

المرجع في الرياضيات للفف الثاني ثانوي العلمي

كتاب الطالب + كتاب التمارين
الفصل الأول / الوحدة الثانية

الدرس الثاني
(القيم القصوى والتقعر)

الأستاذ: معتصم ابراهيم

0790264376

نسخة مجانية ليستفيد منها الطلبة، فلا
تتردد بنشرها لتعم الفائدة وكسب الأجر

ولا تنسوننا من دعائكم

طبعة السنة 2024/2025

الدرس الثاني

القيم القصوى والتقعر

مخطط الدرس الثاني



القيمة العظمى المحلية: إذا وجدت قيمة للاقتران وكانت أكبر من جميع القيم الأخرى في فترة ما من مجال الاقتران.

القيمة العظمى المطلقة: إذا وجدت قيمة للاقتران وكانت أكبر قيمة على الاطلاق في مجال الاقتران.

القيمة الصغرى المحلية: إذا وجدت قيمة للاقتران وكانت أصغر من جميع القيم الأخرى في فترة ما من مجال الاقتران.

القيمة الصغرى المطلقة: إذا وجدت قيمة للاقتران وكانت أصغر قيمة على الاطلاق في مجال الاقتران.

ملاحظات مهمة:

- (1) كل قيمة عظمى مطلقة هي قيمة محلية، وتكون مطلقة إذا كانت أعلى شيء في الرسم.
- (2) كل قيمة صغرى مطلقة هي قيمة محلية، وتكون مطلقة إذا كانت أصغر شيء في الرسم.

مسألة اليوم: (صفحة 90)

يمثل الاقتران $C(t) = 3.59 + 8(1.5e^{-0.4t-1} - e^{-0.6t})$ تركيز جرعة دواء في دم مريض بعد t ساعة من تناولها، حيث C مقيسة بوحدة $\mu g/ml$ ، أحدد الزمن الذي يكون فيه تركيز الدواء أكبر ما يمكن خلال أول 12 ساعة من تناول جرعة الدواء .

$$C(t) = 3.59 + 8(1.5e^{-0.4t-1} - e^{-0.6t})$$

المطلوب هو قيمة t التي يكون عندها الاقتران $C(t)$ قيمة عظمى مطلقة في $[0, 12]$ لذا نجد القيم الحرجة:

$$\hat{C}(t) = 8(-0.6e^{-0.4t-1} + 0.6e^{-0.6t}) = 0 \Rightarrow 8(-0.6e^{-0.4t-1} + 0.6e^{-0.6t}) = 0$$

$$\Rightarrow -0.6e^{-0.4t-1} + 0.6e^{-0.6t} = 0 \Rightarrow 0.6e^{-0.4t-1} = 0.6e^{-0.6t}$$

$$\Rightarrow e^{-0.4t-1} = e^{-0.6t} \Rightarrow -0.4t - 1 = -0.6t \Rightarrow 0.2t = 1 \Rightarrow t = 5$$

توجد قيمة حرجة وحيدة ضمن مجال الاقتران وهي $t = 5$

نقارن قيمة الاقتران عند النقطة الحرجة مع قيمتيه عند طرفي مجاله باستخدام الآلة الحاسبة.

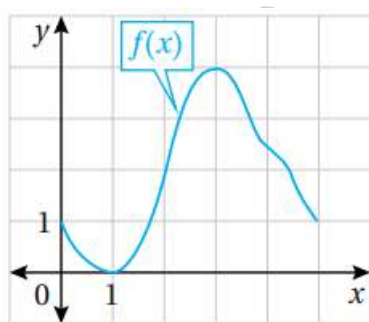
$$C(0) = 3.59 + 8(1.5e^{-0.4(0)-1} - e^{-0.6(0)}) \approx 0.005$$

$$C(5) = 3.59 + 8(1.5e^{-0.4(5)-1} - e^{-0.6(5)}) \approx 3.79$$

$$C(12) = 3.59 + 8(1.5e^{-0.4(12)-1} - e^{-0.6(12)}) \approx 3.62$$

وبما أن $C(5)$ هو أكبر هذه القيم فإن تركيز الدواء يكون أكبر ما يمكن بعد 5 ساعات من تناوله .

القيم القصوى المحلية والمطلقة



- الشكل هو تمثيل بياني لمنحنى الاقتران $f(x)$ المعروف

على الفترة المغلقة $[0, 5]$.

- أعلى نقطة على منحنى $f(x)$ هي $(3, 4)$ ، وهذا يعني

أن أكبر قيمة للاقتران f هي $f(3) = 4$.

- أدنى نقطة على منحنى $f(x)$ هي $(1, 0)$ ، وهذا يعني

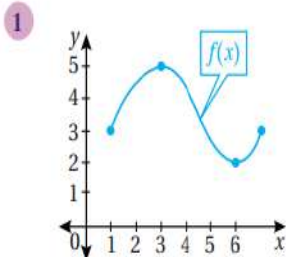
أن أصغر قيمة للاقتران f هي $f(1) = 0$.

- نستنتج أن $f(3) = 4$ هي قيمة عظمى مطلقة .

- نستنتج أن $f(1) = 0$ هي قيمة صغرى مطلقة .

مثال 1: (صفحة 92)

أجد القيم القصوى المحلية والقيم القصوى المطلقة (إن وجدت) للاقتران المعطى تمثيله البياني في كل مما يأتي:

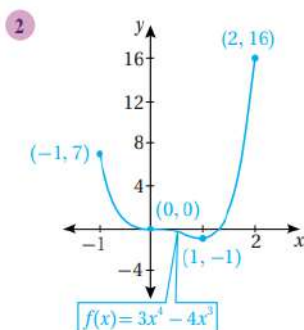


الأحظ من التمثيل البياني لمنحنى $f(x)$ وجود :

* قيمة عظمى محلية ومطلقة للاقتران f ، وهي : $f(3) = 5$.

* قيمة صغرى محلية ومطلقة للاقتران f ، وهي : $f(6) = 2$.

الأحظ من التمثيل البياني لمنحنى $f(x)$ وجود :

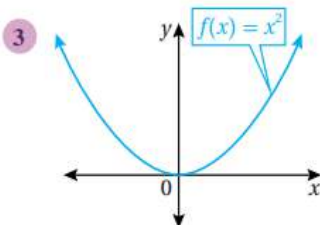


* قيمة صغرى محلية ومطلقة للاقتران f ، وهي : $f(1) = -1$.

* قيمة عظمى محلية ومطلقة للاقتران f ، وهي : $f(2) = 16$.

(ليست قيمة عظمى محلية، لأنها ليست داخلية، فهي طرف فترة).

الأحظ من التمثيل البياني لمنحنى $f(x)$ وجود :

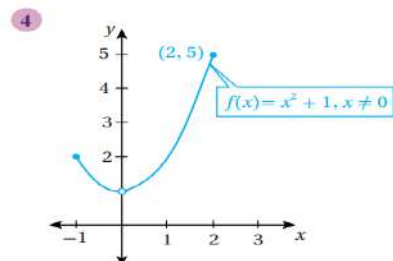


* قيمة صغرى محلية ومطلقة للاقتران f ، وهي : $f(0) = 0$.

* لا توجد قيمة عظمى (محلية ، أو مطلقة) للاقتران f .

وذلك لأن الأسهم للأعلى مما يعني أن الفترة مفتوحة لذلك يمكن يرتفع ويصل إلى قيمة أعلى

الأحظ من التمثيل البياني لمنحنى $f(x)$ وجود :



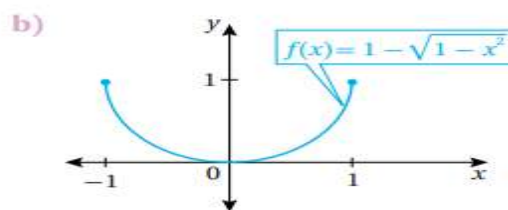
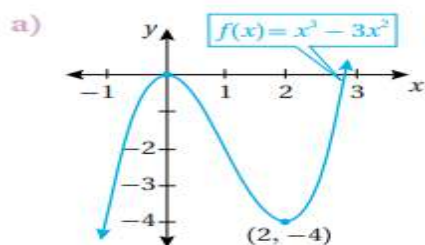
* قيمة عظمى مطلقة للاقتران f ، وهي : $f(2) = 5$.

* لا توجد قيمة صغرى (محلية ، أو مطلقة) للاقتران f .

الأحظ أن (1) لا تعد قيمة صغرى مطلقة لأنه غير متصل عندها.

أتحقق من فهمي: (صفحة 93)

أجد القيم القصوى المحلية والقيم القصوى المطلقة (إن وجدت) للاقتزان المعطى تمثيله البياني في كل مما يأتي:



a) ليس للاقتزان f قيمة قصوى مطلقة ، وذلك لأن الأسهم للأعلى مما يعني أن الفترة مفتوحة لذلك يمكن يرتفع ويصل إلى قيمة أعلى .

للاقتزان قيمة عظمى محلية عند $x = 0$ هي $f(0) = 0$

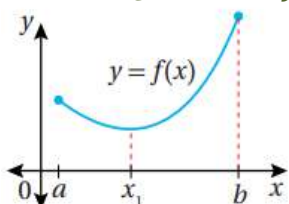
للاقتزان قيمة صغرى محلية عند $x = 2$ هي $f(2) = -4$

b) للاقتزان قيمة عظمى مطلقة عند $x = -1$ و $x = 1$ هي $f(\pm) = 1$

للاقتزان قيمة صغرى محلية ومطلقة عند $x = 0$ هي $f(0) = 0$

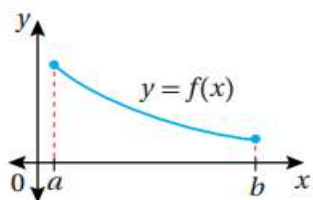
ملاحظة مهمة:

إذا كان f اقترانا متصلاً على الفترة المغلقة $[a, b]$ ، فإنه توجد للاقتزان f قيمة عظمى مطلقة وقيمة صغرى مطلقة في هذه الفترة. أمثلة:



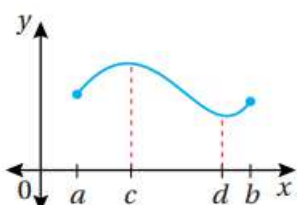
- القيمة الصغرى المطلقة عند نقطة داخلية والمشار إليها x_1 .

- القيمة العظمى المطلقة عند طرف الفترة عند النقطة والمشار إليها b .



- القيمة العظمى المطلقة عند طرف الفترة عند النقطة والمشار إليها a

- القيمة الصغرى المطلقة عند طرف الفترة عند النقطة والمشار إليها b .



- القيمة الصغرى المطلقة عند نقطة داخلية والمشار إليها c .

- القيمة العظمى المطلقة عند نقطة داخلية والمشار إليها d .

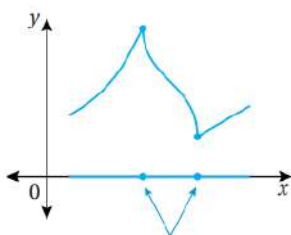
ملاحظة مهمة:

أن القيم الصغرى المطلقة لأي اقتران متصل على فترة مغلقة توجد عند النقاط الداخلية، أو عند أطراف الفترة.

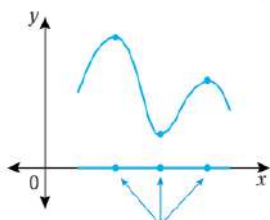
إيجاد القيم القصوى المطلقة على فترة مغلقة

ملاحظة مهمة:

أن القيم القصوى المحلية تكون موجودة عند نقاط داخل مجال الاقتران، حيث تكون المشتقة صفراً أو غير موجودة. أمثلة:



قيم x التي عندها قيم قصوى محلية، حيث المشتقة غير موجودة.



