

Hasanat
Jerusalem

القدس لنا

مدرسة البقعة الثانوية للبنين

2025 / 2024

الحسنة في

الرياضيات
الرياضيات

2007

الثاني الثانوي العلمي

$f'(x)$



وحدة التفاضل
وحدة التفاضل



$\frac{dy}{dx}$

078 531 88 77

الأستاذ : **عبدالقادر الحسنات**
عبدالقادر الحسنات



- مراجعة أهم المفاهيم والقوانين الضرورية لطالب التوجيهي

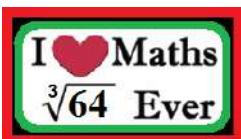
- أمثلة محلولة على كل مفهوم في الدرس

- حل جميع تمارين وتدريبات كتابي الطالب والتمارين

- جميع أسئلة الوزارة / السنوات السابقة ، مع إجابة الموضوعية منها

- اختبار نهاية كل درس ، ثم اختبار نهاية الوحدة

- عدد كبير جداً من الأسئلة الموضوعية ، وأسئلة مقالية مميزة





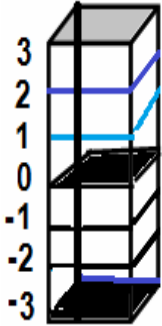
مراجعة تأسيسية مختصرة



تذكير بأهم المفاهيم الأساسية قبل التوجيهي

(1) الأعداد السالبة والموجبة

(أ) الجمع والطرح : عند جمع عددين نعتبر **الموجب (رصيد) أو (ربح) والسالب (دين) أو (خسارة)**



مثال : $(-8) + (+3)$: تعني إذا كان عليك دين مقداره (8) دنائير وحصلت على رصيد لتسديد الدين مقداره (3) دنائير ، بعد التسديد ما هو وضعك المالي ؟

الجواب : يبقى عليك (5) دنائير دين ، إذا الناتج (-5)

أو : $(-8) + (+3)$: قمتَ بعمليتين تجاريتين خسرتَ في الأولى (8 JD) وربحتَ في الثانية (3 JD) ماذا حدث لرأس مالك الأصلي ؟ زاد أم نقص ؟

الجواب : نقصَ بمقدار (5) دنائير ، إذا الناتج (-5)

******* كذلك يمكن أن نعتبر الموجب صعود والسالب نزول :

أنت في الطابق الثالث تحت الأرض (-3) وصعدت خمس طوابق ، فإلى أي طابق تصل ؟ (الثاني فوق الأرض $(+2)$)

أيضاً : $(-2) + (-3)$: أنت في الطابق الثاني تحت الأرض ونزلت ثلاث طوابق فتصبح في الخامس تحت الأرض (-5)

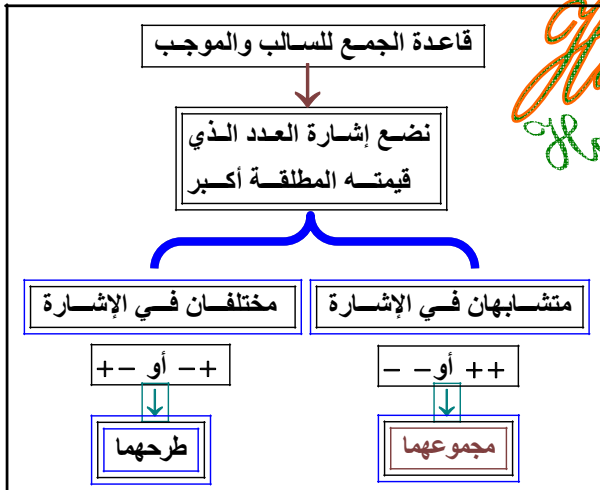
كما يمكن استخدام القاعدة التالية:

مع ملاحظة أن (العدد الذي قيمته المطلقة أكبر) تعني العدد الأكبر بعد حذف الإشارات

مثلاً : (-5) قيمته المطلقة أكبر من $(+3)$ لأن (5) أكبر من (3)

(-7) قيمته المطلقة أكبر من (-4) لأن (7) أكبر من (4)

مثال :



5 أكبر من 3 وإشارتها سالبة لذلك الناتج سيكون سالباً $(-5 + 3 = -2)$ أو $(-5) + (+3) = -2$ 1)

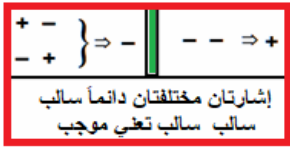
ولأنهما مختلفان في الإشارة نجد الفرق بينهما (نطرح) فيكون الجواب (-2)

4 أكبر من 2 وإشارتها سالبة لذلك الناتج سيكون سالباً $(-4 - 2 = -6)$ أو $(-4) + (-2) = -6$ 2)

ولأنهما متشابهان في الإشارة نجد المجموع (نجمع) فيكون الجواب (-6)

6 أكبر من 2 وإشارتها موجبة لذلك الناتج سيكون موجباً $(-2 + 6 = +4)$ أو $(-2) + (+6) = +4$ 3)

ولأنهما مختلفان في الإشارة نجد الفرق بينهما (نطرح) فيكون الجواب $(+4)$



ملاحظة(1): إذا التقت إشارتا سالب فنحولهما إلى موجب، مثلاً : $-2 - 5 = -2 + 5$
أما إذا التقت إشارتا موجب وسالب $(+ -)$ أو العكس $(- +)$ فنحولهما إلى سالب
 $-4 - 5 = -4 - 5$

ملاحظة(2): إذا لم يكن هناك إشارة أمام العدد فهو موجب : $6 = +6$
فنعلم لا يكون هناك أقواس (وهذا هو الأغلب مثل : $-3 + 7$) نعتبر العملية التي أمام العدد هي إشارته
فهنا 3 سالبة و 7 موجبة ، والأكبر موجب $\Rightarrow$ الناتج موجب : مختلفان في الإشارة $\Rightarrow$ نطرح : الناتج $(+4)$

ملاحظة(3): إذا لم يكن هناك إشارة أمام العددين وكان الجواب (لا يجوز) - أي دون التعامل مع السالب -

ف نقوم بتبديل مكاني العددين ونضع إشارة سالب أمام الناتج : $a - b = -(b - a)$

$$4 - 9 = -(9 - 4) = -5 , \quad 3 - 5 = -2$$

$$1) -9 + 3 = -6$$

مثلاً: (على أساس أن 9 سالبة و 3 موجبة $\Rightarrow$ نطرح)

$$2) -7 - 2 = -9$$

(على أساس أن 7 سالبة و 2 سالبة $\Rightarrow$ نجمع)

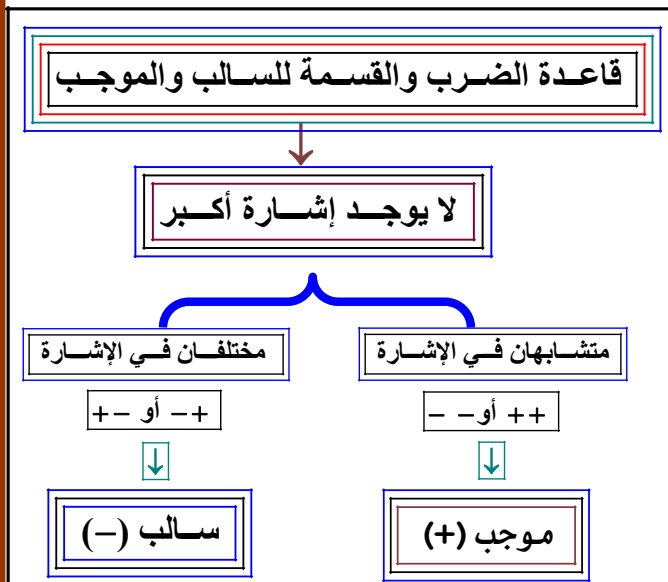
$$3) 4 - 7 = -3$$

(4 موجبة و 7 سالبة وهي الأكبر ، مختلفان في الإشارة ، إذاً نطرح)

$$4) -5x - 2x = -7x$$

(كلاهما سالب $\Rightarrow$ نجمع)

ملاحظة : لن تجد مثل هذه الأسئلة في التوجيهي (بهذه الطريقة) ، ولكن ستجدها ضمن مسائل التحليل إلى العوامل وحل المعادلات أو ضمن مسائل أكبر



ب) الضرب والقسمة: عند الضرب أو القسمة لا يوجد أكبر
(متشابهان في الإشارة الناتج موجب)
(مختلفان في الإشارة الناتج سالب)



$$1) \text{ مثال : } (-5) \times (+3) = -15$$

$$2) (-4) \times (-2) = 8$$

$$3) (+6) \times (-2) = -12$$

$$4) (-5) \div (+5) = -1$$

$$5) (-8) \div (-2) = 4$$

أخطاء قاتلة : بحجة سالب وسالب = موجب (الصواب (-8) لأنه جمع وليس ضرباً) $1) -3 - 5 = +8$

لأن إشارة الأكبر موجبة (الصواب (-15) لا يوجد أكبر عند الضرب) $2) -3 \times 5 = +15$

(الصواب (-8) لأن كلاهما سالب فنجمع) $3) -4 - 4 = 0$





الأعداد النسبية (Q): $\{\frac{p}{q}, p, q \in \mathbb{Z}; q \neq 0\}$	الأعداد غير النسبية (I): أعداد لا يُمكن كتابتها في صورة نسبة بين عددين صحيحين. $\sqrt{2}, \sqrt{7}, -\sqrt{10}, 0.070070007...$
الأعداد الصحيحة (Z): $\{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$	
الأعداد الكلية (W): $\{0, 1, 2, 3, ...\}$	
الأعداد الحقيقية (R): الأعداد النسبية والأعداد غير النسبية معًا.	

السالب والموجب ... باختصار

يتم الحل على مرحلتين : حسب العملية

ضرب أو قسمة

جمع أو طرح

نحدد إشارة الناتج من خلال:

متشابهان في الإشارة (- - أو + +) = الناتج موجب

مختلفان في الإشارة (- + أو + -) = الناتج سالب

(لا يوجد إشارة الأكبر)

$(-2) \times (-3) = +$

$(-6) \times (+4) = -$

$(+8) \div (-4) = -$

نحدد إشارة الناتج من خلال (إشارة الأكبر)

$-5 - 6 = -$

$-3 + 7 = +$

$4 - 9 = -$

إيجاد قيمة الناتج

نضرب أو نقسم حسب العملية المطلوبة

$(-2) \times (-3) = +6$

$(-6) \times (+4) = -24$

$(+8) \div (-4) = -2$

إيجاد قيمة الناتج

متشابهان في الإشارة = نجمع (- - أو + +)

مختلفان في الإشارة = نطرح (- + أو + -)

$-5 - 6 = -11$

$-3 + 7 = +4$

$4 - 9 = -5$

الاستاذ: عبدالقادر الحسنيات

078 531 88 77

(2) الكسور العادية

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a \times d \pm c \times b}{b \times d}$$

أ) قاعدة الجمع والطرح : نضرب **بسط الأول** في **مقام الثاني** ثم (±) ثم **بسط الثاني** في **مقام الأول** ونقسم على حاصل ضرب المقامين

$$1) \frac{2}{5} + \frac{4}{3} = \frac{2 \times 3 + 4 \times 5}{5 \times 3} = \frac{6 + 20}{15} = \frac{26}{15}$$

$$2) \frac{5}{6} - \frac{10}{3} = \frac{5 \times 3 - 10 \times 6}{6 \times 3} = \frac{15 - 60}{18} = \frac{-45}{18} = -\frac{5}{2}$$

$$3) 7 - \frac{4}{5} = \frac{7}{1} - \frac{4}{5} = \frac{7 \times 5 - 4 \times 1}{1 \times 5} = \frac{35 - 4}{5} = \frac{31}{5}$$

$$4) \frac{3}{x+1} + \frac{2}{y-3} = \frac{3y - 9 + 2x + 2}{(x+1)(y-3)} = \frac{3y + 2x - 7}{(x+1)(y-3)}$$

$$\frac{1}{5} + \frac{4}{9} = \frac{9 + 20}{45} = \frac{29}{45}$$

$$\frac{-3}{7} + \frac{5}{8} = \frac{-24 + 35}{56} = \frac{-24 + 35}{56} = \frac{11}{56}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3 - 2}{6} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{-3}{7} = \frac{3}{-7} = -\frac{3}{7}$$

ملاحظة

$$3\frac{4}{5} = \frac{3 \times 5 + 4}{5} = \frac{19}{5}$$

$$3\frac{7}{10} = \frac{(3 \times 10) + 7}{10}$$

$$4\frac{1}{2} = \frac{4 \times 2 + 1}{2} = \frac{9}{2}$$

تحويل العدد الكسري إلى كسر عادي

(ب) قاعدة الضرب:

$$\frac{-2}{5} \times \frac{1}{6} = \frac{-2 \times 1}{5 \times 6} = \frac{-2}{30}$$

$$\frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

$$b \neq 0 ; c \neq 0$$

نضرب بسط الأول في بسط الثاني مقسوماً على حاصل ضرب مقام الأول في مقام الثاني

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

(ج) قاعدة القسمة: نحول القسمة إلى ضرب ونقلب المقسوم عليه ثم نطبق قاعدة الضرب السابقة

$$\frac{5}{-6} \div \frac{-3}{2} = \frac{5}{-6} \times \frac{+2}{-3} = \frac{5 \times 2}{-6 \times (-3)} = \frac{10}{18} = \frac{5}{9}$$

$$\frac{-4}{5} \div 2 = \frac{-4}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{-4 \times 1}{5 \times 2} = \frac{-2}{5}$$

ملاحظة:

$$6 = 1 \times \frac{6^1}{1}$$

أي عدد أو متغير يوجد معه (3 واحدات) مخفية نُظهر منها ما يلزم للعملية الحسابية المطلوبة مثلاً:

$$7 \times 7^3 = 7^1 \times 7^3 = 7^{1+3} = 7^4$$



$$3 + \frac{2}{5} = \frac{3}{1} + \frac{2}{5} = \frac{3 \times 5 + 2 \times 1}{1 \times 5} = \frac{17}{5}$$



$$4x + 4 = 4x + 4 \times 1 = 4(x + 1)$$

(3) الكسور العشرية

يُسمى الكسر العادي الذي مقامه (10) أو أحد قواها (10 ، 100 ، 1000 ، ...) بالكسر العشري

مثل: $\frac{4}{100}, \frac{123}{10}, \frac{6}{1000}$ ويمكن كتابة الكسر العشري باستخدام الفاصلة (.)

بشرط أن يكون عدد المنازل على اليمين مساوياً لعدد الأصفار أمام العدد (1) في المقام

$$\frac{4}{100} = 0.04 , \frac{123}{10} = 1.23 , \frac{6}{1000} = 0.006 \quad \text{مثلاً:}$$

جمع وطرح الكسور العشرية: عند الجمع والطرح نكتب العددين تحت بعضهما بحيث كون الفاصلة تحت الفاصلة

$$\begin{array}{r} 17.00 \\ - 8.43 \\ \hline 8.57 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 78.90 \\ - 37.43 \\ \hline 41.47 \end{array}$$

ضرب الكسور العشرية: عند الضرب نفترض عدم وجود الفواصل ونضرب العددين الصحيحين وفي الناتج نضع الفاصلة بحيث يكون عدد المنازل على اليمين مساوياً لمجموع عددي المنازل على يمين العددين

$$0.3 \times 0.4 = 0.12 , 0.03 \times 0.4 = 0.012 , (0.3)^2 = 0.3 \times 0.3 = 0.09$$

قسمة الكسور العشرية: عند القسمة يجب أن يكون المقسوم عليه عدداً صحيحاً ، لذلك نُحرك الفاصلة إلى اليمين في المقسوم والمقسوم عليه حتى يصبح الأخير صحيحاً ثم نقسم إلى أن نصل الفاصلة فنرفعها إلى الناتج

$$5 \div 1.25 = 500.0 \div 123.0 = 4$$

4) المقادير الجبرية:

$$x + x = 2x$$

1) مفهوم (الحد) في الرياضيات: هو أي مقدار جبري لا يحتوي على جمع (+) أو طرح (-) مثلاً: (3xy) حد واحد بينما (4x + 2y - 5) يتكون من 3 حدود

$$x \times x = x^2$$

يتكون الحد من جزأين: عددي وحرفي، ويسمى العددي بالمعامل مثلاً: (6xy) معاملته (6) كذلك (-3x²) معاملته (-3)

$$\frac{x}{x} = 1$$

2) يتشابه حدان إذا كان فيهما نفس المتغيرات بنفس القوى

مثلاً: (3x²y)، (5x²y) متشابهان، بينما (4x²y³)، (5xy³) غير متشابهين

3) لا يمكن جمع أو طرح إلا الحدود الجبرية المتشابهة - عندها نجمع أو نطرح المعاملات

مثلاً: (5xy³ + 4xy³ = 9xy³) بينما (3xy² + 4xy³) لا يمكن جمعها لأنهما غير متشابهين

4) عند الضرب أو القسمة لا يشترط التشابه حيث نضرب أو نقسم المعاملات

ونجمع الأسس عند الضرب ونطرحها عند القسمة: مثلاً: (3x²)(4x³) = 12x⁵

ملاحظة: (x + 3 = 8) هذه معادلة تعني: ما هو العدد الذي إذا أضيف إليه (3) يعادل (8)؟، والجواب (5)

أما (x + 5) فهو مقدار جبري (حيث لا يحوي إشارة =)

5) القوس المسبوق بإشارة سالبة: نعكس جميع الإشارات داخله

مثلاً: 6x² + 5x - 8 - (4x² - 3x + 1) = 6x² + 5x - 8 - 4x² + 3x - 1 = 2x² + 8x - 9

6) الأسس (القوى):

$$a, b \in R, n, m \in Z \Rightarrow$$

$$a^n \times a^m = a^{n+m}$$

$$a^n \div a^m = a^{n-m}, a \neq 0$$

$$(a^n)^m = a^{n \times m}$$

$$(ab)^n = a^n \times b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, a, b \neq 0$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$\frac{1}{x^n} = x^{-n}$$

1) الضرب المكرر يتم تحويله إلى أسس مثلاً:

$$(5)(5)(5) = 5^3$$

2) عند الضرب (وتساوي الأساسات) نجمع الأسس:

$$(4^3)(4^2) = 4^{2+3} = 4^5$$

3) عند القسمة (وتساوي الأساسات) نطرح الأسس مثلاً:

$$7^8 \div 7^2 = 7^{8-2} = 7^6$$

4) في حالة قوة القوة نضرب الأسس مثلاً: (7³)² = (7)³⁽²⁾ = 7⁶

5) توزيع القوى، مثلاً: (xy)² = (x)²(y)²

$$(3x)^2 = 9x^2 \text{ كذلك}$$

$$(5^2)^3 \neq 5^{(2)^3} = 5^8$$

$$(5^2)^3 = 5^{2 \times 3} = 5^6$$

6) القوة السالبة يتم تغيير مكانها من البسط إلى المقام أو العكس لتصبح موجبة: أو نعكس البسط والمقام

$$3^{-2} = -9 \quad \text{X}$$

$$3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

$$8^{-2} = \frac{1}{8^2} = \frac{1}{64}$$

$$\frac{1}{9^{-2}} = \frac{9^2}{1} = \frac{81}{1} = 81$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{3}\right)^{+2} = \frac{25}{9}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

(7) القوة الكسرية يتم تحويلها إلى جذر : $x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m$

$$(8)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{(8)^2} = (\sqrt[3]{8})^2 = (2)^2 = 4$$

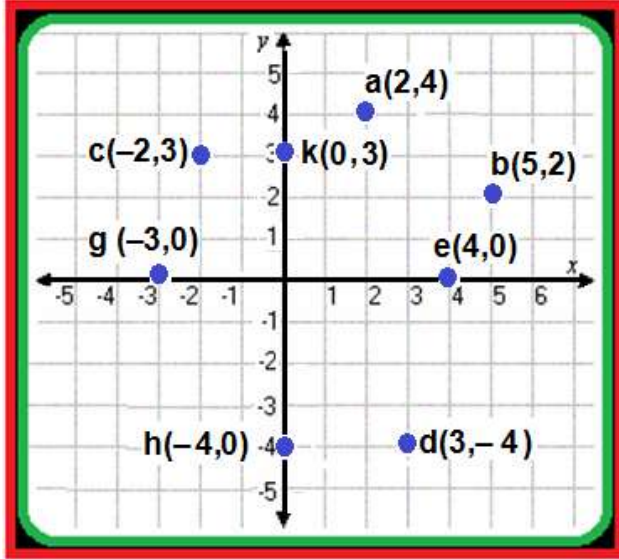
$$(25)^{\frac{3}{2}} = (\sqrt{25})^3 = (5)^3 = 125$$

ملاحظة: أي عدد غير الصفر قوة صفر يساوي 1 ، مثلاً : $5^0 = 1$ ، $(2022)^0 = 1$ ، $(1443)^0 = 1$

(7) **المستوى الديكارتي:** يتكون من مستقيمين متعامدين : الأفقي يسمى (x) ، والعمودي (y)

كل نقطة على المستوى (زوج مرتب) تتكون من جزأين : x و y (x , y)

ولتحديد موقع النقطة (x , y) ، نبدأ من نقطة الأصل ونتجه يمينا (إذا كان العدد موجبا) أو يسارا (في حالة السالب) ثم إلى الأعلى (موجب) أو الأسفل (سالب)



(8) **الاقتران:** صورة عدد ما في الاقتران هي القيمة الناتجة عن استبدال (x) بذلك العدد

$$g(x) = 5x^2 + 2x - 4$$

$$g(3) = 5(3)^2 + 2(3) - 4 = 47$$

أي أن صورة العدد (3) هي (47)

$$f(x) = 3x - 1$$

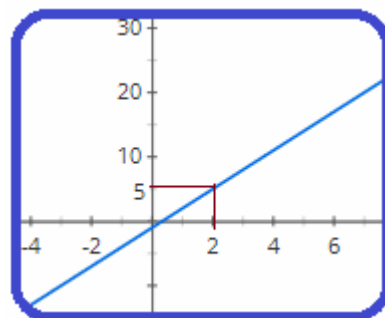
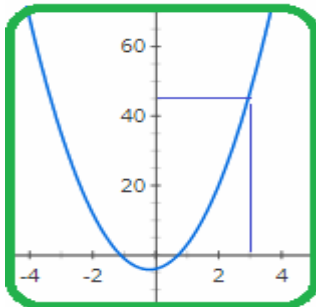
$$f(2) = 3(2) - 1 = 5$$

أي أن صورة العدد (2) في الاقتران f هي (5)

والزوج المرتب (3 , 47) يقع على منحنى الاقتران g

والزوج المرتب (2 , 5) يقع على منحنى الاقتران f

عند إيجاد صور عدد كبير من القيم وتعيين الأزواج المرتبة على المستوى الديكارتي ، يتشكل منحنى الاقتران



(9) فك الأقواس: الأول $\times$ الأول + الأول $\times$ الثاني + الثاني $\times$ الأول + الثاني $\times$ الثاني

$$1) (x + 2)(x + 3) = x^2 + 3x + 2x + 6 = x^2 + 5x + 6$$

$$2) (3x + 1)(x - 5) = 3x^2 - 15x + x - 5 = 3x^2 - 14x - 5$$

$$3) (2x^2 - x)(3x^3 - 5) = 6x^5 - 10x^2 - 3x^4 + 5x$$

$$4) (x + 5)^2 = (x + 5)(x + 5) = x^2 + 10x + 25$$

$$(a + b)^2 = ()^2 + 2() () + ()^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

مربع الأول $\times 2$ + الأول $\times$ الثاني + مربع الثاني

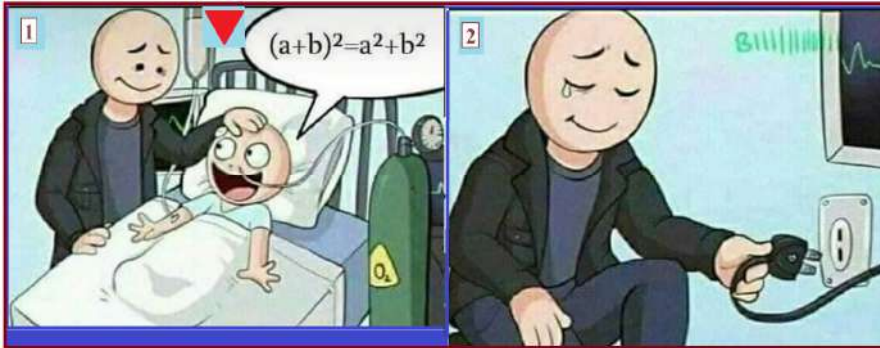
$$(2x + 5)(x^2 - 1) = 2x^3 - 2x + 5x^2 - 5 = 2x^3 + 5x^2 - 2x - 5$$

$$(a + b)^3 = ()^3 + 3()^2() + 3() ()^2 + ()^3$$

مكعب الأول $\times 3$ + مربع الأول $\times$ الثاني $\times 3$ + مربع الثاني $\times$ الأول + مكعب الثاني

$$(x + y)^2 \neq x^2 + y^2 \quad \text{ملاحظة:}$$

$$(x + y)^2 = (x + y) \times (x + y) = x^2 + xy + xy + y^2 = x^2 + 2xy + y^2 \quad \text{بل}$$



انتبه... الموضوع خطير

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Hasanat
Hasanat



$$\begin{aligned} 3+2 \times 4 &= 5 \times 4 = 20 \quad \times \\ 3+2 \times 4 &= 3+8 = 11 \quad \checkmark \end{aligned}$$

$$5 \times 3^2 \neq (15)^2 = 225$$

$$5 \times 3^2 = 5 \times 9 = 45$$

(10) ترتيب العمليات الحسابية (الأولويات):

(1) الأقواس: () ، [] ، { }

(2) الأسس والجذور

(3) الضرب والقسمة

(4) الجمع والطرح

11) التحليل إلى العوامل :

التحليل إلى العوامل في المقادير الجبرية ، هو كتابة المقدار على شكل حاصل ضرب مجموعة من المقادير كل منها أصغر منه درجة ، ولا يمكن تحليل أي منها ، ومن طرقه (العامل المشترك ، الفرق بين مربعين ...) ولتجنب الأخطاء نقوم بذلك على شكل خطوات :

أولاً: العامل المشترك : دائماً نبدأ بالسؤال التالي : هل يوجد عامل مشترك؟

مثلاً: 1) $5x - 10 = 5x - 5(2) = 5(x - 2)$

2) $3x^2 + 6x = 3xx + 2(3)x = 3x(x+2)$

ثانياً: الفرق بين مربعين: إذا لم يكن هناك عامل مشترك، نلاحظ فيما إذا كان المقدار فرق بين مربعين أو مكعبين :

مثلاً: 1) $x^2 - 9 = (x)^2 - (3)^2 = (x - 3)(x + 3)$

2) $x^2 + 4 = (b^2 - 4ac)$ (المميز سالب) لا يمكن تحليلها لأن المميز سالب

3) $x^3 - 8 = (x)^3 - (2)^3 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$

4) $x^3 + 27 = (x)^3 + (3)^3 = (x + 3)(x^2 - 3x + 9)$

فك : $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

تحليل : $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

لا يحلل : $a^2 + b^2 = \dots$

تحليل : $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

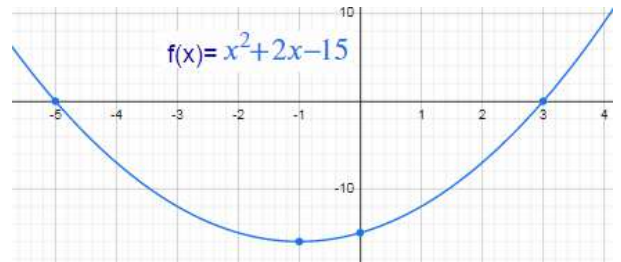
فك : $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

ثالثاً: إذا لم يكن كذلك نلاحظ فيما إذا كان ثلاثي حدود : $ax^2 + bx + c$

تحليل ثلاثي الحدود : $x^2 + bx + c$: نبحث عن عددين حاصل ضربهما (c) ومجموعهما (b)

1) $x^2 + 2x - 15 = (x - 2)(x + 5)$ (2) ومجموعهما (-15) حاصل ضربهما (5 ، -3) لذلك :

وهذا يعني أن الاقتران $f(x) = x^2 + 2x - 15$ يقطع محور السينات عند النقطتين $(x = 3)$ ، $(x = -5)$



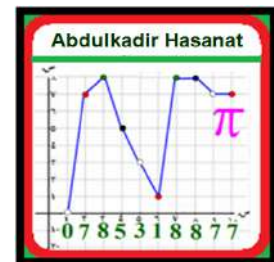
2) $x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1)$

3) $x^2 + 12x + 20 = (x + 2)(x + 10)$

4) $x^2 + x - 20 = (x - 4)(x + 5)$

5) $x^2 - 8x - 20 = (x - 10)(x + 2)$

6) $x^2 - 9x + 20 = (x - 4)(x - 5)$



$a, b, c \in R, a \neq 0$

القانون العام

$ax^2 + bx + c = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

المميز

$\Delta \geq 0 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

ويمكن استعمال القانون العام ، خاصة عندما $a \neq 1$



1) $x^2 + 8x + 12 = (x \quad)(x \quad)$

3) $x^2 - 11x + 24 = (x \quad)(x \quad)$

5) $x^2 + 10x + 24 = (x \quad)(x \quad)$

7) $x^2 - 3x - 40 = (x \quad)(x \quad)$

9) $x^2 + 4x - 12 = (x \quad)(x \quad)$

11) $x^2 + 5x - 6 = (x \quad)(x \quad)$

13) $x^2 - 6x - 7 = (x \quad)(x \quad)$

15) $x^2 + 11x + 28 = (x \quad)(x \quad)$

17) $x^2 - 25x + 24 = (x \quad)(x \quad)$

19) $x^2 - 13x + 36 = (x \quad)(x \quad)$

21) $x^2 - 5x - 6 = (x \quad)(x \quad)$

23) $x^2 - 13x + 30 = (x \quad)(x \quad)$

2) $x^2 - 4x - 32 = (x \quad)(x \quad)$

4) $x^2 + x - 2 = (x \quad)(x \quad)$

6) $x^2 + 12x + 35 = (x \quad)(x \quad)$

8) $x^2 + 3x - 4 = (x \quad)(x \quad)$

10) $x^2 - 14x + 45 = (x \quad)(x \quad)$

12) $x^2 - 4 = (x \quad)(x \quad)$

14) $x^2 + 6x - 16 = (x \quad)(x \quad)$

16) $x^2 + 10x + 16 = (x \quad)(x \quad)$

18) $x^2 + 12x + 27 = (x \quad)(x \quad)$

20) $x^2 + 5x - 24 = (x \quad)(x \quad)$

22) $x^2 - 5x + 6 = (x \quad)(x \quad)$

24) $x^2 - 13x - 30 = (x \quad)(x \quad)$

ملاحظة: هناك حالات لا نجد فيها عددين صحيحين يحققان الشرطين السابقين عندها نستعمل طريقة المقص أو القانون العام ، أو التجميع المناسب أو إكمال المربع أو الطريقة الهندية ... الخ

$2x^2 + x - 6 = 0$



$(2x - 3)(x + 2)$

حاصل ضرب القريبين : $-3x$
حاصل ضرب البعيدين : $4x$
المجموع $= x =$ الحد الأوسط

$(2x \quad)(x \quad)$

القريبان
البعيذان



أو عن طريق القانون العام :

$y = ax^2 + bx + c$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$2x^2 + 5x - 3 = 0$

$a = 2, b = 5, c = -3$

$\frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4(2)(-3)}}{2(2)} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 24}}{4} = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{4}$

$= \frac{-5 \pm 7}{4} = \frac{-5 + 7}{4} \text{ or } \frac{-5 - 7}{4} = \frac{2}{4} \text{ or } \frac{-12}{4} = \left\{ \frac{1}{2}, -3 \right\}$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$a = 2, b = 1, c = -6$

$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(2)(-6)}}{2(2)} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{-1 \pm 5}{4}$

$x = \frac{-3}{2} \quad x = 2$

رابعاً : إذا لم يكن المقدار أيّاً مما سبق وكان من الدرجة الثالثة أو أكثر نحلل حده الثابت ونحاول الحصول على صفر (جذر) له مثل (a) ثم نستخدم القسمة التركيبية (أو الخوارزمية) ونقسمه على (x - a)

مثلاً : $f(x) = x^3 + 2x^2 - 11x - 12$

نبحث عوامل الحد الثابت (12) وهي: (1, 2, 3, 4, 6, 12)

نعوض هذه العوامل بسالبها وموجبها في الاقتران إلى أن نحصل على (صفر) ونجده هنا $f(-4) = 0$ نستخدم القسمة الخوارزمية أو التركيبية فنقسم $f(x)$ على $(x + 4)$ ويجب أن يكون الباقي صفراً وبالتالي : الاقتران = الناتج $\times$ العامل $(x + 4)$

ثم نحلل الناتج (التربيعي) بالطرق السابقة $f(x) = (x + 4)(x^2 - 2x - 3)$
 $f(x) = (x + 4)(x - 3)(x + 1)$

	x^3	x^2	x	x^0
-4	1	2	-11	-12
		-4	8	+12
		1	-2	-3
				0
	x^2	$\times$	x^0	

12) حل المعادلات: هناك نوعان من المعادلات الجبرية بمتغير واحد ، وهما : الخطية وغير الخطية



(أ) الخطية : وهي على الصورة : $ax + b = c$ ، نتعامل معها مثل الميزان ذو الكفتين

طرف الأعداد (الثوابت) طرف المتغيرات (المجهول)

طريقة الحل : يجب تجميع الحدود المحتوية على (x) في أحد طرفي المعادلة ثم القسمة على معامل (x)

1) $2x + 5 = 9$
 $2x + 5 - 5 = 9 - 5$
 $2x = 4$
 $2x \div 2 = 4 \div 2$
 $x = 2$



2) $3x - 8 = 7x + 1$
 $3x - 7x = 1 + 8$
 $-4x = 9$
 $x = \frac{9}{-4} = -\frac{9}{4}$

Hasanat

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \times d = b \times c$ $\begin{matrix} b \neq 0 \\ d \neq 0 \end{matrix}$

ملاحظة : تكافؤ الكسور :

(ب) التربيعية : صورتها العامة : $ax^2 + bx + c = 0$

طريقة الحل : يجب أن نجعل الطرف الأيمن صفراً ، ثم نقوم بتحليل الطرف الأيسر وكتابته على شكل حاصل ضرب مقدارين لكي نستخدم القاعدة ($ab = 0 \rightarrow a = 0$ or $b = 0$) ثم حل المعادلتين الناتجتين

1) $x^2 - x = 6 \rightarrow x^2 - x - 6 = 0 \rightarrow (x - 3)(x + 2) = 0$

إما ($x - 3 = 0$) أو ($x + 2 = 0$) ومنها $x = 3$, $x = -2$

2) $x^3 + 2x^2 = 11x + 12 \rightarrow x^3 + 2x^2 - 11x - 12 = 0$

$(x + 4)(x - 3)(x + 1) = 0$

إما ($x + 4 = 0$) أو ($x - 3 = 0$) أو ($x + 2 = 0$) ومنها $x = -4$, $x = 3$, $x = -2$

3) $x^2 - 4x = 0 \rightarrow x(x - 4) = 0 \rightarrow x = 0$, $x = 4$



ملاحظة(1): للمعادلة التربيعية على الأكثر حلان (جذران) : فقد لا يكون لها حل في ح

مثل : $x^2 + 4 = 0$ أو $x^2 + 3x + 4 = 0$

ملاحظة (2): يمكن استخدام القانون العام لحل أي معادلة تربيعية على الصورة : $ax^2 + bx + c = 0$

$a, b, c \in R, a \neq 0$ القانون العام

$ax^2 + bx + c = 0$ المميز $\Delta = b^2 - 4ac$

$$\Delta \geq 0 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

القانون العام :

ولا يوجد حل للمعادلة في R إذا كان المميز سالباً (وتكون أولية)

(13) أنظمة المعادلات

هناك طريقتان لحل نظام مكون من معادلتين خطيتين (أي إيجاد زوجاً مرتباً يحقق المعادلتين في نفس الوقت)

substitution (2) طريقة التعويض

ملخصها : جعل أحد المتغيرين موضوعاً للقانون في إحدى المعادلتين وتعويض قيمته في الأخرى لحلها

$$x + 2y = 6$$

$$x - y = 3$$

نجعل (x) موضوعاً للقانون في المعادلة الثانية

$$x = 3 + y$$

نعوض القيمة في الأولى

$$3 + y + 2y = 6$$

$$3 + 3y = 6$$

$$x = 4, y = 1 \text{ ومنها } 3y = 3$$

elimination

أساسها : التخلص من أحد المتغيرين بجمع المعادلتين ثم إيجاد قيمة المتغير الآخر

$$x + 2y = 6$$

$$x - y = 3$$

نضرب المعادلة الثانية في (2)

$$x + 2y = 6$$

$$2x - 2y = 6$$

$$3x = 12$$

نجمع

$$x = 4, y = 1$$

وبالتالي

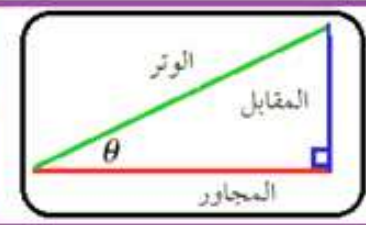
(17) الاقتترانات المثلثية

θ	30°	45°	60°
	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\sin \theta$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \theta$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan \theta$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

$\sin \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ الجيب

$\cos \theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$ الجتا

$\tan \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$ الظل



نظرية فيثاغورس
مربع الوتر = مربع الأول + مربع الثاني

Sugar θ زاوية حادة Add

$\sin \theta \leftrightarrow y$
 $\cos \theta \leftrightarrow x$

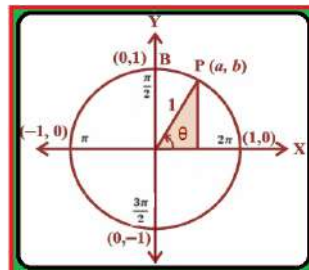
All +

$180^\circ - \theta$
 $\pi - \theta$

$180^\circ + \theta$
 $\pi + \theta$

$360^\circ - \theta$
 $2\pi - \theta$

To Coffee



$\sin \theta$ يرتبط مع y

$\cos \theta$ يرتبط مع x

الربع الأول	الربع الثاني
$\sin \theta, \csc \theta : (+)$	$\sin \theta, \csc \theta : (+)$
$\cos \theta, \sec \theta : (+)$	$\cos \theta, \sec \theta : (-)$
$\tan \theta, \cot \theta : (+)$	$\tan \theta, \cot \theta : (-)$
الربع الثالث	الربع الرابع
$\sin \theta, \csc \theta : (-)$	$\sin \theta, \csc \theta : (-)$
$\cos \theta, \sec \theta : (-)$	$\cos \theta, \sec \theta : (+)$
$\tan \theta, \cot \theta : (+)$	$\tan \theta, \cot \theta : (-)$



Hasanat



متطابقات مثلثية

$$1) \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \quad 2) \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} \quad 3) \csc \theta = \frac{1}{\sin \theta} \quad 4) \cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

$$5) \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \Rightarrow 6) \sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta \Rightarrow 7) \cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$$

بقسمة كل حد في (5) على $(\sin^2 \theta)$ بقسمة كل حد في (5) على $(\cos^2 \theta)$

$$8) \tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta \quad 9) \cot^2 \theta + 1 = \csc^2 \theta$$

$$10) \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \theta \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta \quad \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot \theta$$

(جيب) الزاوية يساوي (جتا) متممها والعكس

$$11) \sin(-\theta) = -\sin \theta \quad \cos(-\theta) = \cos \theta \quad \tan(-\theta) = -\tan \theta$$

(الجتا) لا يتأثر بالسالب

$$12) \sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$$

$$\sin 2\theta = \sin(\theta + \theta) = \sin \theta \cos \theta + \cos \theta \sin \theta \Rightarrow 13) \sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$14) \cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b \quad \cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

$$\cos 2\theta = \cos(\theta + \theta) = \cos \theta \cos \theta - \sin \theta \sin \theta \Rightarrow 15) \cos 2\theta = 1 - 2 \sin^2 \theta$$

$$= 2 \cos^2 \theta - 1$$

$$16) \tan(a \pm b) = \frac{\tan a \pm \tan b}{1 \mp \tan a \tan b} \quad \tan 2\theta = \tan(\theta + \theta) \Rightarrow 17) \tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$$

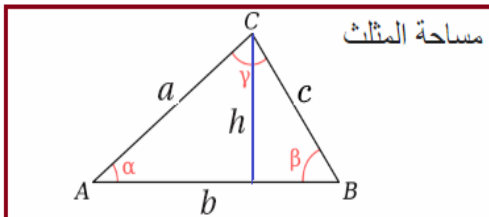
$$18) \cos^2 \theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta) \quad 19) \sin^2 \theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta) \quad 20) \tan^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{1 + \cos 2\theta}$$

$$2 \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) \quad 2 \cos \alpha \cos \beta = \cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)$$

$$\sin^2 \theta = (\sin \theta)^2 \quad 2 \sin \alpha \cos \beta = \sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta) \quad \text{الأستاذ عبدالقادر الحسنات}$$

قوانين مهمة

مساحة المثلث = نصف حاصل ضرب القاعدة في الارتفاع
أو نصف حاصل ضرب أي ضلعين في (جيب) الزاوية بينهما



$$A = \frac{1}{2}bh \quad A = \frac{1}{2}ab \sin \theta$$

$$A = \frac{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}}{4}$$

القطاع الدائري

$$A = \frac{1}{2}r^2\theta$$

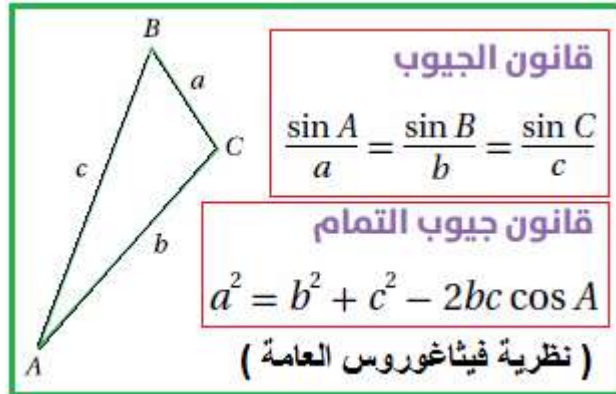
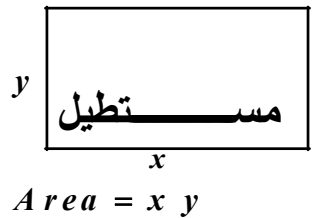
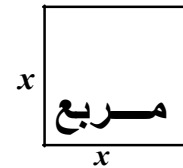
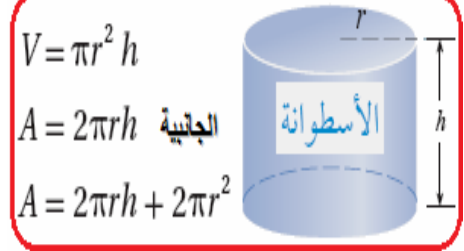
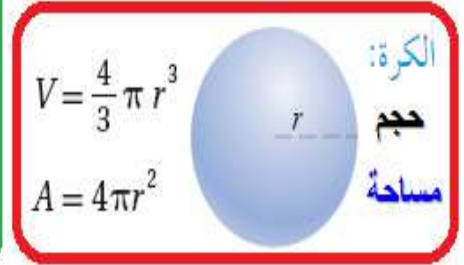
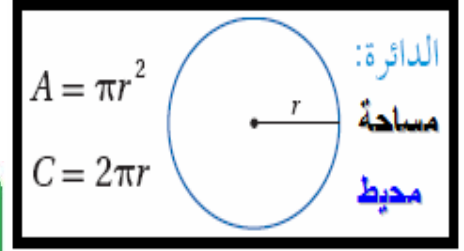
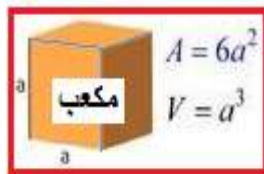
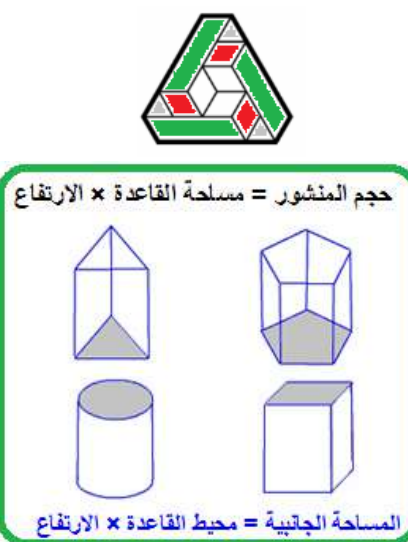
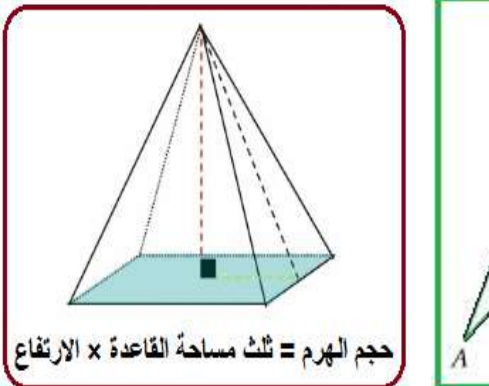
$$s = r\theta \quad (\theta \text{ radian})$$

المخروط:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$A = \pi r \sqrt{r^2 + h^2} \quad \text{الجانبية}$$

$$A = \pi r \sqrt{r^2 + h^2} + \pi r^2$$



إحداثيات نقطة منتصف القطعة المستقيمة $P_1 P_2$ هما:

$$\bar{M}: \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

المسافة بين النقطتين $P_1(x_1, y_1)$ و $P_2(x_2, y_2)$ هي:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

معادلة المستقيم: $ax + by + c = 0$

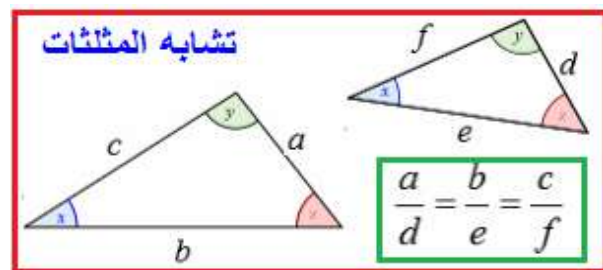
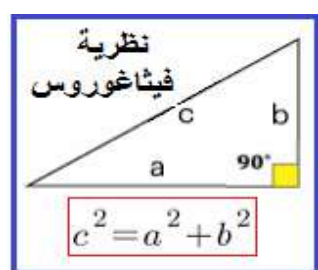
بعد نقطة عن مستقيم

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

معادلة المستقيم المارّ بالنقطة $P_1(x_1, y_1)$ وميله m هي:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

حيث $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$



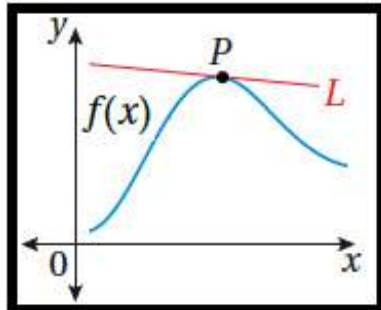


الدرس 1

مشتقة اقترانات خاصة

Differentiation of Special Functions

1) الاتصال والاشتقاق :



مشتقة الاقتران $f(x)$ عند نقطة واقعة على منحناه هي ميل المنحنى عند هذه النقطة (ميل المماس عند نقطة التماس)، ويُرمز إليها بالرمز $f'(x)$

العلاقة بين الاتصال وقابلية الاشتقاق

قابلية الاشتقاق تضمن الاتصال
الاتصال لا يضمن قابلية الاشتقاق

ميل المماس = المشتقة الأولى

يكون الاقتران $f(x)$ قابلاً للاشتقاق عند $(x = a)$ إذا كانت $f'(a)$ موجودة ، ويكون متصلاً عندها باختصار :

1) إذا كان $f(x)$ متصلاً عند $x = a$ ، فإنه قد يكون قابلاً للاشتقاق وقد يكون غير قابل للاشتقاق عندها

2) إذا كان $f(x)$ قابلاً للاشتقاق عند $x = a$ ، فإنه قطعاً متصل عند (a)

3) إذا كان $f(x)$ غير متصل عند $x = a$ ، فإنه غير قابل للاشتقاق عندها

4) قابلية الاشتقاق عند نقطة تعني أنه يمكن رسم مماس لمنحنى الاقتران عند تلك النقطة لذلك يكون الاقتران غير قابل للاشتقاق عند الرؤوس المدببة (الزوايا) مثل أصفار القيمة المطلقة رغم اتصاله عندها ، وكذلك عندما يكون المماس رأسياً (لأن ميله غير معرف)

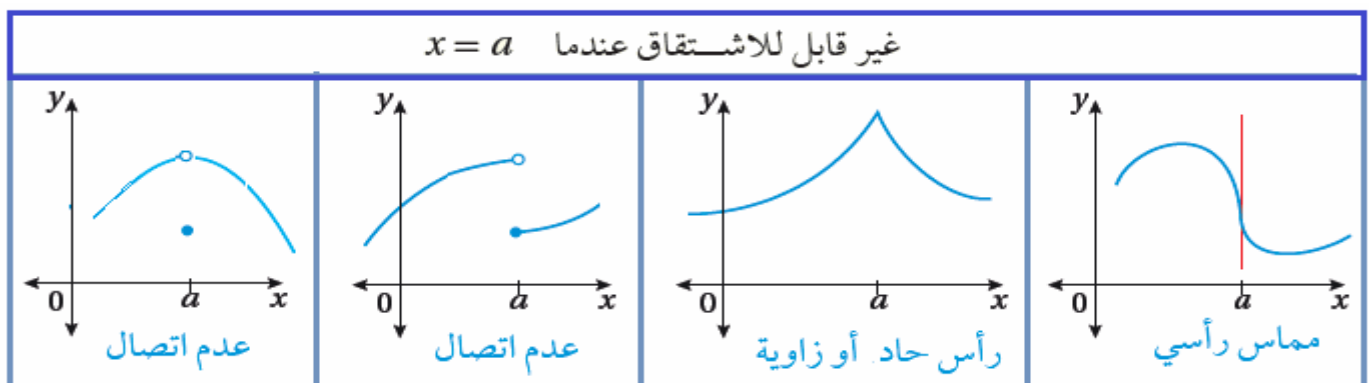
أو يمكن فهم الموضوع على أن هناك بناية مكونة من طابقين : الطابق الأول يمثل الاتصال والثاني يمثل الاشتقاق



1- وجود طابق أول لا يعني وجود طابق ثاني $\Rightarrow$ متصل لا يعني قابل للاشتقاق

2- وجود طابق ثاني يشترط وجود طابق أول $\Rightarrow$ قابل للاشتقاق يعني متصل

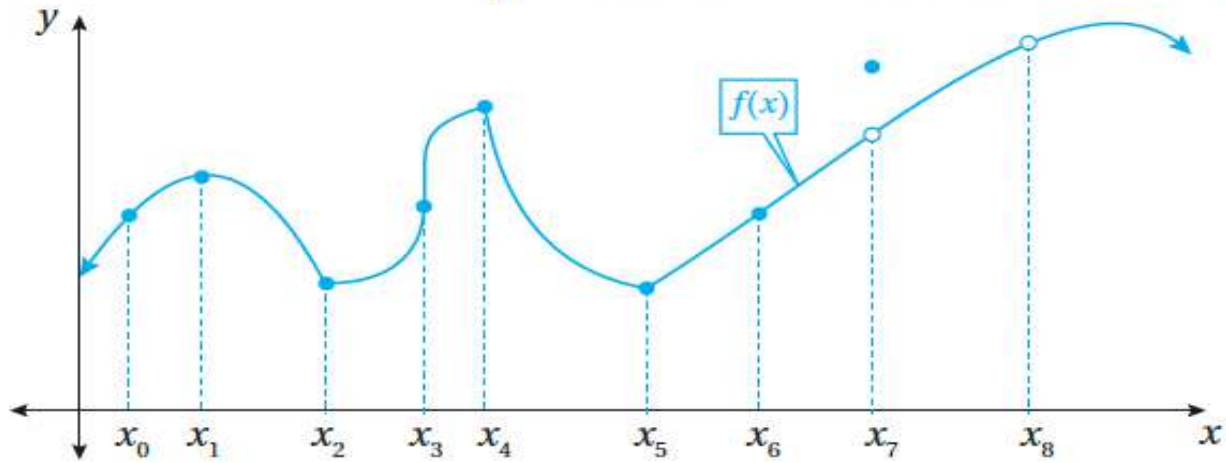
3- عدم وجود طابق أول يعني استحالة وجود طابق ثاني $\Rightarrow$ غير متصل يعني غير قابل للاشتقاق



ميل المستقيم الرأسي غير مُعرّف

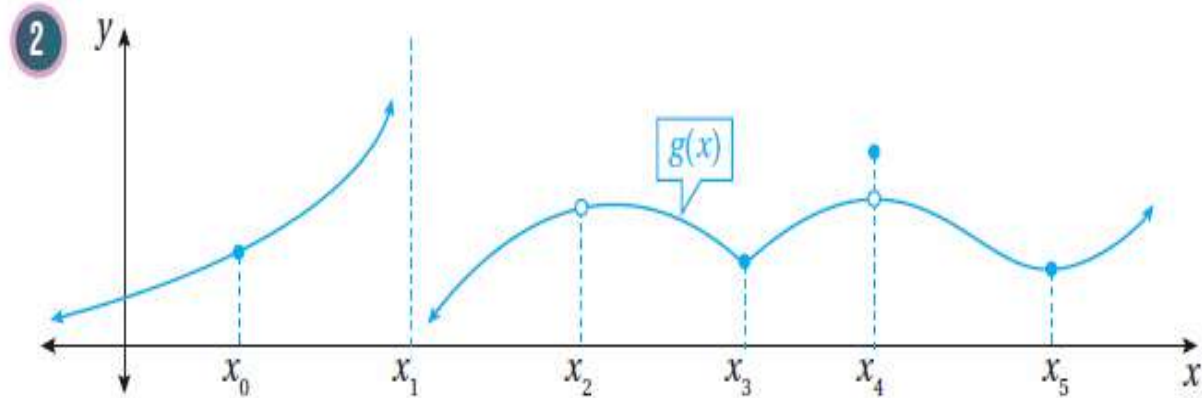
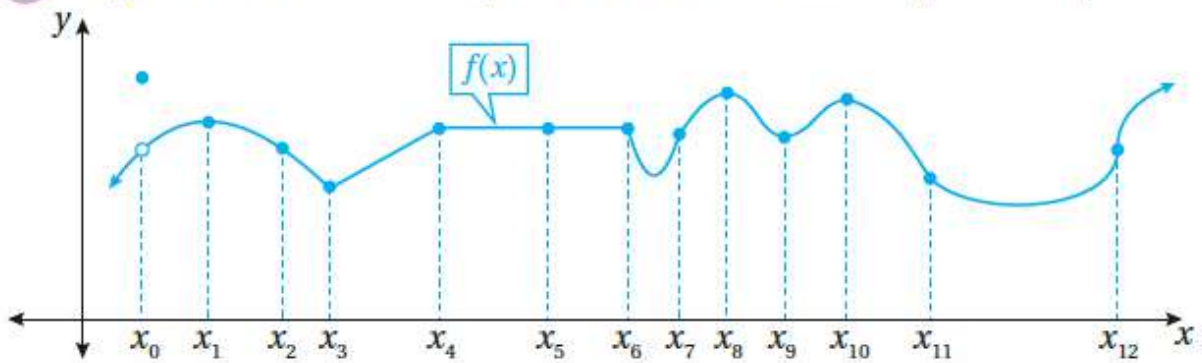
10 أتحقق من فهمي

يُبين الشكل الآتي منحنى الاقتران $f(x)$. أحدد قيم x للنقاط التي يكون عندها الاقتران $f(x)$ غير قابل للاشتقاق، مُبرِّراً إجابتني.



