60) = ل\left(ز \leq \frac{60 - 65}{10}\right)$$

$$= ل(ز \leq -0.5)$$

$$= ل(ز \geq 0.5)$$

$$= 1 - 0.6915$$

$$= 0.3085$$

(ب) اي قطاع في الجدول يمثل علامة العمود

اذا عرفت حجم كتابة الطالبة ياخذ الدائرة

اذا وجهه الدمية بأي درجة من قطاع وطبعه صحيح

يمثل فقط علامة ص ر ص

(ج) المساحة $= 4 (-3 د 1)$.

RAMI AL-BEJAWI
JO SCHOOL