قيم x التي عندها قيم قصوى محلية، حيث المشتقة تساوي صفر.

ملاحظة مهمة:

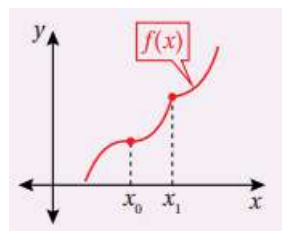
النقاط الحرجة: هي النقاط الداخلية التي تكون عندها $f' = 0$ أو تكون f' غير موجودة.

القيمة الحرجة: هي قيمة الإحداثي x للنقاط الحرجة.

ملاحظة مهمة:

إذا كان للاقتران f قيمة قصوى محلية عند $x = c$ فإن c قيمة حرجة للاقتران f .

ملاحظة مهمة:



ليست كل قيمة حرجة تعتبر قيمة قصوى محلية، مثال:

الشكل المجاور يبين منحنى الاقتران $f(x)$ ، حيث x_0 و x_1

قيمتان حرجتان، ولكن لا توجد عند أي منهما قيمة قصوى محلية.

خطوات إيجاد القيم القصوى المطلقة للاقتران f المتصل على الفترة المغلقة $[a, b]$ ، أتبع الخطوات المبينة في ما يأتي:

(1) أجد قيم الاقتران f عند القيم الحرجة للاقتران f في الفترة المفتوحة (a, b) .

(2) أجد قيمتي f عند طرفي الفترة.

(3) أجد أن أكبر القيم الناتجة من الخطوات (1) و (2) هي القيمة العظمى المطلقة، وأن أصغرها هي القيمة الصغرى المطلقة.

ملاحظة مهمة:

القيم الحرجة للاقتران هي قيم داخلية، لذا لا يعد طرفا فترة مجال الاقتران قيماً حرجة.

ملاحظة مهمة:

الاقتران كثير الحدود: هو اقتران تكون فيها جميع الأسس على المتغير x أعداد صحيحة غير سالبة، ومعاملاته أعداد حقيقية. (بالتالي الاقترانات الكسرية والاقترانات الجذرية ليست كثيرات حدود).

مثال 2: (صفحة 95)

أجد القيمة العظمى المطلقة والقيمة الصغرى المطلقة (إن وجدت) لكل اقتران مما يأتي في الفترة المعطاة:

$$1) f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2, [-2, 2]$$

بما أن الاقتران f متصل على الفترة $[-2, 2]$ ، فإنه كثير حدود، فإنه يمكنني إيجاد القيم القصوى المطلقة باتباع الخطوات الآتية:

إيجاد القيم الحرجة للاقتران f المتصل على الفترة $(-2, 2)$.

(1) الخطوة الأولى: إيجاد المشتقة.

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$$

(2) الخطوة الثانية: مساواة المشتقة بالصفر.

$$3x^2 - 6x - 9 = 0 \Rightarrow 3(x^2 - 2x - 3) = 0 \Rightarrow 3(x + 1)(x - 3) = 0$$

$$\Rightarrow x + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{x = -1} \Rightarrow x - 3 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 3}$$

بما أن $x = 3$ ليست ضمن مجال f ، فإنها تهمل، وبما أنه لا توجد قيم تكون عندها f غير موجودة، فإنه توجد قيمة حرجة واحدة للاقتران f هي: $x = -1$.

(3) الخطوة الثالثة: أجد قيم الاقتران f عند القيمة أو القيم الحرجة و عند طرفي الفترة.

$$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1) + 2 \Rightarrow = -1 - 3 + 9 + 2 \Rightarrow \boxed{f(-1) = 7}$$

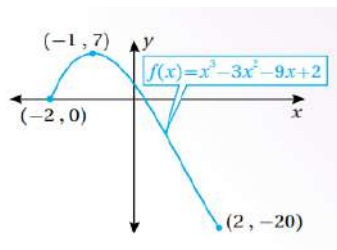
$$f(-2) = (-2)^3 - 3(-2)^2 - 9(-2) + 2 \Rightarrow = -8 - 12 + 18 + 2 \Rightarrow \boxed{f(-2) = 0}$$

$$f(2) = (2)^3 - 3(2)^2 - 9(2) + 2 \Rightarrow = 8 - 12 - 18 + 2 \Rightarrow \boxed{f(2) = -20}$$

(4) الخطوة الرابعة: نقارن قيمته عند النقطة الحرجة مع قيمته عند طرفي المجال.

القيمة العظمى المطلقة للاقتزان f في الفترة $[-2, 2]$ هي : $f(-1) = 7$ ، والقيمة الصغرى المطلقة له هي : $f(2) = -20$

الدعم البياني:



يبين التمثيل البياني المجاور لمنحنى الاقتزان : $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$

في الفترة $[-2, 2]$ أن القيمة العظمى المطلقة هي 7 ، وأن القيمة الصغرى المطلقة هي -20 .

2) $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$, $[-1, 2]$

بما ان الاقتزان f متصل على الفترة $[-1, 2]$ ، فإنه يمكنني إيجاد القيم القصوى المطلقة باتباع الخطوات الآتية :

أيجاد القيم الحرجة للاقتزان f المتصل على الفترة $(-1, 2)$

(1) الخطوة الاولى: إيجاد المشتقة:

$$f(x) = x^{\frac{2}{3}} \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

الاحظ أنه لا توجد أصفار للمشتقة ، وأن المشتقة غير موجودة عندما $x = 0$ ، لأنها غير معرفة في هذه الحالة ، لذا توجد قيمة حرجة واحدة للاقتزان f هي : $x = 0$ ، وقيمة الاقتزان عندها هي :

$$f(0) = 0$$

(2) الخطوة الثانية : أجد قيمتي الاقتزان f عند طرفي الفترة .

$$f(-1) = (-1)^{\frac{2}{3}} \Rightarrow = \sqrt[3]{(-1)^2} \Rightarrow = \sqrt[3]{1} \Rightarrow f(-1) = 1$$

$$f(2) = (2)^{\frac{2}{3}} \Rightarrow = \sqrt[3]{(2)^2} \Rightarrow = \sqrt[3]{4} \Rightarrow f(2) \approx 1.59$$

(3) الخطوة الثالثة: نقارن قيمته عند النقطة الحرجة مع قيمته عند طرفي المجال.

القيمة العظمى المطلقة للاقتزان f في الفترة $[-1, 2]$ هي : $f(2) = \sqrt[3]{4}$ ، والقيمة الصغرى المطلقة له هي : $f(0) = 0$.

$$3) f(x) = 2 \sin x - \cos 2x, [0, 2\pi]$$

بما أن الاقتران f متصل على الفترة $[0, 2\pi]$ ، فإنه يمكنني إيجاد القيم القصوى المطلقة باتباع الخطوات الآتية :

أيجاد القيم الحرجة للاقتران f المتصل على الفترة $(0, 2\pi)$

$$f(x) = 2 \sin x - \cos 2x$$

الخطوة الاولى: ايجاد المشتقة

$$\hat{f}(x) = 2 \cos x + 2 \sin 2x$$

الخطوة الثانية: مساواة المشتقة بالصفر

$$2 \cos x + 2 \sin 2x = 0$$

- ملاحظة: متطابقة ضعف الزاوية

$$2 \cos x + 4 \sin x \cos x = 0$$

- ملاحظة : بإخراج $2 \cos x$ عامل مشترك

$$2 \cos x (1 + 2 \sin x) = 0$$

$$2 \cos x = 0 \Rightarrow \boxed{\cos x = 0} \Rightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}}$$

$$1 + 2 \sin x = 0 \Rightarrow \boxed{\sin x = -\frac{1}{2}} \Rightarrow \boxed{x = \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}}$$

(3) الخطوة الثالثة: أجد قيم الاقتران f عند القيمة أو القيم الحرجة و عند طرفي الفترة .

$$f(0) = 2 \sin(0) - \cos 2(0) \Rightarrow = 2(0) - (1) \Rightarrow \boxed{f(0) = -1}$$

$$f(2\pi) = 2 \sin(2\pi) - \cos 2(2\pi) \Rightarrow = 2(0) - (1) \Rightarrow \boxed{f(2\pi) = -1}$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \cos 2\left(\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow = 2(1) - (-1) \Rightarrow \boxed{f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3}$$

$$f\left(\frac{7\pi}{6}\right) = 2 \sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) - \cos 2\left(\frac{7\pi}{6}\right) \Rightarrow = 2 \sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) - \cos\left(\frac{7\pi}{3}\right) \Rightarrow = 2\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{= -\frac{3}{2}}$$

$$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 2 \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) - \cos 2\left(\frac{3\pi}{2}\right) \Rightarrow 2(-1) - (-1) \Rightarrow -2 + 1 \Rightarrow \boxed{f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1}$$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{11\pi}{6}\right) &= 2 \sin\left(\frac{11\pi}{6}\right) - \cos 2\left(\frac{11\pi}{6}\right) \Rightarrow 2 \sin\left(\frac{11\pi}{6}\right) - \cos\left(\frac{11\pi}{3}\right) \\ &\Rightarrow 2\left(-\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow (-1) - \left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \boxed{f\left(\frac{11\pi}{6}\right) = -\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

(4) الخطوة الرابعة: نقارن قيمه عند النقاط الحرجة مع قيمته عند طرفي المجال.

القيمة العظمى المطلقة للاقتان f في الفترة $(0, 2\pi)$ هي : $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$.

القيمة الصغرى المطلقة له هي : $f\left(\frac{11\pi}{6}\right) = f\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{3}{2}$.

أتتحقق من فهمي: (صفحة 99)

أجد القيمة العظمى المطلقة والقيمة الصغرى المطلقة (إن وجدت) لكل اقتان مما يأتي في الفترة المعطاة:

1) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5$, $[-3, 5]$

الخطوة الاولى: ايجاد المشتقة

$$\hat{f}(x) = 3x^2 - 12x$$

الخطوة الثانية: مساواة المشتقة بالصفر

$$3x^2 - 12x = 0 \Rightarrow 3x(x - 4) = 0 \Rightarrow 3x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0} \Rightarrow x - 4 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 4}$$

قيم x الحرجة هي : $x = 4$ و $x = 0$

(3) الخطوة الثالثة: أجد قيم الاقتان f عند القيمة أو القيم الحرجة و عند طرفي الفترة .

$$f(-3) = (-3)^3 - 6(-3)^2 + 5 \Rightarrow -27 - 54 + 5 \Rightarrow \boxed{f(-3) = -76}$$

$$f(4) = (4)^3 - 6(4)^2 + 5 \Rightarrow 64 - 96 + 5 \Rightarrow \boxed{f(4) = -27}$$

$$f(0) = (0)^3 - 6(0)^2 + 5 \Rightarrow \boxed{f(0) = 5}$$

(4) الخطوة الرابعة: نقارن قيمه عند النقاط الحرجة مع قيمته عند طرفي المجال.