22 أدرّب وأحلّ المسائل

أحدد قيم x للنقاط التي لا يكون عندها كل اقتران ممّا يأتي قابلاً للاشتقاق، مُبرِّراً إجابتني: 1



10 أتحقق من فهمي

الاقتران f غير قابل للاشتقاق عندما

$$x = x_2, x = x_4, x = x_5$$

لأن لمنحناه رأس حاد أو زاوية عند هذه النقاط

وهو غير قابل للاشتقاق عندما $x = x_7, x = x_8$

لأنه غير متصل عندهما $x = x_3$

الاقتران f غير قابل للاشتقاق عندما

$$x = x_3, x = x_4, x = x_6$$

لأن لمنحناه رأس حاد أو زاوية عند هذه النقاط، وهو غير قابل للاشتقاق عندما $x = x_0$ غير متصل

وهو غير قابل للاشتقاق عندما $x = x_{12}$

نظراً لوجود مماس رأسي عند هذه النقطة

الاقتران g غير قابل للاشتقاق عندما $x = x_3$

لأن لمنحناه زاوية عند هذه النقطة،

وهو غير قابل للاشتقاق عندما

$x = x_1, x = x_2, x = x_4$ لأنه غير متصل

(2) مراجعة قواعد الاشتقاق :

y	$\frac{dy}{dx}$
x^n	$n x^{n-1}$
c	0
$a x^n$	$a n x^{n-1}$
$u \pm v$	$u' \pm v'$

$$y = a x^n, n \in R \Rightarrow \frac{dy}{dx} = a n x^{n-1}$$

$$y = (g(x))^n, n \in R \Rightarrow \frac{dy}{dx} = n(g(x))^{n-1} \times g'(x)$$

$$y = u(x) \pm v(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = u'(x) \pm v'(x)$$

u, v
اقترانا قوة

أتذكر

- $(af(x))' = af'(x)$
- $(x^n)' = nx^{n-1}$
- $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$

$$1) f(x) = 5x^2 - 3x + 4 \Rightarrow f'(x) = 10x - 3$$

$$2) f(x) = 5 - 3x^{-4} - x + \pi^2 \Rightarrow f'(x) = 12x^{-5} - 1$$

$$3) f(x) = (3x + 4)(x - 1) = 3x^2 + x - 4 \Rightarrow f'(x) = 6x + 1$$



$$4) \frac{d}{dx}(8 - x^{\frac{3}{2}}) = (0 - \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}) = -\frac{3}{2}\sqrt{x}$$

البسط - المقام
المقام



$$\frac{a}{b} - 1 = \frac{a - b}{b}$$

$$5) f(x) = x^4 + x^3 \Rightarrow f'(x) = 4x^3 + 3x^2$$

$$\Rightarrow f'(-2) = 4(-2)^3 + 3(-2)^2 = -32 + 12 = -20$$

$$6) f(x) = (3x^2 - 7x - 2)^{\frac{5}{2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{5}{2}(3x^2 - 7x - 2)^{\frac{3}{2}}(6x - 7)$$

$$7) f(x) = \sqrt[3]{x^5} + \frac{3}{x^2} - 8 \Rightarrow f(x) = x^{\frac{5}{3}} + 3x^{-2} - 8$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{5}{3}x^{\frac{5}{3}-1} + 3(-2)x^{-2-1} = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} - 6x^{-3}$$

$$\sqrt[3]{x^5} = x^{\frac{5}{3}}$$

$$8) f(x) = \frac{x^4 - 3x^5 + \sqrt[3]{x}}{x^2} \Rightarrow f(x) = \frac{x^4}{x^2} - \frac{3x^5}{x^2} + \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^2}$$

$$= x^{4-2} - 3x^{5-2} + x^{\frac{1}{3}-2} = x^2 - 3x^3 + x^{\frac{-5}{3}}$$

$$\Rightarrow f'(x) = 2x - 9x^2 - \frac{5}{3}x^{\frac{-8}{3}}$$

$$\frac{3}{x^4} = 3x^{-4}$$

$$9) y = \frac{8x^6 - 4x^3 + 9}{2x^2} \Rightarrow y = \frac{8x^6}{2x^2} - \frac{4x^3}{2x^2} + \frac{9}{2x^2}$$

$$= 4x^{6-2} - 2x^{3-2} + \frac{9}{2}x^{0-2} = 4x^4 - 2x + \frac{9}{2}x^{-2}$$

$$\Rightarrow y' = 16x^3 - 2 - 9x^{-3}$$

توزيع البسط على المقام

$$\frac{x \pm y}{z} = \frac{x}{z} \pm \frac{y}{z}$$

ويمكن توزيع حدود البسط على المقام وحيد الحد ، ثم اشتقاق كل حد لوحده

$$10) f(x) = \frac{x^4 - 3x^5 + \sqrt[3]{x}}{x^2} \Rightarrow f(x) = \frac{x^4}{x^2} - \frac{3x^5}{x^2} + \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^2}$$

$$= x^{4-2} - 3x^{5-2} + x^{\frac{1}{3}-2} = x^2 - 3x^3 + x^{\frac{-5}{3}}$$

$$\Rightarrow f'(x) = 2x - 9x^2 - \frac{5}{3}x^{\frac{-8}{3}}$$

$$\frac{a}{b \pm c} \neq \frac{a}{b} \pm \frac{a}{c}$$

تحذير

$$11) y = \frac{x^3 - 64}{x - 4} \Rightarrow y = \frac{(x - 4)(x^2 + 4x + 16)}{x - 4} = x^2 + 4x + 16$$

$$\Rightarrow y' = 2x + 4$$

$$12) f(x) = \frac{x^3 + x^5 + x^2}{x^2} \Rightarrow f(x) = \frac{x^2(x + x^3 + 1)}{x^2} = x + x^3 + 1$$

$$\Rightarrow f'(x) = 1 + 3x^2$$

أخطاء شائعة

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x}{1} \dots (\text{خطأ})$$

$$f(x) = \frac{(x + 3)(x - 3)}{x - 3} = x + 3 \Rightarrow f'(x) = 1 \dots (\text{صح})$$

$$f(x) = \pi^3 \Rightarrow f'(x) = 3\pi^2 \dots (\text{خطأ})$$

$$f'(x) = 0 \dots (\text{صح})$$

$$f(x) = x^2(x^3 - 5x)$$

$$\Rightarrow f'(x) = 2x(3x^2 - 5) \dots (\text{خطأ})$$

$$f(x) = x^2(x^3 - 5x) = x^5 - 5x^3$$

$$\Rightarrow f'(x) = 5x^4 - 15x^2 \dots (\text{صح})$$

$$9) y = \sqrt{x} - \frac{5}{x^2}$$

$$10) y = \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}} + \frac{4}{x^2} + 1$$

توزيع البسط على المقام

$$\frac{x \pm y}{z} = \frac{x}{z} \pm \frac{y}{z}$$

$$11) y = 7 - 5\sqrt{x} + 2\sqrt[3]{x}$$

$$12) f(x) = \sqrt[5]{2x^3 - 1}$$

$$\frac{a}{b \pm c} \neq \frac{a}{b} \pm \frac{a}{c}$$

تحذير

$$13) y = \frac{x^5 - x^{-2}}{x}$$

$$14) y = \frac{2 - 7x}{3x}$$

$$\frac{3}{\frac{4}{5}} = 3 \div \frac{4}{5} = 3 \times \frac{5}{4} = \frac{3 \times 5}{4}$$

$$15) f(x) = \frac{x^4 + x^2 - 6}{\sqrt{x}}$$

$$16) y = \frac{x^5 - 8x^6}{4x^2}$$

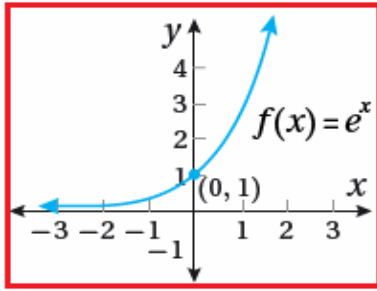
$$\frac{\frac{9}{2}}{7} = \frac{9}{2} \div 7 = \frac{9}{2} \times \frac{1}{7} = \frac{9}{2 \times 7}$$

$$17) f(x) = \sqrt[5]{2x^3 - 1}$$

$$18) y = \frac{1}{(1 - 4x^2)^3}$$



الأستاذ: عبدالقادر الحسنات
078 531 88 77



(3) مشتقة الاقتران الأسّي الطبيعي

$$f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$$

e : العدد النيبيري $e \approx 2.7$

مشتقته = نفسه

$$e^{x+3} = e^x \times e^3$$

*** إذا كان أساس الاقتران هو العدد النيبيري (e) فإن الاقتران $f(x) = e^x$ يسمى الاقتران الأسّي الطبيعي حيث (e) عدد غير نسبي يساوي تقريباً (2.7)

$$1) f(x) = x^3 + e^x + 8 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + e^x$$

$$2) f(x) = 3x + 8e^{x+2} = 3x + 8e^x e^2 \Rightarrow f'(x) = 3 + 8e^2 e^x = 3 + 8e^{x+2}$$

$$3) f(x) = \frac{3}{x^2} + \frac{5}{e^{-x}} - \sqrt{e^{2x}} + \sqrt[5]{x} = 3x^{-2} + 5e^x - (e^{2x})^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{5}}$$

$$= 3x^{-2} + 5e^x - e^x + x^{\frac{1}{5}} = 3x^{-2} + 4e^x + x^{\frac{1}{5}}$$

$$\Rightarrow f'(x) = -6x^{-3} + 4e^x + \frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}}, \quad \frac{1}{5} - 1 = \frac{1-5}{5} = -\frac{4}{5}$$

$$4) f(x) = 3x - 7e^x \Rightarrow f'(x) = 3 - 7e^x$$

$$\Rightarrow f'(0) = 3 - 7e^0 = 3 - 7 = -4: \boxed{e^0 = 1}$$

$$5) f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{5}{e^{3-x}} - e^{\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x) =$$

$$6) f(x) = \frac{x^3}{\sqrt{x}} + \frac{6\sqrt[3]{x} - xe^x + 4x^2}{2x} \Rightarrow f'(x) =$$

أتحقق من فهمي أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

a) $f(x) = 5e^x + 3$

b) $f(x) = \sqrt{x} - 4e^x$

c) $y = 8e^x + \frac{4}{\sqrt[5]{x}}$

a	$f'(x) = 5e^x$	أتحقق من فهمي صفحة 14
b	$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - 4e^x = \frac{1}{2\sqrt{x}} - 4e^x$	
c	$f'(x) = 8e^x - \frac{4}{5}x^{-\frac{6}{5}} = 8e^x - \frac{4}{5\sqrt[5]{x^6}}$	



$$f(x) = \ln x, x > 0 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$\log_e x = \ln x$$



اللوغاريتم الطبيعي : يُسمى اللوغاريتم للأساس (e) اللوغاريتم الطبيعي ، ويُرمز له (Ln)

$$\ln e = 1$$

$$\ln 1 = 0$$

غير معرف : Ln0

$$\ln x^3 = 3 \ln x$$

$$\ln 3x^5 \neq 5 \ln 3x$$

$$\ln 4x^2 = \ln 4 + \ln x^2 = \ln 4 + 2 \ln x$$

$$1) f(x) = 8 \ln x \Rightarrow f'(x) = (8) \left(\frac{1}{x} \right) = \frac{8}{x}$$

$$2) f(x) = \ln(5x^3) = \ln(5) + \ln(x^3) = \ln(5) + 3 \ln(x) \\ \Rightarrow f'(x) = 0 + \frac{3}{x} = \frac{3}{x}$$

$$3) f(x) = (\ln x)^2 \Rightarrow f'(x) = 2(\ln x) \left(\frac{1}{x} \right) = \frac{2}{x} \ln x$$

$$4) f(x) = \ln(x^2) = 2 \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{x}$$

استخدام قوانين اللوغاريتمات
يُسهل عملية الاشتقاق

$$5) f(x) = \ln(5x)^2 \Rightarrow f'(x) =$$

$$6) f(x) = \ln(5x^2) \Rightarrow f'(x) =$$

أتحقق من فهمي أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي :

$$a) f(x) = \sqrt{x} + \ln(4x)$$

$$b) f(x) = \ln(2x^3)$$

a	$f(x) = \sqrt{x} + \ln(4x) = x^{\frac{1}{2}} + \ln 4 + \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x}$
b	$f(x) = \ln(2x^3) = \ln 2 + 3 \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{x}$

أتحقق من فهمي صفحة 16

مفهوم اللوغاريتم ... وعلاقته بالأسس

إذا كان: $x > 0, b > 0, b \neq 1$ ، فإن:	
الصورة الأسية	الصورة اللوغاريتمية
$b^y = x$	$\log_b x = y$ إذا وفقط إذا

$\log_2 8$ تعني:

كم مرة نضرب العدد (2) في نفسه ليكون الناتج (8)؟

الجواب: 3 مرات، إذاً **$\log_2 8 = 3$**

كذلك: **$\log_5 25$** تعني: (5) أس كم تساوي (25)؟؟؟ الجواب (2). إذاً **$\log_5 25 = 2$**

1 $12^2 = 144 \rightarrow 12^2 = 144 \rightarrow \log_{12} 144 = 2$	3 $(3)^{-4} = \frac{1}{81} \rightarrow (3)^{-4} = \frac{1}{81} \rightarrow \log_3 \left(\frac{1}{81}\right) = -4$
2 $36^{\frac{1}{2}} = 6 \rightarrow 36^{\frac{1}{2}} = 6 \rightarrow \log_{36} 6 = \frac{1}{2}$	4 $34^0 = 1 \rightarrow 34^0 = 1 \rightarrow \log_{34} 1 = 0$

$$10^y = x \Leftrightarrow y = \text{Log} x, x > 0$$

$$e^y = x \Leftrightarrow \text{Lne}^y = \text{Lnx} \Leftrightarrow y \text{Ln} e = \text{Lnx} \Leftrightarrow y = \text{Lnx}, x > 0$$

$$\text{Ln}(x y) = \text{Lnx} + \text{Lny}$$

قوانين اللوغاريتمات

$$\text{Ln} \frac{x}{y} = \text{Lnx} - \text{Lny}$$

$$\text{Ln}(x)^a = a \text{Ln}(x)$$

$$1 \log_5 x^7 y^2 = \log_5 x^7 + \log_5 y^2 = 7 \log_5 x + 2 \log_5 y$$

$$2 \log_7 \frac{(5x+3)^2}{4} = \log_7 (5x+3)^2 - \log_7 4 = 2 \log_7 (5x+3) - \log_7 4$$

$$3 \log_4 \frac{xy^3}{z^2} = \log_4 xy^3 - \log_4 z^2 = \log_4 x + 3 \log_4 y - 2 \log_4 z$$



$$\text{Log}_b a = \frac{\text{Log}(a)}{\text{Log}(b)} = \frac{\text{Ln}(a)}{\text{Ln}(b)} = \frac{\text{Log}_c(a)}{\text{Log}_c(b)}$$



(5) مشتقة اقتران الجيب، ومشتقة اقتران جيب التمام :

$$f(x) = \sin x \Rightarrow f'(x) = \cos x \quad \text{or} \quad \frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$$

$$\sin^2 x = (\sin x)^2$$

$$f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\sin x \quad \text{or} \quad (\cos x)' = -\sin x$$

$$\sin^2 x \neq (\sin x)^2$$

1) $f(x) = \cos x + 5 \sin x + 4 \Rightarrow f'(x) = -\sin x + 5 \cos x$

2) $f(x) = 6 \cos x + 5x + 4\pi \Rightarrow f'(x) = -6 \sin x + 5$

$$f(x) = 4 \cos x \Rightarrow f'(x) = 4 - \sin x \dots (\text{خطأ})$$

$$f(x) = 4 \cos x \Rightarrow f'(x) = 4(-\sin x) = -4 \sin x$$

أتحقق من فهمي أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

a) $y = \frac{\sin x}{2} + 3 \cos x$

b) $f(x) = x^2 + \cos x + \sin \frac{\pi}{2}$

a	$y = \frac{1}{2} \sin x + 3 \cos x$	$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \cos x - 3 \sin x$	أتحقق من فهمي صفحة 18
b	$f'(x) = 2x - \sin x$		

أتحقق من فهمي أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي: 22

3) $f(x) = 2 \sin x - e^x$

4) $f(x) = \frac{\ln x}{4} - \pi \cos x$

5) $f(x) = \ln \left(\frac{1}{x^3} \right) + x^4$

6) $f(x) = e^{x+1} + 1$

7) $f(x) = e^x + x^e$

8) $f(x) = \ln \left(\frac{10}{x^n} \right)$

13) إذا كان: $f(x) = \ln(kx)$ ، حيث k عدد حقيقي موجب، و $x > 0$ ، فأبين أن $f'(x) = \frac{1}{x}$



تحدّد: إذا كان الاقتران: $y = \log x$ ، فأجيب عن السؤالين الآتيين تباعاً:

29) أثبت أن $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \ln 10}$

30) مُعتمداً على النتيجة من السؤال السابق، أجد $\frac{dy}{dx}$ للاقتران: $y = \log ax^2$ ، حيث a عدد حقيقي موجب.

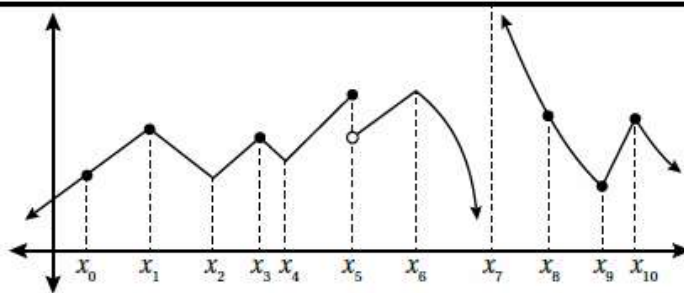
3	$f'(x) = 2 \cos x - e^x$
4	$f'(x) = \frac{1}{4x} + \pi \sin x$

7	$f'(x) = e^x + ex^{e-1}$
8	$f(x) = \ln\left(\frac{10}{x^n}\right)$ $= \ln 10 - \ln x^n = \ln 10 - n \ln x$ $f'(x) = 0 - n\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{n}{x}$

5	$f(x) = \ln\left(\frac{1}{x^3}\right) + x^4$ $= \ln 1 - \ln x^3 + x^4$ $= -3 \ln x + x^4$ $f'(x) = -\frac{3}{x} + 4x^3$
6	$f(x) = e^{x+1} + 1 = e \times e^x + 1$ $f'(x) = e \times e^x = e^{x+1}$

13	$f(x) = \ln kx = \ln k + \ln x$ $f'(x) = 0 + \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$
----	--

29	$y = \log x = \log_{10} x = \frac{\ln x}{\ln 10} = \frac{1}{\ln 10} \ln x$ $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\ln 10} \times \frac{1}{x} = \frac{1}{x \ln 10}$
30	$y = \log ax^2 = \log a + 2 \log x$ $\frac{dy}{dx} = 0 + 2 \times \frac{1}{x \ln 10} = \frac{2}{x \ln 10}$



① يُبيّن الشكل المجاور منحنى الاقتران $f(x)$. أّحدّد قيم x للنقاط التي يكون عندها الاقتران $f(x)$ غير قابل للاشتقاق، مُبرِّراً إجابتني.

② $f(x) = 9e^x + \frac{1}{3\sqrt{x}}$ ③ $f(x) = 2e^x + \frac{1}{x^2}$ ④ $f(x) = \frac{\pi}{2} \sin x - \cos x$: أّجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1	f غير قابل للاشتقاق عند القيم $x_1, x_2, x_3, x_4, x_6, x_9, x_{10}$ بسبب وجود زاوية لمنحنى الاقتران عند كل منها رغم أنه متصل، و f غير قابل للاشتقاق عند القيم x_5, x_7 وذلك لأنه غير متصل عندهما؛
2	$f'(x) = 9e^x - \frac{1}{6}x^{-\frac{3}{2}} = 9e^x - \frac{1}{6\sqrt{x^3}}$
3	$f'(x) = 2e^x - 2x^{-3} = 2e^x - \frac{2}{x^3}$
4	$f'(x) = \frac{\pi}{2} \cos x + \sin x$

قواعد الاشتقاق (1)

ورقة عمل (1)

ملخص الجزء الأول من الدرس ثم اختبار

	$f(x)$	$f'(x)$
1)	ax^n	anx^{n-1}
2)	$g(x) \pm h(x)$	$g'(x) \pm h'(x)$
3)	$e^{x \pm a}$	$e^{x \pm a}$
4)	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
5)	$\sin x$	$\cos x$
6)	$\cos x$	$-\sin x$

البيسط - المقام
المقام



$$\frac{a}{b} - 1 = \frac{a-b}{b}$$

$$\sqrt[3]{x^5} = x^{\frac{5}{3}}$$

$$\frac{3}{x^4} = 3x^{-4}$$

توزيع البسيط على المقام

$$\frac{x \pm y}{z} = \frac{x}{z} \pm \frac{y}{z}$$

$$\frac{a}{b \pm c} \neq \frac{a}{b} \pm \frac{a}{c}$$

تحذير

$$\frac{\frac{9}{2}}{7} = \frac{9}{2} \div 7 = \frac{9}{2} \times \frac{1}{7} = \frac{9}{2 \times 7}$$

$$\frac{3}{\frac{4}{5}} = 3 \div \frac{4}{5} = 3 \times \frac{5}{4} = \frac{3 \times 5}{4}$$

$$\ln e = 1$$

$$\ln 1 = 0$$

$$e^0 = 1$$

$$e^{x+3} = e^x \times e^3$$

$$\ln 0: \text{غير معرف}$$

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y$$

$$\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$$

$$\ln(x)^a = a \ln(x)$$

أخطاء شائعة



$$f(x) = 5x^3 \Rightarrow f'(x) = (5)(3x^2) = 15x^2 \dots \text{صح}$$

$$f(x) = 5 + x^3 \Rightarrow f'(x) = 0 + 3x^2 = 3x^2 \dots \text{صح}$$

$$f(x) = 5x^3 \Rightarrow f'(x) = (0)(3x^2) = 0 \dots (\text{خطأ})$$

$$f(x) = 4 \cos x \Rightarrow f'(x) = 4 - \sin x \dots (\text{خطأ})$$

$$f(x) = 4 \cos x \Rightarrow f'(x) = 4(-\sin x) = -4 \sin x (\text{صح})$$

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x}{1} \dots (\text{خطأ})$$

$$f(x) = \frac{(x+3)(x-3)}{x-3} = x+3 \Rightarrow f'(x) = 1 \dots (\text{صح})$$



$$f(x) = \pi^3 \Rightarrow f'(x) = 3\pi^2 \dots (\text{خطأ})$$

$$f'(x) = 0 \dots (\text{صح})$$

$$f(x) = x^2(x^3 - 5x)$$

$$\Rightarrow f'(x) = 2x(3x^2 - 5) \dots (\text{خطأ})$$

$$f(x) = x^2(x^3 - 5x) = x^5 - 5x^3$$

$$\Rightarrow f'(x) = 5x^4 - 15x^2 \dots (\text{صح})$$

اختبر نفسك (1)

1) $f(x) = 6\sqrt[3]{x^2} \Rightarrow f'(-8) =$ a) 0 b) -4 c) 2 d) -2

2) $f(x) = \frac{16}{x} \Rightarrow f'(4) =$ a) 256 b) -16 c) 8 d) -1

3) $y = \frac{x^4 - 2x^2}{x^2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} =$ a) $\frac{4x^3 - 4x}{2x}$ b) $x^2 - 2$
c) 2x d) $6x^5 - 8x$

4) $f(x) = x^4 + e^{x+1} - 2x \Rightarrow f'(-1) =$ a) 0 b) 4 c) -5 d) 3

5) $f(x) = ax^3 - \ln 5x + ax$, $f'(-1) = 3 \Rightarrow a =$
a) $\frac{1}{2}$ b) 2 c) -2 d) -1

6) $f(x) = x - \cos x \Rightarrow f'(x) =$ a) $1 - \sin x$ b) $1 + \sin x$
c) $\sin x$ d) $-\sin x$

7) $f(x) = \sqrt{2x+9} + e^3 \Rightarrow f'(0) =$ a) $3+3e^2$ b) 3
c) $\frac{1}{3}$ d) $-\frac{1}{3}$

8) $f(x) = \ln 3x^4 \Rightarrow f'(x) =$ a) $\ln(12x^3)$ b) $\ln 3 + 4\ln x$
c) $\frac{12}{x^4}$ d) $\frac{4}{x}$

9) $f(x) = \ln(x e^x) \Rightarrow f'(1) =$ a) 2 b) -2 c) e d) $1+e$

10) $f(x) = \ln\left(\frac{x}{e^x}\right)^2 \Rightarrow f'(1) =$ a) $\frac{1}{e}$ b) 0 c) 2e d) 4

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d	d	c	c	a	b	c	d	a	b

Hasanat

Hasanat

اختبر نفسك (2)

1) $f(x) = 24\sqrt[3]{x} \Rightarrow f'(-8) = a) 1 \quad b) -2 \quad c) 2 \quad d) -48$

2) $f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(3) = a) 9 \quad b) -9 \quad c) \frac{1}{9} \quad d) -\frac{1}{9}$

3) $f(x) = 9x \Rightarrow f'(2) = a) 9 \quad b) 18 \quad c) 0 \quad d) 81$

4) $f(x) = 2e^{x+1} \Rightarrow f'(0) = a) 2e \quad b) e \quad c) 2e^3 \quad d) 1$

5) $f(x) = \ln x^6 \Rightarrow f'(2) = a) 3 \quad b) 2 \quad c) 6 \quad d) 0$

6) $f(x) = \ln(x^2 e^{3x}) \Rightarrow f'(x) =$

a) $\frac{2}{x} + 3e^{3x}$ b) $\frac{2}{x} + e^{2x}$ c) $2x + 3$ d) $\frac{2}{x} + 3$

7) $f(x) = \sin x + \sin \pi \Rightarrow f'(x) = a) \cos x \quad b) -\cos x$
c) $\cos x + \cos \pi$ d) $\cos x - 1$

8) $f(x) = \ln \frac{e^{2x}}{x^4} + 3x \Rightarrow f'(-1) =$

a) e^2 b) $e^2 + 3$ c) 1 d) 9

9) $f(x) = 4 \ln 2 + \sin \pi - \cos x + (3x + 2)^2 \Rightarrow f'(0) =$

a) 13 b) 11 c) 12 d) 4

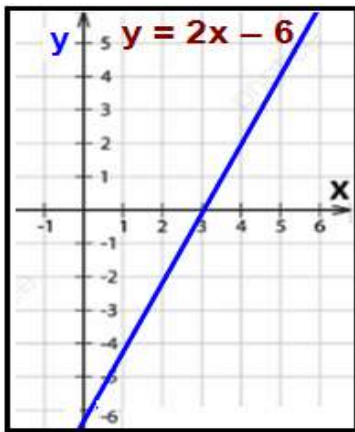
10) $f(x) = \sin x + \cos x \Rightarrow f'(x) = a) \cos x + \sin x \quad b) \cos x - \sin x$
c) $-\cos x - \sin x$ d) $-\cos x + \sin x$



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
c	d	a	a	a	c	a	d	c	b

(6) تطبيقات : معادلة المماس والعمودي عند نقطة ما

مراجعة المستقيمات في المستوى الديكارتي



صور معادلة المستقيم : $y = 2x - 6$ أو $2x - y - 6 = 0$

وهي تعني مجموعة النقاط التي تحقق هذه المعادلة :

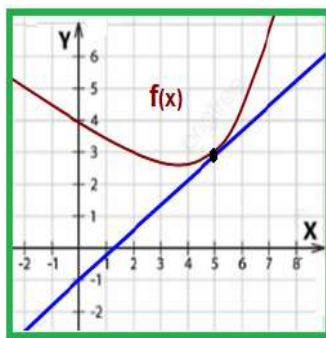
$$(0, -6), (1, -4)$$

$$(3, 0), (4, 2)$$

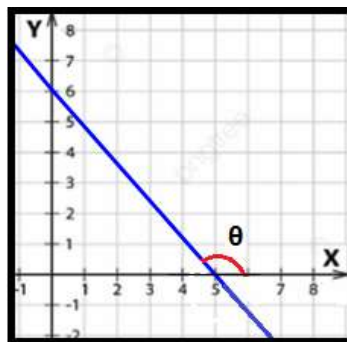
كتابة معادلة المستقيم يلزمنا معرفة ميله ، وهناك ثلاث طرق (على الأقل) لمعرفة الميل (m) :
من خلال فرق الصادات على فرق السينات

ظل الزاوية مع محور السينات الموجب

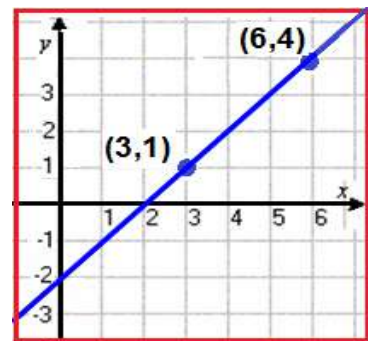
مشتقة المنحني (عند نقطة التماس) عندما يكون المستقيم مماسا له



$$m = f'(x_1) = f'(5)$$



$$m = \tan \theta$$



$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6 - 3}{4 - 1} = 1$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

معادلة المستقيم المار بالنقطة (x_1, y_1) وميله m

إذا توازي مستقيمان : فإن ميل الأول = ميل الثاني

$$y = 2x - 5 \Rightarrow y' = 2$$

$$4x + 8 - 2y = 0 \Rightarrow y = 2x + 8 \Rightarrow y' = 2$$

متوازيان

إذا تعامد مستقيمان : فإن حاصل ضرب ميليهما يساوي (-1)

أو ميل الأول = سالب مقلوب ميل الثاني

$$y = 3x - 1 \Rightarrow y' = 3 \Rightarrow m = 3$$

$$3y + x + 2 = 0$$

$$\Rightarrow y = -\frac{1}{3}x - \frac{2}{3} \Rightarrow y' = -\frac{1}{3} \Rightarrow m = -\frac{1}{3}$$

متعامدان



$$\text{معادلة المستقيم بصيغة الميل ونقطة}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1) , m = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_1}$$

ملاحظة :

معادلة أي مستقيم تكون على الصورة $(y - y_1) = m(x - x_1)$ ،

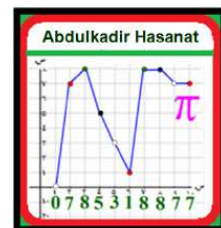
الجديد في معادلة المماس أن الميل (m) يساوي المشتقة الأولى عند نقطة التماس

مثال : إذا كان $f(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$ ، فجد معادلة المماس والعمودي على المماس عند النقطة $(e, -1)$

$$f(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right) = \ln 1 - \ln x = -\ln x \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x} \Rightarrow f'(e) = -\frac{1}{e}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - -1 = f'(e)(x - e) \Rightarrow y + 1 = -\frac{1}{e}(x - e) \Rightarrow y + 1 = e(x - e)$$



باختصار : هناك عدة حالات لمعادلة المماس:

(1) نقطة التماس معلومة أو الإحداثي (x) لها على الأقل ، عندها نستخدم القاعدة $y - y_1 = f'(x_1)(x - x_1)$

حيث المشتقة الأولى عنده تساوي ميل المماس ، كما في الأمثلة : 1 ، 2 ، 3 الآتية

(2) عدم إعطاء نقطة التماس وتقديم معلومة عن المماس : (المماس يوازي المستقيم ...) أو (يعامد المستقيم ...) عندها نجد مشتقة الاقتران ونساويها بميل المستقيم في حالة التوازي أو ساب مقلوبه في حالة التعامد كما في الأمثلة : 4 ، 5 ، 6 ، 7 الآتية

(3) عدم إعطاء نقطة التماس وتقديم معلومة عن المماس : (المماس يقطع المستقيم ...) أو (يمس المنحنى ...) كما في المثالين : 8 ، 9

$$f(x), g(x) \text{ متقاطعان عند } x_1 \Leftrightarrow f(x_1) = g(x_1)$$

$$f(x), g(x) \text{ متماسان عند } x_1 \Leftrightarrow f(x_1) = g(x_1) \oplus f'(x_1) = g'(x_1)$$

(4) طلب إيجاد المقطع السيني (x) أو الصادي (y) للمماس أو العمودي عليه ، كما في مثال 10

ملاحظة لإيجاد المقطع (x) نضع بدلاً من (y) صفر ولإيجاد المقطع (y) نضع بدلاً من (x) صفر

(5) طلب إيجاد مساحة مضلع (أو مثلث) ، أحد أضلاعه مماس أو عمودي على المماس كما في مثال 11

(7) طلب إيجاد قيم (x) التي عندها مماس أفقي ، في هذه الحالة نشتق ونساوي بالصفر ، مثال 12 أو طلب إيجاد قيم (x) التي عندها ميل المماس يساوي قيمة معينة ، عندها نشتق ونساوي بتلك القيمة

$$\text{المماس يوازي المحور } x \Leftrightarrow f'(x) = 0$$

(6) نقطة التماس غير معلومة وإعطاء نقطة خارجية : نجد ميل المماس بطريقتين ونساوي بينهما لإيجاد قيمة (x) أو (y) (المشتقة و فرق الصادات على السينات)

بفرض أن نقطة التماس هي (x_1, y_1) لاحظ مثال (13) $f'(x_1) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y - y_1}{x - x_1}$

مثال (1) إذا كان $y = \frac{1}{x-1}, x \neq 1$ ، فجد معادلة المماس والعمودي على المماس عند $(x=2)$

$$y = \frac{1}{x-1} \Rightarrow y_1 = \frac{1}{2-1} = 1$$

$$y = \frac{1}{x-1} = (x-1)^{-1} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -(x-1)^{-2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} \Big|_{x=2} = -1$$

$$\Rightarrow \boxed{y-1 = -1(x-2)} , \boxed{y-1 = (x-2)}$$

مثال (2) إذا كان $f(x) = 2e^x + \sin x$ ، فجد معادلة المماس والعمودي على المماس عند $(x=0)$

$$f(x) = 2e^x + \sin x \Rightarrow y_1 = f(0) = 2$$

$$f'(x) = 2e^x + \cos x \Rightarrow m = f'(0) = 2 + 1 = 3$$

$$\Rightarrow \boxed{y-2 = 3(x-0)} \Rightarrow \boxed{y = 3x + 2}$$

مثال (3) إذا كان $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x$ ، فجد معادلة المماس والعمودي على المماس عند $(x = \frac{2\pi}{3})$

$$f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x \Rightarrow y_1 = f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3}{4}$$

$$f'(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x \Rightarrow m = f'\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{y - \frac{3}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \left(x - \frac{2\pi}{3}\right)} , \boxed{y - \frac{3}{4} = \frac{4}{\sqrt{3}} \left(x - \frac{2\pi}{3}\right)}$$

مثال (4) جد النقاط الواقعة على منحنى $y = x^3 + x - 2$ والتي يكون المماس عندها موازيا للمستقيم $y = 13x + 7$

$$f(x) = x^3 + x - 2 \Rightarrow m = f'(x) = 3x^2 + 1$$

$$y = 13x + 7 \Rightarrow m = y' = 13 \Rightarrow 3x^2 + 1 = 13 \Rightarrow x = \pm 2 \Rightarrow (2, 8), (-2, -12)$$

مثال (5) جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران $f(x) = x^2 + x$ عندما يكون المماس موازيا للمستقيم $y = 5x + 7$

$$f(x) = x^2 + x \Rightarrow m = f'(x) = 2x + 1$$

$$y = 5x + 7 \Rightarrow m = y' = 5$$

$$\Rightarrow 2x + 1 = 5 \Rightarrow x_1 = 2 \Rightarrow y_1 = (2)^2 + 2 = 6$$

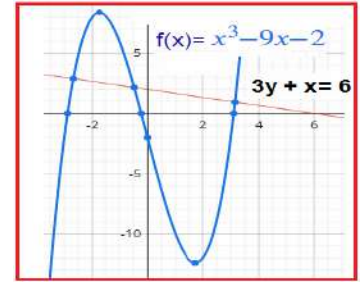
$$\Rightarrow \boxed{y - 6 = 5(x - 2) \Rightarrow y = 5x - 4}$$

مثال (6) أوجد النقاط الواقعة على منحنى $f(x) = x^3 - 3x - 2$ والتي يكون المماس عندها عمودياً على المستقيم الذي معادلته $3y + x = 6$

$$f(x) = x^3 - 9x - 2 \Rightarrow m = f'(x) = 3x^2 - 9$$

$$3y + x = 6 \Rightarrow y = -\frac{1}{3}x + 6 \Rightarrow y' = -\frac{1}{3} \Rightarrow m = 3$$

$$3x^2 - 9 = 3 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2 \Rightarrow (2, -12), (-2, 8)$$



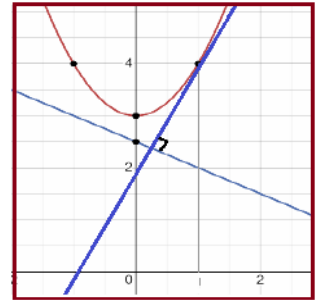
مثال (7) جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران $f(x) = x^2 + 3$ عندما يكون المماس عمودياً على المستقيم $2y + x = 5$

$$f(x) = x^2 + 3 \Rightarrow m = f'(x) = 2x$$

$$2y + x = 5 \Rightarrow y' = -\frac{1}{2} \Rightarrow m = 2$$

$$\Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x_1 = 1 \Rightarrow y_1 = (1)^2 + 3 = 4$$

$$\Rightarrow y - 4 = 2(x - 1) \Rightarrow y = 2x + 2$$



مثال (8) جد معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران $f(x) = x^2 + 2x - 3$ عند نقطة تقاطعه مع المستقيم $y = x - 1$

$$\begin{aligned} f(x) = y &\Rightarrow x^2 + 2x - 3 = x - 1 \\ \Rightarrow x^2 + x - 2 &= 0 \Rightarrow (x+2)(x-1) = 0 \\ \Rightarrow x = -2, & \quad x = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x), g(x) \\ x = a \text{ عند } \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} f(a) &= g(a) \\ \text{فقط} \end{aligned}$$

$$f'(a) \neq g'(a)$$

$$\begin{aligned} x = -2 &\Rightarrow y = -3 \Rightarrow (-2, -3) \\ f'(x) = 2x + 2 &\Rightarrow f'(-2) = -2 \Rightarrow m = \frac{1}{2} \\ \Rightarrow y - (-3) &= \frac{1}{2}(x - (-2)) \\ x = 1 &\Rightarrow y = 0 \Rightarrow (1, 0) \\ f'(1) = 4 &\Rightarrow m = \frac{-1}{2} \\ \Rightarrow y - 0 &= \frac{-1}{4}(x - 1) \end{aligned}$$



مثال (9) إذا كان المستقيم المار بالنقطتين $(2, 6), (0, -2)$, يمس منحنى $f(x) = ax^2 + 2x - 1$

فجد قيمة (قيم) الثابت (a)

$$\begin{aligned} f(x), g(x) \\ x = a \text{ عند } \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} f(a) &= g(a) \\ f'(a) &= g'(a) \end{aligned}$$

$$f(x) = ax^2 + 2x - 1 \Rightarrow f'(x) = 2ax + 2$$

$$(2, 6), (0, -2) \Rightarrow y - 6 = \frac{6+2}{2-0}(x - 2) \Rightarrow y = 4x - 2 \Rightarrow y' = 4$$

$$\Rightarrow f = y \Rightarrow ax^2 + 2x - 1 = 4x - 2 \Rightarrow ax^2 - 2x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow m = y' \Rightarrow 2ax + 2 = 4 \Rightarrow ax = 1$$

$$\Rightarrow axx - 2x + 1 = 0 \Rightarrow x - 2x = -1 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow a = 1$$

Hasanat
Hasanat

مثال (10) جد المقطع (x) للمماس لمنحنى الاقتران $f(x) = 2Lnx + 6$ عند النقطة (6, 1)

$$f(x) = 2Lnx + 6$$

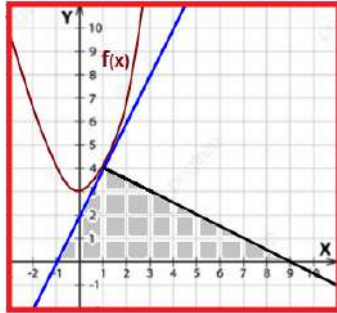
$$f'(x) = \frac{2}{x} \Rightarrow m = f'(1) = 2 \Rightarrow \boxed{y - 6 = 2(x - 1)}$$

$$y = 0 \Rightarrow -6 = 2x - 2 \Rightarrow x = -2$$

ملاحظة:

لإيجاد المقطع (x) نضع بدلاً من (y) صفر

ولإيجاد المقطع (y) نضع بدلاً من (x) صفر



مثال (11) جد مساحة المثلث المكون من المماس والعمودي على المماس والمحور (x) لمنحنى الاقتران $f(x) = x^2 + 3$ عند النقطة (4, 1)

$$f(x) = x^2 + 3 \Rightarrow f'(x) = 2x \Rightarrow f'(1) = 2$$

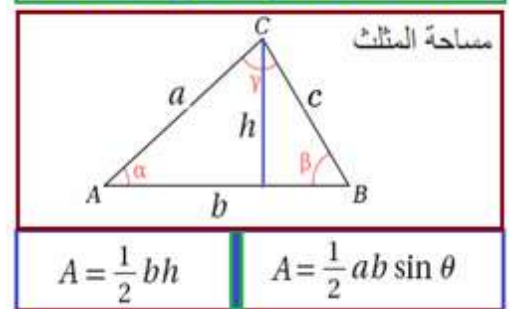
$$\Rightarrow \boxed{y - 4 = 2(x - 1)} \quad , \quad \boxed{y - 4 = -\frac{1}{2}(x - 1)}$$

$$y = 0 \Rightarrow -4 = 2x - 2 \quad , \quad y = 0 \Rightarrow -4 = -\frac{1}{2}x + 2$$

$$\Rightarrow x = -1 \quad \Rightarrow x = 9$$

$$\Rightarrow \boxed{A = \frac{1}{2}(9 - (-1))(4) = 20}$$

مساحة المثلث = نصف حاصل ضرب القاعدة في الارتفاع
أو نصف حاصل ضرب أي ضلعين في جيب الزاوية بينهما



مثال (12) إذا كان $f(x) = e^{x-3} - x$ ، فجد قيم (x) التي يكون للاقتران عندها مماس أفقي

$$\boxed{f'(x) = 0 \Leftrightarrow \text{المماس يوازي المحور } x}$$

$$f'(x) = e^{x-3} - 1 = 0$$

$$\Rightarrow e^{x-3} = 1 = e^0 \Rightarrow x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$$

مثال (13) جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران $f(x) = x^2 + 6$ عند النقطة (1, -3) ، $x < 0$

لاحظ أن النقطة المعطاة لا تحقق المعادلة ، لذلك فهي ليست نقطة تماس (أي خارجية)

لذلك نفرض أن نقطة التماس هي (x_1, y_1) ثم نجد الميل بطريقتين (المشتقة و فرق الصادات على السينات)

ونساوي بينهما ثم نحل المعادلة الناتجة

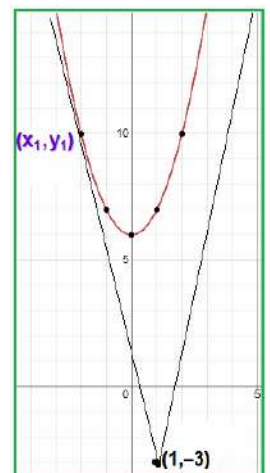
$$f(x) = x^2 + 6 \Rightarrow m = f'(x) = 2x$$

$$(x_1, y_1), (1, -3) \Rightarrow m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 + 3}{x_1 - 1} = 2x \Rightarrow 2x^2 - 2x = y + 3$$

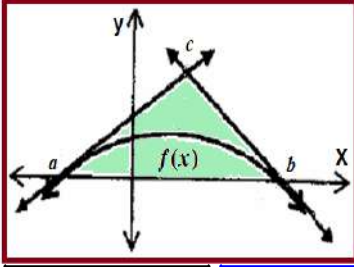
$$\Rightarrow 2x^2 - 2x = x^2 + 6 + 3 \Rightarrow x^2 - 2x - 12 = 0 \Rightarrow \boxed{x = -2}, x = 6$$

$$\Rightarrow x = -2 \Rightarrow y = (-2)^2 + 6 = 10, \Rightarrow m = 2(-2) = -4$$

$$\Rightarrow \boxed{y - 10 = -4(x + 2) \Rightarrow y = -4x + 6}$$



تمارين



- (1) رُسم مماسان من النقطتين a و b ، اللتان تمثلان نقطتي تقاطع منحنى الاقتران $f(x) = -x^2 + 2x + 8$ مع محور السينات (x) ، فتقاطع المماسان في (c) (كما في الشكل المجاور) ، جد مساحة المثلث abc

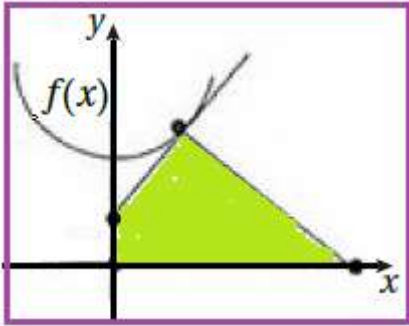
ش 2019 الجواب: 54

ص 2017

- (2) جد النقط التي يكون عندها المماس لمنحنى الاقتران $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$ ، $x \neq -1$

$(-3, -\frac{7}{2})$ ، $(1, \frac{3}{2})$

عموديا على المستقيم $3y = 5 - 4x$



- (3) جد مساحة الشكل الرباعي الناتج عن تقاطع المماس والعمودي على المماس لمنحنى $f(x) = x^2 + 4$ عند النقطة (5, 1) والمحورين x و y

ص 2018

الجواب: 29

ش 2009

- (4) إذا كان $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ، $f(x) = 2x - \sin 4x$ ، فجد جميع قيم x

التي يكون عندها العمودي على المماس موازياً للمحور y ، ثم جد معادلة أحد هذه المماسات

$$x = \frac{\pi}{12} , \frac{5\pi}{12} , y = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

الحل: العمودي يوازي y إذا المماس يوازي x



أتحقق من فهمي إذا كان الاقتران: $f(x) = \ln \sqrt{x}$ ، فأستعمل المشتقة لإيجاد كل ممّا يأتي:

- (a) معادلة المماس عند النقطة $(e, \frac{1}{2})$. (b) معادلة العمودي على المماس عند النقطة $(e, \frac{1}{2})$.

a	$f'(x) = \frac{1}{2x} \rightarrow f'(e) = \frac{1}{2e} \rightarrow y - \frac{1}{2} = \frac{1}{2e}(x - e)$	أتحقق من فهمي صفحة 19
b	بما أن ميل المماس عند النقطة $(e, \frac{1}{2})$ هو $\frac{1}{2e}$ إذن ميل العمودي على المماس عندها هو $-2e$ $\rightarrow y - \frac{1}{2} = -2e(x - e)$	

أَتَدَرَّبُ وَأُحَلِّ المسائل

إذا كان: $f(x) = \sin x + \frac{1}{2}e^x$ ، فأجيب عن السؤالين الآتيين تباعاً:

9 أجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران f عند النقطة $(\pi, \frac{1}{2}e^\pi)$.

10 أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران f عند النقطة $(\pi, \frac{1}{2}e^\pi)$.

11 أجد قيمة x التي يكون عندها المماس أفقياً لمنحنى الاقتران: $f(x) = e^x - 2x$.

12 اختيار من مُتعدد: أيُّ الآتية تُمثِّل معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران: $f(x) = \sin x + \cos x$

عندما $x = \pi$ ؟ a) $y = -x + \pi - 1$ b) $y = x - \pi - 1$ c) $y = x - \pi + 1$ d) $y = x + \pi + 1$

9 ميل المماس عند النقطة $(\pi, \frac{1}{2}e^\pi)$: $f'(x) = \cos x + \frac{1}{2}e^x \Rightarrow f'(\pi) = \cos \pi + \frac{1}{2}e^\pi = -1 + \frac{1}{2}e^\pi$
معادلة المماس عند النقطة $(\pi, \frac{1}{2}e^\pi)$: $y - \frac{1}{2}e^\pi = (-1 + \frac{1}{2}e^\pi)(x - \pi)$
 $y = (1 + \frac{1}{2}e^\pi)x - \pi - \frac{1}{2}e^\pi$

10 ميل العمودي على المماس هو $\frac{-1}{-1 + \frac{1}{2}e^\pi} = \frac{-2}{-2 + e^\pi} = \frac{2}{2 - e^\pi}$
معادلة العمودي على المماس هي: $y - \frac{1}{2}e^\pi = \frac{2}{2 - e^\pi}(x - \pi) \Rightarrow y = \frac{2}{2 - e^\pi}x - \frac{2\pi}{2 - e^\pi} + \frac{1}{2}e^\pi$

11 $f(x) = e^x - 2x \Rightarrow f'(x) = e^x - 2$
 $f'(x) = 0 \Rightarrow e^x = 2 \Rightarrow x = \ln 2 \approx 0.69$

12 $f(x) = \sin x + \cos x \Rightarrow f'(x) = \cos x - \sin x$
عندما $x = \pi$ ، فإن: $y = f(\pi) = \sin \pi + \cos \pi = -1$
ميل المماس عند $(\pi, -1)$ هو: $f'(\pi) = \cos \pi - \sin \pi = -1$
بما أن ميل المماس هو -1 إذن ميل العمودي على المماس هو 1
معادلة العمودي على المماس: $y + 1 = 1(x - \pi) \Rightarrow y = x - \pi - 1$ (b)

إذا كان الاقتران: $f(x) = \ln x$ ، فأجيب عن السؤالين الآتيين تباعاً:

14 أثبت أن مماس منحنى الاقتران عند النقطة $(e, 1)$ يمرُّ بنقطة الأصل.

15 أثبت أن المقطع x للعمودي على المماس لمنحنى الاقتران عند النقطة $(e, 1)$ هو $e + \frac{1}{e}$.

14 ميل المماس عند النقطة $(e, 1)$ هو: $f'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(e) = \frac{1}{e}$
معادلة المماس هي: $y - 1 = \frac{1}{e}(x - e) \Rightarrow y = \frac{1}{e}x$
وهو مستقيم يمر بنقطة الأصل لأن النقطة $(0, 0)$ تحقق معادلته.