للاقتان قيمة صغرى مطلقة هي : $x = 3$ هي $f(-3) = -76$

وله قيمة عظمى محلية ومطلقة له هي : $x = 0$ هي $f(0) = 5$

$$2) f(x) = \sqrt[3]{x}, [-8, 8]$$

$$f(x) = x^{\frac{1}{3}} \Rightarrow \hat{f}(x) = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} \Rightarrow \hat{f}(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$\hat{f}(x)$ لا تساوي صفرا لأي قيمة في $(-8, 8)$ ، وهي غير موجودة عند $x = 0$ وهذه هي القيمة الحرجة فقط .

$$f(-8) = \sqrt[3]{-8} \Rightarrow \boxed{f(-8) = -2}$$

$$f(8) = \sqrt[3]{8} \Rightarrow \boxed{f(8) = 2}$$

$$f(0) = \sqrt[3]{0} \Rightarrow \boxed{f(0) = 0}$$

للافتتان قيمة صغرى مطلقة عند : $x = -8$ هي $f(-8) = -2$ ، وله قيمة عظمى مطلقة له عند : $x = 2$ هي $f(8) = 2$

$$3) f(x) = \sin^2 x + \cos x, [0, 2\pi]$$

(1) الخطوة الاولى: ايجاد المشتقة

$$\hat{f}(x) = 2 \sin x \cos x - \sin x$$

(2) الخطوة الثانية: مساواة المشتقة بالصفر

$$2 \sin x \cos x - \sin x = 0 \Rightarrow \sin x (2 \cos x - 1) = 0 \Rightarrow \sin x = 0 \Rightarrow \boxed{x = \pi}$$

$$2 \cos x - 1 = 0 \Rightarrow 2 \cos x = 1 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{3}} \quad \boxed{x = \frac{5\pi}{3}}$$

(3) الخطوة الثالثة: أجد قيم الافتتان f عند القيمة أو القيم الحرجة و عند طرفي الفترة .

$$f(0) = \sin^2 0 + \cos 0 \Rightarrow = 0 + 1 \Rightarrow \boxed{f(0) = 1}$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin^2 \frac{\pi}{3} + \cos \frac{\pi}{3} \Rightarrow = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \Rightarrow = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \Rightarrow = \frac{3}{4} + \frac{2}{4} \Rightarrow \boxed{f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{5}{4}}$$

$$f(\pi) = \sin^2 \pi + \cos \pi \Rightarrow = 0 + (-1) \Rightarrow \boxed{f(\pi) = -1}$$

$$f\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \sin^2 \frac{5\pi}{3} + \cos \frac{5\pi}{3} \Rightarrow = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \Rightarrow = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \Rightarrow = \frac{3}{4} + \frac{2}{4} \Rightarrow \boxed{f\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{5}{4}}$$

$$f(2\pi) = \sin^2 2\pi + \cos 2\pi \Rightarrow = 0 + 1 \Rightarrow \boxed{f(2\pi) = 1}$$

(4) الخطوة الرابعة: نقارن قيمه عند النقاط الحرجة مع قيمته عند طرفي المجال.

للافتتان قيمة صغرى محلية ومطلقة هي : $x = \pi$ هي $f(\pi) = -1$

وله قيمة عظمى محلية ومطلقة له هي : $x = \frac{\pi}{3}$ و $x = \frac{5\pi}{3}$ هي $\frac{5}{4}$

ايجاد القيم القصوى المحلية:

ملاحظة مهمة:

ميل المماس لمنحنى f عند نقطة هو f' عند هذه النقطة.

ملاحظة مهمة:

(1) إذا كان : $f'(x) > 0$ (الميل موجب) لقيم x جميعها في الفترة I ، فإن f يكون متزايداً .

(2) إذا كان : $f'(x) < 0$ (الميل سالب) لقيم x جميعها في الفترة I ، فإن f يكون متناقصاً .

ملاحظة مهمة:

بما أن كل قيمة حرجة ليست بالضرورة أن تكون قيمة صغرى محلية أو قيمة عظمى محلية.

ملاحظة مهمة:

اختبار المشتقة الأولى : هو اختبار لتحديد إذا كان للاقتران f قيمة صغرى محلية أو قيمة عظمى عند النقطة الحرجة أم لا .

ملاحظة مهمة:

القيم الحرجة: هي قيم مرشحة ليكون عندها نقاط قصوى، ويلزم التحقق من أن f يغير سلوكه حول هذه القيم (من التزايد إلى التناقص أو العكس) .

مثال 3: (صفحة 101)

أجد القيم القصوى المحلية (إن وجدت) للاقتران : $f(x) = (x^2 - 3)e^x$.

بما أن الاقتران f متصل عند جميع الأعداد الحقيقية ، فإنه يمكنني إيجاد القيم القصوى المحلية وتحديد نوعها باستعمال اختبار المشتقة الأولى كما يأتي :

الخطوة الأولى : أجد القيم الحرجة للاقتران f .

$$f(x) = (x^2 - 3)e^x$$

$$f'(x) = (x^2 - 3)e^x + 2xe^x \Rightarrow (x^2 + 2x - 3)e^x$$

$$(x^2 + 2x - 3)e^x = 0 \Rightarrow e^x \neq 0$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x - 1)(x + 3) = 0$$

$$\Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 1} \Rightarrow x + 3 = 0 \Rightarrow \boxed{x = -3}$$

بما أن $f' = 0$ عندما $x = 1, -3$ ، وعدم وجود قيم تكون عندها f' غير موجودة ، فإن القيم الحرجة للاقتران f هي :

$$x = 1 , \quad x = -3$$

الخطوة الثانية: أبحث في إشارة المشتقة الأولى.

أختار بعض القيم التي هي أصغر من قيم x الحرجة وأكبر منها ، ثم أحدد إشارة المشتقة عند كل منها:

	$x < -3$	$-3 < x < 1$	$x > 1$
قيم الاختبار (x)	$x = -4$	$x = 0$	$x = 2$
إشارة $f'(x)$	$f'(-4) > 0$	$f'(0) < 0$	$f'(2) > 0$
تزايد الاقتران وتنقصه	متزايد 	متناقص 	متزايد 

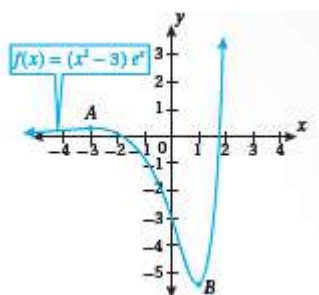
الخطوة الثالثة: أجد القيم القصوى المحلية.

* توجد قيمة عظمى محلية عندما $x = -3$ وهي: $f(-3) = 6e^{-3}$.

* توجد قيمة صغرى محلية عندما $x = 1$ وهي: $f(1) = -2e$.

الدعم البياني:

يبين التمثيل البياني المجاور لمنحنى الاقتران:



$f(x) = (x^2 - 3)e^x$ وجود قيمة عظمى محلية

عندما $x = -3$ ، وقيمة صغرى محلية ومطلقة

عندما $x = 1$

أتحقق من فهمي: (صفحة 102)

أجد القيم القصوى المحلية (إن وجدت) للاقتران: $f(x) = (x - 1)e^x$

الخطوة الأولى : أجد القيم الحرجة للاقتران f .

$$f(x) = (x - 1)e^x$$

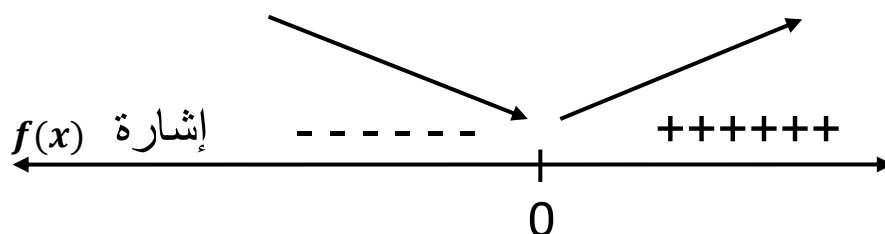
$$\hat{f}(x) = (x - 1)e^x + e^x \Rightarrow = (xe^x - e^x) + e^x$$

$$\Rightarrow = xe^x - e^x + e^x \Rightarrow = xe^x \Rightarrow xe^x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0}$$

للاقتران قيمة حرجة وحيدة وهي $x = 0$

الخطوة الثانية: أبحث في إشارة المشتقة الأولى.

أختار بعض القيم التي هي أصغر من قيم x الحرجة وأكبر منها ، ثم أحدد إشارة المشتقة عند كل منها:



الخطوة الثالثة: أجد القيم القصوى المحلية.

$$f(0) = (0 - 1)e^0 \Rightarrow = -1(1) \Rightarrow = -1$$

بما أن إشارة المشتقة الأولى تغيرت من السالب إلى الموجب عند هذه القيمة، لذا يكون للاقتتران قيمة صغرى محلية عندما $x = 0$ وهي : $f(0) = -1$

مثال 4: (صفحة 102)

أجد القيم القصوى المحلية (إن وجدت) للاقتتران : $f(x) = (x^2 - 4)^{\frac{2}{3}}$

بما أن الاقتتران f متصل عند جميع الأعداد الحقيقية فإنه يمكنني إيجاد القيم القصوى المحلية وتحديد نوعها باستعمال اختبار المشتقة الأولى كما يأتي :

الخطوة الأولى : أجد القيم الحرجة للاقتتران f

$$f(x) = (x^2 - 4)^{\frac{2}{3}}$$

$$\hat{f}(x) = \frac{2}{3}(x^2 - 4)^{-\frac{1}{3}}(2x) \Rightarrow = \frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2 - 4}} \Rightarrow \frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2 - 4}} = 0 \Rightarrow 4x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0}$$

بما أن $\hat{f} = 0$ عندما $x = 0$ ، و $\hat{f}$ غير موجودة عندما $x = \pm 2$ ، فإن القيم الحرجة للاقتتران f هي :

ملاحظة مهمة : عند صفري المقام $x = \pm 2$ تكون $\hat{f}$ غير موجودة .

$$\boxed{x = -2} , \boxed{x = 0} , \boxed{x = 2}$$

الخطوة الثانية: أبحث في إشارة المشتقة الأولى.

أختار بعض القيم التي هي أصغر من قيم x الحرجة وأكبر منها ، ثم أحدد إشارة المشتقة عند كل منها:

	$x < -2$	$-2 < x < 0$	$0 < x < 2$	$x > 2$
قيم الاختبار (x)	$x = -3$	$x = -1$	$x = 1$	$x = 3$
إشارة $f'(x)$	$f'(-3) < 0$	$f'(-1) > 0$	$f'(1) < 0$	$f'(3) > 0$
تزايد الاقتران وتنقصه	متناقص 	متزايد 	متناقص 	متزايد 

الخطوة الثالثة: إيجاد القيم القصوى المحلية

$$f(0) = ((0)^2 - 4)^{\frac{2}{3}} \Rightarrow = (-4)^{\frac{2}{3}} \Rightarrow = \sqrt[3]{(-4)^2} \Rightarrow \boxed{f(0) = \sqrt[3]{16}}$$

$$f(-2) = ((-2)^2 - 4)^{\frac{2}{3}} \Rightarrow = (4 - 4)^{\frac{2}{3}} \Rightarrow \boxed{f(-2) = 0}$$

$$f(2) = ((2)^2 - 4)^{\frac{2}{3}} \Rightarrow = (4 - 4)^{\frac{2}{3}} \Rightarrow \boxed{f(2) = 0}$$

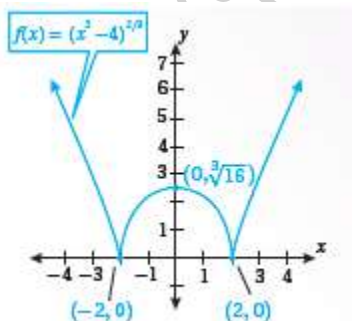
* توجد قيمة عظمى محلية عندما $x = 0$ وهي: $f(0) = \sqrt[3]{16}$.

* توجد قيمة صغرى محلية عندما $x = -2$ وهي: $f(-2) = 0$.

* توجد قيمة صغرى محلية عندما $x = 2$ وهي: $f(2) = 0$.

الدعم البياني:

يبين التمثيل البياني المجاور لمنحنى الاقتران:



$f(x) = (x^2 - 4)^{\frac{2}{3}}$ وجود قيمة عظمى محلية

عندما $x = 0$ ، وقيمة صغرى محلية ومطلقة

عندما $x = \pm 2$ ، وعدم وجود قيمة عظمى مطلقة للاقتران.

أتحقق من فهمي: (صفحة 103)

أجد القيم القصوى المحلية (إن وجدت) للاقتران : $f(x) = \sqrt[3]{x-3}$

الخطوة الأولى : أجد القيم الحرجة للاقتران f

$$f(x) = \sqrt[3]{x-3} \Rightarrow (x-3)^{\frac{1}{3}}$$

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{3}(x-3)^{-\frac{2}{3}} \Rightarrow \frac{1}{3\sqrt[3]{(x-3)^2}}$$

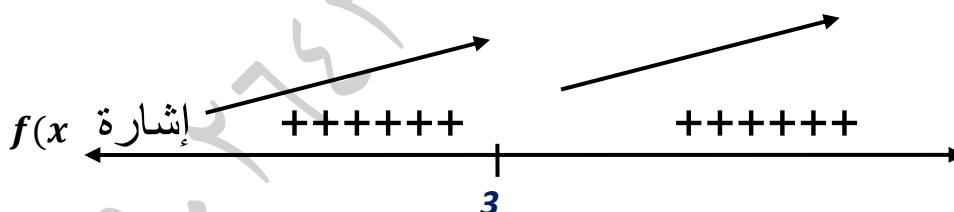
$\hat{f}(x)$ لا تساوي صفرا لأي عدد حقيقي x ، وهي غير موجودة عند $x = 3$ (صفر المقام) وهذه هي القيمة الحرجة فقط .

الخطوة الثانية: أبحث في إشارة المشتقة الأولى.

أختار بعض القيم التي هي أصغر من قيم x الحرجة وأكبر منها ، ثم أحدد إشارة المشتقة عند كل منها:

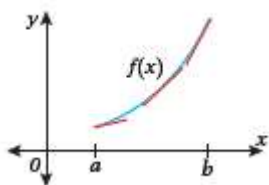
$$\hat{f}(4) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(4-3)^2}} \Rightarrow \hat{f}(4) = \text{موجبة}$$

$$\hat{f}(2) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(2-3)^2}} \Rightarrow \hat{f}(2) = \text{موجبة}$$

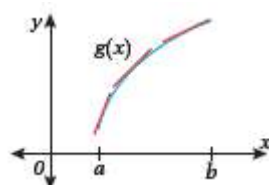


الخطوة الثالثة: إيجاد القيم القصوى المحلية

الاقتران f متزايد على R ولا يوجد له قيم قصوى محلية أو مطلقة ، النقطة $(3, 0)$ نقطة حرجة لكنها ليست نقطة قيمة قصوى لعدم تغير إشارة المشتقة حولها .

التقعر:

- يبين الشكل المجاور منحنى الاقتران المتزايد $f(x)$
- لاحظ أن الاقتران $f(x)$ يقع فوق مماساته لذلك فهو مقعر للأعلى .



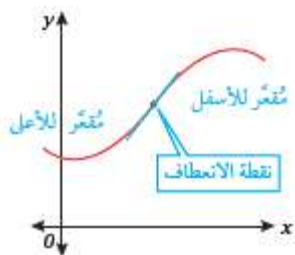
- يبين الشكل المجاور منحنى الاقتران المتزايد $g(x)$
- لاحظ أن الاقتران $g(x)$ يقع أسفل مماساته لذلك فهو مقعر للأسفل .

ملاحظة: يمكنني تحديد تزايد ميل المماسات وتناقصها عن طريق مقارنة الزوايا التي تصنعها هذه المماسات مع محور x الموجب.

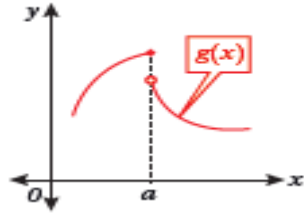
قاعدة مهمة :

إذا كان f اقتراناً قابلاً للاشتقاق على الفترة المفتوحة I ، فإن:

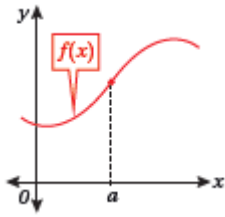
- (1) منحنى f يكون مقعراً للأعلى على الفترة I إذا كان $\hat{f}$ متزايداً عليها عندها تكون إشارة المشتقة الثانية $\hat{\hat{f}}$ موجبة $\hat{\hat{f}}(x) > 0$.
- (2) منحنى f يكون مقعراً للأسفل على الفترة I إذا كان $\hat{f}$ متناقصاً عليها عندها تكون إشارة المشتقة الثانية $\hat{\hat{f}}$ سالبة $\hat{\hat{f}}(x) < 0$.

ملاحظة مهمة:

نقطة الانعطاف : هي النقطة التي يغير الاقتران المتصل اتجاه تقعره من الأعلى إلى الأسفل أو العكس ، كما هو موضح بالشكل المجاور :

ملاحظة مهمة:

(1) الشكل المجاور يبين عدم وجود نقطة انعطاف لمنحنى الاقتران g عندما $x = a$ لأنه غير متصل عند هذه النقطة بالرغم من تغير اتجاه تقعره عندها .



(2) الشكل المجاور يبين وجود نقطة انعطاف لمنحنى الاقتران f عندما $x = a$ لأنه متصل عند هذه النقطة ، وتغير تقعره عندها .

قاعدة مهمة :

إذا كانت $(c, f(c))$ نقطة انعطاف لمنحنى الاقتران f ، فإن $\hat{f}(c) = 0$ ، أو تكون $\hat{f}$ غير موجودة عندما $x = c$.

مثال 5: (صفحة 106)

أجد فترات التقعر للأعلى وللأسفل ونقاط الانعطاف (إن وجدت) لمنحنى كل اقتران مما يأتي:

$$1) f(x) = e^{\frac{-x^2}{2}}$$

الخطوة الأولى: أجد المشتقة الثانية للاقتران.

$$f(x) = e^{\frac{-x^2}{2}} \Rightarrow \hat{f}(x) = -xe^{\frac{-x^2}{2}} \Rightarrow$$

$$\hat{f}(x) = (-x)(-x)e^{\frac{-x^2}{2}} + e^{\frac{-x^2}{2}}(-1) \Rightarrow \hat{f}(x) = (x^2 - 1)e^{\frac{-x^2}{2}}$$

الخطوة الثانية : أجد قيم x التي تكون عندها مشتقة الاقتران الثانية صفراً ، أو غير موجودة .

لا توجد قيم تكون عندها المشتقة الثانية غير موجودة ، لذا اجد قيم x التي تكون عندها المشتقة الثانية صفراً .

$$(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow \boxed{x = \pm 1} \Leftrightarrow e^{\frac{-x^2}{2}} = 0$$

لا يوجد حل للمعادلة الثانية ، لأن $e^{\frac{-x^2}{2}} \neq 0$ ، إذن قيم x المطلوبة هي : $x = \pm 1$

الخطوة الثالثة: أبحث في إشارة المشتقة الثانية.



	$x < -1$	$-1 < x < 1$	$x > 1$
قيم الاختبار (x)	$x = -2$	$x = 0$	$x = 2$
إشارة $f''(x)$	$f''(-2) > 0$	$f''(0) < 0$	$f''(2) > 0$
تقعر الاقتران	مُقعر للأعلى 	مُقعر للأسفل 	مُقعر للأعلى 

الخطوة الرابعة: أجد فترات التقعر للأعلى وللأسفل.

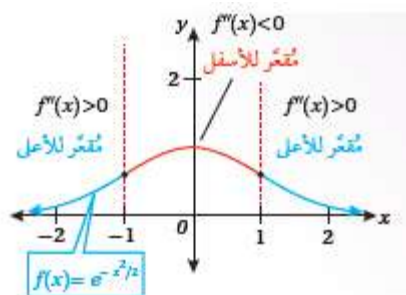
* منحنى الاقتران f مقعر للأعلى على الفترة $(-\infty, -1)$ ، والفترة $(1, \infty)$.

* منحنى الاقتران f مقعر للأسفل على الفترة $(-1, 1)$.

الخطوة الخامسة: أجد نقاط الانعطاف.

توجد نقطتا انعطاف عندما $x = 1$ ، وعندما $x = -1$ ، وهما $(-1, e^{-\frac{1}{2}})$ و $(1, e^{\frac{1}{2}})$ ، لأن الاقتران f متصل عند كلتا النقطتين ، وغير اتجاه تقعره عندهما .

الدعم البياني:



يبين التمثيل البياني المجاور لمنحنى الاقتران : $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ ،

وجود فترتي تقعر للأعلى، وفترة تقعر للأسفل، ونقطتي انعطاف.

$$2) f(x) = x + \frac{1}{x}$$

أجد فترات التقعر للاقتران f ، وانتبه أن f غير معرف عندما $x = 0$.
الخطوة الأولى: أجد المشتقة الثانية للاقتران.

$$f(x) = x + \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{2}{x^3}$$

الخطوة الثانية : أجد قيم x التي تكون عندها مشتقة الاقتران الثانية صفراً ، أو غير موجودة .
لا توجد قيم تكون عندها المشتقة الثانية صفراً ، والمشتقة غير موجودة أيضاً عندما $x = 0$ ، لأن f غير معرف عندها .
الخطوة الثالثة: أبحث في إشارة الاقتران.

	$x < 0$	$x > 0$
قيم الاختبار (x)	$x = -1$	$x = 1$
إشارة $f''(x)$	$f''(-1) < 0$	$f''(1) > 0$
تقعر الاقتران	مُقعر للأسفل 	مُقعر للأعلى 

الخطوة الرابعة: أجد فترات التقعر للأعلى والأسفل.

* منحنى الاقتران f مقعر للأعلى على الفترة $(0, \infty)$.

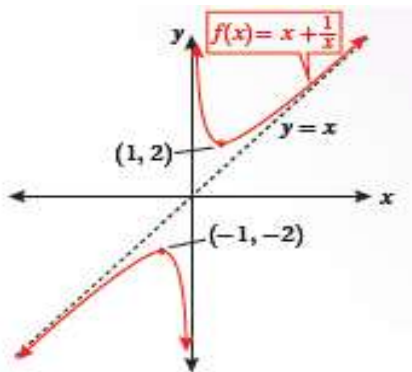
* منحنى الاقتران f مقعر للأسفل على الفترة $(-\infty, 0)$.

الخطوة الخامسة: أجد نقاط الانعطاف.

لا يوجد نقاط انعطاف لمنحنى الاقتران.

ملاحظة: لا توجد نقطة انعطاف عندما 0 بالرغم من تغير اتجاه تقعر الاقتران حولها ، لأنها لا تنتمي إلى مجال الاقتران.

الدعم البياني:



يبين التمثيل البياني المجاور لمنحنى الاقتران : $f(x) = x + \frac{1}{x}$ ،

وجود فترة تقعر للأسفل هي $(-\infty, 0)$ ، وفترة تقعر للأعلى ،

هي $(0, \infty)$ ، ووجود خط تقارب رأسي عندما $x = 0$.