15 بما أن ميل المماس هو $\frac{1}{e}$ ، فإن ميل العمودي على المماس هو $-e$
معادلة العمودي: $y - 1 = -e(x - e) \Rightarrow y = -ex + e^2 + 1$
لإيجاد المقطع x لهذا المستقيم نضع $y = 0$ في معادلته $0 = -ex + e^2 + 1$
 $ex = e^2 + 1 \Rightarrow x = \frac{e^2 + 1}{e} = e + \frac{1}{e}$



25 تبرير: إذا كان الاقتران: $y = e^x - ax$ ، حيث a عدد حقيقي، فأجد معادلة المماس

عند نقطة تقاطع الاقتران مع المحور y ، مُبرَّرًا إيجابيًا.

26 تحدّد: أثبت عدم وجود مماس ميله 2 للاقتران: $y = 2e^x + 3x + 5x^3$.

تبرير: إذا كان الاقتران: $y = ke^x$ ، حيث: $k > 0$ ، وكان منحناه يقطع المحور y عند النقطة P ، فأجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

27 أجد نقطة تقاطع مماس منحنى الاقتران عند النقطة P مع المحور x .

28 إذا كان العمودي على المماس عند النقطة P يقطع المحور x عند النقطة $(100, 0)$ ، فأجد قيمة k .

25 نقطة تقاطع منحنى الاقتران مع محور y هي: $(0, 1)$ $y = e^x - ax$

$$x = 0 \Rightarrow y = e^0 - a(0) = 1$$

معادلة $\frac{dy}{dx} = e^x - a \Rightarrow \frac{dy}{dx}\bigg|_{x=0} = e^0 - a = 1 - a$

معادلة المماس هي: $y - 1 = (1 - a)(x - 0) \rightarrow y = (1 - a)x + 1$

26 ميل مماس المنحنى عند أي نقطة عليه هو $y' = 2e^x + 3 + 15x^2$

لكل x فإن $2e^x > 0$ ولكل x فإن $15x^2 \geq 0$ بالجمع نجد أنه لكل x فإن $2e^x + 15x^2 > 0$

بإضافة 3 للطرفين: لكل x فإن $2e^x + 15x^2 + 3 > 3$ أي أن $y' > 3$

إذن لا يمكن أن تكون قيمة y' تساوي 2 لأي قيمة حقيقية للمتغير x .

27 الإحداثي x لنقطة تقاطع المنحنى $y = ke^x$ مع المحور y هو 0 وبالتعويض في معادلة الاقتران

نجد أن $y = ke^0 = k$ أي أن إحداثي P هما $(0, k)$ $\frac{dy}{dx} = ke^x \Rightarrow \frac{dy}{dx}\bigg|_{x=0} = ke^0 = k$

معادلة المماس هي: $y - k = k(x - 0) \Rightarrow y = kx + k$

ولإيجاد نقطة تقاطعه مع المحور x نعوض $y = 0$ $0 = kx + k \Rightarrow x = -1$

إذن، نقطة تقاطع المماس عند P مع المحور x هي: $(-1, 0)$

28 ميل العمودي على المماس عند النقطة P هو $-\frac{1}{k}$

معادلة العمودي على المماس هي: $y - k = -\frac{1}{k}(x - 0) \Rightarrow y = -\frac{1}{k}x + k$

وبتعويض إحداثي نقطة التقاطع نجد أن: $0 = -\frac{1}{k}(100) + k \Rightarrow k^2 = 100 \Rightarrow k = \pm 10$

ولأن $k > 0$ ، فإن $k = 10$

5 أجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران: $f(x) = 2e^x + x$ عندما $x = 2$.

6 أثبت عدم وجود مماس أفقي لمنحنى الاقتران: $f(x) = 3x + \sin x + 2$.

5 $f(x) = 2e^x + x$, $x = 2$

$$f(2) = 2e^2 + 2$$

$$f'(x) = 2e^x + 1 \Rightarrow f'(2) = 2e^2 + 1$$

$$y - 2e^2 - 2 = (2e^2 + 1)(x - 2)$$

$$y = (2e^2 + 1)x - 2e^2$$

6 $f'(x) = 3 + \cos x$

عند المماس الأفقي يكون $f'(x) = 0$

$$3 + \cos x = 0 \Rightarrow \cos x = -3$$

وهذه المعادلة ليس لها حل لأن $-1 \leq \cos x \leq 1$
إذن، لا توجد مماسات أفقية لمنحنى f .

إذا كان: $f(x) = \ln x^2$ ، حيث: $x > 0$ ، فأجيب عن السؤالين الآتيين تباعاً:

9 أجد معادلة مماس منحنى الاقتران عندما $x = e^2$.

10 أجد الإحداثي x للنقطة التي يكون المماس عندها موازياً للمستقيم $6x - 2y + 5 = 0$

9 $f(x) = \ln x^2 = 2 \ln x$, $x = e^2$

$$f(e^2) = 2 \ln e^2 = 4 \Rightarrow (e^2, 4) \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{x} \Rightarrow f'(e^2) = \frac{2}{e^2}$$

$$y - 4 = \frac{2}{e^2}(x - e^2) \rightarrow y = \frac{2}{e^2}x + 2$$

10 ميل المستقيم $6x - 2y + 5 = 0$ يساوي 3
 $f'(x) = \frac{2}{x} = 3 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$

إذا كان: $f(x) = 2 \sin x - 4 \cos x$ ، فأجيب عن السؤالين الآتيين تباعاً:

11 أجد ميل المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ عندما $x = 0$.

12 أجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ عندما $x = \frac{\pi}{2}$.

11 $f'(x) = 2 \cos x + 4 \sin x$
 $f'(0) = 2 \cos 0 + 4 \sin 0 = 2$

نجد الإحداثي y عندما $x = \frac{\pi}{2}$
 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \sin \frac{\pi}{2} - 4 \cos \frac{\pi}{2} = 2$

12 $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \cos \frac{\pi}{2} + 4 \sin \frac{\pi}{2} = 4$ ميل المماس:

معادلة المماس: $y - 2 = 4\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow y = 4x - 2\pi + 2$

جد معادلة المماس والعمودي على المماس لكل اقتران فيما يأتي عند قيمة (x) المبينة إزاءه : (الأسئلة من 1 - 3)

1) $f(x) = e^{x+2} + x$, $x = -2$

2) $f(x) = \ln(3x)$, $x = 1$

3) $f(x) = x + \cos x$, $x = \pi$

4) أوجد معادلة المماس والعمودي عليه لمنحنى $f(x) = x^3 - 5x$ عند نقطة (نقاط) تقاطعه مع المستقيم $y = 4x$

5) أوجد النقاط الواقعة على منحنى $y = x^2 - 7x + 3$ ، والتي يكون المماس عندها :
(a) موازيًا للمستقيم $5x + y - 3 = 0$ (b) عموديًا على المستقيم $2x + 4y = 1$

6) أوجد قيمتي a ، b ، إذا كان منحنى $y = ax^3 + bx^2$ يمر بالمستقيم $3x + y - 1 = 0$ عند $(1, -2)$

7) أوجد النقاط الواقعة على منحنى $y = x^2 - 4x + 3$ والتي يكون المماس عندها موازيًا للمحور x .

8) جد مساحة المثلث المكون من المماس المرسوم لمنحنى $y = \sqrt{x}$, $x > 0$ عند النقطة $(4, 2)$ والمحور (x) والمستقيم $x = 4$ (الجواب : 8)

9) إذا كان $f(x) = \ln x^4$ ، فجد قيم (x) التي يكون المماس عندها موازيًا للمستقيم $2x + 3y = 6$

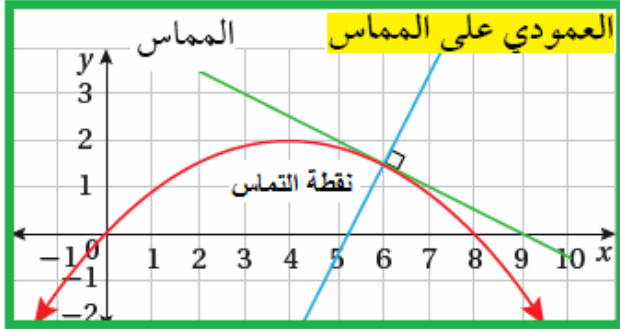
10) إذا كان $f(x) = e^{2x+1} - 2x$ ، فجد قيم (x) التي يكون للاقتران عندها مماس أفقي

تطبيقات هندسية

ورقة عمل (2)

ملخص الجزء الثاني من الدرس ثم اختبار

$$y - y_1 = m(x - x_1) , m = f'(x_1) \quad (x_1, y_1) \text{ معادلة المستقيم المار بالنقطة}$$



ملاحظة : معادلة أي مستقيم تكون على الصورة

$$(y - y_1) = m(x - x_1)$$

الجديد في معادلة المماس أن الميل (m) يساوي

المشتقة الأولى عند نقطة التماس

$$y = 2x - 5 \Rightarrow y' = 2$$

$$4x + 8 - 2y = 0 \Rightarrow y = 2x + 8 \Rightarrow y' = 2$$

إذا توازي مستقيمان : فإن ميل الأول = ميل الثاني متوازيان

$$y = 3x - 1 \Rightarrow y' = 3 \Rightarrow m = 3$$

$$3y + x + 2 = 0$$

إذا تعامد مستقيمان : فإن حاصل ضرب ميليهما يساوي (-1)

أو ميل الأول = سالب مقلوب ميل الثاني متعامدان

$$\Rightarrow y = -\frac{1}{3}x - \frac{2}{3} \Rightarrow y' = -\frac{1}{3} \Rightarrow m = -\frac{1}{3}$$

هناك عدة محاور للأسئلة ، منها :

(1) طلب إيجاد قيم (x) التي عندها مماس أفقي ، في هذه الحالة نشتق ونساوي بالصفر لإيجاد هذه القيم كما في السؤال (11) من كتاب الطالب والسؤال (6) من كتاب التمارين

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \text{المماس يوازي المحور x}$$

(2) طلب إيجاد قيم (x) التي عندها ميل المماس يساوي (أو لا يساوي) قيمة معينة ، في هذه الحالة: نساوي المشتقة بتلك القيمة ونحل المعادلة الناتجة لإيجاد هذه القيم ، كما في السؤال (26) من كتاب الطالب أو طلب إيجاد الميل عند إحدى قيم (x) : سؤال (11) من كتاب التمارين

ميل المماس يساوي المشتقة الأولى

(3) نقطة التماس معلومة أو الإحداثي (x) لها على الأقل ، عندها نستخدم القاعدة $y - y_1 = f'(x_1)(x - x_1)$

كما في الأسئلة (9 ، 10 ، 12) من كتاب الطالب ، والأسئلة (5 ، 9 ، 11 ، 12) من كتاب التمارين

(4) طلب إيجاد المقطع السيني (x) أو الصادي (y) للمماس أو العمودي كما في الأسئلة (14 ، 15 ، 27) من كتاب الطالب

ولإيجاد المقطع (y) نضع بدلاً من (x) صفر

لإيجاد المقطع (x) نضع بدلاً من (y) صفر

ملاحظة

(5) عدم إعطاء نقطة التماس وتقديم معلومة عن المماس :

(أ) المماس يوازي المستقيم كما في السؤال (10) من كتاب التمارين

(ب) المماس يعامد المستقيم

(ج) المماس يقطع المستقيم أو المنحنى كما في الأسئلة (25 ، 28) من كتاب الطالب

(د) نقطة التماس غير معلومة وإعطاء نقطة خارجية : نجد ميل المماس بطريقتين (المشتقة و فرق الصادات على السينات)

(6) طلب إيجاد مساحة مضلع (أو مثلث) أحد أضلاعه مماس أو عمودي على المماس

اختبر نفسك

(1) إذا كان $f(x) = e^x + x$ فإن معادلة المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ عند $x = 0$ هي:

a) $y = 2x - 1$ b) $y = 2x + 1$ c) $y = 1 - 2x$ d) $y = 2 - x$

(2) إذا كان $f(x) = \sin x + 2x$ فإن معادلة المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ عند $x = \pi$ هي:

a) $y = x - \pi$ b) $y = x + \pi$ c) $y = x - 3\pi$ d) $y = 2x - 2\pi$

(3) إذا كان $f(x) = \ln x$ ، فإن معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ عند النقطة $(e, 1)$ هي :

a) $y = -ex - 2$ b) $y = -ex + e^2 + 1$ c) $y = -e^x + e^2 + 1$ d) $y = \frac{x}{e}$



(4) إذا كانت النقطة $(2, 4)$ تقع على منحنى الاقتران $f(x)$ وكانت $f'(2) = 8$ ، فإن معادلة المماس لمنحنى الاقتران f عند هذه النقطة هي :

a) $y = 8x - 30$ b) $y = 8x - 12$ c) $y = 12 - 8x$ d) $y = 8x$

(5) إذا كانت معادلة العمودي على المماس لمنحنى $f(x)$ عند النقطة $(2, 3)$ هي $y - 2 = \frac{4}{5}(x - 3)$ فإن $f'(3)$ تساوي

a) $\frac{4}{5}$ b) $\frac{5}{4}$ c) $\frac{-4}{5}$ d) $\frac{-5}{4}$

(6) إذا كان $f(x) = e^{x-1} + \ln x$ ، فإن معادلة المماس لمنحنى f عند النقطة $(1, 1)$ هي :

a) $y = 2x$ b) $y = 2x - 1$ c) $y = 2x - 2$ d) $y = 2x + 1$

(7) إذا كان $f(x) = \sin x$ فإن معادلة المماس لمنحنى $f(x)$ عند النقطة $(\pi, 0)$ تساوي :

a) $y = \pi - x$ b) $y = x - \pi$ c) $y = \pi$ d) $y = x + \pi$

(8) إذا كان $f(x) = e^x + \cos x$ ، فإن معادلة المماس لمنحنى f عند نقطة تقاطعه مع المحور (y) هي:

a) $y = 2x$ b) $y = -2x$ c) $y = x + 2$ d) $y = x - 1$

(9) إذا كان $f(x) = \ln \frac{e^{2x}}{x^4} + 3x$ فإن ميل المماس لمنحنى f عند $x = 2$ هو :

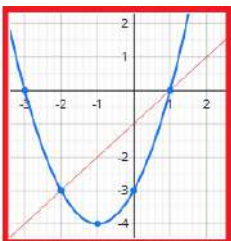
a) e^2 b) $e^2 + 3$ c) 3 d) 7

(10) إذا كان $f(x) = e^{x-6} - x$ ، فإن قيم (x) التي يكون عندها مماس أفقي لمنحنى الاقتران f هي:

a) 5 b) $\ln 6$ c) 6 d) 0 , 6

(11) جد مساحة المثلث المكون من المماس لمنحنى الاقتران $f(x) = 3 - x^2$ عند النقطة $(2, 1)$ والمحورين
الجواب : 4

(12) جد معادلتى المماس والعمودي عليه لمنحنى الاقتران $f(x) = x^2 + 2x - 3$ عند نقاط تقاطعه مع المستقيم $y = x - 1$



الجواب: $y = 4x - 4$, $y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$, $y = -2x - 7$, $y = \frac{1}{2}x - 2$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
b	b	b	b	d	b	a	c	c	c

7 تطبيقات: الحركة في خط مستقيم : هناك ثلاثة مصطلحات :

$$s(t) \Rightarrow v(t) \Rightarrow a(t)$$

المسافة أو موقع الجسم $s(t)$ ، السرعة velocity والتسارع acceleration
مشتقة المسافة أو الموقع تساوي السرعة ومشتقة السرعة تساوي التسارع

الحركة في خط مستقيم

إذا مثل الاقتران $s(t)$ موقع جسم يتحرك على خط مستقيم، فإنَّ
سرعته المتجهة $v(t)$ تعطى بالعلاقة: $v(t) = s'(t)$
وتسارعه $a(t)$ يعطى بالعلاقة: $a(t) = v'(t) = s''(t)$
أما سرعته فهي $|v(t)|$.

تُسمَّى النقطة 0 على خط الأعداد نقطة الأصل.

سكون لحظي تعني أن السرعة تساوي صفراً $v(t) = 0$

يعود الجسم إلى موقعه الأصلي عندما $s(t) = s(0)$

وليس $s(t) = 0$

قواعد مهمة : (1) إذا عاد الجسم إلى موقعه الأصلي ، فإن المسافة المقطوعة تكون صفراً ($s(t) = s(0)$)

(2) إذا كانت قيمة $v(t) > 0$ ، فإنَّ الجسم يتحرك في الاتجاه الموجب (يمين)
وإذا كانت قيمة $v(t) < 0$ ، فإنَّ الجسم يتحرك في الاتجاه السالب (يسار)
وعندما تكون $v(t) = 0$ فإنَّ الجسم يكون في حالة سكون.

(3) لإيجاد أقصى ارتفاع يصل إليه الجسم نسائي السرعة بالصفر ونجد t

يتحرك جسم في خط مستقيم، حسب العلاقة $s = t^3 - 3t^2 + 5t + 4$
أوجد سرعته عندما ينعدم التسارع.

$$s = t^3 - 3t^2 + 5t + 4$$

$$v = 3t^2 - 6t + 5$$

$$a = 6t - 6$$

$$6t - 6 = 0 \rightarrow t = 1 \quad \leftarrow a = 0 \text{ عندما ينعدم التسارع، فإن}$$

$$(v)_{t=1\text{sec}} = 3(1)^2 - 6(1) + 5 = 2 \text{ cm/sec}$$

يتحرك جسم في خط مستقيم، حسب العلاقة $s = 12t^2 - t^3$ ، فجد

(1) سرعة الجسم المتجهة وتسارعه عندما $t = 2$ (3 متى يعود الجسم إلى موقعه الأصلي

(2) قيم t التي يكون عندها في حالة سكون لحظي (4 اتجاه حركة الجسم عند $t = 3$

$$s(t) = 12t^2 - t^3$$

$$1) \quad v(t) = 24t - 3t^2 \Rightarrow v(2) = 48 - 12 = 36$$

$$1+) \quad a(t) = 24 - 6t \Rightarrow a(2) = 24 - 12 = 12$$

$$2) \quad v(t) = 0 \Rightarrow 24t - 3t^2 = 0 \Rightarrow 3t(8 - t) = 0 \Rightarrow t = 0 \quad \text{أو} \quad t = 8$$

$$3) \quad s(0) = 0 \Rightarrow s(t) = 12t^2 - t^3 = 0 \Rightarrow t^2(12 - t) = 0 \Rightarrow t = 12$$

$$4) \quad v(3) = 24(3) - 3(9) = 45 > 0 \Rightarrow +$$

المسافة كمية قياسية (ليست متجهة)
بينما الموقع كمية متجهة

مثال : إذا مثل الاقتران $s(t) = t^3 - t^2 + 6$ موقع جسم ، فجد

(1) سرعة الجسم المتجهة وتسارعه عندما $t = 2$ ، (2) قيم t التي يكون عنها في حالة سكون لحظي

(4) اتجاه حركة الجسم عند $t = 0.5$ ، $t = 3$

(3) متى يعود الجسم إلى موقعه الأصلي

الحل:

$$s(t) = t^3 - t^2 + 6$$

$$1) \quad v(t) = 3t^2 - 2t \Rightarrow v(2) = 3(2)^2 - 2(2) = 8$$

$$1+) \quad a(t) = 6t - 2 \Rightarrow a(2) = 6(2) - 2 = 10$$

$$2) \quad v = 0 \Rightarrow 3t^2 - 2t = 0 \Rightarrow t(3t - 2) = 0 \Rightarrow t = 0 \quad \text{أو} \quad t = \frac{2}{3}$$

$$3) \quad s(t) = s(0) = 6 \Rightarrow t^3 - t^2 + 6 = 6 \Rightarrow t^3 - t^2 = 0$$

$$t^2(t - 1) = 0 \Rightarrow t = 1$$

$$4) \quad v(3) = 3(3)^2 - 2(3) = 21 \Rightarrow +$$

$$v\left(\frac{1}{2}\right) = 3\left(\frac{1}{4}\right) - 2\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4} \Rightarrow -$$

Abdulkadir Hasanat

078 531 88 77



مثال : يتحرك جسم ويحدد موقعه بالاقتران : $s(t) = 0.6t^3 - 1.5t - 0.9$ ، جد

(1) موقع الجسم بعد (5) ثوان ، (2) سرعة الجسم المتجهة وتسارعه عندما $t = 5$

$$s(t) = 0.6t^3 - 1.5t - 0.9 \quad \rightarrow \quad s(5) = 0.6(5)^3 - 1.5(5) - 0.9 = 66.6$$

$$v(t) = 1.8t^2 - 1.5 \quad \rightarrow \quad v(5) = 1.8(5)^2 - 1.5 = 43.5$$

$$a(t) = 3.6t \quad \rightarrow \quad a(5) = 3.6(5) = 18$$

$s(t) = t^2 - 7t + 8$ a $v(t) = 2t - 7 \rightarrow v(4) = 1 \text{ m/s}$ $a(t) = 2 \rightarrow a(4) = 2 \text{ m/s}^2$	اتحقق من فهمي صفحة 22
b $v(t) = 2t - 7 = 0 \rightarrow t = \frac{7}{2} \text{ s}$	
c $v(2) = -3 \text{ m/s}$ بما أن إشارة السرعة المتجهة سالبة، فإن الجسم يتحرك لليسار عندما $t = 2$	
d $s(0) = 8 \text{ m}$ $s(t) = 8 \rightarrow t^2 - 7t + 8 = 8 \rightarrow t^2 - 7t = 0$ $t(t - 7) = 0 \rightarrow t = 0 \text{ or } t = 7$ إنّ يعود الجسم إلى موقعه الابتدائي عندما $t = 7 \text{ s}$	

أتحقق من فهمي يُمثل الاقتران: $s(t) = t^2 - 7t + 8, t \geq 0$

موقع جسم يتحرك على خط مستقيم،

(a) أجد سرعة الجسم المتجهة وتسارعه عندما $t = 4$.

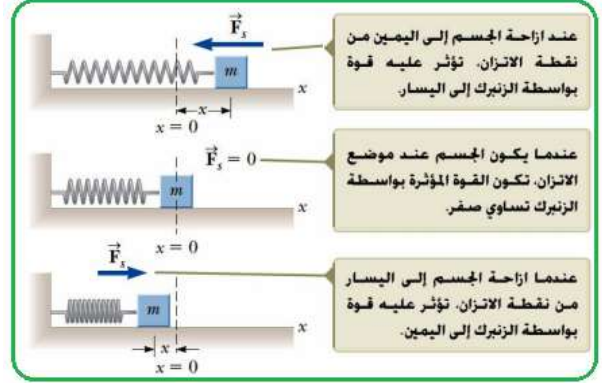
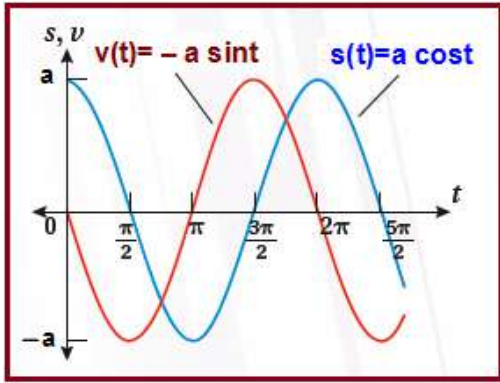
(b) أجد قيم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لحظي.

(c) في أي اتجاه يتحرك الجسم عندما $t = 2$ ؟

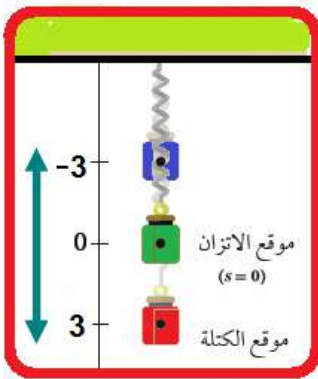
(d) متى يعود الجسم إلى موقعه الابتدائي؟

7-1 تطبيقات : الحركة التوافقية البسيطة

هي حركة جسيم تحت تأثير قوة يتناسب مقدارها مع بعد الجسيم عن موضع اتزانها واتجاهها دائماً نحو موضع الاتزان



(مثال) يُبين الشكل المجاور كتلة معلقة بزنبك ، تم شدها (3) وحدات أسفل الاتزان ، ثم تُرك ليترك إلى الأعلى وإلى الأسفل حيث يُعطى موقعه بالاقتران $S(t) = 3 \cos t$ جد سرعة الكتلة المتجهة وتسارعها



$$v(t) = S'(t) = -3 \sin t$$

$$a(t) = v'(t) = -3 \cos t$$

الحل: السرعة = مشتقة الموقع
التسارع = مشتقة السرعة

ملاحظات :

- يتحرك بمرور الزمن بين الموقع $s = 3$ والموقع $s = -3$ على المحور s ، والقيمة السالبة تعني أن الجسم فوق موقع الاتزان.

- تكون قيمة السرعة أكبر ما يمكن في الاتجاه الموجب والاتجاه السالب عندما $|\sin t| = 1$. وفي هذه الحالة، فإن $(\cos t = 0)$ أي أن قيمة اقتران الموقع تُصبح صفراً عند (موقع الاتزان) وبالتالي فإن سرعة الجسم تكون أكبر ما يمكن عندما يمر الجسم بموقع الاتزان.

- قيمة تسارع الجسم تكون دائماً معكوس قيمة موقع الجسم؛ لأنّ : مُحصلة القوى تسحب الجسم إلى الأسفل إذا كان أعلى موقع الاتزان، وتسحبه الجسم إلى الأعلى إذا كان أسفل موقع الاتزان.

- يكون التسارع صفراً فقط عند موقع الاتزان ؛ لأنّ قوّة الجاذبية وقوّة الزنبك تلغي إحداهما الأخرى عند هذه النقطة. ولكن، إذا كان الجسم عند أيّ موقع آخر، فإنّ هاتين القوتين لا تتساويان ، ولا يكون التسارع صفراً.

(مثال) يُبين الشكل المجاور جسماً مثبتاً في زنبك بشكل أفقي على سطح أملس ، ويعطى موقعه بالاقتران $S(t) = 4 \sin t$ ، جد سرعة الجسم المتجهة وتسارعه

$$v(t) = S'(t) = 4 \cos t$$

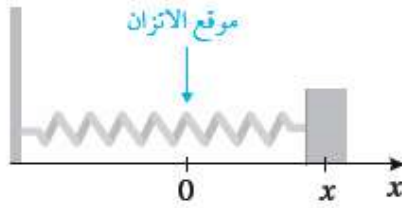
الحل: السرعة = مشتقة الموقع

$$a(t) = v'(t) = -4 \sin t$$

التسارع = مشتقة السرعة

مسألة اليوم

يهتز جسم مُثبت في زنبرك أفقيًا على سطح أملس كما في الشكل المجاور. ويُمثل الاقتران: $x(t) = 8 \sin t$ موقع الجسم، حيث t الزمن بالثواني، و x الموقع بالسنتيمترات:



(1) أجد موقع الجسم، وسرعته المتجهه، وتسارعه عندما $t = \frac{2}{3}$

(2) في أي اتجاه يتحرك الجسم عندما $t = \frac{2}{3}$ ؟

مسألة اليوم صفحة 8

$$x(t) = 8 \sin t \rightarrow x\left(\frac{2}{3}\right) = 8 \sin\left(\frac{2}{3}\right) \approx 4.95 \text{ cm}$$

$$1 \quad v(t) = \frac{dx}{dt} = 8 \cos t \rightarrow v\left(\frac{2}{3}\right) = 8 \cos\left(\frac{2}{3}\right) \approx 6.29 \text{ cm/s}$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = -8 \sin t \rightarrow a\left(\frac{2}{3}\right) = -8 \sin\left(\frac{2}{3}\right) \approx -4.95 \text{ cm/s}^2$$

2 بما أن إشارة السرعة المتجهة موجبة، فإن الجسم يتحرك لليمين عندما $t = \frac{2}{3}$

أتحقق من فهمي ✍ يتحرك جسم مُعلق بزنبك إلى الأعلى وإلى الأسفل، ويُمثل الاقتران:

$s(t) = 7 \sin t$ موقع الجسم عند أي زمن لاحق، حيث t الزمن بالثواني، و s الموقع بالأمتار:

(a) أجد اقترانًا يُمثل سرعة الجسم المتجهة، واقترانًا آخر يُمثل تسارعه عند أي لحظة.

Abdulkadir Hasanat

078 531 88 77



(b) أصِف حركة الجسم.

أتحقق من فهمي صفحة 24

a	$s(t) = 7 \sin t$	$v(t) = 7 \cos t$	$a(t) = -7 \sin t$
	بالنظر لاقتران الموقع $s(t)$ فإن قيم s تتحصر بين $\pm 7 \text{ m}$ وهذا يعني أن الجسم يتحرك بمرور الزمن صعودًا وهبوطًا بين الموقعين $s = 7 \text{ m}$، $s = -7 \text{ m}$، ويمر بنقطة الاتزان $s = 0$ عند قيم t التي تحقق $s(t) = 0$ وهي $t = n\pi$ حيث n أي عدد صحيح غير سالب.		
b	تتغير سرعة الجسم بمرور الزمن وتتراوح بين القيمتين $\pm 7 \text{ m/s}$ ويكون مقدار سرعة الجسم أكبر ما يمكن $7 \cos t = 7$ عندما $\cos t = \pm 1$ وذلك عندما $t = n\pi$ (نفسها لحظات مرور الجسم بنقطة الاتزان)، بينما تكون سرعة الجسم صفرًا (يسكن لحظيًا) عندما يكون الجسم في أقصى بعد له عن نقطة الاتزان $s(t) = 7 \rightarrow v(t) = 0$ (اللحظات $t = \frac{n\pi}{2}$ حيث n عدد فردي موجب) نلاحظ أن قيمة تسارع الجسم عند كل لحظة هي معكوس قيمة موقعه وأن التسارع ينعدم لحظة مرور الجسم بنقطة الاتزان، وهي اللحظة التي تكون محصلة القوى المؤثرة على الجسم فيها صفرًا.		

يُمثل الاقتران: $s(t) = t^3 - 4t^2 + 5t, t \geq 0$ موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني:

16 أجد سرعة الجسم وتسارعه عندما $t = 5$. 18 في أي اتجاه يتحرك الجسم عندما $t = 4$ ؟

17 أجد قيم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لحظي. 19 متى يعود الجسم إلى موقعه الابتدائي؟

يُمثل الاقتران: $s(t) = e^t - 4t, t \geq 0$ موقع جُسيم يتحرك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني:

20 أجد الموقع الابتدائي للجسيم. 21 أجد تسارع الجسيم عندما تكون سرعته صفراً.

زنبرك: يتحرك جسم مُعلّق بزنبرك إلى الأعلى وإلى الأسفل، ويُحدّد الاقتران: $s(t) = 4 \cos t$ موقع الجسم عند أي زمن لاحق، حيث t الزمن بالثواني، و s الموقع بالأمتار: 22 أجد اقتراناً يُمثل سرعة الجسم، واقتراناً آخر يُمثل تسارعه عند أي لحظة.

23 أجد سرعة الجسم وتسارعه عندما $t = \frac{\pi}{4}$. 24 أصف حركة الجسم.

مهارات التفكير العليا

تبرير: يُمثل الاقتران: $s(t) = 4 - \sin t, t \geq 0$ موقع جُسيم يتحرك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني:

31 أجد سرعة الجسيم وتسارعه بعد t ثانية.

32 أجد موقع الجسيم عندما كان في حالة سكون لحظي أول مرة بعد انطلاقه.

33 أجد موقع الجسيم عندما يكون تسارعه صفراً، مُبرراً إجابتي.

16	$s(t) = t^3 - 4t^2 + 5t$ $v(t) = 3t^2 - 8t + 5 \Rightarrow v(5) = 40 \text{ m/s}$ $a(t) = 6t - 8 \Rightarrow a(5) = 22 \text{ m/s}^2$
----	---

17	$v(t) = 3t^2 - 8t + 5 = 0$ $(3t - 5)(t - 1) = 0$ $\rightarrow t = \frac{5}{3} \text{ s or } t = 1 \text{ s}$
----	--

18	$v(4) = 21 \text{ m/s}$ إشارة السرعة موجبة $\rightarrow$ الاتجاه موجب
----	--

19	الموقع الابتدائي للجسم: $s(0) = 0 \text{ m}$ $s(t) = 0 \Rightarrow t^3 - 4t^2 + 5t = 0$ $\Rightarrow t(t^2 - 4t + 5) = 0 \Rightarrow t = 0$ $t^2 - 4t + 5$ مميزها سالب وبالتالي ليس لها جذور حقيقية. إذن، لا يعود الجسم إلى موقعه الابتدائي أبداً.
----	---

20	الموقع الابتدائي للجسم: $s(0) = e^0 - 4(0) = 1 \text{ m}$
21	$v(t) = e^t - 4$ $v(t) = 0 \Rightarrow e^t = 4 \Rightarrow t = \ln 4$ $a(t) = e^t \Rightarrow a(\ln 4) = e^{\ln 4} = 4 \text{ m/s}^2$

22	$s(t) = 4 \cos t \Rightarrow v(t) = -4 \sin t \Rightarrow a(t) = -4 \cos t$
23	$v\left(\frac{\pi}{4}\right) = -4 \sin \frac{\pi}{4} = -4 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = -2\sqrt{2} \text{ m/s}$ $a\left(\frac{\pi}{4}\right) = -4 \cos \frac{\pi}{4} = -4 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = -2\sqrt{2} \text{ m/s}^2$

من خصائص اقتران الموقع $s(t) = 4 \cos t$ نعرف أن الجسم يتحرك بمرور الزمن صعودًا وهبوطًا بين الموقعين $s = 4 \text{ m}$, $s = -4 \text{ m}$ وأنه يمر بنقطة الاتزان $s = 0$ أثناء هذه الحركة عندما $t = \frac{n\pi}{2}$ حيث n أي عدد فردي موجب.

تتغير سرعة الجسم بمرور الزمن ونعرف من خصائص الاقتران $v(t) = -4 \sin t$ أن قيم السرعة تتراوح بين 4 m/s ، و -4 m/s ونلاحظ أن الجسم يصل إلى هذه السرعة عند اللحظات التي يمر فيها بنقطة الاتزان.

نلاحظ أن قيمة تسارع الجسم عند كل لحظة تساوي معكوس قيمة اقتران الموقع عند تلك اللحظة، وأن التسارع ينعدم عند مرور الجسم بنقطة الاتزان حيث تكون محصلة القوى المؤثرة في الجسم صفرًا.

31	$s(t) = 4 - \sin t \Rightarrow v(t) = -\cos t \Rightarrow a(t) = \sin t$
----	--

	$v(t) = -\cos t = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots$ يكون الجسم في حالة سكون لحظي لأول مرة بعد انطلاقه عندما $t = \frac{\pi}{2}$
32	ويكون موقعه عندها هو $s\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4 - \sin \frac{\pi}{2} = 4 - 1 = 3 \text{ m}$

	$a(t) = v'(t) = \sin t \Rightarrow a(t) = 0 \Rightarrow \sin t = 0$ وبتعويض هذه النتيجة في اقتران الموقع نجد أن:
--	---

33	$s(t) = 4 - \sin t = 4 - 0 = 4$ أي أن الجسم يكون عند $s = 4 \text{ m}$ عندما يكون تسارعه صفرًا.
----	---

يُمثل الاقتران: $s(t) = 3t^2 - t^3, t \geq 0$ موقع جُسيم يتحرك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني:

7	$s(t) = 3t^2 - t^3, t \geq 0$ أجد سرعة الجُسيم وتسارعه بعد t ثانية.
8	أجد الموقع (المواقع) الذي يكون عنده الجُسيم في حالة سكون لحظي.
	السرعة: $v(t) = 6t - 3t^2$ التسارع: $a(t) = 6 - 6t$

8	يكون الجسم في حالة سكون عندما $v(t) = 0$ $v(t) = 6t - 3t^2 = 0 \Rightarrow 3t(2 - t) = 0 \Rightarrow t = 0, t = 2$ $s(0) = 0, \quad s(2) = 12 - 8 = 4$ إذن يكون الجسم في حالة سكون لحظي عندما يكون في كل من الموقعين: $s = 0 \text{ m}$, $s = 4 \text{ m}$
---	---

تمارين إضافية

- (1) إذا مثل الاقتران $s(t) = t^3 - 3t^2 + 1$ موقع جُسيم يتحرك في خط مستقيم ، فجد
(1) جد سرعة الجُسيم عندما تكون سرعته 6 (2) قيم (t) التي يكون عنها في حالة سكون لحظي

- (3) متى يعود الجسم إلى موقعه الأصلي (4) اتجاه حركة الجسم عند $t = 1$ ، $t = 3$

- (2) إذا مثل الاقتران $s(t) = 18t^2 - t^3$ موقع جسم ، فجد

- (1) سرعة الجسم المتجهة وتسارعه عندما $t = 2$ ، (2) قيم (t) التي يكون عنها في حالة سكون لحظي

- (3) متى يعود الجسم إلى موقعه الأصلي (4) اتجاه حركة الجسم عند $t = 1$

- (3) يُمثّل الاقتران: $s(t) = 4e^t - 8t + 2$ ، $t \geq 0$ ، موقع جُسيم يتحرّك في مسار مستقيم،
(1) حدّد الموقع الابتدائي للجُسيم (2) جد تسارع الجُسيم عندما تكون سرعته صفراً.

- (4) يتحرّك جسم مُعلّق بزنبرك إلى الأعلى وإلى الأسفل ، ويُحدّد الاقتران : $s(t) = 6 \cos t$ موقع الجسم
عند أيّ زمن لاحق:
(1) جد اقتراناً يُمثّل سرعة الجسم، واقتراناً آخر يُمثّل تسارعه عند أيّ لحظة. (2) صِف حركة الجسم.

هناك ثلاثة مصطلحات : المسافة أو موقع الجسم $s(t)$ ، السرعة $velocity$ والتسارع $acceleration$

$$s(t) : s'(t) = v(t) , v'(t) = a(t)$$

مشتقة المسافة أو الموقع تساوي السرعة ومشتقة السرعة تساوي التسارع

قواعد مهمة : (1) إذا عاد الجسم إلى موقعة الأصلي ، فإن المسافة المقطوعة تكون صفراً ($s(t) = s(0)$)

$$يعود الجسم إلى موقعه الأصلي : $s(t) = s(0)$ وليس $s(t) = 0$$$

(2) إذا كانت قيمة $v(t) > 0$ ، فإنَّ الجسم يتحرَّك في الاتجاه الموجب (يمين)

وإذا كانت قيمة $v(t) < 0$ ، فإنَّ الجسم يتحرَّك في الاتجاه السالب (يسار)

وعندما تكون $v(t) = 0$ فإنَّ الجسم يكون في حالة سكون. $v(t) = 0 \Leftrightarrow$ سكون لحظي

(3) الموقع الابتدائي للجسم يعني أن الزمن صفر ($t = 0$) أي نجد $s(0)$

(4) المسافة كمية قياسية (ليست متجهة) ... الموقع كمية متجهة

مثال (1) يُمثَّل الاقتران : $t \geq 0$ ، $s(t) = t^3 - 3t^2 + 5$ موقع جُسيْم يتحرَّك في مسار مستقيم ، حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني :

(1) جد سرعة الجُسيْم وتسارعه بعد t ثانية

(3) جد الموقع الابتدائي للجُسيْم

(2) جد تسارع الجُسيْم عندما تنعدم سرعته (بعد بدء الحركة)

(4) متى يعود الجُسيْم إلى موقعه الابتدائي؟

(5) جد قيم t التي يكون عندها الجُسيْم في حالة سكون لحظي

(6) في أيّ اتجاه يتحرَّك الجُسيْم عند $t = 4$

$$s(t) = t^3 - 3t^2 + 5 , t \geq 0$$

$$1) v(t) = 3t^2 - 6t , a(t) = 6t - 6$$

$$2) v(t) = 3t^2 - 6t = 0 \Rightarrow t = 2 \Rightarrow a(2) = 6(2) - 6 = 6$$

$$3) s(0) = 5$$

$$4) s(0) = 5 \Rightarrow s(t) = t^3 - 3t^2 + 5 = 5 \Rightarrow t^2(t - 3) = 0 \Rightarrow t = 3$$

$$5) v(t) = 0 \Rightarrow 3t^2 - 6t = 0 \Rightarrow 3t(t - 2) = 0 \Rightarrow t = 2$$

$$6) v(4) = 3(4)^2 - 6(4) = 24 > 0 \Rightarrow +$$



Abdulkadir Hasanat
078 531 88 77

مثال (2) يُمثَّل الاقتران : $t \geq 0$ ، $s(t) = 6t^2 - t^3$ موقع جُسيْم يتحرَّك في مسار مستقيم :

(1) متى يعود الجُسيْم إلى موقعه الابتدائي؟

(2) جد سرعة الجسم عندما ينعدم تسارعه

$$s(t) = 6t^2 - t^3 \Rightarrow v(t) = 12t - 3t^2 \Rightarrow a(t) = 12 - 6t$$

$$1) s(t) = s(0) = 0 \Rightarrow 6t^2 - t^3 = 0 \Rightarrow t^2(6 - t) = 0 \Rightarrow t = 6$$

$$2) a(t) = 0 \Rightarrow 12 - 6t = 0 \Rightarrow t = 2 \Rightarrow v(2) = 12(2) - 3(2)^2 = 12$$

اختبر نفسك

- (1) إذا كان الاقتران : $s(t) = t^2 - 5t + 6$, $t \geq 0$, يُمثّل موقع جسم يتحرّك في مسار مستقيم ، فإن اتجاه حركة الجسم عندما $t = 1$ هو : موجب a) سالب b) سكون c) لا شيء مما ذكر d)
- (2) يتحرك جسم في مسار مستقيم حيث يُعطى موقعه بالاقتران : $s(t) = e^t - 5t$, $t \geq 0$ فإن الموقع الابتدائي للجسم هو : 0 d) 1 c) -4 b) 5 a)
- (3) إذا كان الاقتران : $s(t) = e^t - 3t + 2$, $t \geq 0$, يُمثّل موقع جسم يتحرّك في مسار مستقيم ، فإن تسارع الجسم عندما تنعدم سرعته يساوي : 4 d) $\ln 3$ c) e^3 b) 3 a)
- (4) إذا كان الاقتران : $s(t) = t^3 - t^2 + t$, $t \geq 0$, يُمثّل موقع جسم يتحرّك في مسار مستقيم ، فإن سرعة الجسم عندما يكون تسارعه (4) يساوي : 4 d) 6 c) 0 b) 2 a)
- (5) يتحرك جسم في مسار مستقيم حيث يُعطى موقعه بالاقتران : $s(t) = 6 - \sin t$ ، فإن موقع الجسم عندما ينعدم تسارعه يساوي : π d) 0 c) 4 b) 6 a)
- (6) يتحرك جسم في مسار مستقيم حيث يُعطى موقعه بالاقتران : $s(t) = t^3 - 4t^2 + 4$ ، فإن الجسم يعود إلى موقعه الابتدائي بعد : 8 s d) 4 s c) 1 s b) 2 s a)
- (7) إذا كان الاقتران $s(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$, $t \geq 0$ ، يُمثّل موقع جسم يتحرّك في مسار مستقيم ، فإن الجسم يعود إلى موقعه الابتدائي بعد : 3 s d) 1 s c) 9 s b) 2 s a)
- (8) إذا كان الاقتران $s(t) = \frac{1}{3}t^3 - t^2 - 3t$, $t \geq 0$ ، يُمثّل موقع جسم يتحرّك في مسار مستقيم ، فإن قيم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لحظي هي : $2, \frac{2}{3}$ d) 3 c) 1 b) 3 , 1 a)
- (9) إذا كان الاقتران $s(t) = t^3 - 3t^2 + 5$, $t \geq 0$ ، يُمثّل موقع جسم يتحرّك في مسار مستقيم ، فإن الفترة الزمنية التي يتحرك فيها الجسم في الاتجاه السالب هي : $(1, \infty)$ d) $(0, 1)$ c) $(2, \infty)$ b) $(0, 2)$ a)
- (10) يتحرك جسم معلق في زنبرك إلى الأعلى والأسفل ، ويعطى موقعه بالاقتران $S(t) = 4 \sin t$ ، فإن الاقتران الذي يمثل تسارع الجسم عند أي لحظة هو : $-4 \sin t$ d) $-4 \cos t$ c) $4 \cos t$ b) $4 \sin t$ a)
- (11) يُمثّل الاقتران : $s(t) = 4e^t - 8t + 2$, $t \geq 0$ ، موقع جُسيم يتحرّك في مسار مستقيم ، (1) حدّد الموقع الابتدائي للجُسيم (2) جد تسارع الجُسيم عندما تكون سرعته صفراً.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
b	c	a	a	a	c	d	c	a	d

من أسئلة الوزارة 2023 / العلمي

- (3) يمثل الاقتران: $s(t) = t^3 - \frac{9}{2}t^2 + 6t$, $t \geq 0$ ، حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني. ما قيم t بالثواني التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لحظي؟
 a) $1, \frac{3}{2}$ **b) 1, 2** c) $\frac{3}{2}, 2$ d) 1, 3

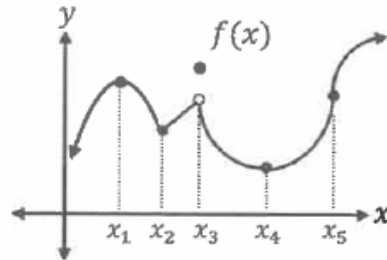
- (15) يمثل الاقتران: $s(t) = t^3 - 6t^2 + 5$, $t \geq 0$ ، حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني. ما الفترة الزمنية التي يتحرك فيها الجسم في الاتجاه السالب؟
 a) $(4, \infty)$ **b) (0, 4)** c) $(2, 4)$ d) $(2, \infty)$

من أسئلة الوزارة 2023 تكميلي / العلمي

- (3) إذا كان الاقتران: $s(t) = \frac{1}{3}t^3 - 5t^2 + 9t + 2$, $t \geq 0$ ، يمثل موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني. فإن تسارع هذا الجسم عندما يكون في حالة سكون لحظي لأول مرة بعد انطلاقه، هو:
 ▼ -8 m/s^2 b) 8 m/s^2 c) -16 m/s^2 d) 16 m/s^2

من أسئلة الوزارة 2024 / العلمي

- (1) معتمدًا الشكل الآتي الذي يُمثل منحنى الاقتران f ، فإن عدد قيم x للنقاط التي يكون عندها الاقتران f غير قابل للاشتقاق، هو:



- a) 4 c) 2
b) 3 d) 1

- (2) إذا كان: $f(x) = 2\sin(x + \pi) - \frac{x^2}{\pi}$ ، فإن $f'(\frac{\pi}{2})$ هي: -2 -1 2 1
 a) 1 b) 2 **c) -1** d) -2

- (3) يُمثل الاقتران: $s(t) = 2t^2 - \frac{1}{2}t^3 + 4$, $t \geq 0$ ، حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني، فإن سرعة الجسم بالمتري لكل ثانية في اللحظة التي يعود فيها إلى موقعه الابتدائي، هي:
 a) -8 b) -1.5 c) -2.5 d) 0
a) -8

من أسئلة الوزارة 2023 / الصناعي

2- إذا كان: $f(x) = \ln\left(\frac{e}{x}\right)$ ، فإن $f'(x)$ هي: ☒ d) $-\frac{1}{x}$ c) $\frac{1}{x}$ b) $\frac{x}{e}$ a) $\frac{e}{x}$

4- إذا كانت: $y = 2x - 3$ معادلة المماس لمنحنى الاقتران f عند النقطة $(2, 1)$ ،

فإن قيمة ميل العمودي على المماس عند النقطة $(2, 1)$ هي: ☒ a) $-\frac{1}{2}$ b) -2 c) $\frac{1}{2}$ d) 2

5- الإحداثي x للنقطة الواقعة على منحنى الاقتران: $f(x) = 2 \sin x + 1$ ، $x \in [0, 2\pi]$ ،

التي يكون المماس عندها أفقيًا هو: ☒ a) $\frac{\pi}{2}$ b) 0 c) π d) 2π

6- إذا كان: $f(x) = 4 - \frac{1}{x}$ ، فإن $f'(x)$ هي: ☒ c) $\frac{1}{x^2}$ b) $-\frac{1}{x^2}$ a) $\frac{4}{x^2}$ d) $-\frac{3}{x^2}$

السؤال الثاني: (34 علامة)

(a) يمثل الاقتران: $s(t) = 2t^3 - 12t^2 - 14t$ ، $t \geq 0$ موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، t الزمن بالثواني. جد كلاً مما يأتي: (12 علامة)

(1) سرعة الجسم عندما ينعدم تسارعه. (2) اللحظة التي يعود فيها الجسم إلى موقعه الابتدائي.