أتحقق من فهمي: (صفحة 108)

أجد فترات التقعر للأعلى وللأسفل ونقاط الانعطاف (إن وجدت) لمنحنى كل اقتران مما يأتي:

$$1) f(x) = (x - 2)^3(x - 1)$$

الخطوة الأولى: أجد المشتقة الثانية للاقتران.

$$\dot{f}(x) = (x - 2)^3 + (x - 1)3(x - 2)^2$$

$$\dot{\dot{f}}(x) = 3(x - 2)^2 + (x - 1)6(x - 2) + 3(x - 2)^2$$

$$\dot{\dot{f}}(x) = (x - 2)^2 + (x - 1)2(x - 2) + (x - 2)^2$$

$$\dot{\dot{f}}(x) = (x - 2)((x - 2) + (x - 1)2 + (x - 2))$$

الخطوة الثانية: أجد قيم x التي تكون عندها مشتقة الاقتران الثانية صفراً ، أو غير موجودة .

$$(x - 2)((x - 2) + (x - 1)2 + (x - 2)) = 0$$

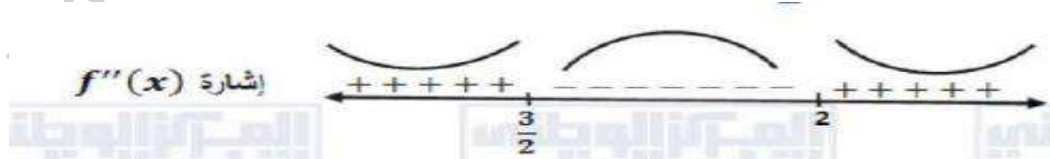
$$x - 2 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 2}$$

$$x - 2 + 2x - 2 + x - 2 = 0 \Rightarrow 4x - 6 = 0 \Rightarrow 4x = 6 \Rightarrow x = \frac{6}{4} \Rightarrow \boxed{x = \frac{3}{2}}$$

$$f(2) = (2 - 2)^3(2 - 1) \Rightarrow \boxed{f(2) = 0}$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2} - 2\right)^3\left(\frac{3}{2} - 1\right) \Rightarrow = \left(-\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow = \left(-\frac{1}{8}\right)\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \boxed{f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{16}}$$

الخطوة الثالثة: أبحث في إشارة الاقتران.



الخطوة الرابعة: أجد فترات التقعر للأعلى والأسفل.

* منحنى الاقتران f مقعر للأعلى على الفترة $(-\infty, \frac{3}{2})$ و $(2, \infty)$

* منحنى الاقتران f مقعر للأسفل على الفترة $(\frac{3}{2}, 2)$.

* وله نقطتا انعطاف هما $(\frac{3}{2}, -\frac{1}{16})$ و $(2, 0)$

$$2) f(x) = \frac{x}{x-1}$$

الخطوة الأولى: أجد المشتقة الثانية للاقتران.

$$\hat{f}(x) = \frac{(x-1) - x}{(x-1)^2} \Rightarrow = \frac{-1}{(x-1)^2}$$

$$\hat{\hat{f}}(x) = \frac{(x-1)^2(0) - (-1)2(x-1)}{(x-1)^4} \Rightarrow = \frac{2(x-1)}{(x-1)^4} \Rightarrow = \frac{2}{(x-1)^3}$$

الخطوة الثانية : أجد قيم x التي تكون عندها مشتقة الاقتران الثانية صفراً ، أو غير موجودة .

$\hat{\hat{f}}(x)$ لا تساوي صفراً لأي عدد حقيقي x ، وهي غير موجودة عند $x = 1$.

الخطوة الثالثة: أبحث في إشارة الاقتران.



الخطوة الرابعة: أجد فترات التقعر للأعلى والأسفل.

* منحنى الاقتران $f(x)$ مقعر للأسفل على الفترة $(-\infty, 1)$.

* منحنى الاقتران $f(x)$ مقعر للأعلى على الفترة $(1, \infty)$

* ولا توجد له نقاط انعطاف مع المنحنى غير من اتجاه تقعره عند $x = 1$ وذلك لأنها خارج مجال $f(x)$

اختبار المشتقة الثانية:

ملاحظة مهمة:

يتم استعمال اختبار المشتقة الثانية لتحديد إذا كانت النقطة هي قيمة عظمى محلية أم قيمة صغرى محلية. كما يلي:

(1) إذا كان : $\hat{\hat{f}}(c) < 0$ ، فإن $f(c)$ هي قيمة عظمى محلية للاقتران f .

(2) إذا كان : $\hat{\hat{f}}(c) > 0$ فإن $f(c)$ هي قيمة صغرى محلية للاقتران f .

(3) إذا كان : $\hat{\hat{f}}(c) = 0$ فإن الاختبار يفشل ، وفي هذه الحالة ، يجب استعمال اختبار المشتقة الأولى لتحديد نوع النقطة $(c, f(c))$.

ملاحظة مهمة:

لا يمكن استعمال اختبار المشتقة الثانية لتصنيف القيم القصوى المحلية إذا كانت $\hat{\hat{f}}(c)$ أو $\hat{f}(c)$ غير موجودة.

مثال 6: (صفحة 109)

إذا كان : $f(x) = (x^2 - 4)^2$ ، فاستعمل اختبار المشتقة الثانية لإيجاد القيم القصوى المحلية للاقتان f .

الخطوة الأولى: أجد مشتقة الأولى والقيم الحرجة للاقتان.

$$f(x) = (x^2 - 4)^2$$

$$\dot{f}(x) = 2(x^2 - 4)(2x) \Rightarrow = 4x(x^2 - 4) \Rightarrow 4x(x^2 - 4) = 0$$

$$\Rightarrow 4x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0} \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow \boxed{x = \pm 2}$$

إن القيم الحرجة للاقتان $f(x)$ هي : $x = 0$, $x = 2$, $x = -2$

الخطوة الثانية: أجد مشتقة الاقتان الثانية.

$$\dot{f}(x) = 4x(x^2 - 4) \Rightarrow = 4x^3 - 16x \Rightarrow \ddot{f}(x) = 12x^2 - 16$$

الخطوة الثالثة: أعوض القيم الحرجة في المشتقة الثانية، لتصنيفها:

$$\ddot{f}(-2) = 12(-2)^2 - 16 \Rightarrow \ddot{f}(-2) = 48 - 16 \Rightarrow \boxed{\ddot{f}(-2) = 32 > 0}$$

$$f(-2) = (-2^2 - 4)^2 \Rightarrow \boxed{f(-2) = 0}$$

$$\ddot{f}(0) = 12(0)^2 - 16 \Rightarrow \ddot{f}(0) = 0 - 16 \Rightarrow \boxed{\ddot{f}(0) = -16 < 0}$$

$$f(0) = (0^2 - 4)^2 \Rightarrow \boxed{f(0) = 16}$$

$$\ddot{f}(2) = 12(2)^2 - 16 \Rightarrow \ddot{f}(2) = 48 - 16 \Rightarrow \boxed{\ddot{f}(2) = 32 > 0}$$

$$f(2) = (2^2 - 4)^2 \Rightarrow \boxed{f(2) = 0}$$

الاحظ أن:

* $\ddot{f}(-2) > 0$ ، $\ddot{f}(-2) = 0$
 إذن توجد قيمة صغرى محلية عندما $x = -2$ ، وهي $f(-2) = 0$

* $\ddot{f}(0) < 0$ ، $\ddot{f}(0) = 0$
 إذن توجد قيمة عظمى محلية عندما $x = 0$ ، وهي $f(0) = 16$

* $\ddot{f}(2) > 0$ ، $\ddot{f}(2) = 0$
 إذن توجد قيمة صغرى محلية عندما $x = 2$ ، وهي $f(2) = 0$

اتحقق من فهمي: (صفحة 110)

إذا كان : $f(x) = xe^x$ ، فاستعمل اختبار المشتقة الثانية لإيجاد القيم القصوى المحلية للاقتان f .
الخطوة الأولى: أجد مشتقة الأولى والقيم الحرجة للاقتان.

$$f(x) = xe^x$$

$$\hat{f}(x) = xe^x + e^x \Rightarrow e^x(x+1) \Rightarrow e^x(x+1) = 0 \Rightarrow x+1 = 0 \Rightarrow \boxed{x = -1}$$

إن القيم الحرجة للاقتان $f(x)$ هي : $x = -1$

الخطوة الثانية: أجد مشتقة الاقتان الثانية.

$$\hat{f}(x) = xe^x + e^x$$

$$\hat{f}(x) = xe^x + e^x + e^x \Rightarrow e^x(x+1+1) \Rightarrow e^x(x+2)$$

الخطوة الثالثة: أعوض القيم الحرجة في المشتقة الثانية، لتصنيفها:

$$\hat{f}(-1) = e^{-1}(-1+2) \Rightarrow \hat{f}(-1) = e^{-1}(1) \Rightarrow \hat{f}(-1) = e^{-1} > 0$$

$$f(-1) = -1e^{-1} \Rightarrow f(-1) = -e^{-1}$$

إن توجد قيمة صغرى محلية للاقتان f عندما $x = -1$ ، وهي $f(-1) = -e^{-1}$

تطبيقات السرعة والتسارع:

ملاحظة مهمة:

نستطيع من خلال اشتقاق اقتان الموقع إيجاد اقتراني السرعة والتسارع.

ملاحظة مهمة:

إذا كان التسارع موجباً ، فإن السرعة تزداد ، أما إذا كان التسارع سالباً ، فإن السرعة تتناقص.

مثال 7: (صفحة 111)

يمثل الاقتران : $s(t) = 3t^2 - 2t^3, t \geq 0$ موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم ، حيث s الموقع بالأمتار ، و t الزمن بالثواني :

1) ما الفترات الزمنية التي يتحرك فيها الجسم في الاتجاه الموجب والاتجاه السالب؟

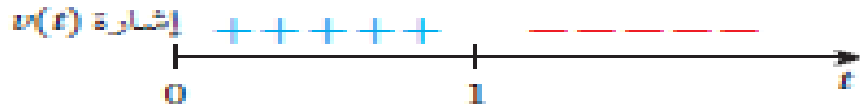
يمكن تحديد الفترات الزمنية لاتجاه حركة الجسم بدراسة إشارة السرعة المتجهة كما يأتي:

الخطوة الأولى : أجد قيم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لحظي (سرعة الجسم تساوي صفراً) .

$$s(t) = 3t^2 - 2t^3 \Rightarrow v(t) = \dot{s}(t) = 6t - 6t^2$$

$$6t - 6t^2 = 0 \Rightarrow 6t(1 - t) = 0 \Rightarrow 6t = 0 \Rightarrow \boxed{t = 0} \Rightarrow 1 - t = 0 \Rightarrow \boxed{t = 1}$$

الخطوة الثانية: أدرس إشارة السرعة.



الخطوة الثالثة: أحدد فترات اتجاه الحركة

* يتحرك الجسم في الاتجاه الموجب عندما $v(t) > 0$ ، أي في الفترة $(0, 1)$

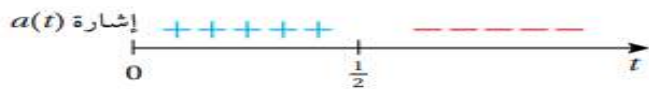
* يتحرك الجسم في الاتجاه السالب عندما $v(t) < 0$ ، أي في الفترة $(1, \infty)$

2) ما الفترات التي تتزايد فيها سرعة الجسم المتجهة؟ وما الفترات التي تتناقص فيها سرعة الجسم المتجهة؟

يمكن وصف سرعة الجسم المتجهة بدراسة إشارة التسارع كما يأتي:

الخطوة الأولى : أجد قيم t التي يكون عندها تسارع الجسم صفراً .

$$a(t) = \dot{v}(t) = \ddot{s}(t) = 6 - 12t \Rightarrow 6 - 12t = 0 \Rightarrow \boxed{t = \frac{1}{2}}$$



الخطوة الثانية: أدرس إشارة التسارع.

الخطوة الثالثة: أحدد فترات تزايد السرعة وفترات تناقصها.

* تكون سرعة الجسم المتجهة متزايدة عندما $a(t) > 0$ ، أي في الفترة $(0, \frac{1}{2})$.

* تكون سرعة الجسم المتجهة متناقصة عندما $a(t) < 0$ ، أي في الفترة $(\frac{1}{2}, \infty)$.

أتحقق من فهمي: (صفحة 112)

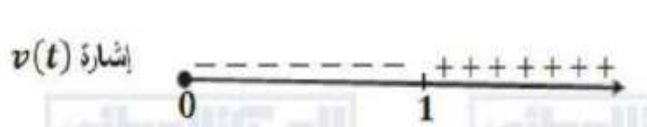
يمثل الاقتران : $s(t) = t^3 - 3t + 3, t \geq 0$ موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم ، حيث s الموقع بالأمتار ، و t الزمن بالثواني :

(1) ما الفترات الزمنية التي يتحرك فيها الجسم في الاتجاه الموجب والاتجاه السالب؟

الخطوة الأولى : أجد قيم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لحظي (سرعة الجسم تساوي صفراً) .

$$s(t) = t^3 - 3t + 3$$

$$v(t) = \dot{s}(t) = 3t^2 - 3 \Rightarrow 3t^2 - 3 = 0 \Rightarrow 3t^2 = 3 \Rightarrow t^2 = 1 \Rightarrow \boxed{t = 1}$$



الخطوة الثانية: أدرس إشارة السرعة المتجهة.

الخطوة الثالثة: أحدد فترات اتجاه الحركة

* يتحرك الجسم في الاتجاه السالب عندما $v(t) < 0$ ، أي في الفترة $(0, 1)$

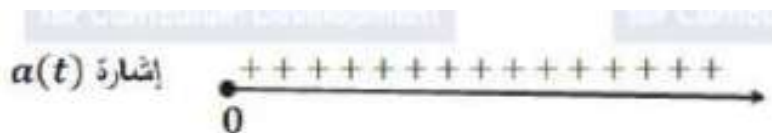
* يتحرك الجسم في الاتجاه الموجب عندما $v(t) > 0$ ، أي في الفترة $(1, \infty)$

(2) ما الفترات التي تتزايد فيها سرعة الجسم المتجهة؟ وما الفترات التي تتناقص فيها سرعة الجسم المتجهة؟

الخطوة الأولى : أجد قيم t التي يكون عندها تسارع الجسم صفراً .

$$\dot{s}(t) = 3t^2 - 3 \Rightarrow a(t) = \dot{v}(t) = \dot{\dot{s}}(t) = 6t \Rightarrow \boxed{t = 0}$$

الخطوة الثانية: أدرس إشارة التسارع.

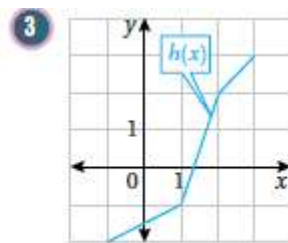
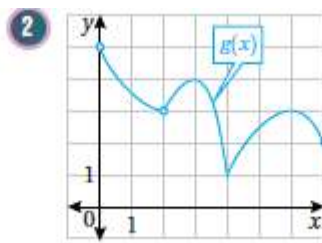
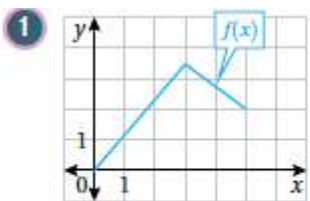


الخطوة الثالثة: أحدد فترات تزايد السرعة وفترات تناقصها.

* تكون سرعة الجسم متزايدة في الفترة $(0, \infty)$ ولا تتناقص أبداً .

أُتدرب وأحل المسائل: (صفحة 112)

أجد القيم الحرجة والقيم القصوى المحلية والمطلقة (إن وجدت) للاقتران الممثل بيانياً في كل مما يأتي:



1) قيم x الحرجة هي: $x = 3$ (المشتقة عندها غير موجودة)، ولا توجد قيم تكون عندها $\dot{f}(x) = 0$.

توجد قيمة صغرى مطلقة عند $x = 0$ هي $f(0) = 0$

توجد قيمة عظمى محلية ومطلقة عند $x = 3$ هي $f(3) = 3.5$

2) ألاحظ أن المشتقة تساوي صفراً عند $x = 3$ ، و $x = 6$ ، وأنها غير موجودة عند $x = 4$

إذن توجد 3 قيم حرجة هي $x = 3$ و $x = 4$ و $x = 6$

توجد قيمة صغرى محلية ومطلقة عند $x = 4$ هي $g(4) = 1$

توجد قيمة عظمى محلية عند $x = 3$ هي $g(3) = 4$ ، وعند $x = 6$ هي $g(6) = 3$

لا توجد قيمة عظمى مطلقة.

3) قيم x الحرجة هي: $x = 2$ و $x = 1$ (المشتقة عندها غير موجودة).

توجد قيمة صغرى مطلقة هي $h(-1) = -2$

توجد قيمة عظمى مطلقة هي $h(3) = 3$

لا توجد قيمة قصوى مطلقة.

أجد القيمة العظمى المطلقة والقيمة الصغرى المطلقة (إن وجدت) لكل اقتران مما يأتي في الفترة المعطاة:

4) $f(x) = 1 + 6x - 3x^2$, $[0, 4]$

$$\hat{f}(x) = 6 - 6x \Rightarrow \hat{f}(x) = 0 \Rightarrow 6 - 6x = 0 \Rightarrow 6x = 6 \Rightarrow x = 1$$

قيم x الحرجة هي $x = 1$

$$f(0) = 1 + 6(0) - 3(0)^2 \Rightarrow \boxed{f(0) = 1}$$

$$f(4) = 1 + 6(4) - 3(4)^2 \Rightarrow f(4) = 1 + 24 - 48 \Rightarrow \boxed{f(4) = -23}$$

$$f(1) = 1 + 6(1) - 3(1)^2 \Rightarrow f(1) = 1 + 6 - 3 \Rightarrow \boxed{f(1) = 4}$$

للاقتران قيمة صغرى مطلقة عند $x = 4$ هي $f(4) = -23$

للاقتران قيمة عظمى محلية ومطلقة عند $x = 1$ هي $f(1) = 4$

5) $f(x) = (3 + x)^{\frac{2}{3}} - 5$, $[-3, 3]$

$$\hat{f}(x) = \frac{2}{3}(3 + x)^{-\frac{1}{3}} \Rightarrow \hat{f}(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{3 + x}}$$

$\hat{f}(x)$ لا تساوي صفراً لأي قيمة في الفترة $(-3, 3)$ وهي غير موجودة عند $x = -3$ ولا توجد قيم حرجة في الفترة $(-3, 3)$.

$$f(-3) = \sqrt[3]{(3 + (-3))^2} - 5 \Rightarrow f(-3) = 0 - 5 \Rightarrow \boxed{f(-3) = -5}$$

$$f(3) = \sqrt[3]{(3 + 3)^2} - 5 \Rightarrow f(3) = \sqrt[3]{(6)^2} - 5 \Rightarrow f(3) = \sqrt[3]{36} - 5$$

$$\Rightarrow f(3) = 3.3 - 5 \Rightarrow \boxed{f(3) \approx -1.7}$$

للاقتران قيمة صغرى مطلقة عند $x = -3$ هي $f(-3) = -5$

للاقتران قيمة عظمى محلية ومطلقة عند $x = 3$ هي $f(3) = \sqrt[3]{36} - 5 \approx -1.7$

$$6) f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}, \quad [-2, 2]$$

$$\hat{f}(x) = \frac{(x^2+1)(2x) - (x^2)(2x)}{(x^2+1)^2} \Rightarrow = \frac{(2x^3+2x) - (2x^3)}{(x^2+1)^2}$$

$$\hat{f}(x) = \frac{2x^3+2x-2x^3}{(x^2+1)^2} \Rightarrow = \frac{2x}{(x^2+1)^2} \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

قيم x الحرجة هي $x = 0$

$$f(-2) = \frac{(-2)^2}{(-2)^2+1} \Rightarrow f(-2) = \frac{4}{4+1} \Rightarrow \boxed{f(-2) = \frac{4}{5}}$$

$$f(2) = \frac{(2)^2}{(2)^2+1} \Rightarrow f(2) = \frac{4}{4+1} \Rightarrow \boxed{f(2) = \frac{4}{5}}$$

$$f(0) = \frac{(0)^2}{(0)^2+1} \Rightarrow \boxed{f(0) = 0}$$

للاقتران قيمة صغرى مطلقة عند $x = 0$ هي $f(0) = 0$

للاقتران قيمة عظمى مطلقة عند $x = 2$ و $x = -2$ هي $\frac{4}{5}$

$$7) f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad [8, 64]$$

$$f(x) = x^{\frac{1}{3}} \Rightarrow \hat{f}(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} \Rightarrow \hat{f}(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \Rightarrow \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} = 0 \Rightarrow 1 \neq 0$$

$\hat{f}(x)$ موجودة ولا تساوي صفراً لأي قيم في الفترة $(8, 64)$

$$f(8) = \sqrt[3]{8} \Rightarrow f(8) = 2$$

$$f(64) = \sqrt[3]{64} \Rightarrow f(64) = 4$$

للاقتران قيمة صغرى مطلقة عند $x = 8$ هي $f(8) = 2$

للاقتران قيمة عظمى مطلقة عند $x = 64$ هي $f(64) = 4$

$$8) f(x) = 2 \cos x + \sin 2x, \quad \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\hat{f}(x) = -2 \sin x + 2 \cos 2x \Rightarrow -2 \sin x + 2(1 - 2 \sin^2 x)$$

$$-2 \sin x + 2(1 - 2 \sin^2 x) = 0 \Rightarrow -\sin x + 1 - 2 \sin^2 x = 0$$

$$\Rightarrow \sin x - 1 + 2 \sin^2 x = 0 \Rightarrow 2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow (2 \sin x - 1)(\sin x + 1) = 0$$

$$\Rightarrow 2 \sin x - 1 = 0 \Rightarrow 2 \sin x = 1 \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{6}}$$

$$\sin x + 1 = 0 \Rightarrow \sin x = -1 \Rightarrow \boxed{x = \frac{3\pi}{2}}$$

القيمة الحرجة للاقتران في الفترة $(0, \frac{\pi}{2})$ هي $x = \frac{\pi}{6}$ فقط .

$$f(0) = 2 \cos(0) + \sin 2(0) \Rightarrow f(0) = 2(1) + 0 \Rightarrow \boxed{f(0) = 2}$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin 2\left(\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow 2 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin \pi \Rightarrow 2(0) + (0) \Rightarrow \boxed{f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0}$$

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin 2\left(\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow 2 \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Rightarrow 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \boxed{f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}}$$

للاقتران قيمة صغرى مطلقة عند $x = \frac{\pi}{2}$ هي $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

للاقتران قيمة عظمى محلية ومطلقة عند $x = \frac{\pi}{6}$ هي $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

$$9) f(x) = \frac{e^x}{1+x^2}, \quad [0, 3]$$

$$\hat{f}(x) = \frac{(1+x^2)e^x - 2xe^x}{(1+x^2)^2} \Rightarrow \frac{(1+x^2)e^x - 2xe^x}{(1+x^2)^2} = 0$$

$$(1+x^2)e^x - 2xe^x = 0 \Rightarrow e^x(x^2 - 2x + 1) = 0$$

$$\Rightarrow e^x(x-1)^2 = 0 \Rightarrow (x-1) = 0 \Rightarrow \boxed{x=1}$$

القيم الحرجة هي $x = 1$

$$f(0) = \frac{e^0}{1+0^2} \Rightarrow f(0) = \frac{1}{1} \Rightarrow \boxed{f(0) = 1}$$

$$f(1) = \frac{e^1}{1+1^2} \Rightarrow \boxed{f(1) = \frac{1}{2}e}$$

$$f(3) = \frac{e^3}{1+3^2} \Rightarrow \boxed{f(3) = \frac{1}{10}e^3}$$

للاقتران قيمة صغرى مطلقة عند $x = 0$ هي $f(0) = 1$

للاقتران قيمة عظمى مطلقة عند $x = 3$ هي $f(3) = \frac{1}{10}e^3 \approx 2$

$$10) f(x) = \frac{\ln x}{x^2}, \quad \left[\frac{1}{2}, 4\right]$$

$$\hat{f}(x) = \frac{(x^2) \left(\frac{1}{x}\right) - (\ln x)(2x)}{x^4} \Rightarrow = \frac{x - 2x \ln x}{x^4} \Rightarrow = \frac{1 - 2 \ln x}{x^3}$$

$$\Rightarrow 1 - 2 \ln x = 0 \Rightarrow 2 \ln x = 1 \Rightarrow \ln x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \sqrt{e}$$