من أسئلة الوزارة 2023 تكميلي / الصناعي

2- إذا كان: $f(x) = \ln\left(\frac{5}{x^2}\right)$ ، فإن $f'(x)$ هي: a) $\frac{10}{x}$ b) $-\frac{2}{x}$ c) $\frac{2}{x}$ d) $-\frac{10}{x}$

- (b) يمثل الاقتران: $s(t) = 2t^3 - 8t^2 - 10t$ ، $t \geq 0$ ، موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، t الزمن بالثواني، جد كلاً مما يأتي: (13 علامة)
- (1) اللحظة التي يعود فيها الجسم إلى موقعه الابتدائي. (2) سرعة الجسم عندما يكون تسارعه 8 m/s^2

من أسئلة الوزارة 2024 / الصناعي

(1) إذا كان: $f(x) = \frac{\sin x}{2} + 2 \sin \pi$ ، فإن $f'(x)$ هي:

a) $-\frac{\cos x}{2}$ b) $\frac{\cos x}{2}$ c) $-\frac{\cos x}{2} + 2 \cos \pi$ d) $\frac{\cos x}{2} + 2 \cos \pi$

(3) إذا كان: $y = \ln(ax^2)$ ، $x > 0$ ، حيث a عدد حقيقي موجب، فإن $\frac{dy}{dx}$ هي:

a) $\frac{2}{x}$ b) $-\frac{2}{x}$ c) $-\frac{1}{x}$ d) $\frac{1}{x}$

(4) مِثل العمودي على المماس لمنحنى الاقتران: $g(x) = 3x - x^2$ عند النقطة $(2, 2)$ هو:

a) -2 b) -1 c) 1 d) 2

- (b) يُمثل الاقتران: $s(t) = 8t^2 - t^3$ ، $t \geq 0$ ، موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، t الزمن بالثواني. جد كلاً مما يأتي: (1) سرعة الجسم عندما $t = 3$. (12 علامة)
- (2) قيم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لحظي.
- (3) اللحظة التي يعود فيها الجسم إلى موقعه الابتدائي.

$$1) f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x} + \frac{1}{2} \Rightarrow f'(-2) = ?$$

$$2) f(x) = \sqrt[3]{x} + \sqrt[5]{x^2} + \pi^2 \Rightarrow f'(x) = ?$$

$$3) f(x) = \frac{x^3 - 3x + \sqrt{x} - 5}{x^2} \Rightarrow f'(x) = ?$$

$$4) f(x) = \ln(3x^2) + \ln(2x)^3 + 2e^{x+1} - e^3 \Rightarrow f'(x) = ?$$

$$5) f(x) = 3\sin x - 4\cos x + x \Rightarrow f'(x) = ?$$

$$6) f(x) = \ln\left(\frac{4}{3x}\right)^2 + \sqrt{e^{4x-6}} \Rightarrow f'(x) = ?$$

$$7) f(x) = \frac{5}{\sqrt{2x+1}} + \ln 3 \Rightarrow f'(x) = ?$$

$$8) f(x) = \ln(ax^2) + \frac{a}{x} + a^2, f'(-1) = 6 \Rightarrow a = ?$$

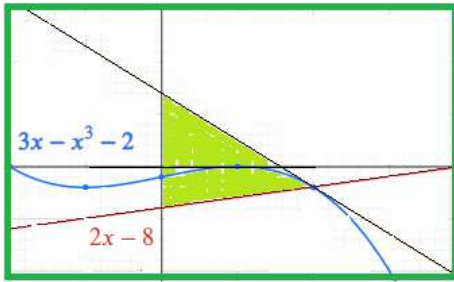
$$9) f(x) = \ln\left(\frac{e^2}{x^3}\right) \Rightarrow f'(1) = ?$$

$$10) f(x) = \ln 5 + \frac{\pi}{x} + \sin \pi - e^3 + \sqrt{2} \Rightarrow f'(3) = ?$$

11) جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران $f(x) = 3x - x^3 - 2$ عند نقطة تقاطعه مع المستقيم $y = 2x - 8$

ثم جد مساحة المثلث المكون من هذا المماس وذلك المستقيم والمحور y

الجواب : المماس $y = -9x + 14$ ، المساحة : 22



12) جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران $f(x) = x^3 + x + 3$ المرسوم من النقطة $(0, 1)$ ،
الجواب: $y = 4x + 1$

13) إذا كان $f(x) = 2x - 4\sin x$ ، $x \in [0, \pi]$

فجد جميع قيم x التي يكون عندها العمودي على المماس موازياً للمحور y ، ثم جد معادلات هذه المماسات

الجواب : $x = \frac{\pi}{3}, y = \frac{2\pi}{3} + 2$

14) إذا مثل الاقتران $s(t) = 3t^2 - 2t^3$ موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم ، فجد

(أ) سرعة الجسم المتجهة عندما $t = 2$ (ب) تسارع الجسم عندما $t = 2$

(ج) قيم (t) التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لحظي (د) متى يعود الجسم إلى موقعه الأصلي

15) إذا مثل الاقتران $s(t) = 3t^2 - t^3 + 4$ موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم ، فجد

(أ) سرعة الجسم عندما ينعدم تسارعه (ب) الفترة الزمنية التي يتحرك فيها في الاتجاه السالب

(ج) موقع الجسم الابتدائي (د) اللحظة التي يعود فيها الجسم إلى موقعه الأصلي

مشتقتا الضرب والقسمة والمشتقات العليا

Product and Quotient Rules and Higher-Order Derivatives



1) مشتقة ضرب اقترانين

$$A(x) = f(x) \times g(x) \Rightarrow A'(x) = f'(x) \times g(x) + g'(x) \times f(x)$$

بشرط قابلية الاشتقاق لكل من $f(x), g(x)$

أول:

(مشتقة حاصل ضرب اقترانين = مشتقة الأول $\times$ الثاني + مشتقة الثاني $\times$ الأول) : أربعة أقواس: $() () + () ()$

$$1) f(x) = (x^2 + 1)(2x^3 - 5x)$$

$$\Rightarrow f'(x) = (2x)(2x^3 - 5x) + (6x^2 - 5)(x^2 + 1)$$

$$2) f(x) = x^5 \sin x$$

$$\Rightarrow f'(x) = (5x^4)(\sin x) + (\cos x)(x^5)$$

$$3) f(x) = e^x \cos x$$

$$\Rightarrow f'(x) = (e^x)(\cos x) + (-\sin x)(e^x) = e^x \cos x - e^x \sin x$$

$$4) f(x) = x \ln x \Rightarrow f'(e) = ?$$

$$\Rightarrow f'(x) = (1)(\ln x) + \left(\frac{1}{x}\right)(x) = \ln x + 1$$

$$\Rightarrow f'(e) = \ln e + 1 = 1 + 1 = 2$$

$$5) f(6) = 4, f'(6) = -2, g(6) = -3, g'(6) = 1 \Rightarrow (f \times g)'(6) = ?$$

$$\Rightarrow (f \times g)'(6) = f'g + g'f = (-2)(-3) + (1)(4) = 10$$

$$(f \times g)'(a) = f'(a)g(a) + g'(a)f(a)$$

$$6) f(2) = -7, f'(2) = -1, g(2) = 2, (f \times g)'(2) = 12 \Rightarrow g'(2) = ?$$

$$\Rightarrow (f \times g)'(2) = f'g + g'f$$

$$12 = (-1)(2) + (g')(-7) \Rightarrow g'(2) = -2$$

$$7) f(x) = 5x^3 = (5)(x^3)$$

ويمكن استعمال هذه القاعدة لإيجاد مشتقة حاصل ضرب أي مقدارين

$$f'(x) = (0)(x^3) + (3x^2)(5)$$

$$= (0) + 15x^2 = 15x^2$$

Hassanat
Hassanat

أتحقق من فهمي أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

a) $f(x) = (x^3 - 2x^2 + 3)(7x^2 - 4x)$

b) $f(x) = \ln x \cos x$

a	$f'(x) = (x^3 - 2x^2 + 3)(14x - 4) + (7x^2 - 4x)(3x^2 - 4x)$ $= 14x^4 - 4x^3 - 28x^3 + 8x^2 + 42x - 12 + 21x^4 - 28x^3 - 12x^3 + 16x^2$ $= 35x^4 - 72x^3 + 24x^2 + 42x - 12$
b	$f'(x) = (\ln x)(-\sin x) + (\cos x)\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x \sin x + \frac{\cos x}{x}$

تمارين / واجب

1) $f(x) = (x^3 - 2)(3x^2 + 1) \Rightarrow f'(-1) = ?$

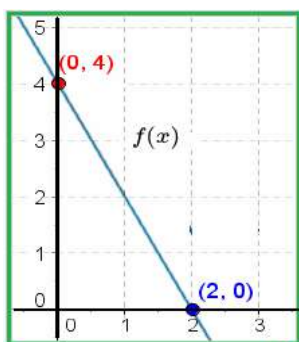


2) $f(x) = 3x \cos x \Rightarrow f'(x) = ?$

3) $f(x) = x^3 \ln x \Rightarrow f'(1) = ?$

4) $f(e) = -2, f'(e) = -1, g'(e) = 4, (f \times g)'(e) = 8 \Rightarrow g(e) = ?$

ملاحظة مهمة



*** بالنسبة للمشتقة الأولى لنقطة من خلال الرسم لاقتراح خطي (خط مستقيم):

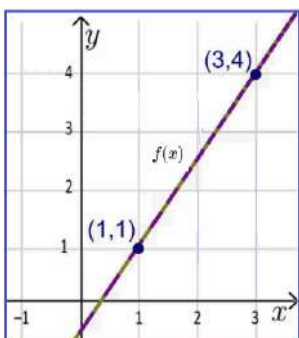
$$f'(a) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

المشتقة عند أي نقطة على المستقيم = ميل ذلك المستقيم

$$f'(1) = f'(0) = f'(2) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4 - 0}{0 - 2} = -2$$

لاحظ أن الزاوية التي يصنعها المستقيم مع السينات الموجب منفرجة لذلك قيمة الميل سالبة

وبالتالي المشتقة الأولى سالبة حيث الميل يساوي ظل الزاوية والظل في الربع الثاني سالب



$$f'(1) = f'(3) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4 - 1}{3 - 1} = \frac{3}{2} = 1.5$$

* الزاوية حادة ، لذلك الميل موجب (الربع الأول) وبالتالي المشتقة الأولى موجبة



(2) مشتقة قسمة اقترانين



$$A(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow A'(x) = \frac{f'(x) \times g(x) - g'(x) \times f(x)}{(g(x))^2}$$

بشرط قابلية الاشتقاق لكل من $f(x), g(x)$ $g(x) \neq 0$

مشتقة خارج قسمة اقترانين = $\frac{\text{مشتقة البسط} \times \text{المقام} - \text{مشتقة المقام} \times \text{البسط}}{(\text{المقام})^2}$ خمس أقواس: $\frac{(\quad)(\quad) - (\quad)(\quad)}{(\quad)^2}$

$$1) f(x) = \frac{\cos x}{1 + e^x} \Rightarrow f'(x) = \frac{(-\sin x) \times (1 + e^x) - (e^x) \times (\cos x)}{(1 + e^x)^2}$$

$$2) f(x) = \frac{x}{1 + \sin x} \Rightarrow f'(x) = \frac{(1) \times (1 + \sin x) - (\cos x) \times (x)}{(1 + \sin x)^2}$$

$$3) f(x) = \frac{x+1}{x^2+1} \Rightarrow f'(-2) = ?$$

$$f'(x) = \frac{(1) \times (x^2 + 1) - (2x) \times (x+1)}{(x^2 + 1)^2}$$

$$\Rightarrow f'(-2) = \frac{(1) \times (4 + 1) - (-4) \times (-2 + 1)}{(4 + 1)^2} = \frac{5 - 4}{(5)^2} = \frac{1}{25}$$

$$4) f(7) = 5, f'(7) = -1, g(7) = -2, g'(7) = 1 \Rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)'(7) = ?$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(7) = \frac{f'g - g'f}{(g)^2} = \frac{(-1)(-2) - (1)(5)}{(-2)^2} = \frac{2 - 5}{4} = \frac{-3}{4}$$

$$5) f(3) = -2, f'(3) = 1, g'(3) = 3, \left(\frac{f}{g}\right)'(3) = 1 \Rightarrow g(3) = ?$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(3) = \frac{(1)(g) - (3)(-2)}{(g)^2} = 1 \Rightarrow g^2 = g + 6 \Rightarrow g^2 - g - 6 = 0$$

$$\Rightarrow (g - 3)(g + 2) = 0 \Rightarrow \boxed{g(3) = 3} \quad \text{or} \quad \boxed{g(3) = -2}$$

أتحقق من فهمي 30 أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

a) $f(x) = \frac{x+1}{2x+1}$

b) $f(x) = \frac{\sin x}{e^x}$

a) $f(x) = \frac{x+1}{2x+1}$ $f'(x) = \frac{(2x+1)(1) - (x+1)(2)}{(2x+1)^2} = \frac{-1}{(2x+1)^2}$	b) $f(x) = \frac{\sin x}{e^x}$ $f'(x) = \frac{e^x(\cos x) - (\sin x)e^x}{e^{2x}} = \frac{\cos x - \sin x}{e^x}$
--	---

تمارين

إذا كان $f(2) = 4$, $f'(2) = -3$, $g(2) = -1$, $g'(2) = -5$

ا) $(f \times g)'(2)$ ب) $\left(\frac{f}{g}\right)'(2)$ ج) $(2f - 3g)'(2)$ د) $(f - f \times g)'(2)$

2) $f(5) = 2$, $f'(5) = -2$, $g(5) = -3$, $g'(5) = 3 \Rightarrow$

ا) $(f \times g)'(5)$ ب) $\left(\frac{g}{f}\right)'(5)$ ج) $(4f - 2g)'(5)$ د) $(f - f \times g)'(5)$

3) $f(1) = 4$, $f'(1) = 5$, $g(1) = -3$

ا) $(f \times g)'(1) = 8 \Rightarrow g'(1) =$

ب) $\left(\frac{g}{f}\right)'(1) = 6 \Rightarrow g'(1) =$

(3) مشتقة المقلوب : إذا كان بسط الاقتران الكسري (ثابتا) فإن المشتقة = سالب الثابت × مشتقة المقام (المقام)

$$f(x) = \frac{c}{g(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{-c f'(x)}{(g(x))^2}$$

بشرط قابلية الاشتقاق ل $g(x)$, $g(x) \neq 0$

$$1) f(x) = \frac{4}{x+x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{-(4) \times (1+2x)}{(x+x^2)^2}$$

$$2) f(x) = \frac{3}{\sin x - e^x} \Rightarrow f'(x) = \frac{-(3) \times (\cos x - e^x)}{(\sin x - e^x)^2}$$

$$3) f(x) = \frac{1}{5 + \sqrt[3]{x^2}} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{5 + x^{\frac{2}{3}}} \Rightarrow f'(x) = \frac{-(1) \times (\frac{2}{3} x^{\frac{1}{3}})}{(5 + x^{\frac{2}{3}})^2}$$

ملاحظة : يُمكن الاستغناء عن هذه القاعدة وعدم حفظها بتطبيق قاعدة القسمة حيث البسط مشتقة صفه

$$1^+) f(x) = \frac{4}{x+x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{(0)(x+x^2) - (1+2x)(4)}{(x+x^2)^2} = \frac{-(1+2x)(4)}{(x+x^2)^2}$$

أتحقق من فهمي 33 أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي :

$$a) f(x) = \frac{1}{5x - x^2}$$

$$b) f(x) = \frac{1}{e^x + \sqrt{x}}$$

a	$f(x) = \frac{1}{5x - x^2}$ $f'(x) = \frac{-(5 - 2x)}{(5x - x^2)^2} = \frac{2x - 5}{(5x - x^2)^2}$	b	$f(x) = \frac{1}{e^x + \sqrt{x}}$ $f'(x) = \frac{-\left(e^x + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{(e^x + \sqrt{x})^2} = -\frac{2\sqrt{x}e^x + 1}{2\sqrt{x}(e^x + \sqrt{x})^2}$
---	--	---	--



$$1) f(x) = \frac{7}{x - \cos x} \Rightarrow f'(x) = ?$$

$$2) f(x) = \frac{1}{\ln x} \Rightarrow f'(x) = ?$$

$$3) f(3) = 5, f'(3) = 4 \Rightarrow \left(\frac{1}{f}\right)'(3) = ?$$

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

أدرب وأحل المسائل

1 $f(x) = \frac{x^3}{2x-1}$

3 $f(x) = \frac{x+1}{\cos x}$

5 $f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{e^x}$

6 $f(x) = x^3 \sin x + x^2 \cos x$

7 $f(x) = \sqrt[3]{x}(\sqrt{x} + 3)$

9 $f(x) = \frac{2 - \frac{1}{x}}{x-3}$

10 $f(x) = (x^3 - x)(x^2 + 2)(x^2 + x + 1)$

1	$f'(x) = \frac{(2x-1)(3x^2) - (x^3)(2)}{(2x-1)^2} = \frac{4x^3 - 3x^2}{(2x-1)^2}$
3	$f'(x) = \frac{(\cos x)(1) - (x+1)(-\sin x)}{(\cos x)^2} = \frac{\cos x + x \sin x + \sin x}{\cos^2 x}$
5	$f'(x) = \frac{(e^x)(\cos x - \sin x) - (\sin x + \cos x)(e^x)}{(e^x)^2} = \frac{-2 \sin x}{e^x}$
6	$f'(x) = (x^3)(\cos x) + (\sin x)(3x^2) + (x^2)(-\sin x) + (\cos x)(2x)$ $= x^3 \cos x + 2x^2 \sin x + 2x \cos x$
7	$f(x) = \sqrt[3]{x}(\sqrt{x} + 3) = x^{\frac{5}{6}} + 3x^{\frac{1}{3}}$ $f'(x) = \frac{5}{6}x^{-\frac{1}{6}} + x^{-\frac{2}{3}} = \frac{5}{6\sqrt[6]{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$

9	$f(x) = \frac{2 - \frac{1}{x}}{x-3} = \frac{2x-1}{x^2-3x}$ $f'(x) = \frac{(x^2-3x)(2) - (2x-1)(2x-3)}{(x^2-3x)^2} = \frac{-2x^2+2x-3}{(x^2-3x)^2}$
10	$f'(x) = (x^3-x)((x^2+2)(2x+1) + (x^2+x+1)(2x))$ $+ (x^2+2)(x^2+x+1)(3x^2-1)$ $= (x^3-x)(x^2+2)(2x+1) + (x^3-x)(x^2+x+1)(2x)$ $+ (x^2+2)(x^2+x+1)(3x^2-1)$

إذا كان $f(x)$ و $g(x)$ اقترانين قابلين للاشتقاق عندما $x=0$ وكان $f(0)=5, f'(0)=-3, g(0)=-1, g'(0)=2$

فأجد كلاً مما يأتي:

12 $(fg)'(0)$

13 $\left(\frac{f}{g}\right)'(0)$

14 $(7f - 2fg)'(0)$

12	$(fg)'(0) = f(0)g'(0) + g(0)f'(0)$ $= 5 \times 2 - 1 \times -3 = 13$
13	$\left(\frac{f}{g}\right)'(0) = \frac{g(0)f'(0) - f(0)g'(0)}{g^2(0)} = \frac{-1 \times -3 - 5 \times 2}{(-1)^2} = -7$
14	$(7f - 2fg)'(0) = 7f'(0) - 2(fg)'(0) = 7(-3) - 2(13) = -47$

أجد معادلة المماس لكل اقتران ممّا يأتي عند النقطة المعطاة:

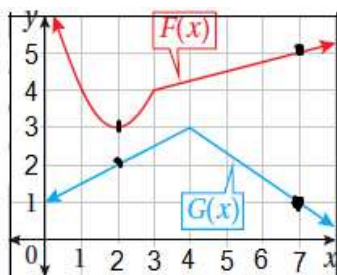
18 $f(x) = \frac{1+x}{1+e^x}, (0, \frac{1}{2})$

19 $f(x) = e^x \cos x + \sin x, (0, 1)$

18	$f'(x) = \frac{(1+e^x)(1) - (1+x)(e^x)}{(1+e^x)^2} = \frac{1-xe^x}{(1+e^x)^2}$ $f'(0) = \frac{1}{4}$ ميل المماس عند النقطة $(0, \frac{1}{2})$ هو: $f'(0) = \frac{1}{4}$ معادلة المماس هي: $y - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}(x - 0) \Rightarrow y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$
19	$f'(x) = (e^x)(-\sin x) + (\cos x)(e^x) + \cos x$ $f'(0) = (1)(0) + (1)(1) + 1 = 2$ ميل المماس عند النقطة $(0, 1)$ هو: $f'(0) = 2$ معادلة المماس هي: $y - 1 = 2(x - 0) \Rightarrow y = 2x + 1$

31 إذا كان: $f(x) = 9 \ln x + \frac{1}{2x^2}$ ، فأثبت أن $f'(x) = \frac{(3x-1)(3x+1)}{x^3}$

31
$$f'(x) = 9 \left(\frac{1}{x} \right) + \frac{-1(4x)}{4x^4} = \frac{9}{x} - \frac{1}{x^3} = \frac{9x^2 - 1}{x^3} = \frac{(3x-1)(3x+1)}{x^3}$$



يُبيّن الشكل المجاور منحنىي الاقترانين: $F(x)$ و $G(x)$.

إذا كان: $P(x) = F(x)G(x)$ ، وكان: $Q(x) = \frac{F(x)}{G(x)}$ ، فأجد كلاً ممّا يأتي:

32 $P'(2)$

33 $Q'(7)$

32	$P'(2) = F(2)G'(2) + G(2)F'(2)$ $G'(2)$ ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(2, 2)$ و $(4, 3)$ ويساوي $\frac{1}{2}$ $F'(2)$ ميل المماس الأفقي، ويساوي صفراً $P'(2) = 3 \times \frac{1}{2} + 2 \times 0 = \frac{3}{2}$
33	$Q'(7) = \frac{G(7)F'(7) - F(7)G'(7)}{G^2(7)} = \frac{1 \times \frac{1}{4} - 5 \times -\frac{2}{3}}{1} = \frac{43}{12}$

مهارات التفكير العليا

تبرير: إذا كان: $y = \frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}}$, فأجيب عن السؤالين الآتيين تبعاً:

- 34 أجد ميل المماس عند نقطة الأصل. 35 أبين عدم وجود مماس أفقي للاقتران y , مُبرراً إجابتي.

34	$y = \frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}} = \frac{1 - \frac{1}{e^x}}{1 + \frac{1}{e^x}} = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$
	$\frac{dy}{dx} = \frac{(e^x + 1)(e^x) - (e^x - 1)(e^x)}{(e^x + 1)^2} = \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2} \Rightarrow \frac{dy}{dx}\bigg _{x=0} = \frac{2(1)}{(1+1)^2} = \frac{1}{2}$
35	إذا وجد مماس أفقي فإن ميله يساوي صفراً، أي أن: $\frac{2e^x}{(e^x+1)^2} = 0$ ، وهذا لا يتحقق إلا إذا كان $e^x = 0$ ، ولكن $e^x > 0$ لجميع الأعداد الحقيقية x ، ولذا لا يوجد لهذا المنحنى مماسات أفقية.

نُحَدِّد: إذا كان: $y = \frac{x+1}{x-1}$, حيث: $x \neq 1$, فأجيب عن الأسئلة الثلاثة الآتية تبعاً:

- 36 أجد $\frac{dy}{dx}$. 37 أعيد كتابة المعادلة بالنسبة إلى المتغير x (اقتران بالنسبة إلى y)، ثم أجد $\frac{dx}{dy}$. 38 أبين أن $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$.

36	$\frac{dy}{dx} = \frac{(x-1)(1) - (x+1)(1)}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2}$
37	$y = \frac{x+1}{x-1} \rightarrow x+1 = y(x-1) \rightarrow x(1-y) = -y-1$ $x = \frac{y+1}{y-1} \quad \frac{dx}{dy} = \frac{-2}{(y-1)^2}$
38	$\frac{dx}{dy} = \frac{-2}{(y-1)^2} = \frac{-2}{\left(\frac{x+1}{x-1} - 1\right)^2} = \frac{-2}{\left(\frac{2}{x-1}\right)^2} = \frac{(x-1)^2}{-2} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$

من كتاب التمارين

أجد معادلة المماس لكل اقتران ممّا يأتي عند النقطة المعطاة:

10 $f(x) = x^2 \cos x, \left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$

11 $f(x) = \frac{1 + \sin x}{\cos x}, (\pi, -1)$

10	$f'(x) = -x^2 \sin x + 2x \cos x \Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi^2}{4}$ ميل المماس: $y - 0 = -\frac{\pi^2}{4}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow y = -\frac{\pi^2}{4}x + \frac{\pi^3}{8}$ معادلة المماس:
11	$f'(x) = \frac{(\cos x)(\cos x) + \sin x(1 + \sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1 + \sin x}{\cos^2 x} \Rightarrow f'(\pi) = \frac{1}{1} = 1$ ميل المماس: $y + 1 = 1(x - \pi) \Rightarrow y = x - \pi - 1$ معادلة المماس:

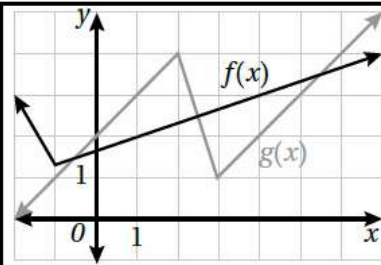
أجد إحداثيي النقطة (النقاط) التي يكون عندها لمنحني كل اقتران ممّا يأتي مماس أفقي:

12 $f(x) = \frac{2x-1}{x^2}$

13 $h(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$

14 $g(x) = \frac{8(x-2)}{e^x}$

12	$f'(x) = \frac{2x^2 - 4x^2 + 2x}{x^4} = \frac{-2x + 2}{x^3} = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow (1, f(1)) = (1, 1)$
13	$h'(x) = \frac{2x(x^2+1) - 2x^3}{(x^2+1)^2} = \frac{2x}{(x^2+1)^2} = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow (0, h(0)) = (0, 0)$
14	$g'(x) = \frac{8e^x - 8e^x(x-2)}{e^{2x}} = \frac{8e^x(3-x)}{e^{2x}} = \frac{8(3-x)}{e^x} = 0 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow (3, \frac{8}{e^3})$



يُبيّن الشكل المجاور منحنيي الاقترانين: $f(x)$ و $g(x)$. إذا كان: $u(x) = f(x)g(x)$

وكان: $v(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ ، فأجد كلاً ممّا يأتي:

15 $u'(1)$

16 $v'(4)$

15 $u'(1) = f(1)g'(1) + g(1)f'(1) = 2 \times 1 + 3 \times \frac{1}{3} = 3$

16 $v'(4) = \frac{g(4)f'(4) - f(4)g'(4)}{(g(4))^2} = \frac{2 \times \frac{1}{3} - 3 \times 1}{(2)^2} = -\frac{7}{12}$

يُمثّل الاقتران: $v(t) = \frac{10}{2t+15}$, $t \geq 0$ سرعة سيارّة بدأت الحركة في مسار مستقيم، حيث تقاس v بالقدم لكل ثانية:

19 أجد تسارع السيارّة عندما $t = 5$.

20 أجد تسارع السيارّة عندما $t = 20$.

19 $a(t) = \frac{-20}{(2t+15)^2} \Rightarrow a(5) = \frac{-20}{(10+15)^2} = -0.032 \text{ ft/s}^2$

20 $a(20) = \frac{-20}{(40+15)^2} \approx -0.007 \text{ ft/s}^2$

تمارين

$$1) f(x) = \ln x \sin x \Rightarrow f'(x) = ?$$

$$2) f(x) = x(e^x - x^2) \Rightarrow f'(0) = ?$$

$$3) f(x) = \frac{5}{x} \Rightarrow f'(3) = ?$$

$$4) f(x) = \frac{\ln 2x}{x-2} \Rightarrow f'(x) = ?$$

$$5) f(x) = \frac{x-1}{x+1} \Rightarrow f'(2) = ?$$

$$6) f(x) = ax + 4 \sin x, f'(0) = 2 \Rightarrow a = ?$$

$$7) f(x) = \frac{2x-1}{x^3}, f'(a) = 0 \Rightarrow a = ?$$

$$*** f(2) = -4, f'(2) = -5, g(2) = 1, g'(2) = -1 \Rightarrow$$

$$8) (f \times g)'(2) =$$

$$9) \left(\frac{g}{f}\right)'(2) =$$

$$10) (f - 3g)'(2) =$$

$$(11) \text{ إذا كان } f(x) = \sin x \cos x \text{ فاثبت أن } f'(x) = \cos 2x$$

$$(12) \text{ إذا كان } f(x) = e^x \sin x + \cos x \text{ فجد معادلة المماس لمنحنى } f(x) \text{ عند } x = \pi$$

4) مشتقات الاقترانات المثلثية

$f(x)$	$f'(x)$
$\tan x$	$\sec^2 x$
$\cot x$	$-\csc^2 x$
$\sec x$	$\sec x \tan x$
$\csc x$	$-\csc x \cot x$

$$f(x) = \sin x \Rightarrow f'(x) = \cos x$$

$$f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\sin x$$

$$1) f(x) = \sin x + \tan x - x^2$$

$$\Rightarrow f'(x) = \cos x + \sec^2 x - 2x$$

$$2) f(x) = \sec x + \cos x - x$$

$$\Rightarrow f'(x) = \sec x \tan x - \sin x - 1$$

$$3) f(x) = x^2 \cot x \Rightarrow f'(x) = (2x)(\cot x) + (-\csc^2 x)(x^2)$$

$$4) f(x) = \tan x \sec x \Rightarrow f'(x) = (\sec^2 x)(\sec x) + (\sec x \tan x)(\tan x) \\ = \sec^3 x + \sec x \tan^2 x$$

$$5) f(x) = \frac{e^x + \cot x}{1 + \sec x}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{(e^x - \csc^2 x)(1 + \sec x) - (\sec x \tan x)(e^x + \cot x)}{(1 + \sec x)^2}$$

$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$$

$$\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$$

أتحقق من فهمي أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

a) $f(x) = x \cot x$

b) $f(x) = \frac{\tan x}{1 + \sin x}$

a	$f'(x) = (x)(-\csc^2 x) + (\cot x)(1) = -x \csc^2 x + \cot x$
b	$f'(x) = \frac{(1 + \sin x)(\sec^2 x) - (\tan x)(\cos x)}{(1 + \sin x)^2} \\ = \frac{\sec^2 x + \sin x \sec^2 x - \sin x}{(1 + \sin x)^2}$

2 $f(x) = x^3 \sec x$ 4 $f(x) = e^x (\tan x - x)$ 8 $f(x) = \frac{1 + \sec x}{1 - \sec x}$ 11 $f(x) = (\csc x + \cot x)^{-1}$

2	$f'(x) = (x^3)(\sec x \tan x) + (\sec x)(3x^2)$ $= x^3 \sec x \tan x + 3x^2 \sec x$
4	$f'(x) = (e^x)(\sec^2 x - 1) + (\tan x - x)(e^x)$ $= e^x \tan^2 x + e^x \tan x - x e^x$
8	$f'(x) = \frac{(1 - \sec x)(\sec x \tan x) - (1 + \sec x)(-\sec x \tan x)}{(1 - \sec x)^2}$ $= \frac{2 \sec x \tan x}{(1 - \sec x)^2}$
11	$f(x) = (\csc x + \cot x)^{-1} = \frac{1}{\csc x + \cot x}$ $f'(x) = \frac{-1(-\csc x \cot x - \csc^2 x)}{(\csc x + \cot x)^2} = \frac{\csc x \cot x + \csc^2 x}{(\csc x + \cot x)^2}$ $= \frac{\csc x (\cot x + \csc x)}{(\csc x + \cot x)^2} = \frac{\csc x}{\cot x + \csc x}$

أُثبِت صحة كلِّ ممَّا يأتي مُعتمِداً أنَّ $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$ ، $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$

20 $\frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$ 21 $\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$ 22 $\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$

20	$\frac{d}{dx}(\cot x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)$ $= \frac{(\sin x)(-\sin x) - (\cos x)(\cos x)}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x}$ $= -\frac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x$
21	$\frac{d}{dx}(\sec x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\cos x}\right)$ $= \frac{-(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x} \times \frac{\sin x}{\cos x} = \sec x \tan x$
22	$\frac{d}{dx}(\csc x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sin x}\right)$ $= \frac{-(\cos x)}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin x} \times \frac{\cos x}{\sin x} = -\csc x \cot x$

أوجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

1 $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

2 $f(x) = -\csc x - \sin x$

3 $f(x) = \frac{x+c}{x+\frac{c}{x}}$

4 $f(x) = x \cot x$

5 $f(x) = 4x - x^2 \tan x$

6 $f(x) = \frac{\cos x}{x^2}$

7 $f(x) = x \left(1 - \frac{4}{x+3}\right)$

8 $f(x) = \frac{3(1 - \sin x)}{2 \cos x}$

9 $f(x) = (x+1)e^x$

1 $f'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$

2 $f'(x) = \csc x \cot x - \cos x$

3 $f'(x) = \frac{(2x+c)(x^2+c) - 2x(x^2+cx)}{(x^2+c)^2} = \frac{2cx - cx^2 + c^2}{(x^2+c)^2}$

4 $f'(x) = -x \csc^2 x + \cot x$

5 $f'(x) = 4 - x^2 \sec^2 x - 2x \tan x$

6 $f'(x) = \frac{-x^2 \sin x - 2x \cos x}{x^4} = \frac{-x \sin x - 2 \cos x}{x^3}$

7 $f'(x) = 1 - \frac{4(x+3) - 4x}{(x+3)^2} = 1 - \frac{12}{(x+3)^2}$

8 $f'(x) = \frac{-6 \cos^2 x - (3 - 3 \sin x)(-2 \sin x)}{(2 \cos x)^2} = \frac{-6 + 6 \sin x}{4 \cos^2 x}$

9 $f'(x) = (x+1)e^x + e^x = (x+2)e^x$

17 إذا كان: $f(x) = x \sec x$ ، فأثبت أن $f'(x) = \sec x (1 + x \tan x)$.

17 $f'(x) = x \sec x \tan x + \sec x = \sec x (1 + x \tan x)$

تمارين

1) $f(x) = x \sec x \Rightarrow f'(x) =$

2) $f(x) = \frac{\cot x}{1 + \csc x} \Rightarrow f'(x) =$

3) $f(x) = (\ln x^4)(\sec x) \Rightarrow f'(x) =$

المشتقات العليا

$$1) f(x) = x^4 \Rightarrow f'(x) = 4x^3$$

$$\Rightarrow f''(x) = 12x^2$$

$$\Rightarrow f'''(x) = 24x$$

$$2) y = x^2 + \sin x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2x + \cos x$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = 2 - \sin x \Rightarrow \frac{d^3y}{dx^3} = -\cos x$$

المشتقة	الأولى	الثانية	الثالثة	رتبتها n
$f^{(n)}(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$f'''(x)$	$f^{(n)}(x)$
رمزها	y'	y''	y'''	$y^{(n)}$
	$\frac{dy}{dx}$	$\frac{d^2y}{dx^2}$	$\frac{d^3y}{dx^3}$	$\frac{d^ny}{dx^n}$

أجد المشتقات الثلاث الأولى للاقتران: $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

أتحقق من فهمي 38

$$f'(x) = \frac{(x)(\cos x) - (\sin x)(1)}{x^2} = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} = \frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2}$$

$$f''(x) = \frac{(x)(-\sin x) - (\cos x)(1)}{x^2} - \frac{(x^2)(\cos x) - (\sin x)(2x)}{x^4}$$

$$= \frac{-x^2 \sin x - 2x \cos x + 2 \sin x}{x^3}$$

$$f'''(x) = \frac{-x^3 \cos x + 3x^2 \sin x + 6x \cos x - 6 \sin x}{x^4}$$

ويمكن التوصل إلى الإجابة نفسها بتحويل الاقتران إلى $x^{-1} \sin x$ وتطبيق قاعدة مشتقة ضرب اقترانين.

أدرب وأحل المسائل

أجد المشتقة الثانية لكل اقتران مما يأتي عند قيمة x المعطاة:

15 $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 4}, x = -2$

16 $f(x) = \frac{1+x}{1+\sqrt[3]{x}}, x = 8$

17 $f(x) = \frac{1-x}{1+\sqrt{x}}, x = 4$

$$15 \quad f'(x) = \frac{(x^2 + 4)(2x) - (x^2 - 4)(2x)}{(x^2 + 4)^2} = \frac{16x}{(x^2 + 4)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(x^2 + 4)^2(16) - (16x)(2)(x^2 + 4)^1(2x)}{(x^2 + 4)^4}$$

$$f''(-2) = \frac{(16)(8) - (-32)(2)(-4)}{(8)^3} = -\frac{1}{4}$$

$$16 \quad f(x) = \frac{1+x}{1+\sqrt[3]{x}} = \frac{(1+\sqrt[3]{x})(1-\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{1+\sqrt[3]{x}} = 1 - \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} + \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$$

$$f''(x) = \frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}} - \frac{2}{9}x^{-\frac{4}{3}} = \frac{2}{9\sqrt[3]{x^5}} - \frac{2}{9\sqrt[3]{x^4}}$$

$$f''(8) = \frac{2}{9\sqrt[3]{8^5}} - \frac{2}{9\sqrt[3]{8^4}} = \frac{2}{9} \left(\frac{1}{32} - \frac{1}{16} \right) = -\frac{1}{144}$$

$$17 \quad f'(x) = \frac{-\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{(1+\sqrt{x})^2} = \frac{-1}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}$$

$$f''(x) = \frac{2\sqrt{x}(2)(1+\sqrt{x})^1\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) + (1+\sqrt{x})^2\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{4x(1+\sqrt{x})^4} = \frac{2 + \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}{4x(1+\sqrt{x})^3}$$

$$f''(4) = \frac{2 + \frac{1+2}{2}}{16(1+2)^3} = \frac{7}{864}$$

ألاحظ المشتقة المعطاة في كل مما يأتي، ثم أجد المشتقة العليا المطلوبة:

23 $f''(x) = 2 - \frac{2}{x}, f'''(x)$ 24 $f'''(x) = 2\sqrt{x}, f^{(4)}(x)$ 25 $f^{(4)}(x) = 2x+1, f^{(6)}(x)$

23	$f''(x) = 2 - \frac{2}{x}$ $f'''(x) = \frac{2}{x^2}$	24	$f'''(x) = 2\sqrt{x}$ $f^{(4)}(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	25	$f^{(4)}(x) = 2x+1$ $f^{(5)}(x) = 2$ $f^{(6)}(x) = 0$
----	---	----	--	----	---

إذا كان الاقتران: $y = e^x \sin x$ ، فأجيب عن السؤالين الآتيين تبعاً: 27 أجد $\frac{dy}{dx}$ ، و $\frac{d^2y}{dx^2}$. 28 أثبت أن $\frac{d^2y}{dx^2} = 2 \frac{dy}{dx} - 2y$

27	$\frac{dy}{dx} = (e^x)(\cos x) + (\sin x)(e^x) = e^x(\cos x + \sin x)$ $\frac{d^2y}{dx^2} = e^x(-\sin x + \cos x) + e^x(\cos x + \sin x) = 2e^x \cos x$
28	$2 \frac{dy}{dx} - 2y = 2e^x(\cos x + \sin x) - 2e^x \sin x$ $= 2e^x \cos x = \frac{d^2y}{dx^2}$



مهارات التفكير العليا

تبرير: إذا كان: $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$ ، فأجيب عن السؤالين الآتيين تبعاً:

39 أثبت أن $f''(x) = \frac{6 \ln x - 5}{x^4}$ ، مُبرِّراً إجابتي. 40 أجد قيمة المقدار: $x^4 f''(x) + 4x^3 f'(x) + 2x^2 f(x) + 1$

39	$f'(x) = \frac{x^2 \left(\frac{1}{x}\right) - (\ln x)(2x)}{x^4} = \frac{1 - 2 \ln x}{x^3}$ $f''(x) = \frac{x^3 \left(-\frac{2}{x}\right) - (1 - 2 \ln x)(3x^2)}{x^6} = \frac{-5x^2 + 6x^2 \ln x}{x^6} = \frac{-5 + 6 \ln x}{x^4}$
40	$x^4 f''(x) + 4x^3 f'(x) + 2x^2 f(x) + 1$ $= x^4 \times \frac{-5 + 6 \ln x}{x^4} + 4x^3 \times \frac{1 - 2 \ln x}{x^3} + 2x^2 \times \frac{\ln x}{x^2} + 1$ $= -5 + 6 \ln x + 4 - 8 \ln x + 2 \ln x + 1 = 0$

من كتاب التمارين

18 إذا كان: $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ ، حيث: $x > 0$ ، فأجد $f'(x)$ و $f''(x)$

18	$f'(x) = \frac{x \times \frac{1}{x} - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2}$ $f''(x) = -\frac{2}{x^3} - \frac{x^2 \times \frac{1}{x} - 2x \ln x}{x^4} = \frac{-3 + 2 \ln x}{x^3}$
----	--

معدل التغير

المشتقة هي معدل تغير كمية بالنسبة إلى كمية أخرى عند لحظة معينة. فمثلاً، إيجاد $\frac{dy}{dx}$

يعني إيجاد معدل تغير y بالنسبة إلى x ، وفي كثير من المواقف الحياتية يكون التغير بالنسبة إلى الزمن.

مثال : ينتقل الدم من القلب إلى الشرايين الرئيسة والشعيرات الدموية، ثم يعود إليه

من خلال الأوردة، إذا كان ضغط الدم الانقباضي P لشخص ما (بالملمتر

الزئبقي) يتناقص باستمرار باستمرار خلال 10 ثوانٍ وفقاً للاقتران :

$$P(t) = \frac{25t^2 + 125}{t^2 + 1}, \quad 0 \leq t \leq 10$$

حيث t بالثواني، فكم يكون معدل ضغط دم هذا الشخص في الثانية الخامسة؟



$$P'(t) = \frac{\frac{d}{dt}(25t^2 + 125) \cdot (t^2 + 1) - (25t^2 + 125) \cdot \frac{d}{dt}(t^2 + 1)}{(t^2 + 1)^2}$$

$$= \frac{(50t) \cdot (t^2 + 1) - (25t^2 + 125) \cdot (2t)}{(t^2 + 1)^2}$$

$$P'(5) = \frac{(50(5))((5)^2 + 1) - (25(5)^2 + 125)(2(5))}{((5)^2 + 1)^2} = \frac{-1000}{676} \approx -1.48$$

أنتحق من فهمي يعطى عدد سكان مدينة صغيرة بالاقتران: $P(t) = \frac{500t^2}{2t+9}$

حيث t الزمن بالسنوات، و P عدد السكان بالآلاف:

(a) أجد معدل تغير عدد السكان في المدينة بالنسبة إلى الزمن.

(b) أجد معدل تغير عدد السكان في المدينة عندما $t = 12$ ، مُفسراً معنى الناتج.

$$a \quad P'(t) = \frac{(2t+9)(1000t) - (500t^2)(2)}{(2t+9)^2} = \frac{9000t + 1000t^2}{(2t+9)^2}$$

$$b \quad P'(12) = \frac{9000(12) + 1000(12)^2}{(24+9)^2} \approx 231.405$$

Abdulkadir Hasanat
078 531 88 77



أدرب وأحل المسائل



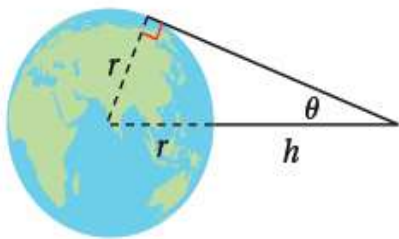
نباتات هجينة: وجد فريق بحث زراعي أنه يُمكن التعبير عن ارتفاع نبتة مُهجّنة من

نبات تباع الشمس h بالأمتار، باستعمال الاقتران: $h(t) = \frac{3t^2}{4+t^2}$ ، حيث t الزمن

بالأشهر بعد زراعة البذور. أجد معدل تغير ارتفاع النبتة بالنسبة إلى الزمن.

$$26 \quad h'(t) = \frac{(4+t^2)(6t) - (3t^2)(2t)}{(4+t^2)^2} = \frac{24t}{(4+t^2)^2}$$

الأستاذ: عبدالقادر الحسنات
078 531 88 77



أقمار صناعية: عندما ترصد الأقمار الصناعية الأرض، فإنه يُمكنها مسح جزء فقط من سطح الأرض. وبعض الأقمار الصناعية تحوي مستشعرات لقياس الزاوية θ (بالراديان) المُبيّنة في الشكل المجاور. إذا كان h يُمثّل المسافة بين القمر الصناعي وسطح الأرض بالكيلومتر، و r يُمثّل نصف قطر الأرض بالكيلومتر، فأجيب عن السؤالين الآتيين

تباعاً: 29 أثبت أن $h = r(\csc \theta - 1)$. 30 أجد مُعدّل تغيّر h بالنسبة إلى θ عندما $\theta = \frac{\pi}{6}$ rad (أفترض أن $r = 6371$ km).

$$29 \quad \csc \theta = \frac{r+h}{r} \rightarrow r+h = r \csc \theta$$

$$\rightarrow h = r(\csc \theta - 1)$$

$$30 \quad \frac{dh}{d\theta} = r(-\csc \theta \cot \theta)$$

$$\frac{dh}{d\theta} \Big|_{\theta=\frac{\pi}{6}} = 6371 \left(-\csc \frac{\pi}{6} \cot \frac{\pi}{6} \right) = 6371(-2 \times \sqrt{3}) \approx -22070 \text{ km/rad}$$

من كتاب التمارين

21 يعطى طول مستطيل بالمقدار $6t + 5$ ، ويعطى عرضه بالمقدار $\sqrt{t}$ ، حيث t الزمن بالثواني، والأبعاد بالسنتيمترات. أجد مُعدّل تغيّر مساحة المستطيل بالنسبة إلى الزمن.

$$21 \quad A = \sqrt{t}(6t + 5) = 6t^{\frac{3}{2}} + 5t^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{dA}{dt} = 9t^{\frac{1}{2}} + \frac{5}{2}t^{-\frac{1}{2}} = 9\sqrt{t} + \frac{5}{2\sqrt{t}} \text{ cm}^2/\text{s}$$

Abdulkadir Hasanat
078 531 88 77

تمارين

$$1) f(x) = \frac{x-3}{x^2+1} \Rightarrow f''(-1) = \dots \quad \boxed{\text{الجواب: -1}}$$

$$2) f(x) = x^5 \Rightarrow f^{(5)}(-1) = \dots \quad \boxed{\text{الجواب: 120}}$$

$$3) f(x) = x^2 \sin x \Rightarrow f''(x) =$$

$$4) f(x) = x^2 + \cos x \Rightarrow f''(x) =$$

$$5) f(x) = \ln x \Rightarrow f^{(4)}(2) = \dots \quad \boxed{\text{الجواب: } -\frac{3}{8}}$$

تمارين عامة

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d	c	c	a	b	b	b	b	c	b

1) $f(x) = x \cos x \Rightarrow f'(x) =$

a) $-\sin x$

b) $1 - \sin x$

c) $\cos x + x \sin x$

d) $\cos x - x \sin x$

2) $f(x) = e^x \sin x \Rightarrow f''(x) =$ a) 0

b) $2e^x \sin x$

c) $2e^x \cos x$

d) $-2e^x \cos x$

3) $f(x) = \frac{x}{\ln x} \Rightarrow f'(x) =$ a) $\frac{\ln x - 1}{2 \ln x}$ b) x c) $\frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$ d) $\frac{\ln x + 1}{(\ln x)^2}$

4) $f(x) = \frac{x}{g(x)}, g(x) \neq 0, g(3) = 1, g'(3) = -1 \Rightarrow f'(3) =$

a) 4

b) -2

c) 3

d) -3

5) $f(5) = -1, f'(5) = 1, g(5) = -2, g'(5) = 3 \Rightarrow \left(\frac{g}{f}\right)'(5) =$

a) 1

b) -1

c) $\frac{5}{4}$

d) $-\frac{1}{4}$

6) $f(x) = \frac{e^{x-1}}{x + \ln x} \Rightarrow f'(1) =$ a) 1 b) -1 c) 2 d) -2

7) $f(x) = \frac{\sin x}{\cos x + 1} \Rightarrow f'(x) =$ a) $\frac{\cos x}{1 - \sin x}$

b) $\frac{1}{1 + \cos x}$

c) $\frac{-\cos x}{\sin x + 1}$

d) $\frac{\cos x}{\sin x - 1}$

8) $f(x) = \frac{\sec x}{\sec x - 1} \Rightarrow f'(x) =$ a) 1

b) $\frac{\sin x}{(1 - \cos x)^2}$

c) $\frac{\sin x}{1 - \cos x}$

d) $\frac{\sin x}{1 - \cos^2 x}$

9) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \Rightarrow f''(-1) =$ a) 0 b) 1 c) -1 d) 3

10) $f(x) = \ln(x)^2 \Rightarrow f^{(4)}(2) =$ a) $\frac{3}{4}$ b) $-\frac{3}{4}$ c) $-\frac{1}{4}$ d) $\ln 4$

مشتقتا الضرب والقسمة

ورقة عمل (4)

ملخص الدرس الثاني ثم اختبار

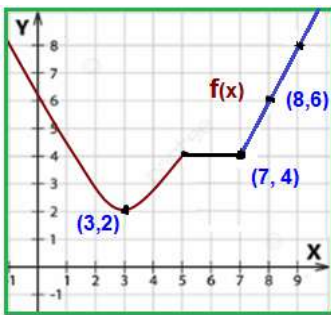
إذا كان الاقتران $f(x)$ والاقتران $g(x)$ قابليين للاشتقاق، فإن: $(fg)'(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$

إذا كان الاقتران $f(x)$ والاقتران $g(x)$ قابليين للاشتقاق، وكان $g(x) \neq 0$ ، فإن: $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x) \times f'(x) - f(x) \times g'(x)}{(g(x))^2}$

$f^{(n)}(x)$	$f'''(x)$	$f''(x)$	$f'(x)$
$\frac{d^n y}{dx^n}$	$\frac{d^3 y}{dx^3}$	$\frac{d^2 y}{dx^2}$	$\frac{dy}{dx}$
$y^{(n)}$	y'''	y''	y'

$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$	$\frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$
$\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$	$\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$

*** بالنسبة للمشتقة الأولى لنقطة من خلال الرسم ، على الأغلب هناك ثلاثة احتمالات :



(1) أن تقع النقطة على خط مستقيم : عندها المشتقة = ميل ذلك المستقيم

$$f'(9) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6-4}{8-7} = 2$$

(2) أن تقع النقطة على رأس مذهب : عندها المشتقة = غير موجودة مثل $f'(7)$, $f'(5)$



(3) أن تقع النقطة على مستقيم أفقي أو تكون قيمة قصوى (صغرى أو عظمى) :

عندها المشتقة = صفر : $f'(3) = 0$, $f'(6) = 0$

1) $f(x) = x^3 \cos x \Rightarrow f'(x) = ?$

2) $f(x) = x^2 \ln(x^2) \Rightarrow f'(x) = ?$

3) $f(3) = 2$, $f'(3) = -2$, $g(3) = -5$, $g'(3) = 4 \Rightarrow (f \times g)'(3) = ?$

4) $f(2) = -3$, $f'(2) = -5$, $g'(2) = 2$, $(f \times g)'(2) = 8 \Rightarrow g(2) = ?$

$$5) f(x) = \frac{x^2}{1 - \cos x} \Rightarrow f'(x) = ?$$

$$6) f(1) = 4, f'(1) = -1, g(1) = -3, g'(1) = 1 \Rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)'(1) = ?$$

$$7) f(8) = 5, f'(8) = -2, g(8) = -8, g'(8) = -1 \Rightarrow$$

$$a) (f \times g)'(8) = ? \quad b) \left(\frac{f}{g}\right)'(8) = ? \quad c) (2f - 3g)'(8) \quad d) \left(\frac{3}{g}\right)'(8) = ?$$

$$8) f(x) = x^2 + 3 \cot x - 2 \sec x \Rightarrow f'(x) =$$

$$9) f(x) = \frac{\csc x}{x + \frac{3}{x}} \Rightarrow f'(x) =$$

$$10) f(x) = \ln x \Rightarrow f^{(3)}(2) = ?$$

من أسئلة الوزارة 2023 / العلمي

(2) إذا كان: $f(x) = (x - 1) \cos x$ ، فإن $f'(x)$ هي:

- a) $\cos x + (1 - x) \sin x$ c) $\cos x (1 - x) + \sin x$
b) $\cos x (x - 1) + \sin x$ d) $\cos x + (x - 1) \sin x$

(4) إذا كان: $y = \frac{\sqrt{2}}{\sin x}$ ، فإن $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=\frac{\pi}{4}}$ هي: a) $\sqrt{2}$ b) 2 c) $-\sqrt{2}$ d) -2

(5) إذا كان: $f'(x) = \frac{2(x^3-1)}{x^3}$ ، $x \neq 0$ ، فإن $f^{(3)}(x)$ هي:

- a) $-120x^6$ b) $\frac{6}{x^4}$ c) $-24x^5$ d) $-\frac{24}{x^5}$

من أسئلة الوزارة 2023 تكميلي / العلمي

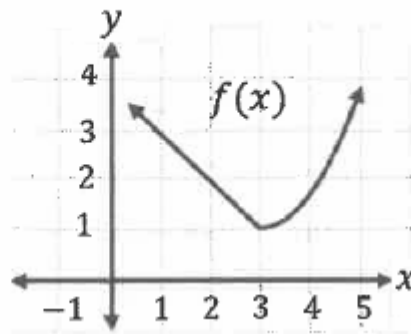
(4) إذا كان: $f(x) = \frac{-1}{6x-x^2}$ ، فإن $f'(2)$ هي: a) $-\frac{1}{4}$ b) $-\frac{1}{32}$ c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{1}{32}$

(5) إذا كان: $f(x) = \frac{x^2-4}{2x}$ ، فإن $f''(-1)$ هي: a) 4 b) -4 c) $\frac{5}{2}$ d) $-\frac{3}{2}$

من أسئلة الوزارة 2024 / العلمي

(4) يُمثل الشكل الآتي منحنى الاقتران f ، إذا كان: $g(x) = \frac{-1}{f(x)}$ ، فإن $g'(2)$ هي:

- a) $\frac{1}{2}$ c) $-\frac{1}{4}$
b) $\frac{1}{4}$ d) $-\frac{1}{2}$



(5) إذا كان: $f(x) = \csc x + e^2$ ، فإن $f''\left(\frac{\pi}{4}\right)$ هي:

- a) $\sqrt{2}$ b) $\sqrt{2} + 2$ c) $3\sqrt{2} + 2$ d) $3\sqrt{2}$

(6) إذا كان: $f(x) = e^x - 3x$ ، فإن الإحداثي x للنقطة التي يكون عندها المماس موازيًا للمستقيم

- الذي معادلته: $4x + 2y + 2 = 0$ ، هو: a) $\ln 5$ b) $\ln 7$ c) 0 d) 1

من أسئلة الوزارة 2023 / الصناعي

7- إذا كان: $f(x)$ و $g(x)$ اقترانين قابلين للاشتقاق عند $x = 1$ ، وكان:
 $f(1) = -1, f'(1) = 5, g(1) = 1, g'(1) = 2$ ، فإن قيمة $(fg)'(1)$ هي:

- a) 3 b) -7 c) 10 d) -3

9- إذا كان: $f(x) = \frac{2x}{5x-1}$ ، فإن قيمة $f'(1)$ هي:

- a) $\frac{1}{8}$ b) $-\frac{1}{8}$ c) $\frac{1}{4}$ d) $-\frac{1}{4}$

b) جد $\frac{dy}{dx}$ لكل ممّا يأتي عند القيمة المعطاة إزاء كل منها:
 2) $y = \frac{2}{3+\sqrt{x}}$ ، $x = 4$

من أسئلة الوزارة 2023 تكميلي / الصناعي

3- إذا كان: $f(x)$ ، $g(x)$ اقترانين قابلين للاشتقاق عند $x = 2$ ، وكان: $g(2) = -3, g'(2) = -4$ ، $f(2) = 3, f'(2) = -2$ ، فإن $(fg)'(2)$ هي: a) -18 b) 18 c) -6 d) 6

4- إذا كان: $f(x) = 6 - \frac{1}{e^x}$ ، فإن $f'(x)$ هي: a) $\frac{1}{e^{2x}}$ b) $\frac{-1}{e^{2x}}$ c) $\frac{-1}{e^x}$ d) $\frac{1}{e^x}$

a) جد $\frac{dy}{dx}$ لكل ممّا يأتي عند القيمة المعطاة إزاء كل منها: $x = 0$ ، $y = \frac{e^x + x^2}{\cos x}$ 1)

من أسئلة الوزارة 2024 / الصناعي

5) إذا كان: f, g اقترانين قابلين للاشتقاق عند $x = -1$ ، وكان: $f(-1) = 3, f'(-1) = 2$ ، $g(-1) = 3, g'(-1) = 6$ ، فإن $\left(\frac{f}{g}\right)'(-1)$ هي:

- a) $\frac{4}{3}$ b) $-\frac{4}{3}$ c) $\frac{2}{3}$ d) $-\frac{2}{3}$

7) إذا كان: $f(x) = x \tan x$ ، فإن قيمة $f'(\pi)$ هي: a) π b) $\pi - 1$ c) $-\pi$ d) $1 - \pi$

a) جد $\frac{dy}{dx}$ لكل ممّا يأتي عند القيمة المعطاة إزاء كل منها: $x = 0$ ، $y = \frac{\sin x}{1+\cos x}$ 2)

اختبار الدرس الثاني

السؤال الأول : اختر رمز الإجابة الصحيحة فيما يأتي :

(1) إذا كان $f(x) = x e^x$, فإن $f'(0)$ =

- a) 1 b) 0 c) e^2 d) e

(2) إذا كان $f(x) = \frac{x}{x+1}$, فإن $f'(2)$ =

- a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{9}$ c) $\frac{5}{9}$ d) $-\frac{1}{9}$

(3) إذا كان $f(x) = \ln x^2$, فإن $f''(x)$ يساوي :

- a) $2\ln x$ b) $-\frac{2}{x^2}$ c) $\frac{2}{x}$ d) $\frac{2}{x^2}$

(4) إذا كان $f(x) = \frac{2x-8}{e^x}$, فإن قيم $f(x)$ التي عندها مماس أفقي هي:

- a) 4 b) -2 c) 5 d) 5,0

(5) إذا كان $f(x) = (x^2-1)(x^2+1)$ فإن $f'(x)$ تساوي :

- a) $4x^2$ b) $-4x$ c) $4x$ d) $4x^3$

(6) إذا كان $f(x) = \sin x \cos x$ فإن $f'(x)$ تساوي :

- a) $\sin 2x$ b) $\cos 2x$ c) 1 d) $-\sin x \cos x$

$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

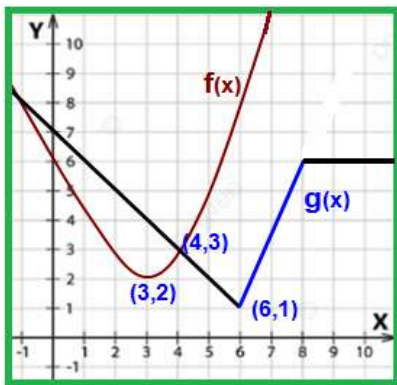
***معتمدا المعلومات الآتية ، أجب عن الأسئلة (7، 8، 9): $f(1) = 5, f'(1) = -2, g(1) = 2, g'(1) = 4$

(7) $(f g)'(1)$ تساوي: -8 -24 -2 16

(8) $(\frac{f}{g})'(1)$ تساوي: -6 -4 4 6

(9) $(3f - g)'(1)$ تساوي: -6 -10 -8 -2

معتمداً الشكل المجاور والذي يمثل منحنيي الاقترانين ، أجب عن الأسئلة (10 - 16)



10) $g'(6)$ تساوي: غير موجودة (d) 5 (c) 0 (b) 3 (a)

11) $g'(9)$ تساوي: غير موجودة (d) 5 (c) 0 (b) 3 (a)

12) $f'(3)$ تساوي : غير موجودة (d) 2 (c) 0 (b) 4 (a)

13) $g'(2)$ تساوي : 1 (d) 5 (c) 0 (b) -1 (a)

Abdulkadir Hasanat
078 531 88 77



14) $(f g)'(3)$ تساوي : -2 (d) 0 (c) 2 (b) 4 (a)

15) $(\frac{g}{f})'(3)$ تساوي : $-\frac{1}{2}$ (d) 0 (c) $\frac{1}{2}$ (b) $-\frac{1}{4}$ (a)

16) $g''(5)$ تساوي : غير موجودة (d) 1 (c) 0 (b) 2 (a)

17) إذا كان $f(2) = 4, g(2) = 1, g'(2) = 2$ وكانت $(f g)'(2) = 5$ فإن $f'(2) =$ (17)
a) 2 b) 13 c) -3 d) -2

18) إذا كان $f(3) = g'(3) = 4, f'(3) = 8$ وكانت $(\frac{f}{g})'(3) = 1$ فإن $g(3) =$ (18)
a) -4 b) 8 c) -4, 4 d) 4

19) إذا كان $f(x) = x^3, g(x) = x^2, g'(-1) = 2, g(-1) = -2, f'(-1) =$ (19)
a) -4 b) -8 c) -6 d) 8

20) يتحرك جسم في مسار مستقيم حيث يُعطى موقعه بالاقتران : $s(t) = t^2 e^{-t}$ (20)
فإن قيمة (t) التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لحظي بعد حركته هي :
a) 2 b) 1 c) 0.5 d) 1.5

Abdulkadir Hasanat
078 531 88 77

(21) إذا كان $f(x) = \frac{1}{x} + x$, فإن $f'(3)$ يساوي :

- a) 0 b) $\frac{8}{9}$ c) $-\frac{8}{9}$ d) $\frac{2}{9}$

(22) إذا كان $f(x) = \frac{1}{x} + x$, فإن $f''(x)$ يساوي :

- a) 0 b) $\frac{2}{x}$ c) $-\frac{2}{x^3}$ d) $\frac{2}{x^3}$

(23) إذا كان $f(x) = e^x + \ln x$, فإن $f'(1)$ يساوي :

- a) $e + 1$ b) e c) 0 d) $\frac{1}{e}$

(24) إذا كان $f(x) = e^x \ln x$, فإن $f'(1)$ يساوي :

- a) $e + 1$ b) e c) 0 d) $\frac{1}{e}$

(25) إذا كان $f(x) = e^x \sin x$, فإن $f'(0)$ يساوي :

- a) 1 b) $2e$ c) 0 d) 2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	b	b	c	d	b	a	d	c	d

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
b	b	a	d	d	b	c	d	b	a

21	22	23	24	25
b	d	a	b	a

السؤال الثاني: إذا كان عدد السكان في بلدة ما يُعطى بالعلاقة $P(t) = \frac{100 t^2}{2 t + 5}$ حيث (t) الزمن بالسنوات

جد معدل التغير في عدد السكان بعد (10) سنوات

السؤال الثالث: إذا كان $f(x) = \cot x$ فأثبت أن $f'(x) = -\csc^2 x$

السؤال الرابع : جد المشتقة الثانية لكل من الاقترانات الآتية عند قيمة (x) المعطاة :

1) $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$, $x = -2$

2) $f(x) = x \sin x$, $x = \pi$

Abdulkadir Hasanat
078 531 88 77

3) $f(x) = x^2 \ln x$, $x = e$

السؤال الخامس : جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران $f(x) = \frac{x^2}{\ln x}$ عند $x = e$

السؤال السادس : جد معادلة العمودي على المماس لمنحنى $f(x) = \frac{x-2}{1+e^x}$ عند النقطة $(0, -1)$

السؤال السابع :

إذا كان $f(x) = \frac{g(x)}{x^2 h(x)}$, $f(1) = g'(2) = 2$, $g(1) = 8$, $f'(1) = 5$, فجد قيمة $h'(1)$

الجواب : 17 -

السؤال الثامن : إذا كان $f(x) = x^n$, $f''(x) = 12x^{n-2}$, فجد قيمة n

الجواب : 4 , 3 -



قاعدة السلسلة The Chain Rule

الدرس 3

(1) قاعدة السلسلة

$$y = u^4, \quad u = 5x^3 - 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

$$= 4u^3 \times (15x^2 - 2) = 4(5x^3 - 2x)^3 (15x^2 - 2)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

$$y = (2x - 5)^{10}$$

$$u = 2x - 5 \Rightarrow y = u^{10}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

$$= 10u^9 \times 2$$

$$= 20(2x - 5)^9$$

$$y = e^{x^3}$$

$$u = x^3 \Rightarrow y = e^u$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = e^u \times 3x^2$$

$$= 3x^2 e^{x^3}$$

$$y = \cos u, \quad u = x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\sin u \times 2x$$

$$= -2x \sin x^2$$

$$y = f(u), u = g(t), t = h(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dt} \times \frac{dt}{dx}$$

$$y \rightarrow u \rightarrow t \rightarrow x$$

وبشكل عام، يمكن تكرار القاعدة أكثر من مرة

$$f(x) = (goh)(x) = g(h(x)) \Rightarrow f'(x) = (goh)'(x) = g'(h(x)) \times h'(x)$$

بشرط قابلية الاشتقاق لكل من $h(x), g(x)$

مشتقة الاقتران المركب $f(g(x))$ هي : حاصل ضرب مشتقة الاقتران الخارجي f عند الاقتران الداخلي $g(x)$ في مشتقة الاقتران الداخلي $g(x)$

$$1) f(x) = x^3 + 1, \quad g(x) = x^2 - 1 \Rightarrow (fog)'(-2) = ?$$

$$f'(x) = 3x^2, \quad g'(x) = 2x$$

$$g(-2) = 3, \quad g'(-2) = -4, \quad f'(3) = 27$$

$$\Rightarrow (fog)'(-2) = f'(g(-2)) \times g'(-2) = f'(3) \times (-4) = 27 \times (-4) = -108$$

$$2) f(x) = \sin x, \quad g(x) = x^2 - 4 \Rightarrow (fog)'(2) = ?$$

$$f'(x) = \cos x, \quad g'(x) = 2x, \quad g(2) = 0$$

$$\Rightarrow (fog)'(2) = f'(g(2)) \times g'(2) = f'(0) \times 2(2) = 1 \times 4 = 4$$

3) $f(x) = \ln x$, $g(x) = x^3 + 1 \Rightarrow (fog)'(x) = ?$

$$f'(x) = \frac{1}{x} \text{ , } g'(x) = 3x^2$$

$$\Rightarrow (fog)'(2) = f'(g(x)) \times g'(x) = f'(x^3 + 1) \times 3x^2 = \frac{1}{x^3 + 1} \times 3x^2 = \frac{3x^2}{x^3 + 1}$$

4) $f(5) = 3$, $f'(6) = 2$, $g(5) = 6$, $g'(5) = 4 \Rightarrow (fog)'(5) = ?$

$$(fog)'(5) = f'(g(5)) \times g'(5) = f'(6) \times 4 = (2)(4) = 8$$

5) $f'(5) = 6$, $g(7) = 5$, $(fog)'(7) = -12 \Rightarrow g'(7) = ?$

$$\Rightarrow (fog)'(7) = f'(g(7)) \times g'(7) = f'(5) \times g'(7) = -12$$

$$\Rightarrow 6 \times g'(7) = -12 \Rightarrow g'(7) = -2$$

6) $f'(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$, $g'(1) = 3$, $g(1) = 2 \Rightarrow (fog)'(1) = ?$

$$(fog)'(1) = f'(g(1)) \times g'(1)$$

$$= f'(2) \times 3 = \frac{2}{(2)^2 + 1} \times 3 = \frac{6}{5}$$

7) $f(x) = 3 \tan x$, $g(x) = \frac{2x}{x^2 + 1} \Rightarrow (gof)'(\frac{\pi}{4}) = ?$

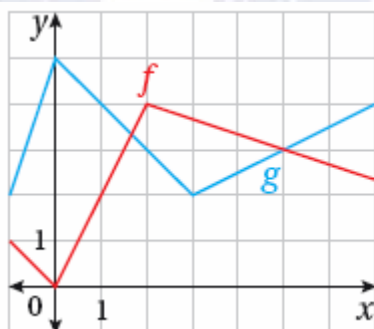
$$f'(x) = 3 \sec^2 x \text{ , } g'(x) = \frac{2 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2}$$

$$(gof)'(\frac{\pi}{4}) = g'(f(\frac{\pi}{4})) \times f'(\frac{\pi}{4})$$

$$= g'(3) \times 6 = \frac{2 - 2(3)^2}{((3)^2 + 1)^2} \times 6 = \frac{-16 \times 6}{100} = \frac{-96}{100}$$

23 إذا كان: $A(x) = f(g(x))$ ، وكان: $f(-2) = 8, f'(-2) = 4, f'(5) = 3, g(5) = -2, g'(5) = 6$ ، فأجد $A'(5)$.

$$\begin{aligned} 23 \quad & A(x) = f(g(x)) \\ & A'(x) = f'(g(x)) \times g'(x) \\ & A'(5) = f'(g(5)) \times g'(5) = f'(-2) \times g'(5) = 4 \times 6 = 24 \end{aligned}$$



يُبين الشكل المجاور منحنىي الاقترانين $f(x)$ و $g(x)$. إذا كان:
 $h(x) = f(g(x))$ ، وكان: $p(x) = g(f(x))$ ، فأجد كُلًّا ممَّا يأتي:

40 $h'(1)$

41 $p'(1)$

40	$\begin{aligned} h(x) &= f(g(x)) \\ h'(x) &= f'(g(x)) \times g'(x) \\ h'(1) &= f'(g(1)) \times g'(1) = f'(4) \times g'(1) \end{aligned}$ $g'(1)$ ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(0, 5)$ و $(3, 2)$ ويساوي -1 $f'(4)$ ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(2, 4)$ و $(5, 3)$ ويساوي $-\frac{1}{3}$ $h'(1) = -\frac{1}{3} \times -1 = \frac{1}{3}$
41	$\begin{aligned} p(x) &= g(f(x)) \\ p'(x) &= g'(f(x)) \times f'(x) \\ p'(1) &= g'(f(1)) \times f'(1) = g'(2) \times f'(1) \end{aligned}$ $g'(2)$ ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(0, 5)$ و $(3, 2)$ ويساوي -1 $f'(1)$ ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(2, 4)$ و $(0, 0)$ ويساوي 2 $p'(1) = -1 \times 2 = -2$

أجد $(f \circ g)'(x)$ عند قيمة x المعطاة في كلِّ ممَّا يأتي:

28 $f(u) = u^5 + 1, u = g(x) = \sqrt{x}, x = 1$ 29 $f(u) = u + \frac{1}{\cos^2 u}, u = g(x) = \pi x, x = \frac{1}{4}$

28	$\begin{aligned} f(u) &= u^5 + 1 \Rightarrow f'(u) = 5u^4 \\ u &= g(x) = \sqrt{x} \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ (f \circ g)'(1) &= f'(g(1)) \times g'(1) = f'(1) \times \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \end{aligned}$
29	$\begin{aligned} f(u) &= u + \frac{1}{\cos^2 u} \Rightarrow f'(u) = 1 + \frac{2 \cos u \sin u}{\cos^4 u} = 1 + 2 \sec^2 u \tan u \\ u &= g(x) = \pi x \Rightarrow g'(x) = \pi \\ (f \circ g)'(\frac{1}{4}) &= f'(g(\frac{1}{4})) \times g'(\frac{1}{4}) = f'(\frac{\pi}{4}) \times \pi = 5\pi \end{aligned}$

(2) نتائج قاعدة السلسلة : هناك خمس نتائج لقاعدة السلسلة ، وهي :

$$f(x) = \sin(3x-2) \leftarrow \text{الزاوية}$$

(1) مشتقة الزاوية للاقتران المثلثي :

عندما تكون الزاوية في الاقتران المثلثي تختلف عن (x) ، دائما **نضرب في مشتقتها** بعد اشتقاق الاقتران المثلثي

$$f(x) = \sin(g(x)) \Rightarrow f'(x) = \cos(g(x)) \times (g'(x))$$

وكذلك بقية الاقترانات المثلثية

بشروط قابلية الاشتقاق للاقتران $g(x)$

خطأ شائع

$$1) f(x) = \sin 4x^3 \Rightarrow f'(x) = \cos 4x^3 (12x^2) , f'(x) = \cos 12x^2$$

$$2) f(x) = 4 \cos(Lnx) \Rightarrow f'(x) = -4 \sin(Lnx) \left(\frac{1}{x}\right)$$

$$3) f(x) = x \tan(e^x) \Rightarrow f'(x) = (1)(\tan(e^x)) + \sec^2(e^x) \times (e^x)(x)$$

$$4) f(x) = \csc(\sin x) \Rightarrow f'(x) = -\csc(\sin x) \cot(\sin x) \times (\cos x)$$

$$5) f(x) = \cot(1-x^2) \Rightarrow f'(x) =$$

$$6) f(x) = \sec(xe^x) \Rightarrow f'(x) =$$

$$7) f(x) = x^2 \sin(2x) \Rightarrow f'(x) =$$

$$8) f(x) = \cos(\tan(x^3)) \Rightarrow f'(x) =$$

$$9) f(x) = \sin 2x \cos 3x \Rightarrow f'(x) =$$

$$10) f(x) = \frac{\tan 5x}{1 - \sec 2x} \Rightarrow f'(x) =$$

ملاحظة: عندما تكون القوة في الاقتران الأسّي تختلف عن (x)، نضرب في مشتقتها بعد (اشتقاق) الاقتران الأسّي

$$f(x) = e^{g(x)} \Rightarrow f'(x) = e^{g(x)} \times (g'(x))$$

بشرط قابلية الاشتقاق للاقتران $g(x)$

$$1) f(x) = 7e^{3x-1} \Rightarrow f'(x) = 7e^{3x-1} (3)$$

$$2) f(x) = e^{x^2+3x} \Rightarrow f'(x) = e^{x^2+3x} (2x+3)$$

$$3) f(x) = 2x e^{x^3} \Rightarrow f'(x) = (2)(e^{x^3}) + (e^{x^3})(3x^2)(2x) \\ \Rightarrow f'(0) = (2)(1) + (1)(0)(0) = 2$$

$$4) f(x) = \frac{3}{x^2} e^{-x^3} \Rightarrow f'(x) =$$

$$5) f(x) = x^2 e^{\frac{1}{x}} \Rightarrow f'(x) =$$

$$6) f(x) = e^{\sin x} \cos x \Rightarrow f'(x) =$$

$$7) f(x) = e^{x^2+\tan 4x} \sec 2x \Rightarrow f'(x) =$$

$$8) f(x) = \sqrt[3]{e^{x^3 \sec 3x}} \Rightarrow f'(x) =$$

مشتقة ما بداخل اللوغاريتم
ما بداخل اللوغاريتم

(3) مشتقة الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي (Ln()) :
عندما يكون ما بداخل اللوغاريتم يختلف عن (x) ، تكون المشتقة =

$$f(x) = \ln(g(x)) \Rightarrow f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

g(x) > 0 , قابل للاشتقاق

$$1) f(x) = \ln(x^2 - 5x + 7) \Rightarrow f'(x) = \frac{2x - 5}{x^2 - 5x + 7}$$

$$2) f(x) = \ln(\sin 3x) \Rightarrow f'(x) = \frac{3 \cos 3x}{\sin 3x} = 3 \cot 3x$$

$$3) f(x) = x \ln(x^2 + 1) \Rightarrow f'(x) = (1)(\ln(x^2 + 1)) + \left(\frac{2x}{x^2 + 1}\right)(x)$$

$$4) f(x) = \ln(x^2 + 4) \Rightarrow f''(x) =$$

$$5) f(x) = \ln(\sec 2x) \Rightarrow f'(x) =$$

$$6) f(x) = \cot(x^2 + 1) + e^{x^2 + 2} + \ln(x^2 + x) \Rightarrow f'(x) =$$

$$7) f(x) = \ln(x^2 \tan 3x) \Rightarrow f'(x) =$$

$$8) f(x) = \ln(e^{\sin 2x \cos 3x} + \csc 4x) \Rightarrow f'(x) =$$

$$9) f(x) = \ln(x^2 + \tan 3x) \Rightarrow f'(x) =$$

$$10) f(x) = \ln(x^4 \cos 5x) \Rightarrow f'(x) =$$

(4) قاعدة سلسلة القوة : (القوس المرفوع إلى قوة)

عند اشتقاق القوس المرفوع إلى قوة ، نشتق القوة أولاً ثم نضرب في مشتقة ما بداخل القوس

$$f(x) = (g(x))^n \Rightarrow f'(x) = n (g(x))^{n-1} (g'(x))$$

بشرط قابلية الاشتقاق للاقتران $g(x)$

$$1) f(x) = (2x + 5)^3 \Rightarrow f'(x) = 3(2x + 5)^2 (2)$$

$$2) f(x) = (2x^3 + 5x)^7 \Rightarrow f'(x) = 7(2x^3 + 5x)^6 (6x^2 + 5)$$

$$3) f(x) = \sqrt[4]{(x^2 + 5)^3} \Rightarrow f(x) = (x^2 + 5)^{\frac{3}{4}} \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{4} (x^2 + 5)^{-\frac{1}{4}} (2x)$$

$$4) f(x) = \sqrt{\sin x + 1} \Rightarrow f(x) = (\sin x + 1)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2} (\sin x + 1)^{-\frac{1}{2}} (\cos x)$$

$$5) f(x) = (x^2 + \sin 3x)^4 \Rightarrow f'(x) =$$

$$6) f(x) = \sqrt[7]{x^3 \sin 2x - 3} \Rightarrow f'(x) =$$

$$7) y = \frac{\sec x^2}{\sqrt{x^2 + 4}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} =$$

ملاحظة : عند وجود اقتران مثلثي مرفوع إلى قوة، يُفضل كتابته على شكل قوس مرفوع إلى قوة ثم الاشتقاق

$$\sin^2 x = (\sin x)^2$$

$$\cos^3 8x = (\cos 8x)^3$$

$$\tan^5(2x + 1)^2 = (\tan(2x + 1)^2)^5$$

$$1) y = \cot^3 x^2 = (\cot x^2)^3 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 3(\cot x^2)^2 (-\csc^2 x^2)(2x)$$

$$2) f(x) = \sin^4(x^2 + 1) = (\sin(x^2 + 1))^4 \Rightarrow f'(x) = 4(\sin(x^2 + 1))^3 (\cos(x^2 + 1))(2x)$$

$$3) f(x) = \tan^2(\sin 5x) = (\tan(\sin 5x))^2 \\ \Rightarrow f'(x) = 2 \tan(\sin 5x) (\sec^2(\sin 5x)) (\cos 5x) (5)$$

(5) حالة خاصة في مشتقة الجذر التربيعي :

$$f(x) = \sqrt{g(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$$

مشتقة الجذر التربيعي: $\frac{\text{مشتقة ما بداخل الجذر}}{2 \times \text{الجذر}}$

$g(x) > 0$, قابل للاشتقاق

$$1) f(x) = \sqrt{x^2 + \sec x} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x \tan x \sec x}{2\sqrt{x^2 + \sec x}}$$

$$2) f(x) = \sqrt{x^3 \sin 2x} \Rightarrow f'(x) = \frac{(3x^2)(\sin 2x) + (\cos 2x)(2)(x^3)}{2\sqrt{x^3 \sin 2x}}$$

$$3) f(x) = \sqrt{x^2 \cot 2x} \Rightarrow f'(x) =$$

$$4) f(x) = \sqrt{\sin 2x \cos 3x} \Rightarrow f'(x) =$$

$$5) f(x) = \sqrt{8 - x^3} \Rightarrow f'(-1) = ?$$

ملخص نتائج السلسلة

من نتائج قاعدة السلسلة	Abdulkadir Hasanat 078 531 88 77	الزاوية $f(x) = \sin(3x-2)$
1	$\frac{d}{dx}(\sin g(x)) = \cos(g(x)) \times g'(x)$	مشتقة الاقتران المثلثي : نضرب في مشتقة الزاوية
2	$\frac{d}{dx}(e^{g(x)}) = e^{g(x)} \times g'(x)$	مشتقة الاقتران الأسّي : نضرب في مشتقة القوة
3	$\frac{d}{dx}(\ln g(x)) = \frac{g'(x)}{g(x)}$	مشتقة الاقتران اللوغاريتمي : $\frac{\text{مشتقة ما بداخل اللوغاريتم}}{\text{ما بداخل اللوغاريتم}}$
4	$\frac{d}{dx}(g(x))^n = n(g(x))^{n-1} \times g'(x)$	مشتقة القوس المرفوع لقوة : نضرب في مشتقة ما بداخل القوس
5	$\frac{d}{dx}(\sqrt{g(x)}) = \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$	مشتقة الجذر التربيعي : $\frac{\text{مشتقة ما بداخل الجذر}}{2 \times \text{الجذر نفسه}}$

أتحقق من فهمي 41 أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

a) $f(x) = \tan 3x^2$ b) $f(x) = e^{\ln x}$ c) $f(x) = \ln (\cot x)$

a	$f(x) = \tan 3x^2 \Rightarrow f'(x) = 6x \sec^2(3x^2)$	أتحقق من فهمي صفحة 41
b	$f(x) = e^{\ln x} = x \Rightarrow f'(x) = 1$	
c	$f(x) = \ln \cot x \Rightarrow f'(x) = \frac{-\csc^2 x}{\cot x}$	

أتحقق من فهمي 42 أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

a) $f(x) = \sqrt[5]{(x^2 - 1)^2}$ b) $f(x) = \sqrt{\cos x}$ c) $f(x) = (\ln x)^5$

a	$f'(x) = \frac{2}{5}(x^2 - 1)^{-\frac{3}{5}}(2x) = \frac{4x}{5\sqrt[5]{(x^2 - 1)^3}}$	أتحقق من فهمي صفحة 42	
b	$f'(x) = \frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}$	c	$f'(x) = 5(\ln x)^4 \left(\frac{1}{x}\right) = \frac{5(\ln x)^4}{x}$

أتحقق من فهمي 45 أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

a) $f(x) = \cos^2(7x^3 + 6x - 1)$ b) $f(x) = (2 + (x^2 + 1)^4)^3$

a	$f(x) = \cos^2(7x^3 + 6x - 1) = (\cos(7x^3 + 6x - 1))^2$ $f'(x) = 2(\cos(7x^3 + 6x - 1))^1(-\sin(7x^3 + 6x - 1)(21x^2 + 6))$ $= -2(21x^2 + 6) \sin(7x^3 + 6x - 1) \cos(7x^3 + 6x - 1)$ $= -(21x^2 + 6) \sin 2(7x^3 + 6x - 1)$
b	$f(x) = (2 + (x^2 + 1)^4)^3$ $f'(x) = 3(2 + (x^2 + 1)^4)^2(4(x^2 + 1)^3(2x))$ $= 24x(x^2 + 1)^3(2 + (x^2 + 1)^4)^2$

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي: 53 أدرّب وأحلّ المسائل

- 1 $f(x) = e^{4x+2}$
- 2 $f(x) = 50e^{2x-10}$
- 3 $f(x) = \cos(x^2 - 3x - 4)$
- 4 $f(x) = 10x^2 e^{-x^2}$
- 5 $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x}}$
- 6 $f(x) = x^2 \tan \frac{1}{x}$
- 7 $f(x) = 3x - 5 \cos(\pi x)^2$
- 8 $f(x) = \ln\left(\frac{1+e^x}{1-e^x}\right)$
- 9 $f(x) = (\ln x)^4$
- 10 $f(x) = \sin \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{\sin x}$
- 11 $f(x) = \sqrt[5]{x^2 + 8x}$
- 15 $f(x) = \left(\frac{\sin x}{1 + \cos x}\right)^2$
- 17 $f(x) = e^{\sin 2x} + \sin(e^{2x})$
- 18 $f(x) = \tan^4(\sec(\cos x))$

1	$f(x) = e^{4x+2}$ $f'(x) = 4e^{4x+2}$	2	$f(x) = 50e^{2x-10}$ $f'(x) = 100e^{2x-10}$
3	$f(x) = \cos(x^2 - 3x - 4)$ $f'(x) = -(2x - 3) \sin(x^2 - 3x - 4)$ $= (3 - 2x) \sin(x^2 - 3x - 4)$		
4	$f(x) = 10x^2 e^{-x^2}$ $f'(x) = (10x^2)(-2xe^{-x^2}) + (e^{-x^2})(20x) = 20xe^{-x^2}(1 - x^2)$		
5	$f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x}} = \sqrt{1 + \frac{1}{x}} \Rightarrow f'(x) = \frac{-\frac{1}{x^2}}{2\sqrt{1 + \frac{1}{x}}} = -\frac{1}{2x^2\sqrt{1 + \frac{1}{x}}}$		
6	$f'(x) = (x^2) \left(-\frac{1}{x^2} \sec^2 \frac{1}{x} \right) + \left(\tan \frac{1}{x} \right) (2x)$ $= -\sec^2 \frac{1}{x} + 2x \tan \frac{1}{x}$		

7	$f'(x) = 3 + 5(2)(\pi x)(\pi) \sin(\pi x)^2 = 3 + 10\pi^2 x \sin(\pi x)^2$
8	$f(x) = \ln \left(\frac{1+e^x}{1-e^x} \right) = \ln(1+e^x) - \ln(1-e^x)$ $f'(x) = \frac{e^x}{1+e^x} + \frac{e^x}{1-e^x} = \frac{2e^x}{1-e^{2x}}$
9	$f'(x) = \frac{4}{x} (\ln x)^3$
10	$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \cos \sqrt[3]{x} + \frac{\cos x}{3\sqrt[3]{\sin^2 x}}$
11	$f(x) = \sqrt[5]{x^2 + 8x} = (x^2 + 8x)^{\frac{1}{5}}$ $f'(x) = \frac{2x + 8}{5\sqrt[5]{(x^2 + 8x)^4}}$

15	$f(x) = \left(\frac{\sin x}{1 + \cos x} \right)^2$ $f'(x) = 2 \left(\frac{\sin x}{1 + \cos x} \right)^1 \times \frac{(1 + \cos x)(\cos x) - (\sin x)(-\sin x)}{(1 + \cos x)^2}$ $= 2 \times \frac{\sin x}{1 + \cos x} \times \frac{1}{1 + \cos x}$ $= \frac{2 \sin x}{(1 + \cos x)^2}$
17	$f(x) = e^{\sin 2x} + \sin(e^{2x})$ $f'(x) = 2e^{\sin 2x} \cos 2x + 2e^{2x} \cos(e^{2x})$
18	$f(x) = \tan^4(\sec(\cos x)) = (\tan(\sec(\cos x)))^4$ $f'(x) = 4(\tan(\sec(\cos x)))^3 \sec^2(\sec(\cos x)) \times \sec(\cos x) \tan(\cos x)$ $\times (-\sin x)$ $= -4 \tan^3(\sec(\cos x)) \sec^2(\sec(\cos x)) \sec(\cos x) \tan(\cos x) \sin x$

24 إذا كان: $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ ، فأثبت أن $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{(x^2 + 1)^3}}$

$$\begin{aligned} 24 \quad f'(x) &= \frac{(\sqrt{x^2 + 1})(1) - (x)\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}\right)}{x^2 + 1} = \frac{\left(\frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + 1}}\right)}{x^2 + 1} \\ &= \frac{1}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{(x^2 + 1)^3}} \end{aligned}$$

أجد المشتقة العليا المطلوبة في كل مما يأتي:

27 $f(x) = \sin \pi x, f'''(x)$ 28 $f(x) = \cos(2x + 1), f^{(5)}(x)$ 29 $f(x) = \cos x^2, f''(x)$

27	$f(x) = \sin \pi x$ $f'(x) = \pi \cos \pi x$ $f''(x) = -\pi^2 \sin \pi x$ $f'''(x) = -\pi^3 \cos \pi x$
28	$f(x) = \cos(2x + 1)$ $f'(x) = -2 \sin(2x + 1)$ $f''(x) = -4 \cos(2x + 1)$ $f'''(x) = 8 \sin(2x + 1)$ $f^{(4)}(x) = 16 \cos(2x + 1)$ $f^{(5)}(x) = -32 \sin(2x + 1)$
29	$f(x) = \cos x^2$ $f'(x) = -2x \sin x^2$ $f''(x) = (-2x)(2x \cos x^2) + (\sin x^2)(-2)$ $= -4x^2 \cos x^2 - 2 \sin x^2$

48 $y = \sqrt{\sin \sqrt{x}}$

49 $y = e^x \sin^2 x \cos x$ نحدد: أجد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي:

48	$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \cos \sqrt{x}}{2\sqrt{\sin \sqrt{x}}} = \frac{\cos \sqrt{x}}{4\sqrt{x}\sqrt{\sin \sqrt{x}}} = \frac{\cos \sqrt{x}}{4\sqrt{x \sin \sqrt{x}}}$
49	$\frac{dy}{dx} = (e^x \sin^2 x)(-\sin x) + (\cos x)((e^x)(2 \sin x \cos x) + (\sin^2 x)(e^x))$ $= -e^x \sin^3 x + 2e^x \cos^2 x \sin x + e^x \cos x \sin^2 x$

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

- 1 $f(x) = 100e^{-0.1x}$
- 2 $f(x) = \sin(x^2 + 1)$
- 3 $f(x) = \cos^2 x$
- 4 $f(x) = \cos 2x - 2 \cos x$
- 6 $f(x) = 2 \cot^2(\pi x + 2)$
- 8 $f(x) = \ln(x^3 + 2)$
- 9 $f(x) = \left(\frac{x^2}{x^3 + 2}\right)^2$
- 10 $f(x) = x^2 \sqrt{20 - x}$
- 11 $f(x) = \frac{\sin(2x + 1)}{e^{x^2}}$

1	$f'(x) = -10e^{-0.1x}$
2	$f'(x) = 2x \cos(x^2 + 1)$
3	$f'(x) = -2 \cos x \sin x = -\sin 2x$
4	$f'(x) = -2 \sin 2x + 2 \sin x$

10	$f'(x) = x^2 \times \frac{-1}{2\sqrt{20-x}} + 2x\sqrt{20-x}$ $= \frac{-x^2}{2\sqrt{20-x}} + 2x\sqrt{20-x} = \frac{80x - 5x^2}{2\sqrt{20-x}}$
----	---

6	$f(x) = 2(\cot(\pi x + 2))^2$ $f'(x) = -4\pi \cot(\pi x + 2) \csc^2(\pi x + 2)$
8	$f'(x) = \frac{3x^2}{x^3 + 2}$
9	$f'(x) = 2 \times \frac{x^2}{x^3 + 2} \times \frac{2x(x^3 + 2) - 3x^4}{(x^3 + 2)^2}$ $= \frac{2x^2}{x^3 + 2} \times \frac{4x - x^4}{(x^3 + 2)^2} = \frac{8x^3 - 2x^6}{(x^3 + 2)^3}$

11	$f'(x) = \frac{2e^{x^2} \cos(2x + 1) - 2xe^{x^2} \sin(2x + 1)}{e^{2x^2}}$ $= \frac{2 \cos(2x + 1) - 2x \sin(2x + 1)}{e^{x^2}}$
----	---

16	$f'(x) = 3 \cos x - 3 \sin^2 x \cos x$ $= 3 \cos x (1 - \sin^2 x)$ $= 3 \cos x (\cos^2 x)$ $= 3 \cos^3 x$
17	$f''(x) = -9 \cos^2 x \sin x$

إذا كان الاقتران: $f(x) = 3 \sin x - \sin^3 x$ ، فأجيب عن السؤالين الآتيين تبعاً:
16 أثبت أن $f'(x) = 3 \cos^3 x$
17 أجد $f''(x)$

21 إذا كان: $h(x) = \sqrt{4 + 3f(x)}$ ، وكان: $f(1) = 7, f'(1) = 4$ ، فأجد $h'(1)$.

22 إذا كان الاقتران: $f(x) = e^{2x} + e^{-2x}$ ، فأثبت أن $f''(x) = 4f(x)$.

21	$h(x) = \sqrt{4 + 3f(x)} = (4 + 3f(x))^{\frac{1}{2}}$ $h'(x) = \frac{1}{2} (3f'(x))(4 + 3f(x))^{-\frac{1}{2}} = \frac{3f'(x)}{2\sqrt{4 + 3f(x)}}$ $h'(1) = \frac{3f'(1)}{2\sqrt{4 + 3f(1)}} = \frac{12}{2\sqrt{25}} = \frac{6}{5}$
22	$f'(x) = 2e^{2x} - 2e^{-2x}$ $f''(x) = 4e^{2x} + 4e^{-2x} = 4(e^{2x} + e^{-2x}) = 4f(x)$

23 إذا كان: $f(x) = \sin 4x + \cos 4x$ ، فأثبت أن $f''(x) + 16f(x) = 0$.

23	$f'(x) = 4 \cos 4x - 4 \sin 4x$ $f''(x) = -16 \sin 4x - 16 \cos 4x$ $= -16(\sin 4x + \cos 4x) = -16f(x)$ $f''(x) + 16f(x) = 0$
----	---

3) قواعد الاشتقاق الأساسية ، وقاعدة السلسلة

*** تطبيقات الاشتقاق من هندسية ، فيزيائية وغيرها لاقتدرات حلها عن طريق قاعدة السلسلة

مثال1) جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران $f(x) = 4\sqrt{2x} - 6e^{2-x}$ عند $(x = 2)$

$$f(x) = 4(2x)^{\frac{1}{2}} - 6e^{2-x} \quad f(2) = 4(2) - 6e^0 = 2$$

$$f'(x) = 4\left(\frac{1}{2}\right)(2x)^{-\frac{1}{2}}(2) - 6e^{2-x}(-1) \quad f'(2) = \frac{4}{2} + 6e^0 = 8$$

$$= 4(2x)^{-\frac{1}{2}} + 6e^{2-x} = \frac{4}{\sqrt{2x}} + 6e^{2-x}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \rightarrow y - 2 = 8(x - 2) \rightarrow \boxed{y = 8x - 14}$$

مثال2) يتحرك جسم على المحور (x) بحيث يعطى موقعه بالاقتران $s(t) = \cos(t^2 + 1)$ ،
جد سرعته اللحظية بدلالة (t)

الحل :

$$s(t) = \cos(t^2 + 1)$$

$$v(t) = -\sin(t^2 + 1)(2t) = -2t \sin(t^2 + 1)$$

أتحقق من فهمي (a) أجد ميل المماس لمنحنى الاقتران: $f(x) = (2x+1)^5(x^3-x+1)^4$ عندما $x=1$

(b) أجد ميل العمودي على المماس لمنحنى الاقتران: $f(x) = \frac{\cos^2 x}{e^{2x}}$ عندما $x = \frac{\pi}{2}$

أتحقق من فهمي صفحة 47 a $f(x) = (2x+1)^5(x^3-x+1)^4$ $f'(x) = (2x+1)^5(4)(x^3-x+1)^3(3x^2-1) + (x^3-x+1)^4(5)(2x+1)^4(2)$ $f'(1) = (3)^5(4)(1)^3(2) + (1)^4(5)(3)^4(2) = 2754$	
b $f'(x) = \frac{e^{2x} \times 2(\cos x)^1(-\sin x) - (\cos x)^2 \times 2e^{2x}}{e^{4x}} = \frac{-\sin 2x - 2(\cos x)^2}{e^{2x}}$ ميل المماس يساوي صفراً أي أن المماس أفقي، ومنه يكون العمودي على المماس رأسياً وميله غير معرف. $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{-\sin \pi - 2\left(\cos \frac{\pi}{2}\right)^2}{e^{\pi}} = 0$	

a $U'(x) = 80 \times \frac{(3x+4)(2) - (2x+1)(3)}{(3x+4)^2}$ $= \frac{200}{(3x+4)^2} \sqrt{\frac{2x+1}{3x+4}}$	
b $U'(20) = \frac{200}{(64)^2} \sqrt{\frac{64}{41}} \approx 0.061$ وهذا يعني أنه عند بيع 20 قطعة فإن قيمة بدل الخدمة تتزايد بمقدار 0.061 دينار/قطعة تقريباً	

أتحقق من فهمي

تُحسب قيمة بدل الخدمة لأحد المُنتجات بالدينار باستعمال الاقتران:

$$U(x) = 80\sqrt{\frac{2x+1}{3x+4}}, \text{ حيث } x \text{ عدد القطع المباعة من المُنتج:}$$

(a) أجد مُعدّل تغيّر قيمة بدل الخدمة بالنسبة إلى عدد القطع المباعة ،

(b) أجد $U'(20)$ ، مُفسّراً معنى الناتج.

أوجد معادلة المماس لكل اقتران مما يأتي عند قيمة x المعطاة:

19 $f(x) = 4e^{-0.5x^2}$, $x = -2$ 20 $f(x) = x + \cos 2x$, $x = 0$ 22 $f(x) = \sqrt{x+1} \sin \frac{\pi x}{2}$, $x = 3$

19	$f(x) = 4e^{-0.5x^2} \Rightarrow f(-2) = 4e^{-0.5(-2)^2} = \frac{4}{e^2} \Rightarrow f'(x) = -4xe^{-0.5x^2}$ $m = f'(-2) = -4(-2)e^{-0.5(-2)^2} = \frac{8}{e^2}$ ميل المماس هو: $y - \frac{4}{e^2} = \frac{8}{e^2}(x + 2) \Rightarrow y = \frac{8}{e^2}x + \frac{20}{e^2}$ معادلة المماس هي:
20	$f(x) = x + \cos 2x \Rightarrow f(0) = 0 + \cos(0) = 1 \Rightarrow f'(x) = 1 - 2 \sin 2x$ $m = f'(0) = 1 - 2 \sin 2(0) = 1$ ميل المماس هو: $y - 1 = 1(x - 0) \Rightarrow y = x + 1$ معادلة المماس هي:
22	$f(x) = \sqrt{x+1} \sin \frac{\pi x}{2}$ $f(3) = 2 \sin \frac{3\pi}{2} = -2$ $f'(x) = (\sqrt{x+1}) \left(\frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi x}{2} \right) + \left(\sin \frac{\pi x}{2} \right) \left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}} \right)$ $m = f'(3) = (2)(0) + (-1) \left(\frac{1}{4} \right) = -\frac{1}{4}$ ميل المماس هو: $y + 2 = -\frac{1}{4}(x - 3) \Rightarrow y = -\frac{1}{4}x - \frac{5}{4}$ معادلة المماس هي:



بكتيريا: يُمثّل الاقتران: $A(t) = Ne^{0.1t}$ عدد الخلايا البكتيرية بعد t ساعة في مجتمع بكتيري:

25 أجد مُعدّل نمو المجتمع بعد 3 ساعات بدلالة الثابت N .

26 إذا كان مُعدّل نمو المجتمع بعد k ساعة هو 0.2 خلية لكل ساعة، فما قيمة k بدلالة الثابت N ؟

25	$A(t) = Ne^{0.1t} \Rightarrow A'(t) = 0.1Ne^{0.1t} \Rightarrow A'(3) = 0.1Ne^{0.3}$
26	$A'(k) = 0.1Ne^{0.1k}$ $0.2 = 0.1Ne^{0.1k} \Rightarrow$ $e^{0.1k} = \frac{0.2}{0.1N} = \frac{2}{N} \Rightarrow 0.1k = \ln \frac{2}{N} \Rightarrow k = 10 \ln \frac{2}{N}$

30 إذا كان الاقتران: $y = e^{\sin x}$ ، فأجد ميل مماس منحنى الاقتران عند النقطة $(0, 1)$.

30 ميل المماس هو: $\frac{dy}{dx} = e^{\sin x} \cos x \Rightarrow m = \frac{dy}{dx} \Big|_{x=0} = e^{\sin 0} \cos 0 = 1$

زنبرك: تتحرك كرة معلقة بزنبرك إلى الأعلى وإلى الأسفل، ويُحدّد الاقتران: $s(t) = 0.1 \sin 2.4t$ موقع الكرة عند أيّ زمن لاحق، حيث t الزمن بالثواني، و s الموقع بالسنتيمترات: 32 أجد سرعة الكرة عندما $t = 1$.

33 أجد موقع الكرة عندما تكون سرعتها صفرًا. 34 أجد موقع الكرة عندما يكون تسارعها صفرًا.

32	$s(t) = 0.1 \sin 2.4t$ $v(t) = 2.4 \times 0.1 \cos 2.4t = 0.24 \cos 2.4t$ $v(1) = 0.24 \cos 2.4 \approx -0.177 \text{ cm/s}$
33	$v(t) = 0 \Rightarrow 0.24 \cos 2.4t = 0 \Rightarrow \cos 2.4t = 0$ وهذا يعني أن: $\sin 2.4t = 1$ أي أن: $\sin 2.4t = 1, \text{ or } -1$ لكن موقع الكرة هو: $s(t) = 0.1 \sin 2.4t$ وبتعويض قيمة $\sin 2.4t$ نجد أن الموقع هو: $s = 0.1(1) = 0.1 \text{ or } s = 0.1(-1) = -0.1$ إذن، عندما تكون سرعة الكرة صفرًا يكون موقعها عند 0.1 cm أو -0.1 cm
34	$a(t) = -0.24 \times 2.4 \sin 2.4t = -0.576 \sin 2.4t$ $a(t) = 0 \Rightarrow \sin 2.4t = 0$ لكن موقع الكرة هو: $s(t) = 0.1 \sin 2.4t$ وبتعويض قيمة $\sin 2.4t$ نجد أن الموقع هو: $s = 0.1(0) = 0$ إذن، عندما يكون تسارع الكرة صفرًا يكون موقعها عند $s = 0$

مهارات التفكير العليا

بررير: إذا كان الاقتران: $y = \ln(ax + b)$, حيث a و b ثابتان موجبان، وكان ميل المماس لمنحنى الاقتران

عند النقطة P هو 1، فأجيب عن السؤالين الآتيين تبعاً: 42 أثبت أن الإحداثي x للنقطة P أقل من 1

43 أجد قيمة كل من a و b ، علماً بأن P هي النقطة $(0, 2)$ ، ثم أبرر إجابتي.

44 أجد إحداثي النقطة التي يكون عندها ميل المماس $\frac{1}{2}$

42	$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{ax + b}$ $\frac{dy}{dx}\bigg _{x=x_1} = \frac{a}{ax_1 + b} \Rightarrow \frac{a}{ax_1 + b} = 1 \Rightarrow a = ax_1 + b \Rightarrow x_1 = 1 - \frac{b}{a}$ ليكن إحداثي P هما (x_1, y_1)، فيكون ميل المماس عند P هو: المقدار $(1 - \frac{b}{a})$ أقل من 1 لأن $\frac{b}{a}$ مقدار موجب كون a, b موجبين. إذن، الإحداثي x للنقطة P أقل من 1
43	ميل المماس عند $P(0, 2)$ يساوي 1، أي أن: $f'(0) = 1$ $y' = f'(x) = \frac{a}{ax + b} \quad f'(0) = 1 \Rightarrow \frac{a}{b} = 1 \Rightarrow a = b \Rightarrow f(0) = \ln b = 2 \Rightarrow b = e^2 \Rightarrow a = b = e^2$
44	افترض أن النقطة التي ميل المماس عندها يساوي $\frac{1}{2}$ هي (x_1, y_1)، بتعويض قيمة كل من a، و b نجد أن: $f(x) = \ln(e^2x + e^2) = \ln(e^2(x + 1)) = 2 + \ln(x + 1)$ $f'(x) = \frac{1}{x + 1} \Rightarrow f'(x_1) = \frac{1}{x_1 + 1} = \frac{1}{2} \Rightarrow x_1 = 1$ $y_1 = f(x_1) = f(1) = \ln(e^2 + e^2) = \ln(2e^2) = \ln 2 + \ln e^2 = \ln 2 + 2$ إذن، النقطة التي ميل المماس عندها يساوي $\frac{1}{2}$ هي $(1, 2 + \ln 2)$.

بررير: يُمثل الاقتران: $s(t) = \ln(t^2 - 2t + 1.9)$, $t \geq 0$ موقع جُسيم يتحرك في مسار مستقيم، حيث s الموقع

بالأمتار، و t الزمن بالثواني: 53 أجد سرعة الجُسيم وتسارعه بعد t ثانية.

54 أجد موقع الجُسيم وتسارعه عندما تكون سرعته صفراً. 55 متى يعود الجُسيم إلى موقعه الابتدائي؟

53	$s(t) = \ln(t^2 - 2t + 1.9)$ $v(t) = \frac{2t - 2}{t^2 - 2t + 1.9}$ $a(t) = \frac{(t^2 - 2t + 1.9)(2) - (2t - 2)(2t - 2)}{(t^2 - 2t + 1.9)^2} = \frac{-2t^2 + 4t - 0.2}{(t^2 - 2t + 1.9)^2}$
54	$v(t) = 0 \Rightarrow 2t - 2 = 0 \Rightarrow t = 1$ $s(1) = \ln(1 - 2 + 1.9) = \ln 0.9 \text{ m}$ $a(1) = \frac{-2 + 4 - 0.2}{(1 - 2 + 1.9)^2} = \frac{1.8}{(0.9)^2} \approx 2.2 \text{ m/s}^2$
55	الموقع الابتدائي هو: $s(0) = \ln(1.9)$ $s(t) = \ln(1.9) \Rightarrow \ln(t^2 - 2t + 1.9) = \ln(1.9) \Rightarrow t^2 - 2t + 1.9 = 1.9$ $\Rightarrow t^2 - 2t = 0 \Rightarrow t(t - 2) = 0 \Rightarrow t = 0 \text{ or } t = 2$ يعود الجُسيم إلى موقعه الابتدائي بعد ثانيتين من بدء حركته.

من كتاب التمارين

أجد معادلة المماس لكل اقتران ممّا يأتي عند قيمة x المعطاة:

13 $y = 2 \sin 5x - 4 \cos 3x, x = \frac{\pi}{2}$ 14 $f(x) = (x^2 + 2)^3, x = -1$ 15 $f(x) = \tan 3x, x = \frac{\pi}{4}$

13 $\frac{dy}{dx} = 10 \cos 5x + 12 \sin 3x$ ،
عندما $x = \frac{\pi}{2}$ ، فإن $y = 2$
ميل المماس: $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=\frac{\pi}{2}} = -12$
 $y - 2 = -12 \left(x - \frac{\pi}{2} \right) \Rightarrow y = -12x + 6\pi + 2$

14 $f'(x) = 6x(x^2 + 2)^2$ $f'(-1) = -54$
 $x = -1 \rightarrow y = f(-1) = 27$
 $y - 27 = -54(x + 1) \Rightarrow y = -54x - 27$

15 $f'(x) = 3 \sec^2 3x$ $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 6$
 $x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow y = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1$
 $y + 1 = 6 \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \Rightarrow y = 6x - \frac{3\pi}{2} - 1$

إذا كان الاقتران: $y = e^{ax}$ ، حيث a ثابت، و $a > 0$ ، فأجيب عن السؤالين الآتيين تبعاً:

19 أجد إحداثيي النقطة P التي تقع على منحنى الاقتران، ويكون ميل المماس عندها 1.

20 أثبت أنّه يُمكن كتابة معادلة العمودي على المماس عند النقطة P في صورة: $x + y = k$ ، ثم أجد قيمة الثابت k .

19 $a(t) = \frac{-20}{(2t + 15)^2}$
 $a(5) = \frac{-20}{(10 + 15)^2} = -0.032 \text{ ft/s}^2$

20 $a(20) = \frac{-20}{(40 + 15)^2} \approx -0.007 \text{ ft/s}^2$

27 سيارّة: يُمثّل الاقتران: $v(t) = 15t e^{-0.05t^2}$ سرعة (بالمتر لكل ثانية) سيارّة تتحرّك في مسار مستقيم، حيث: $0 \leq t \leq 10$. أجد سرعة السيارّة عندما يكون تسارعها صفراً.