القيم الحرجة هي $x = \sqrt{e}$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\ln x}{x^2} \Rightarrow = \frac{\ln \frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} \Rightarrow = \frac{\ln \frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} \Rightarrow = 4 \ln \frac{1}{2} \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) \approx -2.8$$

$$f(\sqrt{e}) = \frac{\ln \sqrt{e}}{(\sqrt{e})^2} \Rightarrow = \frac{\ln \sqrt{e}}{e} \Rightarrow = \frac{1}{2e} \Rightarrow \boxed{f(\sqrt{e}) \approx 0.18}$$

$$f(4) = \frac{\ln 4}{(4)^2} \Rightarrow = \frac{1.38}{16} \Rightarrow = \frac{1.38}{16} \Rightarrow \boxed{f(4) \approx 0.09}$$

للاقتران قيمة صغرى مطلقة عند $x = \frac{1}{2}$ هي $f\left(\frac{1}{2}\right) \approx -2.8$

للاقتران قيمة عظمى مطلقة عند $x = \sqrt{e}$ هي $f(\sqrt{e}) \approx 0.18$

$$11) f(x) = \cos x, \quad \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$$

$$\hat{f}(x) = -\sin x \Rightarrow -\sin x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$f(0) = \cos 0 \Rightarrow f(0) = 1$$

$$f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow f\left(-\frac{\pi}{6}\right) \approx 0.87$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

للاقتزان قيمة صغرى مطلقة عند $x = 0$ هي $f(0) = 1$

للاقتزان قيمة عظمى مطلقة عند $x = \frac{\pi}{3}$ هي $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

$$12) f(x) = \sqrt{4 - x^2}, \quad [-2, 2]$$

$$\hat{f}(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{4 - x^2}} \Rightarrow \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2}} \Rightarrow \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2}} = 0 \Rightarrow -x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0}$$

$$f(-2) = \sqrt{4 - (-2)^2} \Rightarrow f(-2) = \sqrt{4 - 4} \Rightarrow \boxed{f(-2) = 0}$$

$$f(2) = \sqrt{4 - (2)^2} \Rightarrow f(2) = \sqrt{4 - 4} \Rightarrow \boxed{f(2) = 0}$$

$$f(0) = \sqrt{4 - (0)^2} \Rightarrow \boxed{f(0) = 2}$$

للاقتزان قيمة صغرى مطلقة عند $x = -2$ و $x = 2$ هي 0

للاقتزان قيمة عظمى محلية ومطلقة عند $x = 0$ هي $f(0) = 2$

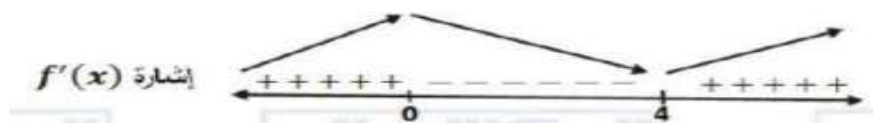
أجد فترات التزايد وفترات التناقص لكل اقتزان مما يأتي، ثم أجد القيم القصوى المحلية:

$$13) f(x) = x^3 - 6x^2 - 135$$

$$\hat{f}(x) = 3x^2 - 12x \Rightarrow 3x^2 - 12x = 0$$

$$3x(x - 4) = 0 \Rightarrow 3x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow x - 4 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 4}$$

القيم الحرجة هي $x = 0$ و $x = 4$



$$f(0) = 0^3 - 6(0)^2 - 135 \Rightarrow \boxed{f(0) = -135}$$

$$f(4) = 4^3 - 6(4)^2 - 135 \Rightarrow f(4) = 64 - 96 - 135 \Rightarrow \boxed{f(4) = -167}$$

الاقتران f متزايد على $(-\infty, 0)$ و $(4, \infty)$

الاقتران f متناقص على $(0, 4)$

وله قيمة عظمى محلية عند $f(0) = -135$

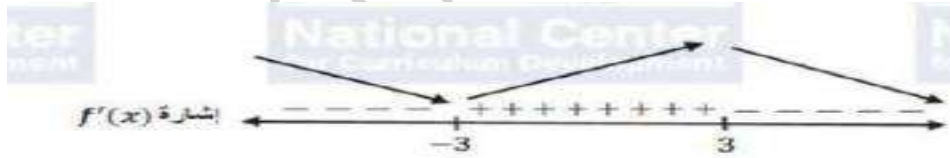
وله قيمة صغرى محلية عند $f(4) = -167$

$$14) f(x) = \frac{2x}{x^2+9}$$

$$\hat{f}(x) = \frac{(x^2 + 9)(2) - (2x)(2x)}{(x^2 + 9)^2} \Rightarrow = \frac{2x^2 + 18 - 4x^2}{(x^2 + 9)^2} \Rightarrow = \frac{18 - 2x^2}{(x^2 + 9)^2}$$

$$\frac{18 - 2x^2}{(x^2 + 9)^2} = 0 \Rightarrow 18 - 2x^2 = 0 \Rightarrow 2x^2 = 18 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow \boxed{x = 3} \Leftrightarrow \boxed{x = -3}$$

القيم الحرجة هي $x = 3$ و $x = -3$



الاقتران f متزايد على $(-3, 3)$

الاقتران f متناقص على $(-\infty, -3)$ و $(3, \infty)$

$$f(3) = \frac{2(3)}{(3)^2 + 9} \Rightarrow = \frac{6}{9 + 9} \Rightarrow = \frac{6}{18} \Rightarrow \boxed{f(3) = \frac{1}{3}}$$

$$f(-3) = \frac{2(-3)}{(-3)^2 + 9} \Rightarrow = \frac{-6}{9 + 9} \Rightarrow = \frac{-6}{18} \Rightarrow \boxed{f(-3) = -\frac{1}{3}}$$

وله قيمة عظمى محلية عند $f(3) = \frac{1}{3}$

وله قيمة صغرى محلية عند $f(-3) = -\frac{1}{3}$

$$15) f(x) = x^2 \ln x$$

$$\hat{f}(x) = (x^2) \left(\frac{1}{x} \right) + (\ln x)(2x) \Rightarrow x + 2x \ln x \Rightarrow x(1 + 2 \ln x)$$

$$x(1 + 2 \ln x) = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0} \Leftrightarrow 1 + 2 \ln x = 0 \Rightarrow 2 \ln x = -1$$

$$\Rightarrow \ln x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{\sqrt{e}}}$$



القيم الحرجة هي $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^2 \ln \frac{1}{\sqrt{e}} \Rightarrow \frac{1}{e} \ln \frac{1}{\sqrt{e}} \Rightarrow \frac{1}{e} \left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow -\frac{1}{2e}$$

الاقتران f متزايد على $\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, \infty\right)$

الاقتران f متناقص على $\left(0, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$

وله قيمة صغرى محلية عند $f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = -\frac{1}{2e}$

$$16) f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 2}$$

$$\hat{f}(x) = \frac{2x - 2}{2\sqrt{x^2 - 2x + 2}} \Rightarrow \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}}$$

$$\Rightarrow \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}} = 0 \Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 1}$$

$$f(1) = \sqrt{(1)^2 - 2(1) + 2} \Rightarrow \sqrt{1 - 2 + 2} \Rightarrow \sqrt{1} \Rightarrow f(1) = 1$$



القيم الحرجة هي $x = 1$

الاقتران f متزايد على $(1, \infty)$

الاقتران f متناقص على $(-\infty, 1)$

وله قيمة صغرى محلية عند $f(1) = 1$

$$17) f(x) = x^{\frac{2}{3}}(x - 3)$$

$$\hat{f}(x) = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} - \frac{2}{3}3x^{\frac{-1}{3}} \Rightarrow \hat{f}(x) = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} - \frac{2}{3}3x^{\frac{-1}{3}} \Rightarrow = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} - 2x^{\frac{-1}{3}}$$

$$\Rightarrow = \frac{5\sqrt[3]{x^2}}{3} - \frac{2}{\sqrt[3]{x}} \Rightarrow = \frac{5x}{3\sqrt[3]{x}} - \frac{6}{3\sqrt[3]{x}} \Rightarrow = \frac{5x - 6}{3\sqrt[3]{x}}$$

$$\frac{5x - 6}{3\sqrt[3]{x}} = 0 \Rightarrow 5x - 6 = 0 \Rightarrow 5x = 6 \Rightarrow \boxed{x = \frac{6}{5}}$$

وكذلك $\hat{f}(x)$ غير موجودة عند $x = 0$

القيم الحرجة هي $x = 0$ و $x = \frac{6}{5}$

الاقتران f متزايد على $(-\infty, 0)$, $(\frac{6}{5}, \infty)$

الاقتران f متناقص على $(0, \frac{6}{5})$



$$f\left(\frac{6}{5}\right) = \left(\frac{6}{5}\right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{6}{5} - 3\right) \Rightarrow f\left(\frac{6}{5}\right) = \left(-\frac{9}{5}\right) \left(\frac{6}{5}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$f(0) = (0)^{\frac{2}{3}}(0 - 3) \Rightarrow f(0) = 0$$

وله قيمة صغرى محلية عند $f\left(\frac{6}{5}\right) = \left(-\frac{9}{5}\right) \left(\frac{6}{5}\right)^{\frac{2}{3}}$

وله قيمة عظمى محلية عند $f(0) = 0$

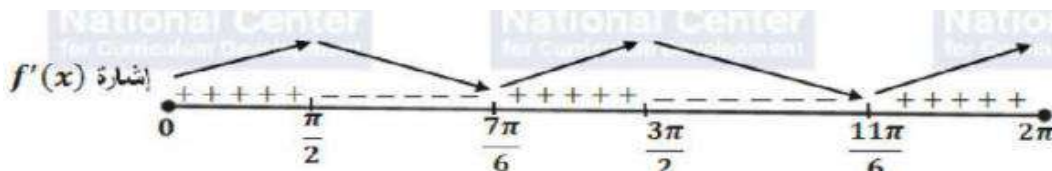
$$18) f(x) = \sin^2 x + \sin x, \quad [0, 2\pi]$$

$$\hat{f}(x) = 2 \sin x \cos x + \cos x \Rightarrow = \cos x (2 \sin x + 1)$$

$$\cos x (2 \sin x + 1) = 0$$

$$\cos x = 0 \Rightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}}$$

$$2 \sin x + 1 = 0 \Rightarrow \sin x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{x = \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}}$$



$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin^2 \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2} \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 + 1 \Rightarrow \boxed{f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2}$$

$$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \sin^2 \frac{3\pi}{2} + \sin \frac{3\pi}{2} \Rightarrow f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 1 + (-1) \Rightarrow \boxed{f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0}$$

$$f\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \sin^2 \frac{7\pi}{6} + \sin \frac{7\pi}{6} \Rightarrow = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} \Rightarrow = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{f\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{1}{4}}$$

الاقتران f متزايد على $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ، $\left(\frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right)$ ، $\left(\frac{11\pi}{6}, 2\pi\right)$

الاقتران f متناقص على $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}\right)$ ، $\left(\frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}\right)$

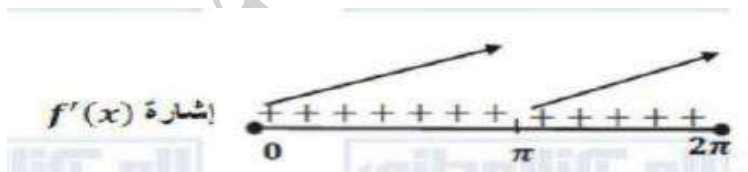
وله قيمة صغرى محلية عند $f\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{1}{4}$ ، $f\left(\frac{11\pi}{6}\right) = -\frac{1}{4}$