27 $a(t) = -1.5t^2 e^{-0.05t^2} + 15e^{-0.05t^2} = 15e^{-0.05t^2} (1 - 0.1t^2)$
 $a(t) = 0 \Rightarrow 1 - 0.1t^2 = 0 \Rightarrow t^2 = 10 \Rightarrow t = \sqrt{10}$
 $v(\sqrt{10}) = 15\sqrt{10}e^{-0.5} = \frac{15\sqrt{10}}{\sqrt{e}} \text{ m/s}$

قاعدة السلسلة ونتائجها

ورقة عمل (5)

ملخص الجزء الأول من الدرس الثالث ثم اختبار

$$y = f(u), u = g(t), t = h(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dt} \times \frac{dt}{dx}$$

$$y \rightarrow u \rightarrow t \rightarrow x$$

$$f(x) = (goh)(x) = g(h(x)) \Rightarrow f'(x) = (goh)'(x) = g'(h(x)) \times h'(x)$$

بشرط قابلية الاشتقاق لكل من $h(x), g(x)$

مشتقة الاقتران المركب $f(g(x))$ هي : حاصل ضرب مشتقة الاقتران الخارجي f عند الاقتران الداخلي $g(x)$ في مشتقة الاقتران الداخلي $g(x)$

ملخص نتائج السلسلة

من نتائج قاعدة السلسلة	Abdulkadir Hasanat 078 531 88 77	الزاوية $f(x) = \sin(3x-2)$
1	$\frac{d}{dx}(\sin g(x)) = \cos(g(x)) \times g'(x)$	مشتقة الاقتران المثلثي : نضرب في مشتقة الزاوية
2	$\frac{d}{dx}(e^{g(x)}) = e^{g(x)} \times g'(x)$	مشتقة الاقتران الأسّي : نضرب في مشتقة القوة
3	$\frac{d}{dx}(\ln g(x)) = \frac{g'(x)}{g(x)}$	مشتقة الاقتران اللوغاريتمي : مشتقة ما بداخل اللوغاريتم ما بداخل اللوغاريتم
4	$\frac{d}{dx}(g(x))^n = n(g(x))^{n-1} \times g'(x)$	مشتقة القوس المرفوع لقوة : نضرب في مشتقة ما بداخل القوس
5	$\frac{d}{dx}(\sqrt{g(x)}) = \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$	مشتقة الجذر التربيعي : مشتقة ما بداخل الجذر $\times 2$ الجذر نفسه

أخطاء شائعة



$f(x) = \sin(x^2) \Rightarrow f'(x) = \cos(2x) \dots$ خطأ

$f(x) = \sin(x^2) \Rightarrow f'(x) = \cos(x^2)(2x) \dots$ صح



$f(x) = \sin^2 x \Rightarrow f'(x) = 2 \cos x \dots$ خطأ

$f(x) = \sin^2 x = (\sin x)^2 \Rightarrow f'(x) = 2(\sin x)(\cos x) \dots$ صح

$f(x) = \ln(x^2 + 9) \Rightarrow f'(x) = \ln \frac{2x}{x^2 + 9} \dots$ خطأ

$f(x) = \ln(x^2 + 9) \Rightarrow f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 9} \dots$ صح

السؤال الأول

1) $f(x) = x + \sin x$, $g(x) = x^2 - 1 \Rightarrow (fog)'(1) =$ a) 4 b) -4 c) 0 d) 2

2) $f(x) = \ln x$, $g(x) = x^2 \Rightarrow (fog)'(x) =$ a) x b) $\frac{2}{x}$ c) $\frac{1}{x}$ d) $\ln \frac{1}{x}$

3) $f(x) = x^3 + 1$, $g(2) = 1$, $g'(2) = -4 \Rightarrow (fog)'(2) =$ a) -8 b) 12 c) -12 d) 4

4) $f(x) = \sin 3x^2 \Rightarrow f'(x) = ?$
a) $-6x \cos 3x^2$ b) $6x^2 \cos 3x^2$ c) $2\sin 3 \cos 6x$ d) $6x \cos 3x^2$

5) $f(x) = 4\cos(\ln x) \Rightarrow f'(x) = ?$
a) $-4\sin(\ln x)$ b) $4 - \sin(\frac{1}{x})$ c) $4 - \frac{1}{x} \sin(\ln x)$ d) $-\frac{4}{x} \sin(\ln x)$

6) $f(x) = \ln(\tan x) \Rightarrow f'(x) = ?$
a) $\ln \frac{\sec^2 x}{\tan x}$ b) $\frac{\sec x}{\tan x}$ c) $\sec^2(\frac{1}{x})$ d) $\frac{\sec^2 x}{\tan x}$

7) $f(x) = 2\sin^3 x \Rightarrow f'(x) = ?$
a) $3\sin x \sin 2x$ b) $6\sin x \cos x$ c) $6\sin x$ d) $6\sin^2 x$

8) $f(x) = \cos x e^{\sin x} \Rightarrow f'(\pi) =$ a) 1 b) -1 c) -2 d) 0

9) $f(x) = \sqrt{1-x^3} \Rightarrow f'(-2) =$ a) -24 b) -2 c) 2 d) -12

10) $f(x) = e^{x^2 \cos(x-1)} \Rightarrow f'(1) =$ a) 1 b) -1 c) $2e$ d) e

11) $f(x) = (x g(x))^2$, $g'(-1) = -2$, $g(-1) = 4 \Rightarrow f'(-1) = ?$
a) -16 b) -8 c) 48 d) -48

12) $f(x) = (\sin 2x - 2)^4 \Rightarrow f'(0) =$ a) -64 b) 32 c) -32 d) 2

- | | |
|----|---|
| 1 | a |
| 2 | b |
| 3 | c |
| 4 | d |
| 5 | d |
| 6 | d |
| 7 | a |
| 8 | a |
| 9 | b |
| 10 | c |
| 11 | d |
| 12 | a |

Hasanat

السؤال الثاني : جد المشتقة الأولى لكل مما يأتي :

1) $f(x) = x^3 e^{x^2}$ 2) $f(x) = \cot(3-x^2)$ 3) $f(x) = e^{\sin 2x} + \sin e^{4x}$

4) $f(x) = \ln(\sin^3 x)$ 5) $f(x) = (\ln(\sin x))^3$ 6) $f(x) = \ln(\sin x^3)$

7) $f(x) = \frac{\sin 3x^2}{\tan^2 x^3}$ 8) $f(x) = \ln \frac{4x}{\csc 2x}$ 9) $f(x) = \sin^3(\cot(\sec(\cos x^2)))$

السؤال الثالث : أثبت أن : $f(x) = \ln(\tan x) \Rightarrow f'(x) = 2 \csc 2x$

$$a^x = e^{\ln a^x} \Rightarrow a^x = e^{x \ln a}$$

مشتقة $a^{(g(x))}$

(4

$$\begin{aligned} y &= a^x \\ y &= a^{x \ln(a)} \\ y &= e^{x \ln(a)} \\ \frac{dy}{dx} &= \ln(a) \cdot e^{x \ln(a)} \\ &= \ln(a) \cdot e^{\ln(a)^x} \\ \frac{dy}{dx} &= \ln(a) \cdot a^x \end{aligned}$$

إذا كان a عددًا حقيقيًا موجبًا، و $a \neq 1$ ، وكان $g(x)$ اقترانًا قابلاً للاشتقاق، فإن:

$$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \times \ln a$$

$$\frac{d}{dx}(a^{g(x)}) = \ln a \times a^{g(x)} \times g'(x)$$

نظرية

عند اشتقاق الاقتران الأسّي غير الطبيعي (أي أن أساسه يختلف عن e): نضرب في $\ln(\text{الأساس})$

مثال: 1) $f(x) = 3^{2x} \Rightarrow f'(x) = \ln(3)(3^{2x})(2) = 2\ln 3(3^{2x})$

2) $f(x) = 4^{x^3-2x} \Rightarrow f'(x) = \ln(4)(4^{x^3-2x})(3x^2-2)$

3) $f(x) = 2^{x^2} \sin x^3 \Rightarrow f'(x) = \ln(2)(2^{x^2})(2x)(\sin x^3) + (\cos x^3)(3x^2)(2^{x^2})$

تمارين

1) $f(x) = x^5 e^{2x} \Rightarrow f'(x) =$

2) $f(x) = e^{3x+1} + 4^{2x-1} \Rightarrow f'(x) =$

3) $f(x) = \frac{3^{x+1}}{2^x} \Rightarrow f'(x) =$

4) $f(x) = \frac{3^x}{2^x + 1} \Rightarrow f'(x) =$

5) $f(x) = 3^x \ln x \Rightarrow f'(x) =$

6) $y = 8^{x^2-5} \cos 3x \Rightarrow y' =$

a	$f'(x) = (\pi \ln \pi) \pi^{\pi x} = \pi^{\pi x+1} \ln \pi$
b	$f'(x) = (-3x^2 \ln 6) 6^{1-x^3}$
c	$f'(x) = 4e^{4x} + (2 \ln 4) 4^{2x}$

أتحقق من فهمي أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

a) $f(x) = \pi^{\pi x}$ b) $f(x) = 6^{1-x^3}$ c) $f(x) = e^{4x} + 4^{2x}$

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

Abdulkadir Hasanat
078 531 88 77

مشتقة $\log_a g(x)$

(5)

عند اشتقاق الاقتران اللوغاريتمي غير الطبيعي (أي أن أساسه يختلف عن e) : نقسم على (الأساس) Ln

إذا كان a عددًا حقيقيًا موجبًا، و $a \neq 1$ ، وكان $g(x)$ اقترانًا قابلاً للاشتقاق، فإن:

$$\frac{d}{dx} (\log_a x) = \frac{1}{x \ln a}$$

$$\frac{d}{dx} (\log_a g(x)) = \frac{g'(x)}{(\ln a)g(x)}$$

نظرية

1) $f(x) = \log \sin x \Rightarrow f'(x) = \frac{\cos x}{(\ln 10) \sin x}$

2) $f(x) = \log (x^2 + 1) \Rightarrow f'(x) = \frac{(2x)}{(x^2 + 1) \ln 10}$

3) $f(x) = \log_3 \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1} = \log_3 (x^3 + 1) - \log_3 (x^2 - 1)$
 $f'(x) = \frac{3x^2}{(x^3 + 1) \ln 3} - \frac{2x}{(x^2 - 1) \ln 3}$

4) $f(x) = 4 \log_3 (x^2 - 1) \Rightarrow f'(x) =$

5) $f(x) = \frac{1}{\log_4 x^3} \Rightarrow f'(x) =$

6) $f(x) = 4 \log_8 \tan x \Rightarrow f'(x) =$

7) $f(x) = \log \frac{8}{\sqrt{x+1}} \Rightarrow f'(x) =$

8) $f(x) = 4 \log_8 \sin 2x \Rightarrow f'(x) =$

أتحقق من فهمي أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

a) $f(x) = \log \sec x$

b) $f(x) = \log_8 (x^2 + 3x)$

a	$f(x) = \log \sec x$ $f'(x) = \frac{\sec x \tan x}{\ln 10 \sec x} = \frac{\tan x}{\ln 10}$	b	$f(x) = \log_8 (x^2 + 3x)$ $f'(x) = \frac{2x + 3}{(x^2 + 3x) \ln 8}$
---	---	---	---

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

أَتَدَرَّبُ وَأُحِلُّ الْمَسَائِلَ

12 $f(x) = \frac{3^{2x}}{x}$

13 $f(x) = 2^{-x} \cos \pi x$

14 $f(x) = \frac{10 \log_4 x}{x}$

16 $f(x) = \log_3 (1 + x \ln x)$

12	$f'(x) = \frac{(x)(2 \ln 3) 3^{2x} - 3^{2x}}{x^2} = \frac{(-1 + 2x \ln 3) 3^{2x}}{x^2}$
13	$f'(x) = (2^{-x})(-\pi \sin \pi x) + (\cos \pi x)(-\ln 2) 2^{-x}$ $= -\pi 2^{-x} \sin \pi x - 2^{-x} (\cos \pi x) \ln 2$
14	$f'(x) = \frac{\frac{10x}{x \ln 4} - 10 \log_4 x}{x^2} = \frac{\frac{10}{\ln 4} - 10 \log_4 x}{x^2}$
16	$f'(x) = \frac{(x) \left(\frac{1}{x} \right) + (\ln x)(1)}{(\ln 3)(1 + x \ln x)} = \frac{1 + \ln x}{(\ln 3)(1 + x \ln x)}$

21 أجد معادلة المماس لكل اقتران مما يأتي عند قيمة x المعطاة: $f(x) = 2^x$, $x = 0$

21	$f(x) = 2^x \Rightarrow f(0) = 2^0 = 1 \Rightarrow f'(x) = (\ln 2) 2^x$ $m = f'(0) = (\ln 2) 2^0 = \ln 2$ $y - 1 = (\ln 2)(x - 0) \Rightarrow y = (\ln 2)x + 1$	ميل المماس هو: معادلة المماس هي:
----	---	-------------------------------------



31 مواد مُشِعَّة: يُمكن نمذجة الكمية A (بالغرام) المتبقية من عينة كتلتها الابتدائية 20 g من عنصر البلوتونيوم بعد t يومًا باستعمال الاقتران: $A(t) = 20 \left(\frac{1}{2} \right)^{t/140}$. أجد مُعدَّل تحلل

عنصر البلوتونيوم عندما $t = 2$.

31	$A(t) = 20 \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{140}} \Rightarrow A'(t) = \frac{20}{140} \left(\ln \frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{140}}$ $A'(2) = \frac{20}{140} \left(\ln \frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{2}{140}} \approx -0.098$
----	--

من كتاب التمارين

5 $f(x) = \log_3 \frac{x\sqrt{x-1}}{2}$

7 $f(x) = \log 2x$

12 $f(x) = 3^{\cot x}$

5 $f(x) = \log_3 \frac{x\sqrt{x-1}}{2} = \log_3 x + \frac{1}{2} \log_3 (x-1) - \log_3 2$
 $f'(x) = \frac{1}{x \ln 3} + \frac{1}{2(x-1) \ln 3}$

7 $f'(x) = \frac{2}{2x \ln 10} = \frac{1}{x \ln 10}$

12 $f'(x) = -(3^{\cot x} \ln 3) \csc^2 x$



6) مشتقة المعادلات الوسيطة

إذا كان h و g اقترايين قابلين للاشتقاق عند t ، وكان $x = h(t)$ و $y = g(t)$ ، فإن: $\frac{dx}{dt} \neq 0$ ، $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$

جد $x = 2 \sin t$ ، $y = 3 \cos t$ عند $t = \frac{\pi}{4}$

الجواب: $\frac{dy}{dx} = -\frac{3}{2}$ $0 \leq t \leq 2\pi$

$x = 3 \cos t$ ، $y = 2 \sin 2t$

$\frac{dx}{dt} = -3 \sin t$

$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{4 \cos t}{-3 \sin t}$

$\frac{dy}{dt} = 4 \cos t$

a. $x(t) = t^2 - 3$ ، $y(t) = 2t - 1$ ، $-3 \leq t \leq 4$

الجواب $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{t}$

b. $x(t) = 2t + 1$ ، $y(t) = t^3 - 3t + 4$ ، $-2 \leq t \leq 2$

$\frac{dy}{dx} = \frac{3t^2 - 3}{2}$

c. $x(t) = 5 \cos t$ ، $y(t) = 5 \sin t$ ، $0 \leq t \leq 2\pi$

$\frac{dy}{dx} = -\cot t$

Abdulkadir Hasanat
078 531 88 77

(a) $x = 2t^3 + 1$ ، $y = te^{-2t}$

$x(t) = t^2 - 4t$ ، $y(t) = 2t^3 - 6t$ ، $-2 \leq t \leq 3$

الجواب $\frac{3t^2 - 3}{t - 2}$

(b) $x = 3 \cos t$ ، $y = 3 \sin t$

$x(t) = t^2 - 3$ ، $y(t) = 2t - 1$ ، $-3 \leq t \leq 4$

$\frac{1}{t}$

(c) $x = t + \sqrt{t}$ ، $y = t - \sqrt{t}$

(d) $x = 2t^3 + 1$ ، $y = t^2 \cos t$

$x = t^5 - 4t^3$ ، $y = t^2$

$\frac{2}{5t^3 - 12t}$

(e) $x = te^{-t}$ ، $y = 2t^2 + 1$

أتحقق من فهمي أجد معادلة مماس منحنى المعادلة الوسيطة الآتية عندما $t = \frac{\pi}{4}$

$x = \sec t$ ، $y = \tan t$ ، $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$

$\frac{dy}{dt} = \sec^2 t$ ، $\frac{dx}{dt} = \sec t \tan t$

$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\sec^2 t}{\sec t \tan t} = \frac{\sec t}{\tan t}$

$m = \frac{dy}{dx} \Big|_{t=\frac{\pi}{4}} = \frac{\sec \frac{\pi}{4}}{\tan \frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$

$x = \sec \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$ ، $y = \tan \frac{\pi}{4} = 1$

معادلة المماس هي: $y - 1 = \sqrt{2}(x - \sqrt{2}) \rightarrow y = \sqrt{2}x - 1$

أجد معادلة المماس لمنحنى كل معادلة وسيطية ممّا يأتي عند النقطة المُحدّدة بقيمة t المعطاة:

35 $x = t + 2, y = t^2 - 1, t = 1$

36 $x = \frac{t}{2}, y = t^2 - 4, t = -1$

37 $x = t - \sin t, y = 1 - \cos t, t = \frac{\pi}{3}$

38 $x = \sec^2 t - 1, y = \tan t, t = -\frac{\pi}{4}$

35 $\frac{dy}{dt} = 2t, \quad \frac{dx}{dt} = 1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2t}{1} = 2t$
 $m = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=1} = 2 \times 1 = 2$
 $x = 1 + 2 = 3, y = (1)^2 - 1 = 0 \Rightarrow y - 0 = 2(x - 3) \Rightarrow y = 2x - 6$

36 $\frac{dy}{dt} = 2t, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2t}{\frac{1}{2}} = 4t$
 $m = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=-1} = 4 \times -1 = -4$
 $x = -\frac{1}{2}, y = (-1)^2 - 4 = -3 \Rightarrow y + 3 = -4\left(x + \frac{1}{2}\right) \Rightarrow y = -4x - 5$

37 $\frac{dy}{dt} = \sin t, \quad \frac{dx}{dt} = 1 - \cos t$
 $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\sin t}{1 - \cos t} \Rightarrow m = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=\frac{\pi}{3}} = \frac{\sin \frac{\pi}{3}}{1 - \cos \frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \sqrt{3}$
 $x = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}, y = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
 $y - \frac{1}{2} = \sqrt{3}\left(x - \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow y = \sqrt{3}x - \frac{\sqrt{3}\pi}{3} + 2$

38 $\frac{dy}{dt} = \sec^2 t, \quad \frac{dx}{dt} = 2 \times \sec t \times \sec t \tan t = 2 \sec^2 t \tan t$
 $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\sec^2 t}{2 \sec^2 t \tan t} = \frac{1}{2} \cot t \Rightarrow m = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=-\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} \cot\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}$
 $x = \sec^2\left(-\frac{\pi}{4}\right) - 1 = 1, y = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$
 $y + 1 = -\frac{1}{2}(x - 1) \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

39 يعطى منحنى بالمعادلة الوسيطة: $x = 2(t - \sin t)$, $y = 2(1 - \cos t)$ ، حيث: $0 \leq t \leq 2\pi$. أثبت أن ميل المماس وميل العمودي على المماس لمنحنى هذه العلاقة عندما $t = \frac{\pi}{4}$ هما: $1 + \sqrt{2}$ و $1 - \sqrt{2}$ على الترتيب.

39 $\frac{dy}{dt} = 2 \sin t$, $\frac{dx}{dt} = 2(1 - \cos t)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2 \sin t}{2(1 - \cos t)} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}$$

ميل المماس: $m = \frac{dy}{dx} \Big|_{t=\frac{\pi}{4}} = \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{1 - \cos \frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} \times \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} + 1} = \sqrt{2} + 1$

ميل العمودي على المماس: $m = \frac{-1}{\sqrt{2} + 1} \times \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} - 1} = 1 - \sqrt{2}$

تبرير: يعطى منحنى بالمعادلة الوسيطة: $x = t^2$, $y = 2t$

45 أجد $\frac{dy}{dx}$ بدلالة t . 46 أجد معادلة العمودي على مماس المنحنى عند النقطة $(t^2, 2t)$.

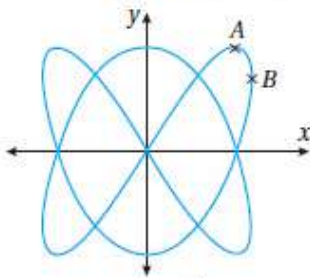
47 أثبت أن مساحة المثلث المكوّن من العمودي على المماس، والمحورين الإحداثيين، هي $\frac{1}{2} |t| (2 + t^2)^2$

45 $\frac{dy}{dt} = 2$, $\frac{dx}{dt} = 2t \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2}{2t} = \frac{1}{t}$

46 $m = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{t} \Rightarrow m = \frac{-1}{\frac{1}{t}} = -t$
ميل المماس ميل العمودي $y - 2t = -t(x - t^2) \Rightarrow y = -tx + t^3 + 2t$

47 لإيجاد المقطع x للعمودي على المماس نضع $y = 0$ في معادلته:
 $0 = -tx + t^3 + 2t \Rightarrow x = \frac{t^3 + 2t}{t} = t^2 + 2$
لإيجاد المقطع y للعمودي على المماس نضع $x = 0$:
 $y = -t(0) + t^3 + 2t = t^3 + 2t$
مساحة المثلث: $A = \frac{1}{2} |t^2 + 2| |t^3 + 2t| = \frac{1}{2} |t^2 + 2| |t(t^2 + 2)|$
 $= \frac{1}{2} |t(t^2 + 2)^2| = \frac{1}{2} |t| (t^2 + 2)^2$

نحدد: يُبين الشكل المجاور منحنى المعادلة الوسيطة: $x = \sin 2t$, $y = \sin 3t$, $0 \leq t \leq 2\pi$



50 إذا كان مماس منحنى المعادلة أفقيًا عند النقطة A الواقعة في الربع الأول، فأجد إحداثيي A .

51 إذا كان مماس المنحنى موازيًا للمحور y عند النقطة B ، فأجد إحداثيي B .

52 إذا مرَّ فرعان من المنحنى بنقطة الأصل كما هو موضح في الشكل، فأجد ميل المماس لكل منهما عند هذه النقطة.

50	$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3 \cos 3t}{2 \cos 2t}$ $\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{3 \cos 3t}{2 \cos 2t} = 0$ $\Rightarrow \cos 3t = 0 \Rightarrow 3t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{6}$ $x_A = \sin 2\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad y_A = \sin 3\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{2} = 1$ إذن، إحداثيا A هما $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right)$.
51	عند النقطة B يكون المماس موازيًا لمحور y أي إن ميله غير معرف، ومنه يكون: $\cos 2t = 0 \Rightarrow 2t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}$ $x_B = \sin 2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{2} = 1$ $y_B = \sin 3\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{3\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ إذن، إحداثيا B هما $\left(1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

52	عند نقطة الأصل $x = y = 0$ أي أن: $\sin 2t = \sin 3t = 0$ نتحقق هاتان المعادلتان معًا عندما $t = 0$، وعندها يكون ميل المماس: $m = \frac{dy}{dx} \Big _{t=0} = \frac{3 \cos 3(0)}{2 \cos 2(0)} = \frac{3 \cos 0}{2 \cos 0} = \frac{3}{2}$ كما نتحققان أيضًا عندما $t = \pi$، وعندها يكون ميل المماس: $m = \frac{dy}{dx} \Big _{t=\pi} = \frac{3 \cos 3\pi}{2 \cos 2\pi} = \frac{3 \cos \pi}{2 \cos 0} = \frac{-3}{2}$
----	---

من كتاب التمارين

18 يعطى منحنى بالمعادلة الوسيطة: $x = a \cos t, y = b \sin t$ ، حيث: $0 \leq t \leq 2\pi$.
أجد المقطع y للمماس المنحنى عندما $t = \frac{\pi}{4}$ بدلالة a و b .

$$18 \quad \frac{dy}{dt} = b \cos t \Rightarrow \frac{dx}{dt} = -a \sin t \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{b \cos t}{-a \sin t} = -\frac{b}{a} \cot t$$

ميل المماس: $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=\frac{\pi}{4}} = -\frac{b}{a} \cot \frac{\pi}{4} = -\frac{b}{a}$

$t = \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = a \cos \frac{\pi}{4} = \frac{a}{\sqrt{2}}, y = b \sin \frac{\pi}{4} = \frac{b}{\sqrt{2}}$
معادلة المماس:

$$y - \frac{b}{\sqrt{2}} = -\frac{b}{a} \left(x - \frac{a}{\sqrt{2}} \right) \Rightarrow y = -\frac{b}{a} x + \sqrt{2} b \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = \sqrt{2} b$$

يعطى منحنى بالمعادلة الوسيطة: $x = \sin^2 \theta, y = 2 \cos \theta$ ، حيث: $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

24 أجد $\frac{dy}{dx}$ بدلالة θ . 25 أجد معادلة المماس عندما يكون الميل $\sqrt{2}$.

26 أجد النقطة التي يكون عندها المماس موازيًا للمحور y .

$$24 \quad \frac{dy}{d\theta} = -2 \sin \theta \Rightarrow \frac{dx}{d\theta} = 2 \sin \theta \cos \theta \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-2 \sin \theta}{2 \sin \theta \cos \theta} = -\sec \theta$$

$$25 \quad \frac{dy}{dx} = \sqrt{2} \rightarrow -\sec \theta = \sqrt{2} \rightarrow \sec \theta = -\sqrt{2} \rightarrow \cos \theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos \theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = \sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, y = 2 \cos \theta = -\sqrt{2}$$

$$y + \sqrt{2} = \sqrt{2} \left(x - \frac{1}{2} \right) \Rightarrow y = \sqrt{2} x - \frac{3}{\sqrt{2}}$$

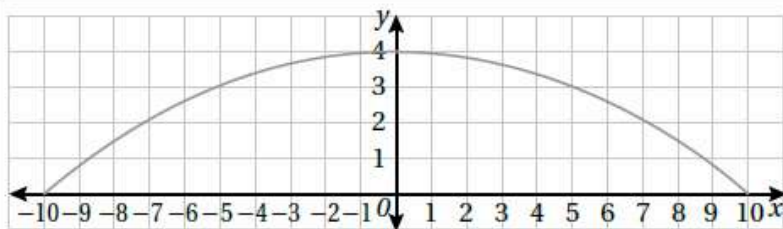
معادلة المماس:

$$26 \quad \frac{dy}{dx} = -\sec \theta = -\frac{1}{\cos \theta}$$

يكون المماس موازيًا لمحور y عندما يكون $\frac{dy}{dx}$ غير معرف، أي عندما $\cos \theta = 0$

وعندها يكون: $x = \sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - 0 = 1, y = 2 \cos \theta = 2 \times 0 = 0$

فالنقطة المطلوبة هي: $(1, 0)$



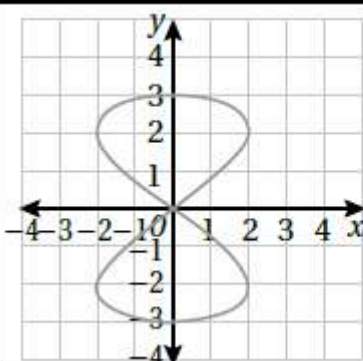
مرور: يُبين التمثيل البياني المجاور شكل مَطَبِّ سرعة صُمِّم للتخفيف من سرعة السيارات على أحد الطرق. وفيه يُمثَّل المحور x سطح الأرض، وتقاس جميع الأطوال بالسنتيمترات.

إذا كانت المعادلة الوسيطة التي تُمثِّل منحنى المَطَبِّ هي: $x = 10 \sin t$, $y = 2 + 2 \cos 2t$ ، حيث: $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ ، فأجد كلاً ممَّا يأتي: **30** ميل المماس لمنحنى المَطَبِّ بدلالة t . **31** قيمة t عند أعلى نقطة على منحنى المَطَبِّ.

30 $\frac{dy}{dt} = -4 \sin 2t$, $\frac{dx}{dt} = 10 \cos t$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-4 \sin 2t}{10 \cos t} = -\frac{4}{5} \sin t, \quad -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

31 يكون المماس عند أعلى نقطة في المنحنى المعطى أفقيًا، إذن ميله يساوي صفرًا
أو أن قيمة x عند أعلى نقطة تساوي صفرًا
أو أن قيمة y عند أعلى نقطة تساوي 4،
 $\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \sin t = 0 \Rightarrow t = 0$ $10 \sin t = 0 \Rightarrow t = 0$
 $2 + 2 \cos 2t = 4 \Rightarrow 2 \cos 2t = 2$
 $\Rightarrow \cos 2t = 1 \Rightarrow 2t = 0 \Rightarrow t = 0$



32 **تبرير:** يُبين الشكل المجاور منحنى المعادلة الوسيطة:

$$x = 2 \sin 2t, \quad y = 3 \cos t \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

أجد ميل المماس لمنحنى المعادلة عند نقطة الأصل، مُبرَّرًا إجابتي.

32 $\frac{dy}{dt} = -3 \sin t$, $\frac{dx}{dt} = 4 \cos 2t$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-3 \sin t}{4 \cos 2t}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$(x, y) = (0, 0) \Rightarrow (2 \sin 2t, 3 \cos t) = (0, 0) \Rightarrow \sin 2t = 0 \text{ و } \cos t = 0$$

$$\sin 2t = 0 \Rightarrow t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$$

$$\cos t = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$

يتحقق الشرطان معًا عندما $t = \frac{\pi}{2}$ أو $t = \frac{3\pi}{2}$

إذن ميل مماس أحد فرعي المنحنى عند نقطة الأصل هو $\frac{3}{4}$

وميل مماس الفرع الآخر $-\frac{3}{4}$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=\frac{3\pi}{2}} = \frac{3}{-4} = -\frac{3}{4}$$

قاعدة السلسلة ونتائجها

ورقة عمل (6)

ملخص الجزء الثاني من الدرس الثالث ثم اختبار

$$a^x = a^{Ln(a)^x} \Rightarrow a^x = a^{(x)Ln a}$$

إذا كان a عدداً حقيقياً موجباً، و $a \neq 1$ ، وكان $g(x)$ اقتراناً قابلاً للاشتقاق، فإن:

$$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \times \ln a$$

$$\frac{d}{dx}(a^{g(x)}) = \ln a \times a^{g(x)} \times g'(x)$$

نظرية

$$\frac{d}{dx}(7^x) = 7^x \ln 7$$

عند اشتقاق اقتران أسي غير طبيعي (أساسه يختلف عن e): نضرب في $(\ln(\text{الأساس}))$

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

إذا كان a عدداً حقيقياً موجباً، و $a \neq 1$ ، وكان $g(x)$ اقتراناً قابلاً للاشتقاق، فإن:

$$\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a}$$

$$\frac{d}{dx}(\log_a g(x)) = \frac{g'(x)}{(\ln a)g(x)}$$

نظرية

$$\frac{d}{dx}(\log_7 x) = \frac{1}{x \ln 7}$$

عند اشتقاق اقتران لوغاريتمي غير طبيعي (أساسه يختلف عن e): نقسم على $(\ln(\text{الأساس}))$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}, \frac{dx}{dt} \neq 0: \text{ فإن } y = g(t), \text{ و } x = h(t) \text{ وكان } t, \text{ اقترانين قابلين للاشتقاق عند } t,$$

مشتقة
المعادلات الوسيطة

السؤال الأول :

1) $f(x) = 5^{x+1} \Rightarrow f'(x) =$

- a) 5^{x+1} b) $5^{x+1} \ln 5$ c) $\ln 5^{x+1}$ d) $(x+1)5^x$

2) $f(x) = \pi^{2x} \Rightarrow f'(x) =$

- a) $(2 \ln \pi) \pi^{2x}$ b) $(\ln \pi) \pi^{2x}$ c) $(2 \ln \pi) \pi^x$ d) $2x \pi^x$

3) $f(x) = 4^x \Rightarrow f'(x) =$

- a) 4^x b) $4x - 1$ c) $(2 \ln 2) 4^x$ d) $\ln(4^x)$

4) $f(x) = e^{3x} + 3^{2x} \Rightarrow f'(0) =$

- a) $3 + \ln 9$ b) $3 + \ln 3$ c) 4 d) $1 + 2 \ln 3$

$$3 \ln 2 = \ln 2^3 = \ln 8$$

5) $f(x) = 7^{-x} \Rightarrow f'(x) =$

- a) $7^{-x} \ln 7$ b) $7^{-x} - \ln 7$ c) -7 d) $-7^{-x} \ln 7$

Hasanat
Hasamat

$$\ln 6 = \ln(2 \times 3) = \ln 2 + \ln 3$$

6) $f(x) = 4^{x^2-3x} \Rightarrow f'(0) =$

- a) $\ln 4$ b) $3\ln 4$ c) $-3\ln 4$ d) $\ln(64)$

7) $f(x) = \log_3(x^2 + 4) \Rightarrow f'(x) =$

- a) $\frac{2x}{x^2 + 4}$ b) $\frac{2x \ln 3}{x^2 + 4}$ c) $\frac{2x}{(x^2 + 4)\ln 3}$ d) $\frac{2x}{(x^2 + 4)\log_3 x}$

8) $f(x) = \log_2 x \Rightarrow f'(x) =$ a) $\frac{1}{x \ln 2}$ b) $\frac{1}{x}$ c) $\frac{1}{2 \ln x}$ d) $\frac{\ln 2}{x}$

9) $f(x) = \ln 9 \times \log_3 x \Rightarrow f'(1) =$ a) 2 b) 3 c) $\ln 3$ d) $\ln 9$

10) معادلة المماس لمنحنى الاقتران $f(x) = 2^x$ عند $x = 1$ هي :

- a) $y = x \ln 4 - \ln 4 + 2$ b) $y = x \ln 4 - \ln 4 - 2$
c) $y = x \ln 4 - \ln 4 + 1$ d) $y = 2x - 2$

11) $x = \sin^2 \theta$, $y = 1 - 2 \cos \theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi \Rightarrow \frac{dy}{dx} =$

- a) $\csc \theta$ b) $\sec \theta$ c) $-\sec \theta$ d) 1

12) معادلة المماس لمنحنى العلاقة الوسيطة $y = 3t^2 - 1$, $x = 3t + 2$ عند $t = 1$ هي :

- a) $y = 2x - 10$ b) $y = 2x - 8$ c) $y = 2x - 5$ d) $y = 2x$

13) معادلة المماس لمنحنى العلاقة الوسيطة $y = \cos t$, $x = \sin t$ عند $t = \frac{\pi}{4}$ هي :

- a) $y = \sqrt{2} + x$ b) $y = \sqrt{2} - x$ c) $y = \sqrt{2}x$ d) $y = -x$

السؤال الثاني : جد المشتقة الأولى لكل مما يأتي :

1) $f(x) = \log \frac{3^x - 1}{x + 1}$ 2) $f(x) = x^2 \log_2(\sin x)$ 3) $f(x) = 3^{\log_2 x}$

السؤال الثالث : جد المشتقة الأولى لكل من المعادلات الوسيطة الآتية عند القيم المبينة إزاء كل منها :

1) $x = t - \cos t$, $y = 2 - \sin t$, $t = \frac{\pi}{3}$

2) $x = \frac{1}{2}t^2 - 1$, $y = t^3 - 2t$, $t = 1$

3) $x = 2^{t+1}$, $y = \log_2(t^2 + 1)$, $t = 0$



(1) إذا كان: $f(x) = e^{\sqrt[3]{x}}$ ، فإن $f'(x)$ هي:

- a) $2\sqrt[3]{x}e^{\sqrt[3]{x}}$ b) $\frac{1}{2\sqrt[3]{x}}e^{\sqrt[3]{x}}$ c) $3\sqrt[3]{x^2}e^{\sqrt[3]{x}}$ d) $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}e^{\sqrt[3]{x}}$

(6) إذا كان: $f(x) = \sqrt{\ln x}$, $x > 0$ ، فإن $f'(x)$ هي:

- a) $\frac{2f(x)}{x}$ b) $\frac{x}{f(x)}$ c) $\frac{1}{2xf(x)}$ d) $\frac{x}{2f(x)}$

(7) إذا كان: $f(x) = 3^{(x^2+1)}$ ، فإن قيمة x التي يكون للاقتران عندها مماس أفقي هي:

- a) 0 b) 1 c) 2 d) 3

(8) إذا كان: $x = \tan^2 t$, $y = \sec^2 t$, $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ ، فإن مشتقة المعادلة الوسيطة هي:

- a) $\tan t$ b) -1 c) $\tan t \sec t$ d) 1

(b) جد مشتقة الاقتران: $f(x) = (\cot(\tan^2 \sqrt{2x^3 + 1}))^5$ (10 علامات)

من أسئلة الوزارة 2023 تكميلي / العلمي

(1) إذا كان: $f(x) = e^2 - e^{-x}$ ، فإن $f'(1)$ هي:

- a) $2e + \frac{1}{e}$ b) $2e - \frac{1}{e}$ c) $\frac{1}{e}$ d) $-\frac{1}{e}$

(2) إذا كان: $f(x) = \sin \frac{x}{2} + \frac{\cos x}{2}$ ، فإن $f'(2\pi)$ هي:

- a) 0 b) $\frac{1}{2}$ c) $-\frac{1}{2}$ d) -1

(6) إذا كان: $f(x) = (\log_e x)^5$ ، فإن $f'(x)$ هي:

- a) $\frac{5\log_e x}{x}$ b) $\frac{5(\log_e x)^4}{x}$ c) $\frac{5(\log_e x)^4}{x \ln x}$ d) $\frac{5\log_e x}{x \ln x}$

(7) إذا كان: $f(x) = 7^{(x+1)^2}$ ، فإن للاقتران f مماساً أفقياً عندما x تساوي:

- a) 7 b) 1 c) -2 d) -1

(b) جد ميل العمودي على المماس لمنحنى الاقتران: $f(x) = \left(\frac{x^2+x}{x^2+1}\right)^5$ ، عندما $x = 1$ (10 علامات)

(7) إذا كان: $f(x) = a^{(x^2-4x)}$ ، فإن قيمة الثابت a التي تجعل $f'(4) = 4$ ، هي:

- a) e b) e^{-1} c) e^4 d) e^{-4}

(8) إذا كان: $y = \log(\tan x)$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ، فإن $\frac{dy}{dx}$ ، هي:

- a) $\frac{\sec x}{\ln 10 \tan x}$ b) $\frac{\sec^2 x \cot x}{\ln 10}$ c) $\frac{\sec x \cot^2 x}{\ln 10}$ d) $\frac{\csc^2 x \cot x}{\ln 10}$

(a) جد معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران: $f(x) = \frac{\ln(2x+1)}{e^{(x+1)}} + 1$ عند نقطة تقاطع المنحنى مع المحور y (10 علامات)

(b) إذا كان: $y = \cot^2(\cos \sqrt{e^{\pi-2x}})$ ، فجد $\frac{dy}{dx}$ (12 علامة)

من أسئلة الوزارة 2023 / الصناعي

-1 إذا كان: $f(x) = e^{2x} + \ln(4x)$ ، فإن $f'(x)$ هي:

- a) $e^{2x} + \frac{4}{x}$ b) $2e^{2x} + \frac{1}{4x}$ c) $2e^{2x} + \frac{1}{x}$ d) $e^{2x} + \frac{1}{x}$

-3 إذا كان: $f(t) = \cos 4t$ ، فإن $f'(t)$ هي:

- a) $\sin 4t$ b) $-\sin 4t$ c) $4 \sin 4t$ d) $-4 \sin 4t$

(b) جد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي عند القيمة المعطاة إزاء كل منها:

- 1) $y = \frac{\sin 2x}{e^x}$, $x = 0$
3) $y = t^2 - 4$, $x = \frac{1}{2}t$, $t = -1$

من أسئلة الوزارة 2023 تكميلي / الصناعي

1- إذا كان: $f(x) = e^{1-2x} + 3 \cos x$ ، فإن $f'(x)$ هي:

-  $-2e^{1-2x} - 3 \sin x$ b) $-2e^{1-2x} + 3 \sin x$
 c) $2e^{1-2x} - 3 \sin x$ d) $2e^{1-2x} + 3 \sin x$

5- إذا كان: $f(x) = \sqrt{2 + \sin x}$ ، فإن $f'(x)$ هي:

- a) $-\frac{\cos x}{\sqrt{2+\sin x}}$  $\frac{\cos x}{2\sqrt{2+\sin x}}$ c) $-\frac{\cos x}{2\sqrt{2+\sin x}}$ d) $\frac{\cos x}{\sqrt{2+\sin x}}$

6- إذا كان: $x = 2 \sin t$ ، $y = 5 \cos t$ ، فإن ميل المماس للمعادلة الوسيطة عند $x = \frac{\pi}{4}$ هو:

-  $-\frac{5}{2}$ b) $\frac{5}{2}$ c) $\frac{2}{5}$ d) $-\frac{2}{5}$

(a) جد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي عند القيمة المعطاة إزاء كل منها: $y = \frac{e^x + x^2}{\cos x}$ ، $x = 0$

2) $y = x \ln x + \sqrt{3 - x^2}$ ، $x = 1$ 3) $y = u^3 - 1$ ، $u = 6 - 2x$ ، $x = 2$

من أسئلة الوزارة 2024 / الصناعي

2) إذا كان: $f(x) = \cos 3x + e^{-x}$ ، فإن قيمة $f'(0)$ هي:  -1 a) 1 b) 2 c) -2

6) إذا كان: $f(x) = \left(2 + \frac{1}{x}\right)^2$ ، $x \neq 0$ ، فإن $f'(x)$ هي:

- a) $-2\left(\frac{1}{x^2}\right)$  $-2\left(2 + \frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x^2}\right)$ c) $2\left(2 + \frac{1}{x}\right)$ d) $2\left(2 + \frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x^2}\right)$

(a) جد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي عند القيمة المعطاة إزاء كل منها: $y = e^{\left(\frac{x}{2}\right)} \ln(x + 1)$ ، $x = 2$

2) $y = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$ ، $x = 0$ 3) $x = t + 2$ ، $y = t^2 - 1$ ، $t = 1$

1) $f(x) = \ln(2x + 1)$, $g(x) = x^2 + x \Rightarrow a) (fog)'(x) = ?$ $b) (fog)'(0) = ?$

2) $f'(2) = 4$, $g(3) = 2$, $(fog)'(3) = 24 \Rightarrow g'(3) = ?$

3) $f(x) = 4\sin x$, $g(x) = \frac{2x}{x+1} \Rightarrow (gof)'(\frac{\pi}{6}) = ? \dots \boxed{\frac{4\sqrt{3}}{9}}$

4) $f(x) = 6\cos(\tan 2x) \Rightarrow f'(x) = ?$

5) $f(x) = \cot(1 - \sec(3x^2)) \Rightarrow f'(x) =$

6) $f(x) = x^3 \sin^2 x \Rightarrow f'(x) =$

7) $f(x) = \frac{\cot 3x}{1 + \tan 2x} \Rightarrow f'(x) =$

8) $f(x) = e^{x^2 + \sin 4x} + \ln(1 + \cos(x^2 + x)) \Rightarrow f'(x) = ?$

9) $f(x) = \sqrt{x^2 + \tan^3 x} \Rightarrow f'(x) = ?$

10) $y = \sin^3 x^2 + \cos^2 x^3 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = ?$

$$11) f(x) = \ln(\sin 2x)^2 + (\ln(\cos x))^2 \Rightarrow f'(x) = ?$$

$$12) f(x) = \sqrt{\sec \sqrt{x}} + e^{\csc x} \Rightarrow f'(x) = ?$$

$$13) f(x) = 3^{x^2-x} + x^3 \Rightarrow f'(x) = ?$$

$$14) f(x) = 3\log_6(\sin x) + \ln(\cos x) \Rightarrow f'(x) =$$

$$15) f(x) = 2^{-x} \cos^3 \pi x \Rightarrow f'(x) = ?$$

$$16) x = t + \sqrt{t} \quad , \quad y = 3t^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = ?$$

$$17) x = (2t + 3)^2 \quad , \quad y = t^2 + 1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} \Big|_{t=1} = ?$$

$$18) x = t + \sin 2t \quad , \quad y = 1 + \cos t \Rightarrow \frac{dy}{dx} \Big|_{t=\frac{\pi}{4}} = ?$$

$$19) x = \log_2(2t + 1) \quad , \quad y = t \cdot 2^{-t} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = ?$$

$$20) x = 5\cos 2t \quad , \quad y = 10\sin^2 t \Rightarrow \frac{dy}{dx} = ?$$

(21) إذا كان $f(x) = x + \sin 2x + 4$ ، فجد معادلة المماس لمنحنى هذا الاقتران عند $x = 0$

(22) إذا كان $f(x) = 2e^{3\sin x}$ ، فجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى هذا الاقتران عند $x = 0$

(23) يُعطى منحنى بالمعادلة الوسيطة : $0 \leq \theta \leq \pi$, $x = \sin \theta$, $y = \cos \theta$

جد معادلة المماس لمنحنى هذا الاقتران عندما يكون الميل (1)

(24) يُعطى منحنى بالمعادلة الوسيطة : $x = t^3$, $y = 6t$

جد معادلة المماس لمنحنى هذا الاقتران عند النقطة $(t^3, 6t)$

(25) يُعطى منحنى بالمعادلة الوسيطة : $0 \leq t \leq 2\pi$, $x = t + \cos t$, $y = t - \sin t$

أثبت أن ميل المماس لمنحنى هذا الاقتران عند $t = \frac{\pi}{3}$ يساوي $2 + \sqrt{3}$





العلاقة الضمنية هي التي لا يمكن (أو يصعب) كتابتها على الصورة $y = f(x)$ ، مثل : $x^2 + y^2 - 3xy = 0$ ،
 $x = \sin^2 y$

وتتلخص عملية الاشتقاق الضمني : باشتقاق كل حد على حدة ، وعند اشتقاق (y) نضرب بـ $(\frac{dy}{dx})$ أو y' ثم جعل (y') موضوعاً للقانون

1) العلاقة الضمنية ومشتقتها $x^3 + y^2 + 2y = 3x \Rightarrow 3x^2 + 2yy' + 2y' = 3$

$$3x^2 + y'(2y + 2) = 3 \Rightarrow y'(2y + 2) = 3 - 3x^2$$

$$y' = \frac{3 - 3x^2}{2y + 2}$$

2) $y = \sin x + \cos y \quad \dots \quad y' = \frac{\cos x}{1 + \sin y}$

3) $x^3 + y^2 - 7x + 5y = 8 \quad \dots \quad y' = \frac{7 - 3x^2}{2y + 5}$

4) $3xy + y^2 = x^2 - 7 \quad \dots \quad y' = \frac{2x - 3y}{3x + 2y}$

5) $x^3 - 5xy + y^3 = 4x$

خطأ... $\sin(x + y) = x \Rightarrow \cos(x + y) \times y' = 1$
 صحيح... $\sin(x + y) = x \Rightarrow \cos(x + y)(1 + y') = 1$

6) $x^2y + y^2x = 25$

7) $\sin 2y = y \cos(3x - y)$

8) $\tan 2x + \cot y = xy$

أتحقق من فهمي 58 أجد $\frac{dy}{dx}$ لكل ممّا يأتي:

a) $x^2 + y^2 = 13$

b) $2x + 5y^2 = \sin y$

a	$2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0$ $\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}$	b	$2 + 10y \frac{dy}{dx} = \cos y \frac{dy}{dx}$ $\frac{dy}{dx} (10y - \cos y) = -2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-2}{10y - \cos y}$
---	---	---	--

أتحقق من فهمي 60 أجد $\frac{dy}{dx}$ لكل ممّا يأتي:

a) $3xy^2 + y^3 = 8$

b) $\tan(x - y) = 2xy^3 + 1$

c) $x^2 = \frac{x - y}{x + y}$

a	$6xy \frac{dy}{dx} + 3y^2 + 3y^2 \frac{dy}{dx} = 0$ $\frac{dy}{dx} = -\frac{3y^2}{6xy + 3y^2}$	b	$\left(1 - \frac{dy}{dx}\right) \sec^2(x - y) = 6xy^2 \frac{dy}{dx} + 2y^3$ $\sec^2(x - y) - \sec^2(x - y) \frac{dy}{dx} = 6xy^2 \frac{dy}{dx} + 2y^3$ $\frac{dy}{dx} (6xy^2 + \sec^2(x - y)) = \sec^2(x - y) - 2y^3$ $\frac{dy}{dx} = \frac{\sec^2(x - y) - 2y^3}{6xy^2 + \sec^2(x - y)}$
---	--	---	--

c

$$2x = \frac{(x + y) \left(1 - \frac{dy}{dx}\right) - (x - y) \left(1 + \frac{dy}{dx}\right)}{(x + y)^2}$$

$$2x(x + y)^2 = x - x \frac{dy}{dx} + y - y \frac{dy}{dx} - x - x \frac{dy}{dx} + y + y \frac{dy}{dx}$$

$$2x \frac{dy}{dx} = 2y - 2x(x + y)^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y - 2x(x + y)^2}{2x} = \frac{y - x(x + y)^2}{x}$$

أو يمكن تبسيط العلاقة قبل الاشتقاق كالآتي:

c

$$x^2 = \frac{x - y}{x + y} \rightarrow x^3 + x^2 y = x - y \rightarrow 3x^2 + x^2 \frac{dy}{dx} + 2xy = 1 - \frac{dy}{dx}$$

$$\rightarrow \frac{dy}{dx} + x^2 \frac{dy}{dx} = 1 - 3x^2 - 2xy \rightarrow \frac{dy}{dx} (1 + x^2) = 1 - 3x^2 - 2xy$$

$$\rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1 - 3x^2 - 2xy}{1 + x^2}$$

أجد $\frac{dy}{dx}$ لكل ممّا يأتي: 67

أَتَدَرَّبُ وَأُحِلُّ الْمَسَائِلَ

1 $x^2 - 2y^2 = 4$

2 $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{10}$

3 $(x^2 + y^2)^2 = 50(x^2 - y^2)$

4 $e^x y = x e^y$

5 $3^x = y - 2xy$

6 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 5$

7 $x = \sec \frac{1}{y}$

8 $(\sin \pi x + \cos \pi y)^3 = 8$

9 $\frac{x}{y^2} + \frac{y^2}{x} = 5$

10 $x + y = \cos(xy)$

11 $x^2 + y^2 = \ln(x + y)^2$

12 $\sin x \cos y = x^2 - 5y$

أجد y' لكل ممّا يأتي عند القيمة المعطاة: 14 $y^3 + 2x^2 = 11y, y = 1$ 13 $2y^2 + 2xy - 1 = 0, x = \frac{1}{2}$

28 إذا كان: $\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = 10$ ، حيث: $x > 0, y > 0$ ، فأثبت أن $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$.

32 إذا كان $y = \ln x$ ، حيث: $x > 0$ ، فأثبت أن $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$ باستعمال الاشتقاق الضمني.

1 $x^2 - 2y^2 = 4$ $2x - 4y \frac{dy}{dx} = 0$ $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{2y}$	2 $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{10}$ $\frac{-2x}{x^4} + \frac{-2y \frac{dy}{dx}}{y^4} = 0$ $\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{x^4} \times \frac{y^4}{-2y} = -\frac{y^3}{x^3}$	3 $(x^2 + y^2)^2 = 50(x^2 - y^2)$ $2(x^2 + y^2) \left(2x + 2y \frac{dy}{dx} \right) = 50 \left(2x - 2y \frac{dy}{dx} \right)$ $\frac{dy}{dx} (yx^2 + y^3 + 25y) = 25x - x^3 - xy^2$ $\frac{dy}{dx} = \frac{25x - x^3 - xy^2}{yx^2 + y^3 + 25y}$
---	---	--

4 $(e^x) \left(\frac{dy}{dx} \right) + (y)(e^x)$ $= (x) \left(e^y \frac{dy}{dx} \right) + (e^y)(1)$ $\frac{dy}{dx} (e^x - x e^y) = e^y - y e^x$ $\frac{dy}{dx} = \frac{e^y - y e^x}{e^x - x e^y}$	5 $3^x = y - 2xy$ $3^x \ln 3 = \frac{dy}{dx} - 2x \frac{dy}{dx} - 2y$ $\frac{dy}{dx} (1 - 2x) = 2y + 3^x \ln 3$ $\frac{dy}{dx} = \frac{2y + 3^x \ln 3}{1 - 2x}$
--	--

6 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 5$ $\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{\frac{dy}{dx}}{2\sqrt{y}} = 0$ $\frac{dy}{dx} = \frac{-2\sqrt{y}}{2\sqrt{x}} = \frac{-\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$	7 $1 = -\frac{1}{y^2} \frac{dy}{dx} \sec \frac{1}{y} \tan \frac{1}{y}$ $\frac{dy}{dx} = \frac{-y^2}{\sec \frac{1}{y} \tan \frac{1}{y}} = -y^2 \cos \frac{1}{y} \cot \frac{1}{y}$
---	---

$$8 \quad (\sin \pi x + \cos \pi y)^3 = 8$$

$$3(\sin \pi x + \cos \pi y)^2 \left(\pi \cos \pi x - \pi \sin \pi y \frac{dy}{dx} \right) = 0$$

$$3 \frac{dy}{dx} (\pi \sin \pi y) (\sin \pi x + \cos \pi y)^2 = 3(\pi \cos \pi x) (\sin \pi x + \cos \pi y)^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3(\pi \cos \pi x) (\sin \pi x + \cos \pi y)^2}{3(\pi \sin \pi y) (\sin \pi x + \cos \pi y)^2} = \frac{\cos \pi x}{\sin \pi y}$$

$$9 \quad \frac{y^2(1) - x \left(2y \frac{dy}{dx} \right)}{y^4} + \frac{2y \frac{dy}{dx} (x) - 1(y^2)}{x^2} = 0$$

$$\frac{y^2 - 2xy \frac{dy}{dx}}{y^4} = - \frac{2xy \frac{dy}{dx} - y^2}{x^2}$$

$$x^2(y^2 - 2xy \frac{dy}{dx}) = -y^4(2xy \frac{dy}{dx} - y^2)$$

$$2xy^5 \frac{dy}{dx} - 2x^3y \frac{dy}{dx} = y^6 - x^2y^2$$

$$(2xy^5 - 2x^3y) \frac{dy}{dx} = y^6 - x^2y^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^6 - x^2y^2}{2xy^5 - 2x^3y} = \frac{y^2(y^4 - x^2)}{2xy(y^4 - x^2)} = \frac{y}{2x}$$

$$10 \quad 1 + \frac{dy}{dx} = - \left(x \frac{dy}{dx} + y \right) \sin xy$$

$$\frac{dy}{dx} (-x \sin xy - 1) = 1 + y \sin xy$$

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{1 + y \sin xy}{x \sin xy + 1}$$

$$11 \quad 2x + 2y \frac{dy}{dx} = \frac{2(x+y) \left(1 + \frac{dy}{dx} \right)}{(x+y)^2} \rightarrow x + y \frac{dy}{dx} = \frac{1 + \frac{dy}{dx}}{x+y}$$

$$\frac{dy}{dx} (xy + y^2 - 1) = 1 - x^2 - xy \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1 - x^2 - xy}{xy + y^2 - 1}$$

$$12 \quad (\sin x) \left(-\sin y \frac{dy}{dx} \right) + (\cos y)(\cos x) = 2x - 5 \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} (\sin x \sin y - 5) = \cos x \cos y - 2x \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\cos x \cos y - 2x}{\sin x \sin y - 5}$$

$$13 \quad 2y^2 + 2xy - 1 = 0$$

$$2y^2 + 2 \left(\frac{1}{2} \right) y - 1 = 0 \rightarrow 2y^2 + y - 1 = 0 \quad : x = \frac{1}{2} \text{ أجد قيمة } y \text{ عندما}$$

$$\rightarrow (2y - 1)(y + 1) = 0 \rightarrow y = \frac{1}{2}, y = -1$$

$$4y \frac{dy}{dx} + 2x \frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y}{2y+x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} \Big|_{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)} = \frac{-\frac{1}{2}}{2 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = -\frac{1}{3}$$

$$\frac{dy}{dx} \Big|_{\left(\frac{1}{2}, -1 \right)} = \frac{1}{-2 + \frac{1}{2}} = -\frac{2}{3}$$

14 $y^3 + 2x^2 = 11y$
 أجد قيمة x عندما $y = 1$:
 $1 + 2x^2 = 11 \rightarrow x^2 = 5 \rightarrow x = \pm\sqrt{5}$
 باشتقاق طرفي العلاقة بالنسبة إلى x ينتج أن:
 $3y^2 \frac{dy}{dx} + 4x = 11 \frac{dy}{dx}$
 $\frac{dy}{dx} = \frac{4x}{11 - 3y^2}$ $\frac{dy}{dx} \Big|_{(-\sqrt{5}, 1)} = \frac{-\sqrt{5}}{2}$ $\frac{dy}{dx} \Big|_{(\sqrt{5}, 1)} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

28 $\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = 10, x \neq 0, y \neq 0$
 $\frac{y - x \frac{dy}{dx}}{y^2} + \frac{x \frac{dy}{dx} - y}{x^2} = 0 \rightarrow \frac{y - x \frac{dy}{dx}}{2y^2 \sqrt{\frac{x}{y}}} = \frac{y - x \frac{dy}{dx}}{2x^2 \sqrt{\frac{y}{x}}}$
 $\rightarrow \left(y - x \frac{dy}{dx}\right) \left(x^2 \sqrt{\frac{y}{x}}\right) = \left(y - x \frac{dy}{dx}\right) \left(y^2 \sqrt{\frac{x}{y}}\right)$
 $x^2 y \sqrt{\frac{y}{x}} - x^3 \sqrt{\frac{y}{x}} \frac{dy}{dx} = y^3 \sqrt{\frac{x}{y}} - x y^2 \sqrt{\frac{x}{y}} \frac{dy}{dx}$
 $(x y^2 \sqrt{\frac{x}{y}} - x^3 \sqrt{\frac{y}{x}}) \frac{dy}{dx} = y^3 \sqrt{\frac{x}{y}} - x^2 y \sqrt{\frac{y}{x}}$
 $\rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y^3 \sqrt{\frac{x}{y}} - x^2 y \sqrt{\frac{y}{x}}}{x y^2 \sqrt{\frac{x}{y}} - x^3 \sqrt{\frac{y}{x}}} = \frac{y(y^2 \sqrt{\frac{x}{y}} - x^2 \sqrt{\frac{y}{x}})}{x(y^2 \sqrt{\frac{x}{y}} - x^2 \sqrt{\frac{y}{x}})} = \frac{y}{x}$
 يمكن اختصار العامل المشترك من البسط والمقام لأنه لا يساوي صفرًا إلا إذا كان $x = y$ وهذا لا يتفق مع العلاقة الأصلية.

32 $y = \ln x, x > 0 \Leftrightarrow e^y = x$ بالتحويل إلى الصيغة الأسية ينتج أن:
 باشتقاق الطرفين ضمناً بالنسبة إلى x ينتج أن: $e^y \frac{dy}{dx} = 1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^y}$
 بتعويض $e^y = x$ ينتج أن: $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$

أجد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي:

1 $x^3 y^3 = 144$

2 $xy = \sin(x + y)$

3 $y^4 - y^2 = 10x - 3$

4 $x \sin y - y \cos x = 1$

5 $\cot y = x - y$

6 $\sqrt{xy} + x + y^2 = 0$

1	$3x^3 y^2 \frac{dy}{dx} + 3x^2 y^3 = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$
2	$x \frac{dy}{dx} + y = \left(1 + \frac{dy}{dx}\right) \cos(x + y)$ $\Rightarrow x \frac{dy}{dx} - \cos(x + y) \frac{dy}{dx} = -y + \cos(x + y) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-y + \cos(x + y)}{x - \cos(x + y)}$
3	$4y^3 \frac{dy}{dx} - 2y \frac{dy}{dx} = 10 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{10}{4y^3 - 2y} = \frac{5}{2y^3 - y}$
4	$x \cos y \frac{dy}{dx} + \sin y + y \sin x - \cos x \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\sin y + y \sin x}{\cos x - x \cos y}$
5	$-\csc^2 y \frac{dy}{dx} = 1 - \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 - \csc^2 y} = \frac{-1}{\cot^2 y} = -\tan^2 y$
6	$\frac{x \frac{dy}{dx} + y}{2\sqrt{xy}} + 1 + 2y \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow x \frac{dy}{dx} + y + 2\sqrt{xy} + 4y\sqrt{xy} \frac{dy}{dx} = 0$ $\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{y + 2\sqrt{xy}}{x + 4y\sqrt{xy}}$

(2) ميل المماس ومعادلته لمنحني علاقة ضمنية :

لا جديد بالنسبة لميل المماس أو معادلته : فقط الاشتقاق ضمناً لإيجاد الميل

أوجد ميل المماس للمنحني الذي معادلته: $2y = x^2 + \sin y$

$$2 \frac{dy}{dx} = 2x + (\cos y) \frac{dy}{dx} \quad \text{عند النقطة } (2\sqrt{\pi}, 2\pi)$$

$$2 \frac{dy}{dx} - (\cos y) \frac{dy}{dx} = 2x$$

$$\frac{dy}{dx}(2 - \cos y) = 2x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{2 - \cos y}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} \Big|_{(2\sqrt{\pi}, 2\pi)} = \frac{2(2\sqrt{\pi})}{2 - \cos(2\pi)} = \frac{4\sqrt{\pi}}{2-1} = 4\sqrt{\pi}$$

أوجد ميل المماس للمنحني الذي معادلته $x^2 + y^2 = 25$ عند النقطة $(3, -4)$.

$$2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0 \rightarrow 2y \frac{dy}{dx} = -2x \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}$$

$$\frac{dy}{dx} \Big|_{(3,-4)} = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}$$

Hasanat
Hasanah

أتحقق من فهمي 61 (a) أجد ميل مماس منحني العلاقة: $y^2 = \ln x$ عند النقطة $(e, 1)$.

(b) أجد ميل مماس منحني العلاقة: $(y-3)^2 = 4(x-5)$ عندما $x = 6$.

$$a \quad y^2 = \ln x \rightarrow 2y \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$\rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2xy}$$

$$\frac{dy}{dx} \Big|_{(e,1)} = \frac{1}{2e}$$

$$b \quad \text{نجد قيمة } y \text{ عندما } 6x = \quad (y-3)^2 = 4(6-5) \rightarrow (y-3)^2 = 4$$

$$\rightarrow y-3 = \pm 2$$

$$\rightarrow y = 5 \text{ or } y = 1$$

باشتقاق طرفي العلاقة

$$2(y-3) \frac{dy}{dx} = 4 \quad \text{بالنسبة إلى } x \text{ ينتج أن: } (y-3)^2 = 4(x-5)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{y-3}$$

$$\frac{dy}{dx} \Big|_{(6,1)} = \frac{2}{1-3} = -1 \quad \text{ميل المماس عند النقطة الأولى هو:}$$

$$\frac{dy}{dx} \Big|_{(6,5)} = \frac{2}{5-3} = 1 \quad \text{وميل المماس عند النقطة الثانية هو:}$$

أتحقق من فهمي 63 أجد معادلة المماس لمنحني العلاقة: $x^3 + y^3 - 3xy = 17$ عند النقطة $(2, 3)$

$$x^3 + y^3 - 3xy = 17 \rightarrow 3x^2 + 3y^2 \frac{dy}{dx} - 3x \frac{dy}{dx} - 3y = 0$$

$$\text{بتعويض } x=2, y=3 \text{ ينتج أن: } 3(2)^2 + 3(3)^2 \frac{dy}{dx} - 3(2) \frac{dy}{dx} - 3(3) = 0$$

$$\rightarrow \frac{dy}{dx} \Big|_{(2,3)} = -\frac{1}{7}$$

ميل المماس هو: $-\frac{1}{7}$

$$\text{إذن، معادلة المماس هي: } y-3 = -\frac{1}{7}(x-2) \quad \leftarrow y = -\frac{1}{7}x + \frac{23}{7}$$

تمارين إضافية

ص 2012

(1) جد النقطة التي يكون عندها المماس لمنحنى العلاقة

الجواب: (-3, 2)

$$2x + 4y + 1 = 0 \quad (y - 3)^2 = x + 4$$

(2) جد النقطة التي يكون عندها المماس لمنحنى العلاقة

الجواب: (-4, 5)

$$3x + 6y = 1 \quad (y - 4)^2 = 2x + 5$$

ص 2016

(3) جد معادلة العمودي على المماس لمنحنى العلاقة $(x + 2y)^3 - 4x + 6y = 43$

الجواب: $y - 2 = \frac{60}{23}(x + 1)$

$$6y = 9 - 3x$$

(4) جد قياس الزاوية التي يصنعها مماس منحنى العلاقة $2y^2 + 2x^2 - 4x + 12y + 4 = 0$

ص 2019

عند النقطة $(-1, 3)$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات قم جد معادلة هذا المماس

(5) جد معادلتى المماسين لمنحنى العلاقة $x^2 + y^2 = 5$ عند نقطتي تقاطع منحناها مع المستقيم $y = 1 - x$

ص 2019

(6)

42 مصباح: يُبين الشكل المجاور مصباحاً على ارتفاع h وحدة من المحور x . إذا وقعت النقطة $(1.25, 0)$ في نهاية الشعاع الصادر من المصباح، الذي يمس منحنى العلاقة: $x^2 + y^2 = 1$ ، فأجد ارتفاع المصباح h .

من الطبعة الأولى قبل أن يتم إلغاؤه 71

42 $x^2 + y^2 = 1 \rightarrow 2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0 \rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$

لتكن نقطة تماس الشعاع مع منحنى الدائرة: $P(x, y)$

$m = \frac{0 - y}{1.25 - x} = -\frac{x}{y} \rightarrow y^2 = 1.25x - x^2$

$x^2 + y^2 = 1 \rightarrow x^2 + 1.25x - x^2 = 1 \rightarrow x = \frac{4}{5} \rightarrow y = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5}$

فتكون النقطة $P\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$ ← ميل المماس عند النقطة P : $\frac{dy}{dx}\bigg|_{\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)} = -\frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}$

ارتفاع المصباح يساوي $\frac{13}{3}$ وحدة

$m = \frac{h - 0}{-2 - \frac{5}{4}} = -\frac{4}{3} \rightarrow h = \frac{13}{3}$

أجد ميل المماس لمنحنى كل علاقة ممّا يأتي عند النقطة المعطاة:

15 $x^2 + y^2 = 25, (3, -4)$

16 $x^2 y = 4(2 - y), (2, 1)$

17 $e^{\sin x} + e^{\cos y} = e + 1, \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

18 $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = 5, (8, 1)$

15	$2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0$ $2(3) + 2(-4) \frac{dy}{dx} = 0 \rightarrow \frac{dy}{dx} \Big _{(3,-4)} = \frac{3}{4}$
16	$x^2 \frac{dy}{dx} + 2xy = -4 \frac{dy}{dx}$ $4 \frac{dy}{dx} + 2(2)(1) = -4 \frac{dy}{dx} \rightarrow \frac{dy}{dx} \Big _{(2,1)} = -\frac{1}{2}$

17 $e^{\sin x} \cos x - e^{\cos y} \sin y \frac{dy}{dx} = 0$
 $e^{\sin \frac{\pi}{2}} \cos \frac{\pi}{2} - e^{\cos \frac{\pi}{2}} \sin \frac{\pi}{2} \frac{dy}{dx} = 0 \rightarrow \frac{dy}{dx} \Big|_{\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)} = 0$

18 $\frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} + \frac{2}{3} y^{-\frac{1}{3}} \frac{dy}{dx} = 0$
 $\frac{2}{3} \left(\frac{1}{2}\right) + \frac{2}{3} (1) \frac{dy}{dx} = 0 \rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}$

أجد معادلة المماس لمنحنى كل علاقة ممّا يأتي عند النقطة المعطاة:

19 $x^2 + xy + y^2 = 13, (-4, 3)$

20 $x + y - 1 = \ln(x^2 + y^2), (1, 0)$

19 $2x + x \frac{dy}{dx} + y + 2y \frac{dy}{dx} = 0$
 $-8 - 4 \frac{dy}{dx} + 3 + 6 \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{5}{2}$
 $y - 3 = \frac{5}{2}(x + 4) \rightarrow y = \frac{5}{2}x + 13$

20 $x + y - 1 = \ln(x^2 + y^2)$
 $1 + \frac{dy}{dx} = \frac{2x + 2y \frac{dy}{dx}}{x^2 + y^2}$
 $1 + \frac{dy}{dx} = 2 \rightarrow \frac{dy}{dx} \Big|_{(1,0)} = 1$
 $y - 0 = 1(x - 1) \rightarrow y = x - 1$

24 أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى العلاقة: $(x-6)(y+4) = 2$ عند النقطة $(7, -2)$.

24 $(x-6)(y+4) = 2$
 $(x-6) \frac{dy}{dx} + (y+4) = 0$
 $(7-6) \frac{dy}{dx} + (-2+4) = 0 \rightarrow \frac{dy}{dx} \Big|_{(7,-2)} = -2 \rightarrow \frac{1}{2} = \text{ميل العمودي}$
 $y + 2 = \frac{1}{2}(x - 7) \rightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{11}{2}$ إذن معادلة العمودي

25 أثبت أن لمنحنى العلاقة: $3x^2 + 2xy + y^2 = 6$ مماسين أفقيين، ثم أجد إحداثيي نقطتي التماس.

26 أجد إحداثيي نقطة على المنحنى: $x + y^2 = 1$ ، بحيث يكون عندها مماس المنحنى موازيًا للمستقيم: $x + 2y = 0$.

25	$6x + 2x \frac{dy}{dx} + 2y + 2y \frac{dy}{dx} = 0$ $\frac{dy}{dx} = \frac{-3x - y}{x + y}$ $\frac{dy}{dx} = 0 \rightarrow \frac{-3x - y}{x + y} = 0 \rightarrow -3x - y = 0 \rightarrow y = -3x$ $3x^2 + 2x(-3x) + (-3x)^2 = 6 \rightarrow 6x^2 = 6 \rightarrow x = \pm 1$ إن المنحنى مماسان أفقيان عند النقطتين $(1, -3), (-1, 3)$
26	$1 + 2y \frac{dy}{dx} = 0 \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{2y}$ $\frac{-1}{2y} = -\frac{1}{2} \rightarrow y = 1$ ميل المستقيم $x + 2y = 0$ هو $-\frac{1}{2}$ النقطة المطلوبة هي $(0, 1)$ $\rightarrow x + (1)^2 = 1 \rightarrow x = 0$

27 أجد إحداثيي نقطة (نقاط) على المنحنى: $y^3 = x^2$ ، بحيث يكون عندها مماس المنحنى عموديًا على المستقيم: $y + 3x - 5 = 0$ ، حيث: $y \neq 0$.

27	$3y^2 \frac{dy}{dx} = 2x \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{3y^2}, y \neq 0$ ميل المستقيم $y + 3x - 5 = 0$ هو -3 إذن ميل العمودي عليه يساوي $\frac{1}{3}$ $\frac{2x}{3y^2} = \frac{1}{3} \rightarrow 2x = y^2 \rightarrow x = \frac{1}{2}y^2$ $y^3 = x^2 \rightarrow y^3 = \frac{1}{4}y^4 \rightarrow 1 = \frac{1}{4}y \rightarrow y = 4$ $\rightarrow x = \frac{1}{2}(4)^2 \rightarrow x = 8$ النقطة المطلوبة هي $(8, 4)$
----	---

30 أجد إحداثيات جميع النقاط على منحنى الدائرة: $x^2 + y^2 = 100$ ، التي يكون عندها ميل المماس $\frac{3}{4}$.

30	$x^2 + y^2 = 100$ $2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \Rightarrow -\frac{x}{y} = \frac{3}{4} \rightarrow y = -\frac{4}{3}x$ $x^2 + y^2 = 100 \rightarrow x^2 + \left(-\frac{4}{3}x\right)^2 = 100 \rightarrow \frac{25}{9}x^2 = 100$ $\rightarrow x^2 = 36 \rightarrow x = \pm 6$ إذا كانت $x = 6$، فإن $y = -\frac{4}{3}(6) = -8$ وإذا كانت $x = -6$، فإن $y = -\frac{4}{3}(-6) = 8$ إن، هناك نقطتان تحققان المطلوب هما $(6, -8), (-6, 8)$
----	---

إذا كانت العلاقة: $x^3 + y^3 = 6xy$ ، فأجيب عن السؤالين الآتيين تبعاً:

39 أجد معادلة المماس عند نقطة تقاطع منحنى المعادلة مع منحنى $y = x$ في الربع الأول.

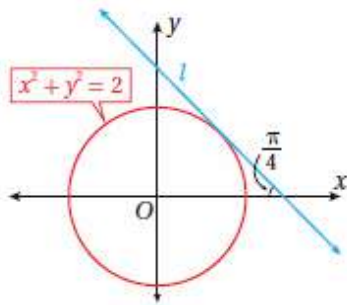
40 أجد إحداثيي نقطة على منحنى العلاقة في الربع الأول، بحيث يكون عندها مماس المنحنى أفقياً.

39 $x^3 + y^3 = 6xy$
 $y = x \rightarrow x^3 + x^3 = 6x^2$
 $\rightarrow x^3 = 3x^2$
 $\rightarrow x^2(x - 3) = 0$
 $\rightarrow x = 0 \text{ or } x = 3$

نقطة التقاطع في الربع الأول هي (3, 3)

$3x^2 + 3y^2 \frac{dy}{dx} = 6x \frac{dy}{dx} + 6y \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2y - x^2}{y^2 - 2x}$
 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{(3,3)} = \frac{6-9}{9-6} = -1$ ميل المماس هو:
 معادلة المماس هي: $y - 3 = -(x - 3) \rightarrow y = -x + 6$

40 بما أن المماس أفقي، فإن $\frac{dy}{dx} = 0$
 $\frac{2y - x^2}{y^2 - 2x} = 0 \Rightarrow 2y - x^2 = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x^2$
 $x^3 + y^3 = 6xy \Rightarrow x^3 + \frac{1}{8}x^6 = 3x^3 \Rightarrow \frac{1}{8}x^6 - 2x^3 = 0 \Rightarrow x^6 - 16x^3 = 0$
 $\Rightarrow x^3(x^3 - 16) = 0 \Rightarrow x = 0, x = \sqrt[3]{16} \Rightarrow y = 0, y = \frac{1}{2}\sqrt[3]{(16)^2}$
 النقطة المطلوبة في الربع الأول هي: $(\sqrt[3]{16}, \frac{1}{2}\sqrt[3]{(16)^2})$



41 يُبين الشكل المجاور منحنى العلاقة: $x^2 + y^2 = 2$ ، والمستقيم l الذي

يمثل مماساً لمنحنى العلاقة في الربع الأول. أجد معادلة المستقيم l .

41 لتكن نقطة التماس $A(x_1, y_1)$
 باشتقاق طرفي العلاقة $x^2 + y^2 = 2$ بالنسبة إلى x نجد أن: $2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$
 إذن، ميل المماس l هو $-\frac{x_1}{y_1}$ لكن ميل المماس l هو $\tan \frac{3\pi}{4} = -1$ إذن، $-\frac{x_1}{y_1} = -1 \Rightarrow x_1 = y_1$
 وبتعويض (x_1, y_1) في المعادلة المعطاة نجد أن: $x_1^2 + y_1^2 = 2$
 وبتعويض $x_1 = y_1$ في هذه المعادلة نجد أن: $x_1^2 + x_1^2 = 2 \Rightarrow 2x_1^2 = 2 \Rightarrow x_1^2 = 1 \Rightarrow x_1 = 1$
 إذن، نقطة التماس هي: $A(1, 1)$ ، ومعادلة المماس l هي: $y - 1 = -1(x - 1) \Rightarrow y = -x + 2$

46 تبرير: إذا مثل l أي مماس لمنحنى المعادلة: $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{k}$ ، حيث k عدد حقيقي موجب، فأثبت أن مجموع المقطع x والمقطع y للمستقيم l يساوي k ، مُبرِّراً إجابتك.

$$\begin{aligned} \sqrt{x} + \sqrt{y} &= \sqrt{k} \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{\frac{dy}{dx}}{2\sqrt{y}} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} \\ \frac{dy}{dx}\bigg|_{(x_1, y_1)} &= -\frac{\sqrt{y_1}}{\sqrt{x_1}} \Rightarrow y - y_1 = -\frac{\sqrt{y_1}}{\sqrt{x_1}}(x - x_1) \\ x = 0 &\rightarrow y - y_1 = -\frac{\sqrt{y_1}}{\sqrt{x_1}}(-x_1) \rightarrow y = y_1 + \sqrt{y_1}\sqrt{x_1} \quad \text{المقطع } x \text{ والمقطع } y \text{ للمماس:} \\ y = 0 &\rightarrow y_1 = \frac{\sqrt{y_1}}{\sqrt{x_1}}(x - x_1) \rightarrow x = x_1 + \sqrt{y_1}\sqrt{x_1} \\ y_1 + \sqrt{y_1}\sqrt{x_1} + x_1 + \sqrt{y_1}\sqrt{x_1} &= y_1 + 2\sqrt{y_1}\sqrt{x_1} + x_1 = (\sqrt{y_1} + \sqrt{x_1})^2 = (\sqrt{k})^2 = k \end{aligned}$$

مجموع المقطعين:

من كتاب التمارين

أجد معادلة المماس لمنحنى كل علاقة ممّا يأتي عند النقطة المعطاة:

7 $x^2 + 3xy + y^2 = x + 3y, (2, -1)$

8 $xe^y + y \ln x = 2, (1, \ln 2)$

9 $4xy = 9, (1, \frac{9}{4})$

10 $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{8} = 1, (1, 2)$

7 $2x + 3x \frac{dy}{dx} + 3y + 2y \frac{dy}{dx} = 1 + 3 \frac{dy}{dx} \Rightarrow (x, y) = (2, -1)$ نعوض

$$\Rightarrow 4 + 6 \frac{dy}{dx} - 3 - 2 \frac{dy}{dx} = 1 + 3 \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 0$$

معادلة المماس:

$$y + 1 = 0(x - 2) \Rightarrow y = -1$$

8 $xe^y \frac{dy}{dx} + e^y + \frac{y}{x} + \ln x \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow (x, y) = (1, \ln 2)$ نعوض

$$e^{\ln 2} \frac{dy}{dx} + e^{\ln 2} + \ln 2 + 0 = 0$$

$$2 \frac{dy}{dx} + 2 + \ln 2 = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -1 - \frac{1}{2} \ln 2$$

$$y - \ln 2 = \left(-1 - \frac{1}{2} \ln 2\right)(x - 1) \Rightarrow y = \left(-1 - \frac{1}{2} \ln 2\right)x + 1 + \frac{3}{2} \ln 2$$

9 $4x \frac{dy}{dx} + 4y = 0 \Rightarrow 4 \frac{dy}{dx} + 9 = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{9}{4}$ نعوض $(x, y) = (1, \frac{9}{4})$

$$y - \frac{9}{4} = -\frac{9}{4}(x - 1) \Rightarrow y = -\frac{9}{4}x + \frac{9}{2}$$

معادلة المماس:

10 $x + \frac{1}{4}y \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow 1 + \frac{1}{2} \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -2$ نعوض $(x, y) = (1, 2)$

$$y - 2 = -2(x - 1) \Rightarrow y = -2x + 4$$

معادلة المماس:

15 أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى العلاقة: $(x + y)^3 = x^2 + y$ عند النقطة $(1, 0)$.

20 أجد إحداثيي النقطة الواقعة في الربع الأول على منحنى العلاقة: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ التي يكون ميل المماس عندها -0.5 .

21 أجد نقطتي تقاطع منحنى العلاقة: $x^2 + xy + y^2 = 7$ مع المحور x ، ثم أثبت أن مماسي منحنى العلاقة عند هاتين النقطتين متوازيان.

15 $3(x + y)^2 \left(1 + \frac{dy}{dx}\right) = 2x + \frac{dy}{dx} \Rightarrow 3 \left(1 + \frac{dy}{dx}\right) = 2 + \frac{dy}{dx} \Rightarrow 3 + 3 \frac{dy}{dx} = 2 + \frac{dy}{dx}$
نعوض $(x, y) = (1, 0) \Rightarrow$ ميل المماس: $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2} \Rightarrow$ ميل العمودي على المماس هو 2
معادلة العمودي على المماس: $y - 0 = 2(x - 1) \Rightarrow y = 2x - 2$

20 نفرض أن النقطة المطلوبة هي $P(x_1, y_1)$ الواقعة على المنحنى.
نشتق طرفي العلاقة بالنسبة إلى x فينتج أن: $\frac{1}{2}x + \frac{2}{9}y \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{1}{2}x}{\frac{2}{9}y} = -\frac{9x}{4y}$
ميل المماس عند P هو: $-\frac{9x_1}{4y_1}$ لكن ميل المماس يساوي -0.5
إذن، $-\frac{9x_1}{4y_1} = -0.5 \Rightarrow 2y_1 = 9x_1$
وبضرب طرفي معادلة المنحنى في 36 نجد أن:
وبتعويض إحداثيي P نجد أن:
 $4y_1^2 + 9x_1^2 = 36$
 $4y_1^2 + 9x_1^2 = 36$
 $\Rightarrow 81x_1^2 + 9x_1^2 = 36 \Rightarrow 90x_1^2 = 36 \Rightarrow x_1^2 = 0.4 \Rightarrow x_1 = \sqrt{0.4}$
 $\Rightarrow y_1 = \frac{9}{2}\sqrt{0.4} = \sqrt{8.1}$
النقطة المطلوبة هي: $P(\sqrt{0.4}, \sqrt{8.1})$

21 $x^2 + xy + y^2 = 7$
 $y = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{7} \Rightarrow P_1 = (\sqrt{7}, 0), P_2 = (-\sqrt{7}, 0)$
 $x^2 + xy + y^2 = 7 \Rightarrow 2x + x \frac{dy}{dx} + y + 2y \frac{dy}{dx} = 0 \rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{2x + y}{x + 2y}$
 $\frac{dy}{dx}\bigg|_{P_1} = -\frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = -2, \frac{dy}{dx}\bigg|_{P_2} = -\frac{-2\sqrt{7}}{-\sqrt{7}} = -2$
ميل المماسين متساويان، إذن هذان المماسان متوازيان.

(3) المشتقة الثانية للعلاقات الضمنية

في الاشتقاق للمرة الثانية : عندما نشتق (y) نضربها بـ $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ أيضا ، ويمكن تعويض قيمتها من المشتقة الأولى

$$1) x^2 + y^3 + 2y = 3x \Rightarrow 2x + 3y^2 y' + 2y' = 3$$

$$2x + y'(3y^2 + 2) = 3 \Rightarrow y'(3y^2 + 2) = 3 - 2x$$

$$y' = \frac{3 - 2x}{3y^2 + 2}$$

$$y'' = \frac{(-2)(3y^2 + 2) - (6y)(3 - 2x)}{(3y^2 + 2)^2}$$



أو :

$$x^2 + y^3 + 2y = 3x \Rightarrow 2x + 3y^2 y' + 2y' = 3$$

$$2 + (6yy')(y') + (y'')(3y^2) + 2y'' = 0$$

$$y' = \frac{3 - 2x}{3y^2 + 2}$$

$$2 + 6y(y')^2 + (y'')(3y^2) + 2y'' = 0$$

$$y'' = \frac{-2 - 6y(y')^2}{3y^2 + 2} = \frac{-2 - 6y\left(\frac{3 - 2x}{3y^2 + 2}\right)^2}{3y^2 + 2}$$

Abdulkadir Hasanat
078 531 88 77

$$2) y^2 = x^2 + 4x + 2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = ? , \frac{d^2y}{dx^2} = ?$$

$$3) y^2 - 4y = x - 3 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = ? , \frac{d^2y}{dx^2} = ?$$

$$4) x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 4 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = ? , \frac{d^2y}{dx^2} = ?$$

أتحقق من فهمي 64 إذا كان: $xy + y^2 = 2x$ ، فأجد $\frac{d^2y}{dx^2}$

$$\begin{aligned} xy + y^2 = 2x &\rightarrow x \frac{dy}{dx} + y + 2y \frac{dy}{dx} = 2 \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2 - y}{x + 2y} \\ \rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{(x + 2y) \left(-\frac{dy}{dx}\right) - (2 - y) \left(1 + 2 \frac{dy}{dx}\right)}{(x + 2y)^2} \\ &= \frac{(x + 2y) \left(\frac{y - 2}{x + 2y}\right) - (2 - y) \left(1 + 2 \frac{2 - y}{x + 2y}\right)}{(x + 2y)^2} \\ &= \frac{(x + 2y)(y - 2) - (2 - y)(x + 4)}{(x + 2y)^3} = \frac{2xy - 4x + 2y^2 - 8}{(x + 2y)^3} \end{aligned}$$

أجد $\frac{d^2y}{dx^2}$ لكل مما يأتي: 23 $xy + e^y = e$ 22 $4y^3 = 6x^2 + 1$ 21 $x + y = \sin y$

21 $x + y = \sin y$
 $1 + \frac{dy}{dx} = \cos y \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{-1 + \cos y}$
 $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\sin y \frac{dy}{dx}}{(-1 + \cos y)^2} = \frac{\sin y \left(\frac{1}{-1 + \cos y} \right)}{(-1 + \cos y)^2} = \frac{\sin y}{(-1 + \cos y)^3}$

22 $12y^2 \frac{dy}{dx} = 12x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y^2} \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y^2 - 2xy \frac{dy}{dx}}{y^4} = \frac{y - 2x \left(\frac{x}{y^2} \right)}{y^3} = \frac{y^3 - 2x^2}{y^5}$
 23 $x \frac{dy}{dx} + y + e^y \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-y}{x + e^y}$
 $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(x + e^y) \left(-\frac{dy}{dx} \right) + y \left(1 + e^y \frac{dy}{dx} \right)}{(x + e^y)^2} = \frac{(x + e^y) \left(\frac{y}{x + e^y} \right) + y \left(1 + e^y \frac{-y}{x + e^y} \right)}{(x + e^y)^2}$
 $= \frac{(x + e^y)(y) + y(x + e^y - ye^y)}{(x + e^y)^3} = \frac{2yx + 2ye^y - y^2e^y}{(x + e^y)^3}$

من كتاب التمارين

أجد $\frac{d^2y}{dx^2}$ لكل مما يأتي: 13 $y^2 = x^3$ 12 $x^2 + y^2 = 8$ 11 $x^2y - 4x = 5$

11 $x^2 \frac{dy}{dx} + 2xy - 4 = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{4 - 2xy}{x^2} = 4x^{-2} - 2yx^{-1}$
 $\frac{d^2y}{dx^2} = -8x^{-3} + 2yx^{-2} - 2x^{-1} \frac{dy}{dx}$
 $= -8x^{-3} + 2yx^{-2} - 2x^{-1}(4x^{-2} - 2yx^{-1}) = -16x^{-3} + 6yx^{-2} = -\frac{16}{x^3} + \frac{6y}{x^2}$
 12 $2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} = -xy^{-1}$
 $\frac{d^2y}{dx^2} = xy^{-2} \frac{dy}{dx} - y^{-1} = xy^{-2}(-xy^{-1}) - y^{-1} = -x^2y^{-3} - y^{-1}$
 $= -\frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} = -\frac{x^2 + y^2}{y^3} = -\frac{8}{y^3}$

13 $2y \frac{dy}{dx} = 3x^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{2y}$
 $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{12xy - 6x^2 \frac{dy}{dx}}{4y^2} = \frac{12xy - 6x^2 \times \frac{3x^2}{2y}}{4y^2} = \frac{12xy^2 - 9x^4}{4y^3}$

4) المشتقة الثانية للمعادلات الوسيطة

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \times \frac{dt}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

إذا كان h و g اقترانين قابلين للاشتقاق عند t ، وكان كلٌّ من: $x = h(t)$ و $y = g(t)$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{\frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right)}{\frac{dx}{dt}}, \quad \frac{dx}{dt} \neq 0$$

مفهوم أساسي

باختصار :

عندما نشق المقدار $\left(\frac{dy}{dx} \right)$ بالنسبة للمتغير (t) نضرب هذه المشتقة بالمقدار $\left(\frac{dx}{dt} \right)$ أو نقسم على $\left(\frac{dx}{dt} \right)$

ملاحظة مهمة جداً :

لضمان عدم نسيان الضرب في $\left(\frac{dx}{dt} \right)$ ، يُفضل فرض المشتقة الأولى $Q(t)$ مثلاً ، ثم إيجاد المشتقة الثانية لها

$$1) \quad x(t) = 4t^2, \quad y(t) = 3t \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = ?$$

$$\frac{dx}{dt} = 8t, \quad \frac{dy}{dt} = 3 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{3}{8t} \dots Q(t) = \frac{3}{8t}$$

في المعادلة الوسيطة : بما أن المشتقة الأولى هي اقتران بالنسبة إلى (t) ، فإن الاشتقاق مرة أخرى يكون ضمناً بالنسبة إلى (x)

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} (Q(t)) = \frac{\frac{dQ}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = Q'(t) \times \frac{dt}{dx} = \frac{dQ}{dt} \times \frac{dt}{dx}$$

$$= \frac{-3}{8t^2} \times \frac{1}{8t} = \frac{-3}{64t^3}$$

Hasanat
Hasanat

$$2) \quad x(t) = 8 + 2\sin t, \quad y(t) = 4\cos t - 2 \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = ?$$

$$\frac{dx}{dt} = 2\cos t, \quad \frac{dy}{dt} = -4\sin t \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-4\sin t}{2\cos t} = -2\tan t \dots Q(t) = -2\tan t$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} (Q(t)) = \frac{\frac{dQ}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-2\sec^2 t}{2\cos t} = -\sec^3 t$$

$$3) \quad x(t) = t^3, \quad y(t) = 3t^4 \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} \Big|_{t=2} = ?$$

$$\frac{dy}{dx} = 4t \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = 4 \dots \text{خطأ}$$

$$\frac{dx}{dt} = 3t^2, \quad \frac{dy}{dt} = 12t^3 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{12t^3}{3t^2} = 4t \dots Q(t) = 4t$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} (Q(t)) = \frac{\frac{dQ}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{4}{3t^2} \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} \Big|_{t=2} = \frac{4}{3(2)^2} = \frac{1}{3}$$

$$4) x = \cot t, y = \csc t \Rightarrow \frac{d^2 y}{dx^2} = ?$$

$$\frac{dx}{dt} = -\csc^2 t, \frac{dy}{dt} = -\csc t \cot t \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-\csc t \cot t}{-\csc^2 t} = \cot t \dots Q(t) = \cot t$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(Q(t)) = \frac{\frac{dQ}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-\sin t}{-\csc t} = \sin^3 t$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3t^2 - 4t}{6t} = \frac{1}{2}t - \frac{2}{3} \\ \frac{d^2 y}{dx^2} &= \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{1}{2}}{6t} = \frac{1}{12t} \\ \left.\frac{d^2 y}{dx^2}\right|_{t=2} &= \frac{1}{24} \end{aligned}$$

أتحقق من فهمي

أجد $\frac{d^2 y}{dx^2}$ للمعادلة الوسيطة الآتية عندما $t = 2$

$$x = 3t^2 + 1, y = t^3 - 2t^2$$

أجد $\frac{d^2 y}{dx^2}$ لكل معادلة وسيطة مما يأتي عند قيمة t المعطاة:

37) $x = \sin t, y = \cos t, t = \frac{\pi}{4}$

38) $x = e^{-t}, y = t^3 + t + 1, t = 0$

$$\begin{aligned} 37) \frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-\sin t}{\cos t} = -\tan t \\ \frac{d^2 y}{dx^2} &= \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-\sec^2 t}{\cos t} = -\sec^3 t \\ \left.\frac{d^2 y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}} &= -\sec^3 \frac{\pi}{4} = -2\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 38) \frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3t^2 + 1}{-e^{-t}} = e^t(-3t^2 - 1) \\ \frac{d^2 y}{dx^2} &= \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{(e^t)(-6t) + (-3t^2 - 1)(e^t)}{-e^{-t}} \\ &= e^{2t}(1 + 6t + 3t^2) \\ \left.\frac{d^2 y}{dx^2}\right|_{t=0} &= e^0(1) = 1 \end{aligned}$$

(5) الاشتقاق اللوغاريتمي : وهو نوعان : إجباري و اختياري

إذا كانت القوة متغيرة ، فيجب استعمال الاشتقاق اللوغاريتمي :

$$y = x^{2x}, f(x) = (\sin x)^{\sqrt{x}}, y = (3x^2 + 1)^{x-1}$$

$$(خطأ) y = x^x \Rightarrow y' = x (x)^{x-1}$$

أما إذا كان اشتقاق الاقتران صعباً بسبب الجذور أو القوى ، فيمكن تبسيطه بالاشتقاق اللوغاريتمي (اختياري)

$$y = \sqrt{(x-2)^3 (x)^5 \sin 4x}, f(x) = \frac{3x^2 \sin 2x}{(x+1)^2 + 5}$$

وتتلخص الطريقة بما يأتي : نأخذ اللوغاريتم الطبيعي لطرفي المعادلة ($y = f(x)$) ثم نشتق ضمناً بالنسبة لـ (x) (ويشترط أن يكون الاقتران موجباً)

$$1) y = x^{2x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = ?$$

$$(خطأ) y = x^{2x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2x(x)^{2x-1} \dots$$

$$y = x^{2x} \Rightarrow \ln(y) = \ln(x^{2x}) \Rightarrow \ln(y) = (2x)\ln(x)$$

$$\frac{y'}{y} = (2)(\ln x) + \left(\frac{1}{x}\right)(2x) \Rightarrow y' = y(2\ln x + 2) = x^{2x}(2\ln x + 2)$$

$$2) f(x) = \sqrt[3]{x^2 \sin^5 x} \Rightarrow f'(x) = ?$$

$$\ln(f(x)) = \ln(\sqrt[3]{x^2 \sin^5 x})$$

$$= \ln(x^2 \sin^5 x)^{\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{1}{3} \ln(x^2 \sin^5 x)$$

$$= \frac{1}{3} (\ln(x^2) + \ln(\sin^5 x))$$

$$\ln(f(x)) = \frac{1}{3} (2\ln x + 5\ln \sin x)$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{3} \left(2\frac{1}{x} + 5\frac{\cos x}{\sin x} \right)$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3} \left(2\frac{1}{x} + 5\frac{\cos x}{\sin x} \right) \times f(x)$$

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{2}{x} + \frac{5\cos x}{\sin x} \right) \sqrt[3]{x^2 \sin^5 x}$$

$$\frac{d}{dx} (a^b) = 0$$

$$\frac{d}{dx} (x^n) = nx^{n-1}$$

$$\frac{d}{dx} (a^x) = a^x \ln a$$

$$\frac{d}{dx} (x^x) = x^x (1 + \ln x)$$

Abdulkadir Hasanat



$$3) \quad y = \frac{(x-2)^2}{\sqrt{x^2-1}} \dots \Rightarrow \dots y' = \frac{(x-2)^2}{\sqrt{x^2-1}} \left(\frac{2}{x-2} - \frac{x}{x^2-1} \right)$$

$$4) \quad y = (2x^4 + 1)^{\tan x} \dots \Rightarrow \dots y' = (2x^4 + 1)^{\tan x} (\sec^2 x \ln(2x^4 + 1) + \frac{8x^3 \tan x}{2x^4 + 1})$$

$$5) \quad y = (\sin x)^{2x} \dots \Rightarrow \dots y' = (\sin x)^{2x} (2x \cot x + 2 \ln(\sin x))$$

$$6) \quad y = \sqrt{x} e^{x^2} (x^2 - 1)^{10} \dots \Rightarrow \dots y' = \sqrt{x} e^{x^2} (x^2 - 1)^{10} \left(\frac{1}{2x} + 2x + \frac{20x}{x^2 + 1} \right)$$

$$7) \quad y = (\ln x)^{\sin x} \dots \Rightarrow \dots y' = (\ln x)^{\sin x} (\cos x \ln(\ln x) + \frac{\sin x}{x \ln x})$$

$$8) \quad y = (1 + x^2)^{e^x} \dots \Rightarrow \dots y' = (1 + x^2)^{e^x} (e^x \ln(1 + x^2) + e^x \frac{2x}{1 + x^2})$$

$$9) \quad y = x^{ax+b} \dots \Rightarrow \dots y' = x^{ax+b-1} \left(a \ln x + \frac{ax+b}{x} \right)$$

$$10) \quad y = x^{\ln x} \Rightarrow y' = (\ln x^2)(x^{\ln x - 1}) \quad \text{أثبت أن :}$$

أتحقق من فهمي 67 أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي باستعمال الاشتقاق اللوغاريتمي:

a) $y = x^{\sqrt{x}}, x > 0$

b) $y = \sqrt{\frac{x-1}{x^4+1}}$

a) $y = x^{\sqrt{x}} \rightarrow \ln y = \ln x^{\sqrt{x}} \rightarrow \ln y = \sqrt{x} \ln x$
 $\rightarrow \frac{1}{y} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \sqrt{x} \left(\frac{1}{x} \right) + \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln x \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} + \frac{x^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} \ln x$

b) $y = \sqrt{\frac{x-1}{x^4+1}} \rightarrow \ln y = \ln \sqrt{\frac{x-1}{x^4+1}} \rightarrow \ln y = \frac{1}{2} \ln \frac{x-1}{x^4+1}$
 $\rightarrow \ln y = \frac{1}{2} (\ln(x-1) - \ln(x^4+1))$
 $\rightarrow \frac{dy}{dx} = \left(\frac{1}{2(x-1)} + \frac{2x^3}{x^4+1} \right) \sqrt{\frac{x-1}{x^4+1}}$

29 أجد إحداثيي النقطة على منحنى الاقتران: $y = x^{1/x}, x > 0$ ، التي يكون عندها ميل المماس صفرًا.

31 يُمثل الاقتران: $s(t) = t^{1/t}, t > 0$ موقع جُسيم يتحرك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني. أجد سرعة الجُسيم وتسارعه.

أجد مشتقة كل من الاقترانات الآتية باستعمال الاشتقاق اللوغاريتمي:

33 $y = (x^2 + 3)^x$

34 $y = \frac{(x^4+1)\sqrt{x+2}}{2x^2+2x+1}$

35 $y = \sqrt{x^2(x+1)(x+2)}$

36 $y = x^{\sin x}, x > 0$

47 تحدّد: إذا كان مماس منحنى الاقتران: $y = (x-3)^{\sqrt{x}}$ عند النقطة (4, 1) يقطع المحور x في النقطة B ، والمحور y في النقطة C ، فأجد مساحة ΔOBC ، حيث O نقطة الأصل.

29 $y = x^{\frac{1}{x}}, x > 0 \Rightarrow \ln y = \ln x^{\frac{1}{x}}$
 $\ln y = \frac{1}{x} \ln x \Rightarrow \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \times \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \ln x$
 $\frac{dy}{dx} = \frac{y(1 - \ln x)}{x^2}$
 $\frac{y(1 - \ln x)}{x^2} = 0 \rightarrow \ln x = 1 \rightarrow x = e \rightarrow y = e^{\frac{1}{e}} \quad (e, e^{\frac{1}{e}}) \text{ النقطة المطلوبة}$

31 $s(t) = t^{1/t} \Rightarrow \ln s(t) = \ln t^{1/t} \Rightarrow \ln s(t) = \frac{1}{t} \ln t$
 $\frac{v(t)}{s(t)} = \left(\frac{1}{t} \right) \left(\frac{1}{t} \right) + (\ln t) \left(-\frac{1}{t^2} \right) = \frac{1 - \ln t}{t^2} \Rightarrow v(t) = s(t) \times \frac{1 - \ln t}{t^2}$
 $a(t) = v(t) \left(\frac{1 - \ln t}{t^2} \right) + s(t) \left(\frac{t^2 \left(-\frac{1}{t} \right) - 2t(1 - \ln t)}{t^4} \right)$ باشتقاق طرفي العلاقة
 $= s(t) \left(\frac{1 - \ln t}{t^2} \right) \left(\frac{1 - \ln t}{t^2} \right) + s(t) \left(\frac{t^2 \left(-\frac{1}{t} \right) - 2t(1 - \ln t)}{t^4} \right)$
 $= t^{1/t} \left(\frac{1 - \ln t}{t^2} \right) \left(\frac{1 - \ln t}{t^2} \right) + t^{1/t} \left(\frac{t^2 \left(-\frac{1}{t} \right) - 2t(1 - \ln t)}{t^4} \right)$
 $= t^{1/t} \frac{(1 - \ln t)^2}{t^4} + t^{1/t} \left(\frac{-t - 2t + 2t \ln t}{t^4} \right) = t^{1/t} \left(\frac{(1 - \ln t)^2 - 3t + 2t \ln t}{t^4} \right)$

33	$y = (x^2 + 3)^x \Rightarrow \ln y = \ln(x^2 + 3)^x$ $\Rightarrow \ln y = x \ln(x^2 + 3)$ $\Rightarrow \frac{dy}{y} = (x) \left(\frac{2x}{x^2 + 3} \right) + \ln(x^2 + 3)$ $\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \left(\frac{2x^2}{x^2 + 3} + \ln(x^2 + 3) \right) (x^2 + 3)^x$
34	$y = \frac{(x^4 + 1)(\sqrt{x} + 2)}{2x^2 + 2x + 1} \Rightarrow \ln y = \ln \frac{(x^4 + 1)(\sqrt{x} + 2)}{2x^2 + 2x + 1}$ $\Rightarrow \ln y = \ln(x^4 + 1) + \ln(\sqrt{x} + 2) - \ln(2x^2 + 2x + 1)$ $\Rightarrow \ln y = \ln(x^4 + 1) + \frac{1}{2} \ln(x + 2) - \ln(2x^2 + 2x + 1)$ $\Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{4x^3}{x^4 + 1} + \frac{1}{2x + 4} - \frac{4x + 2}{2x^2 + 2x + 1}$ $\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \left(\frac{4x^3}{x^4 + 1} + \frac{1}{2x + 4} - \frac{4x + 2}{2x^2 + 2x + 1} \right) \frac{(x^4 + 1)(\sqrt{x} + 2)}{2x^2 + 2x + 1}$

35	$y = \sqrt{x^2(x+1)(x+2)} \Rightarrow \ln y = \ln \sqrt{x^2(x+1)(x+2)}$ $\Rightarrow \ln y = \frac{1}{2} \ln x^2(x+1)(x+2) \Rightarrow \ln y = \frac{1}{2} \ln x^2 + \frac{1}{2} \ln(x+1) + \frac{1}{2} \ln(x+2)$ $\Rightarrow \ln y = \ln x + \frac{1}{2} \ln(x+1) + \frac{1}{2} \ln(x+2) \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{2(x+2)}$ $\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{2(x+2)} \right) \sqrt{x^2(x+1)(x+2)}$
36	$y = x^{\sin x} \Rightarrow \ln y = \ln x^{\sin x}$ $\Rightarrow \ln y = (\sin x) \ln x \Rightarrow \frac{dy}{y} = (\sin x) \left(\frac{1}{x} \right) + (\ln x)(\cos x)$ $\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \left(\frac{\sin x}{x} + (\ln x)(\cos x) \right) x^{\sin x}$

47	$y = x^{\sqrt{x}} \quad \ln y = \ln x^{\sqrt{x}} \quad \ln y = \sqrt{x} \ln x$ $\frac{dy}{y} = (\sqrt{x}) \left(\frac{1}{x} \right) + (\ln x) \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \right) \rightarrow \frac{dy}{dx} = y \left(\frac{\sqrt{x}}{x} + \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} \right)$ $\rightarrow \frac{dy}{dx} = x^{\sqrt{x}} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} \right) = \frac{2 + \ln x}{2\sqrt{x}} (x^{\sqrt{x}})$ $\left. \frac{dy}{dx} \right _{(4,16)} = \frac{2 + \ln 4}{2\sqrt{4}} (16) = 8 + 4 \ln 4 \quad \text{ميل المماس:}$ $y - 16 = (8 + 4 \ln 4)(x - 4) \quad \text{معادلة المماس:}$ المقطع x والمقطع y للمماس: $x = 0 \rightarrow y - 16 = (8 + 4 \ln 4)(-4) \rightarrow y = -16 - 16 \ln 4$ $y = 0 \rightarrow -16 = (8 + 4 \ln 4)(x - 4) \rightarrow x = \frac{4 + 4 \ln 4}{2 + \ln 4}$ مساحة المثلث OBC بوحدة المساحة هي: $A = \frac{1}{2} \times \frac{4 + 4 \ln 4}{2 + \ln 4} \times -16 - 16 \ln 4 = \frac{32(1 + \ln 4)^2}{2 + \ln 4}$
----	--

14 أجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران: $y = x^2$ عندما $x = 2$.

16 أجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران: $y = x(\ln x)$ عندما $x = e$.

أجد مشتقة كل من الاقترانات الآتية باستعمال الاشتقاق اللوغاريتمي:

17 $y = (x - 2)^{x+1}$

18 $y = \frac{x^{10} \sqrt{x^2 + 5}}{\sqrt[3]{8x^2 + 2}}$

19 $y = (\cos x)^x$

14 $y = (x)^{x^2} \Rightarrow \ln y = \ln(x)^{x^2} \Rightarrow \ln y = x^2 \ln x$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = x^2 \times \frac{1}{x} + 2x \ln x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = xy + 2xy \ln x$$

$$x = 2 \Rightarrow y = (2)^{2^2} = 16 \Rightarrow (2, 16)$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=2} = 2 \times 16 + 2 \times 2 \times 16 \ln 2 = 32 + 64 \ln 2 \quad \text{ميل المماس:}$$

$$y - 16 = (32 + 64 \ln 2)(x - 2) \quad \text{معادلة المماس:}$$

16 $y = x(\ln x)^x \Rightarrow \ln y = \ln(x(\ln x)^x) \Rightarrow \ln y = \ln x + x \ln(\ln x)$

$$\Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{1}{x} + x \times \frac{1}{\ln x} + \ln(\ln x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{\ln x} + \ln(\ln x)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \frac{y}{\ln x} + y \ln(\ln x) \Rightarrow x = e \Rightarrow y = e(\ln e)^e = e \Rightarrow (e, e)$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=e} = \frac{e}{e} + \frac{e}{1} + 0 = 1 + e \quad \text{ميل المماس:}$$

$$y - e = (1 + e)(x - e) \Rightarrow y = (1 + e)x - e^2 \quad \text{معادلة المماس:}$$

17 $y = (x - 2)^{x+1} \Rightarrow \ln y = (x + 1) \ln(x - 2)$

$$\Rightarrow \frac{dy}{y} = (x + 1) \times \frac{1}{x - 2} + \ln(x - 2) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y(x + 1)}{x - 2} + y \ln(x - 2)$$

$$= \frac{(x - 2)^{x+1}(x + 1)}{x - 2} + (x - 2)^{x+1} \ln(x - 2)$$

$$= (x - 2)^x(x + 1) + (x - 2)^{x+1} \ln(x - 2)$$

18 $y = \frac{x^{10} \sqrt{x^2 + 5}}{\sqrt[3]{8x^2 + 2}} \Rightarrow \ln y = 10 \ln x + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 5) - \frac{1}{3} \ln(8x^2 + 2)$

$$\Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{10}{x} + \frac{x}{x^2 + 5} - \frac{16x}{3(8x^2 + 2)}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x^{10} \sqrt{x^2 + 5}}{\sqrt[3]{8x^2 + 2}} \left(\frac{10}{x} + \frac{x}{x^2 + 5} - \frac{16x}{3(8x^2 + 2)} \right)$$

19 $y = (\cos x)^x \Rightarrow \ln y = x \ln(\cos x)$

$$\Rightarrow \frac{dy}{y} = x \times \frac{-\sin x}{\cos x} + \ln(\cos x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = (\cos x)^x (-x \tan x + \ln(\cos x))$$

ملخص الدرس الرابع ثم اختبار

ورقة عمل (7)

الاشتقاق الضمني



العلاقة الضمنية هي التي لا يمكن (أو يصعب) كتابتها على الصورة $y = f(x)$ ،

مثل : $x^2 + y^2 - 3xy = 0$ ، $x = \sin^2 y$ ،

خطوات الحل : (1) اشتقاق كل حد على حدة ، وعند اشتقاق (y) نضرب بـ $(\frac{dy}{dx})$ أو y'

(2) تجميع الحدود المحتوية على (y') على الطرف الأيسر

(3) إخراج (y') عامل مشترك ثم القسمة على معاملها الناتج لتصبح موضوعا للقانون

خطأ... $y^2 + 3y = 4x^2 \Rightarrow 2y' + 3 = 8x$

صح... $y^2 + 3y = 4x^2 \Rightarrow 2y y' + 3y' = 8x$

خطأ... $\sin(x+y) = x \Rightarrow \cos(x+y) \times y' = 1$

صح... $\sin(x+y) = x \Rightarrow \cos(x+y)(1+y') = 1$

في الاشتقاق للمرة الثانية : عندما نشتق (y) نضربها بـ $(\frac{dy}{dx})$ أيضا ، ويمكن تعويض قيمتها من المشتقة الأولى

$y = \sin y \Rightarrow y' = \cos y y' \Rightarrow y'' = (-\sin y y')(y') + (y'')(\cos y)$

خطأ... $(y')(y') = y''$

صح... $(y')(y') = (y')^2$

المشتقة الثانية للمعادلات الوسيطة

عندما نشتق المقدار $(\frac{dy}{dx})$ بالنسبة للمتغير (t) نضرب هذه المشتقة بالمقدار $(\frac{dt}{dx})$ أو نقسم على $(\frac{dx}{dt})$

$x(t) = 3t^2$ ، $y(t) = 4t^3 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{12t^2}{6t} = 2t = Q(t)$

خطأ... $\frac{dy}{dx} = 2t \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = 2$

صح... $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(Q(t)) = \frac{\frac{dQ}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2}{6t} = \frac{1}{3t}$



الاشتقاق اللوغاريتمي : وهو نوعان : إجباري و اختياري

(خطأ) $y = x^x \Rightarrow y' = x(x)^{x-1}$

إذا كانت القوة متغيرة ، فيجب استعمال الاشتقاق اللوغاريتمي : $y = x^{2x}$ ، $f(x) = (\sin x)^{\sqrt{x}}$ ، $y = (3x^2 + 1)^{x-1}$

أما إذا كان اشتقاق الاقتران صعباً بسبب الجذور أو القوى ، فيمكن تبسيطه بالاشتقاق اللوغاريتمي (اختياري)

$y = \sqrt{(x-2)^3(x)^5 \sin 4x}$ ، $f(x) = \frac{3x^2 \sin 2x}{(x+1)^2 + 5}$

وتتلخص الطريقة بما يأتي :

نأخذ اللوغاريتم الطبيعي لطرفي المعادلة ($y = f(x)$)

ثم نشتق ضمناً بالنسبة لـ (x) (ويشترط أن يكون الاقتران موجباً)

$\frac{d}{dx}(a^b) = 0$



$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$

$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a$

$\frac{d}{dx}(x^x) = x^x(1 + \ln x)$

1) $x = \sin y \Rightarrow y' =$

- a) $\cos y$ b) $\sec y$ c) $\sec x$ d) $\csc y$

2) $x^2 + y^2 = 9 \Rightarrow y' =$

- a) $\frac{x}{y}$ b) $-\frac{x}{y}$ c) $-\frac{y}{x}$ d) $\frac{y}{x}$

3) $\sin x + \cos y = 5x - 2y + 1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} \Big|_{(0,0)} =$

- a) 2 b) -2 c) -4 d) 5

4) $xy + x^2y^2 = 6 \Rightarrow \frac{dy}{dx} \Big|_{(1,2)} =$

- a) 2 b) -6 c) -2 d) 5

5) $\tan y = x + y \Rightarrow y' =$

- a) $\cot y$ b) $\tan^2 y$ c) $\sec^2 y$ d) $\cot^2 y$

6) $e^y = e^x + 1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} =$

- a) e^y b) e^x c) e^{x+y} d) e^{x-y}

7) $\ln x + \ln y = x + y \Rightarrow y' =$

- a) $\frac{xy - y}{x - xy}$ b) $\frac{xy + y}{x - xy}$ c) $\frac{x}{y}$ d) $\frac{xy + y}{x + xy}$

8) $xe^y - ye^x = 0 \Rightarrow y' =$

- a) $\frac{ye^x - e^y}{xe^y - e^x}$ b) $\frac{ye^x + e^y}{xe^y + e^x}$ c) $\frac{y-1}{x-1}$ d) $\frac{ye^x - e^y}{xe^y + e^x}$

9) $x^2 - xy + y^2 = 7, y > 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} \Big|_{x=2} =$

- a) $-\frac{1}{4}$ b) $-\frac{5}{4}$ c) $\frac{5}{4}$ d) $\frac{7}{8}$

10) $y^2 + y = (\ln x)^3 + 1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} \Big|_{(e,1)} =$ a) e b) 3 c) $3e^2$ d) e^{-1}

11) $x = \cos y \Rightarrow y'' =$

- a) $\cot y \csc^2 y$ b) $-\cot y \csc^2 y$ c) $-\sin y \cos y$ d) $-\cos^2 y$

12) $x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow y'' =$

- a) $\frac{1}{y^2}$ b) $-\frac{x^2}{y^2}$ c) $-\frac{1}{y^2}$ d) $-y^2 - x^2$

Hasanat
Hasanat

13) $x - y = \cos y \Rightarrow y'' =$

- a) $\frac{\cos y}{1 - \sin y}$ b) $\frac{\cos y}{(\sin y - 1)^3}$ c) $\frac{\cos y}{(1 - \sin y)^3}$ d) $\frac{\sin y}{(1 - \cos y)^3}$

14) $x(t) = t^2, y(t) = 4t^5 \Rightarrow \frac{d^2 y}{dx^2} =$ a) $15t$ b) $10t^3$ c) $30t^2$ d) $60t^3$

15) $x(t) = \sin t, y(t) = \cos t \Rightarrow \frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_{t = \frac{\pi}{3}} =$ a) 8 b) -8 c) -4 d) $\frac{-8}{3\sqrt{3}}$

16) $x(t) = \cos t, y(t) = \sin t \Rightarrow \frac{d^2 y}{dx^2} =$ a) $-\csc^2 t$ b) $\sec^3 t$ c) $\csc^3 t$ d) $-\csc^3 t$

17) $x(t) = 2t, y(t) = 6e^{t^2} \Rightarrow \frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_{x=2} =$ a) 9 b) $9e$ c) $6e$ d) $27e^2$

18) $y = x^x \Rightarrow \frac{dy}{dx} =$ a) $x(x^{x-1})$ b) $(x)(x)$ c) $x^x \ln x + x^x$ d) $\ln x + 1$

19) $y = (x^2)^x \Rightarrow \frac{y'}{y} =$

- a) $\ln x^2 + 2$ b) $2\ln x + x$ c) $x^{2x} \ln x^2 + 2$ d) $2x^x$

20) $y^y = 2^x \Rightarrow y' =$

- a) $\frac{2^x \ln 2}{\ln y + 1}$ b) $\frac{2^x \ln 2}{y}$ c) $2^x y^{y-1}$ d) $\frac{\ln 2}{\ln y + 1}$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
b	b	a	c	d	d	a	a	a	d



11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
b	c	c	a	b	d	b	c	a	d

من أسئلة الوزارة 2023 / العلمي

(9) إذا كان: $y^2 = 2\cos\left(\frac{\pi}{3}e^{\ln x}\right)$ ، فإن ميل المماس لمنحى العلاقة y عند النقطة $(1, 1)$ هو:

- a) $-\frac{\pi}{6}$ b) $\frac{\pi}{6}$ c) $-\frac{\pi\sqrt{3}}{6}$ d) $\frac{\pi\sqrt{3}}{6}$

(10) إذا كان: $y = x^{x^2}$ ، $x > 0$ ، فإن $\frac{d}{dx}(\ln y)$ هي:

- a) $x(1 - \ln x^2)$ b) $x(1 + (\ln x)^2)$ c) $x(1 + \ln x^2)$ d) $x(1 - (\ln x)^2)$

(a) إذا كان: $3y^2 = 4x^2 + xy$ ، فأثبت أن: $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(-a,a)} = -1$ ، حيث a عدد حقيقي لا يساوي الصفر.
(8 علامات)

(b) جد $\frac{d^2y}{dx^2}$ للمعادلة الوسيطة الآتية عندما $t = 1$:
 $x = t^3 - 3t^2 + 1$ ، $y = t^2 + 2$
(10 علامات)

من أسئلة الوزارة 2023 تكميلي / العلمي

(8) إذا كان: $5y = \log(x - x^3)$ ، فإن $\frac{dy}{dx}$ تساوي:

- a) $\frac{1-3x^2}{(x-x^3)\ln 10}$ b) $\frac{1-3x^2}{5(x-x^3)}$ c) $\frac{1-3x^2}{5(x-x^3)\ln 10}$ d) $\frac{1-3x^2}{x-x^3}$

(9) ميل المماس لمنحى العلاقة: $(x-3)(y+2) = 5$ عند النقطة $(4, 3)$ ، هو:

- a) -5 b) 5 c) $-\frac{1}{5}$ d) $\frac{1}{5}$

(10) إذا كان: $y = x^{2x}$ ، $x > 0$ ، فإن $\frac{d}{dx}(\ln y)$ هي:

- a) $1 + \ln x$ b) $2(1 + \ln x)$ c) $2(x + \ln x)$ d) $2x^{2x}(1 + \ln x)$

(a) إذا كانت B هي نقطة تقاطع منحى العلاقة: $x^3 + 4xy + y^3 = 0$ مع المستقيم: $y = x$ في الربع الثالث من المستوى الإحداثي، وكان مماس منحى العلاقة عند النقطة B يقطع المحور y في النقطة C ، فجد مساحة المثلث OBC ، حيث O هي نقطة الأصل.
(10 علامات)

(b) إذا كانت: $x = 3t^2 + 1$ ، $y = t^3 + 3t^2$ ، فجد $\frac{d^2y}{dx^2}$ للمعادلة الوسيطة عندما $t = 1$ (8 علامات)

من أسئلة الوزارة 2024 / العلمي

9) إذا كانت: $y^2 = \ln(xy)$ ، فإن $\frac{dy}{dx}$ عند النقطة $(e, 1)$ ، هي:

- a) $\frac{1}{e}$ b) $\frac{1}{3e}$ c) $\frac{1+e}{2e}$ d) $\frac{1-e}{2e}$

10) إذا كانت: $y = x^{\frac{1}{x}}$ ، $x > 0$ ، فإن ميل المماس لمنحنى العلاقة y عند أي نقطة تقع عليها، هو:

- a) $1 - \ln x$ b) $\frac{y(1 - \ln x)}{x^2}$ c) $\frac{1 - \ln x}{x^2}$ d) $y(1 - \ln x)$

a) إذا رُسم مماسان لمنحنى العلاقة: $x^2 + y^2 = 12$ من النقطة $C(6, 0)$ ، فمسّا المنحنى عند النقطتين A, B ، فجد مساحة المثلث ABC (12 علامة)

b) إذا كانت: $x = 5 - 2t, y = t^4 + 2t^2$ ، فجد $\frac{d^2y}{dx^2}$ عندما $x = 1$ (8 علامات)

من أسئلة الوزارة 2023 / الصناعي

c) جد معادلة المماس لمنحنى العلاقة $5xy - y^2 = 4$ عند النقطة $(1, 4)$. (9 علامات)

من أسئلة الوزارة 2023 تكميلي / الصناعي

7- إذا كان: $\ln y = x^{-2}$ ، فإن $\frac{dy}{dx}$ هي: $-2yx^3$ c) $2yx^3$ d) $-2yx^3$ a) $\frac{2y}{x^3}$ b) $-\frac{2y}{x^3}$

8- معادلة المماس لمنحنى العلاقة: $x^2 + y^2 = 45$ عند النقطة $(6, -3)$ هي:

- a) $y = 2x + 15$ b) $y = -2x + 15$ c) $y = 2x - 15$ d) $y = -2x - 15$

c) جد معادلة العمودي على المماس لمنحنى العلاقة: $x^2 + y^3 = 28 + \ln x$ ، عند النقطة $(1, 3)$ (9 علامات)

من أسئلة الوزارة 2024 / الصناعي

9) إذا كانت: $y^2 - x^2 = 3$ ، فإن قيمة $\frac{dy}{dx}$ عند النقطة $(1, 2)$ هي: -2 d) -2 c) 2 b) $-\frac{1}{2}$ a) $\frac{1}{2}$

c) جد معادلة المماس لمنحنى العلاقة: $2y^2 + 2xy - 3 = x$ عند النقطة $(1, 1)$. (9 علامات)

$$1) y = \sec x + \tan y \Rightarrow \frac{dy}{dx} = ?$$

$$2) x = \sin y + \cos^2 y \Rightarrow \frac{dy}{dx} = ?$$

$$3) xy + y^2 x^3 = x^2 - 3 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = ?$$

$$4) 2x^3 - y^2 = 15y \Rightarrow \frac{dy}{dx} \Big|_{y=1} = ?$$

$$5) x \sin y + y \cos x = 1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = ?$$

$$6) y^2 = \frac{1}{x} + 4x + 2y \Rightarrow \frac{d^2 y}{dx^2} = ?$$

$$7) y \ln x - \cos x = e^y + e^2 \Rightarrow \frac{d^2 y}{dx^2} = ?$$

$$8) x(t) = t^2, y(t) = 2t \Rightarrow \frac{d^2 y}{dx^2} = ?$$

$$9) x(t) = \sin t, y(t) = \cos t \Rightarrow \frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_{t = \frac{\pi}{6}} = ?$$

$$10) y = (\sin 2x)^x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = ?$$

$$11) y = x^{\ln x} \Rightarrow \frac{d^2 y}{dx^2} = ?$$

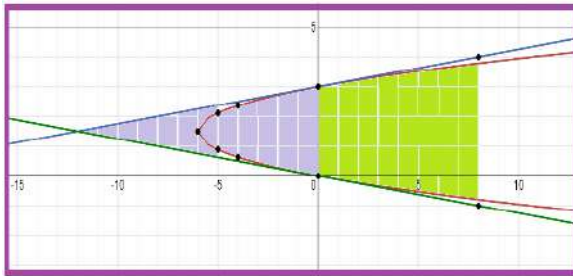
$$12) \log_2 y = x^{\frac{1}{x}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = ?$$

13) جد معادلة المماس لمنحنى العلاقة $(y - 1)^2 = 3x + 6$ عند النقطة التي يكون عندها المماس

الجواب : $y = \frac{-x - 3}{2}$

عموديا على المستقيم $y = 2x + 6$

14) رُسم مماسان لمنحنى العلاقة $8y^2 - 24y = 3x$ عند نقطتي تقاطع منحناهما مع محور الصادات (y)



أ) جد معادلتى المماسين

ب) جد إحداثيي نقطة تقاطع هذين المماسين

ج) جد مساحة المثلث المكون من المماسين والمحور (y)

د) جد مساحة المثلث المكون من المماسين والمستقيم $x = 8$

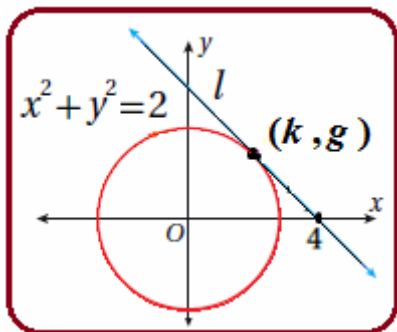
$8y + x = 0$, $8y - x = 24$

$(-12, \frac{3}{2})$, 36 , 60

15) رُسم المستقيم (L) فَمَسَ منحنى العلاقة $x^2 + y^2 = 2$ عند النقطة (k, g)

وقطع المحور السيني (x) عند $x = 4$ ، كما في الشكل المجاور

جد معادلة هذا المستقيم



$7y = \sqrt{7}(x - 4)$

اختبار نهاية الوحدة

اختر رمز الإجابة الصحيحة في كل ما يأتي:

1 يُمثل الاقتران: $s(t) = 3 + \sin t$ حركة توافقية بسيطة لجسيم. إحدى الآتية تُمثل الزمن الذي تكون عنده سرعة الجسيم صفراً:

- a) $t = 0$ b) $t = \frac{\pi}{4}$
c) $t = \frac{\pi}{2}$ d) $t = \pi$

2 إذا كان: $y = uv$ وكان:

$$u(1) = 2, u'(1) = 3, v(1) = -1, v'(1) = 1$$

فإن $y'(1)$ تساوي:

- a) 1 b) -1 c) 1 d) 4

3 إذا كان: $f(x) = x - \frac{1}{x}$ فإن $f''(x)$ هي:

- a) $1 + \frac{1}{x^2}$ b) $1 - \frac{1}{x^2}$
c) $\frac{2}{x^2}$ d) $-\frac{2}{x^2}$

4 إذا كان: $y = \tan 4t$ فإن $\frac{dy}{dt}$ هو:

- a) $4 \sec 4t \tan 4t$ b) $\sec 4t \tan 4t$
c) $\sec^2(4t)$ d) $4 \sec^2(4t)$

5 إذا كان: $x^2 - y^2 = 1$ ، فإن ميل المماس لمنحنى العلاقة عند النقطة $(1, \sqrt{2})$ هو:

- a) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ b) $-\sqrt{2}$
c) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ d) $\sqrt{2}$

6 إذا كان: $f(x) = \log(2x - 3)$ ، فإن $f'(x)$ هي:

- a) $\frac{2}{(2x-3) \ln 10}$ b) $\frac{2}{(2x-3)}$
c) $\frac{1}{(2x-3) \ln 10}$ d) $\frac{1}{(2x-3)}$

7 إذا كان: $y = 2^{1-x}$ ، فإن ميل المماس لمنحنى العلاقة عندما $x = 2$ هو:

- a) $-\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{2}$
c) $\frac{\ln 2}{2}$ d) $-\frac{\ln 2}{2}$

أوجد مشتقة كل القتران معاً يأتي:

8 $f(x) = e^x(x + x\sqrt{x})$ 9 $f(x) = \frac{x}{\tan x}$

10 $f(x) = \frac{1}{x} - 12 \sec x$ 11 $f(x) = \frac{e^x}{\ln x}$

12 $f(x) = \frac{\ln x}{x^4}$ 13 $f(x) = 5^{2-x}$

14 $f(x) = 10 \sin 0.5x$

15 $f(x) = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)^2 \left(x + \frac{1}{x}\right)^2$

16 $f(x) = e^{-1.2x} \cos x^2$

إذا كان $f(x)$ و $g(x)$ القترانين الآتيين فابذل للاشتقاق عندما $x = 2$ وكان: $f(2) = 3, f'(2) = -4, g(2) = 1, g'(2) = 2$ فاجد كل ما يأتي:

17 $(fg)'(2)$ 18 $\left(\frac{f}{g}\right)'(2)$

19 $(3f - 4fg)'(2)$

اختبار نهاية الوحدة

أوجد المشتقة الثانية لكل الاقتران مما يأتي:

20 $f(x) = x^7 \ln x$ 21 $f(x) = \frac{\cos x}{x}$

22 $f(x) = \frac{x}{1+\sqrt{x}}$ 23 $f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$

أوجد معادلة المماس لكل اقتران مما يأتي عند القيمة المعطاة:

24 $f(x) = \frac{x^2}{1+x}, x=1$

25 $f(x) = \frac{x^2}{\cos x}, x = \frac{\pi}{4}$

26 $f(x) = \ln(x+5), x=0$

27 $f(x) = \sin x + \sin 3x, x = \frac{\pi}{4}$

أوجد معادلة المماس للمنحنى كل معادلة ومسطية مما يأتي عند النقطة المُحددة بقيمة t المعطاة:

28 $x = t^2, y = t + 2, t = 4$

29 $x = 4 \cos t, y = 3 \sin t, t = \frac{\pi}{4}$

إذا كان: $y = x \ln x$, حيث: $x > 0$ فأجيب عن السؤالين الآتيين تباهاً:

30 أوجد معادلة المماس عند النقطة $(1, 0)$.

31 أوجد إحداثيي النقطة التي يكون ميل المماس عندها 2.

أوجد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي:

32 $x(x+y) = 2y^2$

33 $x = \frac{2y}{x^2 - y}$

34 $y \cos x = x^2 + y^2$

35 $2xe^y + ye^x = 3$

36 أوجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى العلاقة:

$y^2 = \frac{x^2}{2-x}$ عند النقطة $(1, -1)$.

أوجد مشتقة كل الاقتران مما يأتي باستعمال الاشتقاق اللوغاريتمي:

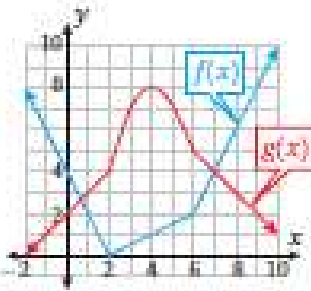
37 $y = \frac{(x+1)(x-2)}{(x-1)(x+2)}, x > 2$ 38 $y = x^{e^x}, x > 0$

أوجد معادلة المماس للمنحنى كل علاقة مما يأتي عند النقطة المعطاة:

39 $x^2 + 3xy + y^2 = x + 3y, (2, -1)$

40 $x^2 e^y = 1, (1, 0)$

يُبين الشكل المجاور منحنى الاقترانين: $f(x)$ و $g(x)$. إذا كان: $p(x) = f(x)g(x)$, وكان: $q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, فأوجد كلاً مما يأتي:



41 $p'(1)$

42 $p'(4)$

43 $q'(7)$

44 مواد مُشعة: يُمكن نمذجة الكمية R (بالغرام) المتبقية من عيّنة كتلتها 200 g من عنصر مُشع بعد t يوماً باستعمال الاقتران: $R(t) = 200(0.9)^t$. أوجد $\frac{dR}{dt}$ عندما $t = 2$.

45 يُمثل الاقتران: $s(t) = 10 + \frac{1}{4} \sin(10\pi t)$ موقع جسيم يتحرك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالمستقيمات، و t الزمن بالثواني. أوجد سرعة الجسيم وتسارعه بعد t ثانية.

اختبار نهاية الوحدة صفحة 70

1	c
2	b
3	d
4	d
5	c
6	a
7	d
8	$f(x) = e^x(x + x\sqrt{x})$ $f'(x) = (e^x) \left(1 + (x) \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \right) + (\sqrt{x})(1) \right) + (x + x\sqrt{x})(e^x)$ $= e^x \left(1 + \frac{3}{2}\sqrt{x} + x + x\sqrt{x} \right)$
9	$f(x) = \frac{x}{\tan x}$ $f'(x) = \frac{(\tan x)(1) - (x)(\sec^2 x)}{\tan^2 x} = \frac{\tan x - x \sec^2 x}{\tan^2 x}$
10	$f(x) = \frac{1}{x} - 12 \sec x$ $f'(x) = \frac{-1}{x^2} - 12 \sec x \tan x$
11	$f(x) = \frac{e^x}{\ln x}$ $f'(x) = \frac{(\ln x)(e^x) - (e^x) \left(\frac{1}{x} \right)}{\ln^2 x} = \frac{e^x(x \ln x - 1)}{x \ln^2 x}$
12	$f(x) = \frac{\ln x}{x^4}$ $f'(x) = \frac{(x^4) \left(\frac{1}{x} \right) - (\ln x)(4x^3)}{x^8} = \frac{1 - 4 \ln x}{x^5}$
13	$f(x) = 5^{2-x}$ $\ln f(x) = \ln 5^{2-x}$ $\ln f(x) = (2-x) \ln 5$ $\frac{f'(x)}{f(x)} = -\ln 5$ $f'(x) = -(\ln 5)f(x) = -(\ln 5)(5^{2-x})$

14	$f(x) = 10 \sin 0.5x$ $f'(x) = 5 \cos 0.5x$
15	$f(x) = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)^3 \left(x + \frac{1}{x}\right)^2$ $f'(x) = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)^3 \left(2\left(x + \frac{1}{x}\right)\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)\right) + \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 \left(3\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)^2 \left(-\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3}\right)\right)$ $= \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)^2 \left(x + \frac{1}{x}\right) \left(2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) + 3\left(x + \frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3}\right)\right)$ $= \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)^2 \left(x + \frac{1}{x}\right) \left(\frac{2}{x} - \frac{2}{x^3} + \frac{2}{x^3} - \frac{2}{x^5} - \frac{3}{x} - \frac{6}{x^2} - \frac{3}{x^3} - \frac{6}{x^4}\right)$ $= -\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)^2 \left(x + \frac{1}{x}\right) \left(\frac{8 + 5x + 4x^2 + x^3}{x^4}\right)$
16	$f(x) = e^{-1.5x} \cos x^2$ $f'(x) = (e^{-1.5x})(-2x \sin x^2) + (\cos x^2)(-1.5e^{-1.5x})$ $= -e^{-1.5x}(2x \sin x^2 + 1.5 \cos x^2)$
17	$(fg)'(2) = f(2)g'(2) + g(2)f'(2)$ $= 3 \times 2 + 1 \times -4 = 2$
18	$\left(\frac{f}{g}\right)'(2) = \frac{g(2)f'(2) - f(2)g'(2)}{g^2(2)} = \frac{1 \times -4 - 3 \times 2}{(1)^2} = -10$
19	$(3f - 4fg)'(2) = 3f'(2) - 4(fg)'(2) = 3(-4) - 4(2) = -20$
20	$f(x) = x^7 \ln x$ $f'(x) = (x^7)\left(\frac{1}{x}\right) + (\ln x)(7x^6) = x^6 + 7x^6 \ln x$ $f''(x) = 6x^5 + (7x^6)\left(\frac{1}{x}\right) + (\ln x)(42x^5) = 13x^5 + 42x^5 \ln x$
21	$f(x) = \frac{\cos x}{x}$ $f'(x) = \frac{x(-\sin x) - (\cos x)(1)}{x^2} = -\frac{\sin x}{x} - \frac{\cos x}{x^2}$ $f''(x) = -\frac{x \cos x + \sin x}{x^2} - \frac{-x^2 \sin x - 2x \cos x}{x^4}$ $= \frac{-x^3 \cos x + 2x^2 \sin x + 2x \cos x}{x^4}$ $= \frac{-x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x}{x^3}$

22	$f(x) = \frac{x}{1 + \sqrt{x}}$ $f'(x) = \frac{(1 + \sqrt{x})(1) - (x)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{(1 + \sqrt{x})^2} = \frac{1 + \frac{1}{2}\sqrt{x}}{(1 + \sqrt{x})^2}$ $f''(x) = \frac{(1 + \sqrt{x})^2\left(\frac{1}{4\sqrt{x}}\right) - \left(1 + \frac{1}{2}\sqrt{x}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x}}(1 + \sqrt{x})\right)}{(1 + \sqrt{x})^4}$ $= \frac{-3 - \sqrt{x}}{4\sqrt{x}(1 + \sqrt{x})^3}$	
23	$f(x) = \frac{1 - x^2}{1 + x^2}$ $f'(x) = \frac{(1 + x^2)(-2x) - (1 - x^2)(2x)}{(1 + x^2)^2} = \frac{-4x}{(1 + x^2)^2}$ $f''(x) = \frac{(1 + x^2)^2(-4) - (-4x)(2 \times 2x(1 + x^2))}{(1 + x^2)^4}$ $= \frac{12x^2 - 4}{(1 + x^2)^3}$	
24	$f(x) = \frac{x^2}{1 + x}$ $f(1) = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2} \Rightarrow \left(1, \frac{1}{2}\right)$ $f'(x) = \frac{(1 + x)(2x) - (x^2)(1)}{(1 + x)^2} = \frac{x^2 + 2x}{(1 + x)^2}$ $f'(1) = \frac{3}{4}$ $y - \frac{1}{2} = \frac{3}{4}(x - 1) \Rightarrow y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}$	نقطة التماس: ميل المماس: معادلة المماس:

	$f(x) = \frac{x^2}{\cos x}$	نقطة التقاس:
	$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2}{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\frac{\pi^2}{16}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\pi^2 \sqrt{2}}{16} \Rightarrow \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi^2 \sqrt{2}}{16}\right)$	ميل المماس:
25	$f'(x) = \frac{(\cos x)(2x) - (x^2)(-\sin x)}{(\cos x)^2}$ $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right) - \left(\frac{\pi^2}{16}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{\frac{1}{2}} = \frac{8\pi + \pi^2}{8\sqrt{2}}$	معادلة المماس:
	$y - \frac{\pi^2 \sqrt{2}}{16} = \frac{8\pi + \pi^2}{8\sqrt{2}} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)$	
	$f(x) = \ln(x + 5)$	نقطة التقاس:
	$f(0) = \ln(0 + 5) = \ln(5) \Rightarrow (0, \ln 5)$	ميل المماس:
26	$f'(x) = \frac{1}{x + 5}$ $f'(0) = \frac{1}{5}$	معادلة المماس:
	$y - \ln 5 = \frac{1}{5}(x - 0) \Rightarrow y = \frac{1}{5}x + \ln 5$	

$$f(x) = \sin x + \sin 3x$$

نقطة التماس:

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{4} + \sin \frac{3\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \Rightarrow \left(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right)$$

ميل المماس:

$$27 \quad f'(x) = \cos x + 3 \cos 3x$$

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{4} + 3 \cos \frac{3\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{3}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$$

معادلة المماس:

$$y - \sqrt{2} = -\sqrt{2} \left(x - \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow y = -\sqrt{2}x + \sqrt{2} \left(\frac{\pi + 4}{4}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{1}{2t}$$

ميل المماس:

$$28 \quad m = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=4} = \frac{1}{8}$$

نقطة التماس:

$$x = (4)^2 = 16, \quad y = 4 + 2 = 6 \Rightarrow (16, 6)$$

معادلة المماس:

$$y - 6 = \frac{1}{8}(x - 16) \Rightarrow y = \frac{1}{8}x + 4$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3 \cos t}{-4 \sin t} = -\frac{3}{4} \cot t$$

ميل المماس:

$$m = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=\frac{\pi}{4}} = -\frac{3}{4} \cot \frac{\pi}{4} = -\frac{3}{4}$$

29

نقطة التماس:

$$x = 4 \cos \frac{\pi}{4} = 2\sqrt{2}, \quad y = 3 \sin \frac{\pi}{4} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \left(2\sqrt{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$$

معادلة المماس:

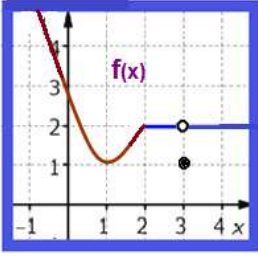
$$y - \frac{3\sqrt{2}}{2} = -\frac{3}{4}(x - 2\sqrt{2}) \Rightarrow y = -\frac{3}{4}x + 3\sqrt{2}$$

	$y = x \ln x$ $f'(x) = (x) \left(\frac{1}{x} \right) + (\ln x)(1) = 1 + \ln x$ $f'(1) = 1 + \ln 1 = 1$ $y - 0 = 1(x - 1) \Rightarrow y = x - 1$	ميل المماس: معادلة المماس:
30	$f'(x) = 2 \Rightarrow 1 + \ln x = 2$ $\Rightarrow \ln x = 1$ $\Rightarrow x = e \Rightarrow y = e \ln e = e$	النقطة المطلوبة هي (e, e)
31	$x(x+y) = 2y^2 \Rightarrow x^2 + xy = 2y^2$ $\Rightarrow 2x + x \frac{dy}{dx} + y = 4y \frac{dy}{dx}$ $\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2x+y}{4y-x}$	
32	$x = \frac{2y}{x^2 - y}$ $1 = \frac{2 \frac{dy}{dx} (x^2 - y) - 2y(2x - \frac{dy}{dx})}{(x^2 - y)^2}$ $(x^2 - y)^2 + 4xy = 2x^2 \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{(x^2 - y)^2 + 4xy}{2x^2}$	
33	$y \cos x = x^2 + y^2 \Rightarrow -y \sin x + \frac{dy}{dx} \cos x = 2x + 2y \frac{dy}{dx}$ $\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2x + y \sin x}{-2y + \cos x}$	
34	$2xe^y + ye^x = 3 \Rightarrow 2xe^y \frac{dy}{dx} + 2e^y + ye^x + e^x \frac{dy}{dx} = 0$ $\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{2e^y + ye^x}{2xe^y + e^x}$	
35		

36	$y^2 = \frac{x^3}{2-x}$ $2y \frac{dy}{dx} = \frac{(2-x)(3x^2) - (x^3)(-1)}{(2-x)^2}$ $2(-1) \frac{dy}{dx} = \frac{(2-1)(3) - (1)(-1)}{(2-1)^2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -2$ ميل المماس: $m = -2$ ميل العمودي على المماس: $m = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$ معادلة العمودي على المماس: $y+1 = \frac{1}{2}(x-1) \Rightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$
37	$y = \frac{(x+1)(x-2)}{(x-1)(x+2)}$ $\ln y = \ln \frac{(x+1)(x-2)}{(x-1)(x+2)}$ $= \ln(x+1) + \ln(x-2) - \ln(x-1) - \ln(x+2)$ $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2}$ $\frac{dy}{dx} = \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2} \right) y$ $= \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2} \right) \frac{(x+1)(x-2)}{(x-1)(x+2)}$ $= \left(\frac{-2}{x^2-1} + \frac{4}{x^2-4} \right) \frac{(x+1)(x-2)}{(x-1)(x+2)}$ $= \left(\frac{2x^2+4}{(x^2-1)(x^2-4)} \right) \frac{(x+1)(x-2)}{(x-1)(x+2)}$ $= \frac{2x^2+4}{(x-1)^2(x+2)^2}$

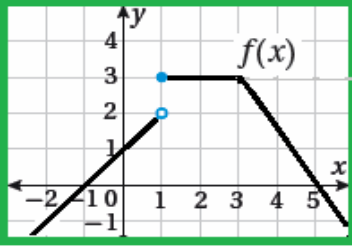
38	$y = x^{\ln x}$ $\ln y = \ln x^{\ln x} = (\ln x)(\ln x) = (\ln x)^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2(\ln x) \times \frac{1}{x}$ $\frac{dy}{dx} = \left(\frac{2 \ln x}{x}\right) y = \left(\frac{2 \ln x}{x}\right) x^{\ln x}$	
39	$x^2 + 3xy + y^2 = x + 3y$ $2x + 3x \frac{dy}{dx} + 3y + 2y \frac{dy}{dx} = 1 + 3 \frac{dy}{dx}$ $4 + 6 \frac{dy}{dx} - 3 - 2 \frac{dy}{dx} = 1 + 3 \frac{dy}{dx}$ $\frac{dy}{dx} \Big _{(2,-1)} = 0 \Rightarrow y + 1 = 0(x - 2) \Rightarrow y = -1$	ميل المماس عند (2, -1): معادلة المماس:
40	$x^2 e^y = 1 \Rightarrow x^2 e^y \frac{dy}{dx} + 2x e^y = 0$ $\frac{dy}{dx} + 2 = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} \Big _{(1,0)} = -2$ $y - 0 = -2(x - 1) \Rightarrow y = -2x + 2$	ميل المماس: معادلة المماس:
41	$p'(1) = f(1)g'(1) + g(1)f'(1) = 2 \times 1 + 3 \times -2 = -4$	
42	$p'(4) = f(4)g'(4) + g(4)f'(4) = 1 \times 0 + 8 \times 0.5 = 4$	
43	$q'(7) = \frac{g(7)f'(7) - f(7)g'(7)}{(g(7))^2} = \frac{4 \times 2 - 4 \times -1}{(4)^2} = \frac{3}{4}$	
44	$R(t) = 200(0.9)^t$ $\frac{dR}{dt} = 200(0.9)^t \ln 0.9$ $\frac{dR}{dt} \Big _{t=2} = 200(0.9)^2 \ln 0.9 \approx -17.1 \text{ g/day}$	
45	$s(t) = 10 + \frac{1}{4} \sin(10\pi t)$ $v(t) = \frac{5\pi}{2} \cos(10\pi t)$ $a(t) = -25\pi^2 \sin(10\pi t)$	

اختبار وحدة التفاضل أسئلة متوقعة (مراجعة مكثفة)



(1) معتمداً الشكل المجاور ، فإن قيم (x) التي يكون عندها منحنى الاقتران $f(x)$ غير قابل للاشتقاق هي :

- a) 1 b) 2 , 3 c) 3 d) 1 , 2



(2) معتمداً الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران $f(x)$ ، فإن قيم (x) التي يكون عندها الاقتران f غير قابل للاشتقاق هي :

- a) 1 b) 1 , 3 c) 3 d) -1 , 5



(3) إذا كان $f(x) = 3e^{x+1}$ فإن $f'(0) =$

- a) 3 b) $3e$ c) $3e^2$ d) 0

(4) إذا كان $f(x) = e^x + \ln(x+1)$ فإن معادلة المماس لمنحنى f عند النقطة $(0, 1)$ هي :

- a) $y = 2x$ b) $y = 2x - 1$
c) $y = 2x - 2$ d) $y = 2x + 1$

(5) إذا كان $f(x) = \frac{2x-8}{e^x}$ ، فإن قيم (x) التي عندها مماس أفقي هي :

- a) 4 b) -2 c) 5 d) 5, 0

(6) إذا كان $f(x) = \sin x + \sin \pi$ فإن معادلة المماس لمنحنى $f(x)$ عند النقطة $(\pi, 0)$ تساوي :

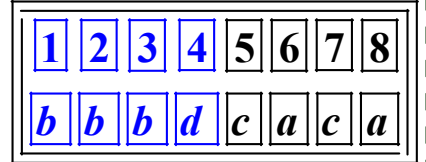
- a) $y = \pi - x$ b) $y = x - \pi$ c) $y = \pi$ d) $y = x + \pi$

(7) إذا كان $f(x) = e^x + \cos x$ ، فإن معادلة المماس لمنحنى f عند نقطة تقاطعه مع المحور (y) هي :

- a) $y = 2x$ b) $y = -2x$ c) $y = x + 2$ d) $y = x - 1$

(8) إذا كان $f(x) = e^{2x-6} - 2x$ ، فإن قيم (x) التي يكون عندها مماس أفقي لمنحنى الاقتران f هي :

- a) 3 b) $\ln 2$ c) 6 d) 3 , 2



(9) إذا كان $f(x) = \ln \frac{e^{2x}}{x^4} + 3x$ فإن ميل المماس لمنحنى f عند $x = 2$ هو :

- a) e^2 b) $e^2 + 3$ c) 3 d) 7

(10) إذا كان $f(x) = \sin x + 3$ ، فإن ميل العمودي على المماس عند $x = \frac{\pi}{6}$ يساوي :

- a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ d) $-\frac{2}{\sqrt{3}}$

(11) مساحة المثلث المحصور بين المماس لمنحنى $f(x) = e^{1-x}$ والمحورين الإحداثيين عند النقطة (1, 1) تساوي :

- a) 4 b) 1 c) 2 d) 3

(12) إذا كان الاقتران $s(t) = t^2 - 8t + 7$, $t \geq 0$ ، يُمثل موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم ،

فإن الجسم يعود إلى موقعه الابتدائي بعد : a) 7 s b) 8 s c) 1 s d) 4 s

(13) إذا كان الاقتران $s(t) = 4t^2 - t^3$, $t \geq 0$ ، يُمثل موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم ،

فإن الجسم يعود إلى موقعه الابتدائي بعد : a) 6 s b) 8 s c) 3 s d) 4 s

(14) إذا كان الاقتران : $s(t) = e^t - 6t$, $t \geq 0$ ، يُمثل موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم ،

فإن تسارع الجسم عندما تكون سرعته المتجهة تساوي (4 m/s) يساوي :

- a) 10 b) 6 c) $\ln 10$ d) 4

(15) إذا كان الاقتران : $s(t) = \frac{1}{3}t^3 - \frac{5}{2}t^2 + 6t$, $t \geq 0$ ، يُمثل موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم

ما قيم (t) التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لحظي ؟

- a) 2 , 3 b) 6 , 1 c) 2 d) 3

(16) إذا كان الاقتران $s(t) = t^3 - 6t^2 - 8$, $t \geq 0$ ، يُمثل موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم ،

فإن الفترة الزمنية التي يتحرك فيها الجسم في الاتجاه السالب هي :

- a) (0 , 4) b) (4 , ∞) c) (0 , 9) d) (12 , ∞)

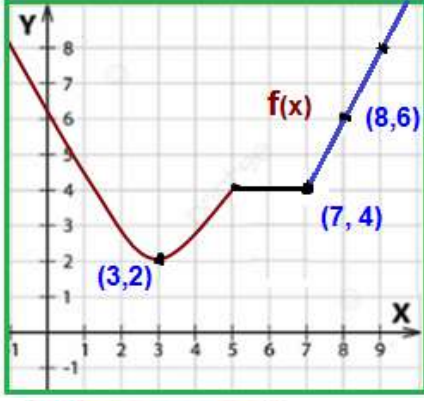
(17) يتحرك جسم معلق في زنبرك إلى الأعلى والأسفل ، ويعطى موقعه بالاقتران $S(t) = 2 \sin t$ ،

فإن الاقتران الذي يمثل تسارع الجسم عند أي لحظة هو :

- a) $2 \sin t$ b) $2 \cos t$ c) $-2 \sin t$ d) $-2 \cos t$



9	10	11	12	13	14	15	16	17
c	d	c	b	d	a	a	a	c



*** معتمداً لشكل المجاور والذي يمثل منحنى الاقتران $f(x)$ ،
أجب عن الأسئلة (18 ، 19 ، 20 ، 21 ، 22) الآتية :

- 18) $f'(6) =$ a) 1 b) 4 c) 0 d) غير موجودة
19) $f'(5) =$ a) 4 b) 0 c) 7 d) غير موجودة
20) $f'(3) =$ a) 0 b) 2 c) 3 d) غير موجودة
21) $f'(8) =$ a) 8 b) 2 c) 6 d) غير موجودة
22) $g(x) = f^2(x) \Rightarrow g'(9) =$ a) 8 b) 16 c) 32 d) 4



23) $f(x) = x^2 + \cos x \Rightarrow f'(x) =$ a) $2x + \sin x$ b) $2x - \sin x$
c) $2x \sin x$ d) $-2x \sin x$

24) $f(x) = x^2 \cos x \Rightarrow f'(x) =$ a) $2x \sin x$ b) $-2x \sin x$
c) $2x \cos x - x^2 \sin x$ d) $2x \cos x + x^2 \sin x$

25) $f(x) = x^2 + \sin x^2 \Rightarrow f'(x) =$
a) $2x + \cos x^2$ b) $2x + 2x \cos x^2$
c) $2x + 2 \sin x \cos x$ d) $2x \sin x^2 + 2x^3 \cos x$

$f(2) = 1, f'(2) = -4, g(2) = -1, g'(1) = 5 \Rightarrow$

معتمداً هذه المعلومات ، أجب عن الأسئلة (26 - 30)

26) $(f \cdot g)'(2) =$ a) 9 b) -9 c) 1 d) -1

27) $\left(\frac{f}{g}\right)'(2) =$ a) 9 b) -1 c) -9 d) 1

28) $(3f - g)'(2) =$ a) 7 b) -7 c) -17 d) 4

29) $\left(\frac{g}{f}\right)'(2) =$ a) 6 b) 1 c) -9 d) 9

30) $\left(\frac{3}{f}\right)'(2) =$ a) 12 b) -12 c) -3 d) 0



18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
c	d	a	b	c	b	c	b	a	b	c	b	a



31) $f(x) = \ln x^3 \Rightarrow f''(x) =$ a) $3 \ln x$ b) $\frac{-3}{x^2}$ c) $\frac{3}{x}$ d) $\frac{3}{x^2}$

32) $f(x) = (x^3 - 2)(x^3 + 2) \Rightarrow f'(-1) =$ a) 6 b) -6 c) 5 d) 30

33) $f(x) = \ln x \Rightarrow x^2 f'(x) + x^3 f''(x) + x^4 f^{(3)}(x) =$
a) -x b) 2x c) 4x d) -4x

34) $f(x) = 4 \sin^2 x \cos^2 x \Rightarrow f'(\frac{\pi}{6}) =$ a) $\sqrt{3}$ b) $4\sqrt{3}$ c) 2 d) -2

35) $f(x) = 4 \sin^2 2x \cos^2 2x \Rightarrow f'(\frac{\pi}{6}) =$ a) $-2\sqrt{3}$ b) $4\sqrt{3}$ c) $2\sqrt{3}$ d) -2

36) $f(x) = 2 \sin^2 x \cos^2 x \Rightarrow f'(x) =$
a) $2 \sin 4x$ b) $4 \sin 4x$ c) $\sin 4x$ d) $8 \cos 2x$

37) $f(x) = \sin(\pi e^x) \Rightarrow f'(0) =$ a) π b) e c) -1 d) $-\pi$

38) $f(x) = x^2 + \sin^2 x \Rightarrow f'(x) =$
a) $2x + \cos x^2$ b) $2x + \sin 2x$
c) $2x + 2 \cos x$ d) $2x - 2 \sin x \cos x$

39) $g'(3) = -1, g(3) = 2, f(x) = g^3(x) \Rightarrow f'(3) =$
a) -12 b) -10 c) 6 d) -3

40) $f(x) = 4 \sin^2 x \Rightarrow f'(x) =$
a) $4 \sin x \cos x$ b) $4 \sin 2x$ c) $8 \cos x$ d) $4 \cos^2 x$



31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
b	b	b	a	a	c	d	b	a	b



(41) إذا كان $f(x) = \ln(\tan x)$ فإن $f'(x)$ تساوي :

- a) $\sec^2 x$ b) $\cot x$ c) $-\cot x$ d) $\sec x \csc x$

(42) إذا كان $f(x) = \sin(\ln x)$ فإن $f'(x)$ تساوي :

- a) $x \cos x$ b) $\cos(\ln x)$ c) $\frac{\cos(\ln x)}{x}$ d) $\frac{\cos(\ln x)}{\sin(\ln x)}$

(43) إذا كان $f(x) = \sin^3 x$ فإن $f'(\frac{\pi}{3})$ تساوي :

- a) $-\frac{9}{8}$ b) $\frac{9}{8}$ c) $\frac{3\sqrt{3}}{8}$ d) $\frac{3}{2}$

(44) إذا كان $f(x) = g^3(x)$, $g(3) = 2$, $g'(3) = -1$ فإن $f'(3)$ تساوي

- a) -12 b) -10 c) 6 d) -3

(45) إذا كان $f(x) = \cos x^2$ فإن $f'(x)$ تساوي :

- a) $2 \sin x \cos x$ b) $2x \sin x$ c) $2x \cos x^2$ d) $-2x \sin x^2$

(46) إذا كان $f(x) = \ln(\tan x)$ فإن $f'(x)$ تساوي :

- a) $\sec^2 x$ b) $\cot x$ c) $-\cot x$ d) $\sec x \csc x$

(47) $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = 3x^2 \Rightarrow (f \circ g)'(-1) =$

- a) 12 b) -6 c) 36 d) -36

(48) $f(x) = \sin x$, $g(x) = 4 - x^2 \Rightarrow (f \circ g)'(2) =$

- a) 4 b) -4 c) 0 d) -2

(49) $f'(6) = 3$, $g(4) = 6$, $g'(4) = -2 \Rightarrow (f \circ g)'(4) =$

- a) 12 b) -6 c) 24 d) -36

(50) $F(x) = g(h(x))$, $h(5) = -3$, $h'(5) = -1$, $g'(-3) = 4$

$\Rightarrow F'(5) =$ a) -12 b) -4 c) 12 d) 4

41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
d	c	b	a	d	d	d	b	b	b

51) إذا كان $f(x) = 6^{4x}$ فإن $f'(x)$ تساوي :

- a) $6^{4x} (4)$ b) $6^{4x} (\ln 4x)$ c) $6^{4x} (4 \ln 6)$ d) $6^{4x} (\ln 6)$

52) إذا كان $f(x) = \log_3 x$ فإن $f'(x)$ تساوي :

- a) $\frac{1}{x \ln 3}$ b) $\frac{\ln 3}{x}$ c) $\frac{3}{x}$ d) 3^x

53) إذا كان $f(x) = \ln(xe^{2x})$ فإن $f'(-\frac{1}{2})$ تساوي :

- a) -1 b) 0 c) 2 d) -4

54) إذا كان $f(x) = 2^x \sin x$ فإن $f'(0)$ تساوي :

- a) 0 b) 1 c) $\ln 2$ d) $-\ln 2$

55) إذا كانت $y = x^x$ فإن $\frac{dy}{dx}$:

- a) $x^x \ln x + 1$ b) $x^x \ln x + x^x$ c) $x x^{x-1}$ d) x^2

56) إذا كان $f(x) = \pi^x$ فإن $f'(x)$ تساوي :

- a) π^{x-1} b) $\pi^x - 1$ c) $\pi^x (\ln \pi)$ d) π^x

57) إذا كان $f(x) = 6^{4x}$ فإن $f'(x)$ تساوي :

- a) $6^{4x} (4)$ b) $6^{4x} (\ln 4x)$ c) $6^{4x} (4 \ln 6)$ d) $6^{4x} (\ln 6)$

58) إذا كان $f(x) = 2^{4-x^2}$ فإن $f'(-2)$ تساوي :

- a) $\ln 4$ b) $2 \ln 4$ c) $\ln 2$ d) $\ln 16$

59) إذا كان $f(x) = \log_3 x$ فإن $f'(x)$ تساوي :

- a) $\frac{1}{x \ln 3}$ b) $\frac{\ln 3}{x}$ c) $\frac{3}{x}$ d) 3^x

60) إذا كان $f(x) = \log(x^2 + 1)$ فإن $f'(1)$ تساوي :

- a) $\frac{1}{\ln 2}$ b) $\frac{2}{\ln 100}$ c) $\frac{2}{\ln 10}$ d) $\frac{1}{\ln 100}$



51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
c	a	b	b	b	c	c	d	a	b

61) إذا كان $f(x) = 2^x \sin x$ فإن $f'(0)$ تساوي :

- a) 0 b) 1 c) $\ln 2$ d) $-\ln 2$

62) إذا كانت $y = x^{\frac{1}{x-2}}$, فإن $\frac{dy}{dx}$ عند النقطة $(4, 2)$ =

- a) $\ln \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ b) $\ln \frac{1}{4} - \frac{1}{4}$ c) $4 - \ln 4$ d) $4 + \ln 4$

63) إذا كان $f(x) = e^{\sin x} + 1$, فإن ميل المماس لمنحنى f عند نقطة تقاطعه مع المحور (y) يساوي :

- a) 2 b) $\ln 2$ c) 1 d) 3

64) إذا كان منحنى العلاقة الوسيطة يعطى: $x=t^2$, $y=6t$, فإن $\frac{dy}{dx}$ =

- a) $2t$ b) $12t$ c) $\frac{3}{t}$ d) $\frac{2}{t}$

65) ميل المماس لمنحنى العلاقة الوسيطة $x=t^2$, $y=t+2$ عند $t=3$ يساوي :

- a) 6 b) 3 c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{1}{6}$

66) إذا كان منحنى العلاقة الوسيطة يعطى: $x=t - \sin t$, $y=1 - \cos t$, $0 \leq t \leq 2\pi$, فإن $\frac{dy}{dx}$ عند $x=\frac{\pi}{4}$ =

- a) $\sqrt{2}$ b) $\sqrt{2}+1$ c) $2\sqrt{2}+1$ d) $2\sqrt{2}$

67) ميل المماس لمنحنى العلاقة الوسيطة $x=\sec^2 t - 1$, $y=\tan t$ عند $t=\frac{\pi}{4}$ يساوي :

- a) 2 b) -2 c) $\frac{1}{2}$ d) $-\frac{1}{2}$

68) إذا كانت : $x = \sin t$, $y = 2\cos t$, فإن المشتقة الثانية لهذه المعادلة الوسيطة تساوي :

- a) $-2\sec^3 t$ b) $2\sec^3 t$ c) $2\sec^2 t$ d) -2

69) معادلة المماس لمنحنى العلاقة الوسيطة $x=3t+2$, $y=3t^2-3$ عند $t=1$ هي :

- a) $y=2x-10$ b) $y=2x-8$ c) $y=2x-5$ d) $y=2x$

70) معادلة المماس لمنحنى العلاقة الوسيطة $x=\sin t$, $y=\cos t$ عند $t=\frac{\pi}{4}$ هي :

- a) $y=\sqrt{2}+x$ b) $y=\sqrt{2}-x$ c) $y=\sqrt{2}x$ d) $y=-x$

61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
b	a	c	c	d	b	c	a	a	b

(71) إذا كانت $\sin x + \cos y = 1$ فإن $\frac{dy}{dx}$

- a) $\cot xy$ b) $\frac{\sin y}{\cos x}$ c) $\frac{-\cos x}{\sin y}$ d) $\frac{\cos x}{\sin y}$

(72) إذا كانت $x - x^2 = y + y^2 = 12$ فإن $\frac{dy}{dx}$

- a) $\frac{-x}{y}$ b) $\frac{1+2x}{1-2y}$ c) $\frac{1-2y}{1+2x}$ d) $\frac{1-2x}{1+2y}$

(73) إذا كانت $x^2 = \ln y$ فإن $\frac{dy}{dx}$

- a) $-2xy$ b) $2xy$ c) $2x$ d) $2y$

(74) واحدة من النقط الآتية والواقعة على منحنى العلاقة $(y-4)^2 = x+2$ يكون عندها المماس موازياً للمستقيم $3x - 6y + 2 = 0$:

- a) (1, 7) b) (-1, 5) c) (-1, 3) d) (2, 2)

(75) واحدة من النقط الآتية والواقعة على منحنى العلاقة $(y-3)^2 = x+4$ يكون عندها المماس عمودياً على للمستقيم $y = 2x + 1$:

- a) (-3, 4) b) (-3, 2) c) (-4, 3) d) (5, 0)

(76) إذا كانت $x = \sin y$ فإن $\frac{d^2y}{dx^2}$

- a) $\cot y \csc y$ b) $\sec^2 y$ c) $\sec y \tan y$ d) $\sec^2 y \tan y$

(77) إذا كانت: $x = 3t^2 + 4$ ، $y = t^3 - 4t^2$ ، فإن المشتقة الثانية لهذه المعادلة الوسيطة تساوي:

- a) $6t$ b) $\frac{1}{6t}$ c) $\frac{1}{12t}$ d) $12t$

(78) إذا كانت $x^2 - y^2 = 5$ فإن $\frac{d^2y}{dx^2}$

- a) $\frac{5}{y^3}$ b) $\frac{-5}{y^3}$ c) $\frac{-x}{y}$ d) $\frac{1-x^2}{y^3}$

(79) إذا كانت $y = \sin 2x$ فإن $\frac{d}{dx}(y y')$ تساوي:

- a) 4 b) $4 \sin 2x$ c) $-4 \cos 2x$ d) $4 \cos 2x$

(80) إذا كانت $x^2 + y^2 = 2x + 2y$ فإن $\left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{(2,2)}$ تساوي:

- a) -2 b) 2 c) 1 d) -1



71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
d	d	b	c	b	d	c	b	d	a