وله قيمتان عظميان محليتان عند $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$ ، $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$

$$19) f(x) = x + \sin x, \quad [0, 2\pi]$$

$$\hat{f}(x) = 1 + \cos x$$

$$1 + \cos x = 0 \Rightarrow \cos x = -1 \Rightarrow \boxed{x = \pi}$$



القيم الحرجة هي $x = \pi$

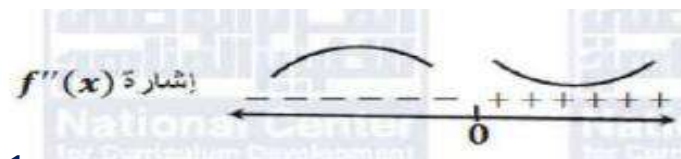
الاقتران f متزايد على $(2\pi, 0)$

ليس له قيم قصوى محلية

أجد فترات التغير للأعلى وللأسفل ونقاط الانعطاف (إن وجدت) لمنحنى كل اقتران مما يأتي:

20) $f(x) = x^3 - 12x + 1$

$$\hat{f}(x) = 3x^2 - 12 \Rightarrow \hat{\hat{f}}(x) = 6x \Rightarrow 6x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0}$$



$$f(0) = (0)x^3 - 12(0) + 1 \Rightarrow f(0) = 1$$

الاقتران f مقعر للأعلى في $(0, \infty)$

الاقتران f مقعر للأسفل في $(-\infty, 0)$

للاقتران f نقطة انعطاف هي $(0, 1)$

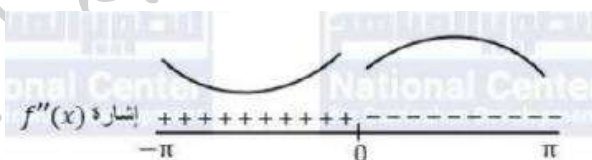
21) $f(x) = \sin x$, $[-\pi, \pi]$

$$\hat{f}(x) = \cos x \Rightarrow \hat{\hat{f}}(x) = -\sin x$$

$$\Rightarrow \hat{\hat{f}}(x) = -\sin x = 0 \Rightarrow \boxed{x = -\pi} , \quad \boxed{x = 0} , \quad \boxed{x = \pi}$$

$$f(0) = \sin 0$$

$$f(0) = 0$$



الاقتران f مقعر للأعلى في $(-\pi, 0)$

الاقتران f مقعر للأسفل في $(0, \pi)$

للاقتران f نقطة انعطاف هي $(0, 0)$

22) $f(x) = \frac{3}{x^2+1}$

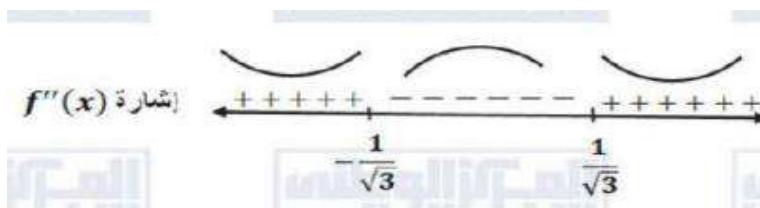
$$\hat{f}(x) = \frac{(x^2 + 1)(0) - (3)(2x)}{(x^2 + 1)^2} \Rightarrow \hat{f}(x) = \frac{-6x}{(x^2 + 1)^2}$$

$$\hat{\hat{f}}(x) = \frac{\left((x^2 + 1)^2(-6)\right) - \left((-6x)(2)(x^2 + 1)(2x)\right)}{(x^2 + 1)^4}$$

$$\Rightarrow \hat{\hat{f}}(x) = \frac{(x^2 + 1)(-6) - (-6x)(2)(2x)}{(x^2 + 1)^3} \Rightarrow = \frac{(-6x^2 - 6) - (-24x^2)}{(x^2 + 1)^3}$$

$$\Rightarrow = \frac{-6x^2 - 6 + 24x^2}{(x^2 + 1)^3} \Rightarrow \hat{f}(x) = \frac{18x^2 - 6}{(x^2 + 1)^3}$$

$$18x^2 - 6 = 0 \Rightarrow 18x^2 = 6 \Rightarrow x^2 = \frac{6}{18} \Rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{\sqrt{3}}} \Leftrightarrow \boxed{x = -\frac{1}{\sqrt{3}}}$$



$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{3}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} \Rightarrow = \frac{3}{\frac{1}{3} + 1} \Rightarrow = \frac{3}{\frac{4}{3}} \Rightarrow \boxed{f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{9}{4}}$$

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{3}{\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} \Rightarrow = \frac{3}{\frac{1}{3} + 1} \Rightarrow = \frac{3}{\frac{4}{3}} \Rightarrow \boxed{f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{9}{4}}$$

الاقتران f مقعر للأعلى في $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \infty\right)$

الاقتران f مقعر للأسفل في $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

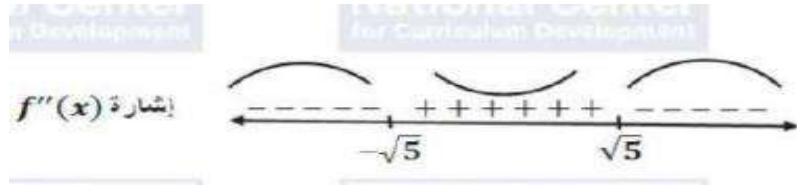
للاقتران f نقطتا انعطاف هي $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{9}{4}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{9}{4}\right)$

$$\text{23) } f(x) = \ln(x^2 + 5)$$

$$\hat{f}(x) = \frac{2x}{x^2 + 5} \Rightarrow \hat{f}(x) = \frac{(x^2 + 5)(2) - (2x)(2x)}{(x^2 + 5)^2}$$

$$\Rightarrow = \frac{(2x^2 + 10) - (4x^2)}{(x^2 + 5)^2} \Rightarrow = \frac{2x^2 + 10 - 4x^2}{(x^2 + 5)^2} \Rightarrow \hat{f}(x) = \frac{10 - 2x^2}{(x^2 + 5)^2}$$

$$\frac{10 - 2x^2}{(x^2 + 5)^2} = 0 \Rightarrow 10 - 2x^2 = 0 \Rightarrow 2x^2 = 10 \Rightarrow x^2 = 5 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{5}} \Leftrightarrow \boxed{x = -\sqrt{5}}$$



$$f(\sqrt{5}) = \ln((\sqrt{5})^2 + 5) \Rightarrow f(\sqrt{5}) = \ln(5 + 5) \Rightarrow f(\sqrt{5}) = \ln 10$$

$$f(-\sqrt{5}) = \ln((-\sqrt{5})^2 + 5) \Rightarrow f(-\sqrt{5}) = \ln(5 + 5) \Rightarrow f(-\sqrt{5}) = \ln 10$$

الاقتران f مقعر للأعلى في $(-\sqrt{5}, \sqrt{5})$

الاقتران f مقعر للأسفل في $(-\infty, -\sqrt{5})$ ، $(\sqrt{5}, \infty)$

للاقتران f نقطتا انعطاف هي $(-\sqrt{5}, \ln 10)$ ، $(\sqrt{5}, \ln 10)$

$$\text{24) } f(x) = \sqrt{x}(x+3)$$

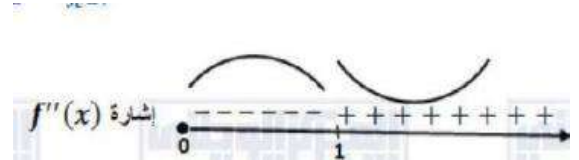
$$f(x) = x^{\frac{1}{2}}(x+3) \Rightarrow f(x) = x^{\frac{3}{2}} + 3x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \dot{f}(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \dot{f}(x) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)x^{-\frac{1}{2}} + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}} \Rightarrow \dot{f}(x) = \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{3}{4}x^{-\frac{3}{2}}$$

$$\Rightarrow \dot{f}(x) = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\right) \Rightarrow \dot{f}(x) = \frac{3}{4}\left(\frac{x}{x^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\right)$$

$$\Rightarrow \dot{f}(x) = \frac{3}{4}\left(\frac{x-1}{x^{\frac{3}{2}}}\right) \Rightarrow \dot{f}(x) = \frac{3}{4}\left(\frac{x-1}{x\sqrt{x}}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4}\left(\frac{x-1}{x\sqrt{x}}\right) = 0 \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow \boxed{x=1}$$



$$f(1) = \sqrt{1}(1+3) \Rightarrow f(1) = 1(4) \Rightarrow f(1) = 4$$

الاقتران f مقعر للأعلى في $(1, \infty)$

الاقتران f مقعر للأسفل في $(0, 1)$

للاقتران f نقطتا انعطاف هي $(1, 4)$

$$25) f(x) = xe^x$$

$$\hat{f}(x) = xe^x + e^x \Rightarrow \hat{\hat{f}}(x) = xe^x + e^x + e^x$$

$$\Rightarrow \hat{\hat{f}}(x) = e^x(x + 1 + 1) \Rightarrow \hat{\hat{f}}(x) = e^x(x + 2) \Rightarrow x + 2 = 0 \Rightarrow \boxed{x = -2}$$

$$f(-2) = -2e^{-2}$$



الاقتران f مقعر للأعلى في $(-2, \infty)$

الاقتران f مقعر للأسفل في $(-\infty, -2)$

للاقتران f نقطتا انعطاف هي $(-2, -2e^{-2})$

أجد القيم القصوى المحلية لكل اقتران مما يأتي، مستعملاً اختبار المشتقة الثانية إن أمكن:

$$26) f(x) = 6x - x^2$$

$$\hat{f}(x) = 6 - 2x \Rightarrow 6 - 2x = 0 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3$$

$$\hat{\hat{f}}(x) = -2 \Rightarrow \hat{\hat{f}}(3) = -2 < 0$$

$$f(3) = 6(3) - (3)^2 \Rightarrow = 18 - 9 \Rightarrow = 18 - 9 \Rightarrow \boxed{f(3) = 9}$$

للاقتران f قيمة عظمى محلية هي $f(3) = 9$

$$27) f(x) = \cos x - x, [0, 4\pi]$$

$$\hat{f}(x) = -\sin x - 1 \Rightarrow -\sin x - 1 = 0 \Rightarrow \sin x = -1 \Rightarrow \boxed{x = \frac{3\pi}{2}}, \boxed{x = \frac{7\pi}{2}}$$

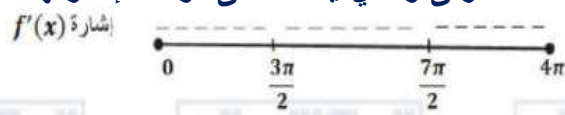
$$\hat{\hat{f}}(x) = -\cos x$$

$$\hat{\hat{f}}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -\cos\frac{3\pi}{2} \Rightarrow \boxed{\hat{\hat{f}}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0}$$

$$\hat{\hat{f}}\left(\frac{7\pi}{2}\right) = -\cos\frac{7\pi}{2} \Rightarrow \boxed{\hat{\hat{f}}\left(\frac{7\pi}{2}\right) = 0}$$

ويكون اختبار المشتقة الثانية قد فشل في تحديد

نوع القيم $f\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ ، $f\left(\frac{7\pi}{2}\right)$ ، لذا نستخدم اختبار المشتقة الأولى والذي يعتمد على دراسة إشارتها



نلاحظ أن $\hat{f}(x)$ لا تغير إشارتها أبداً ، إذن ليس للاقتران f قيم قصوى محلية .

$$28) f(x) = \frac{x^2}{x-1}$$

$$\dot{f}(x) = \frac{(x-1)(2x) - (x^2)}{(x-1)^2} \Rightarrow = \frac{2x^2 - 2x - x^2}{(x-1)^2} \Rightarrow = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$$

$$\frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = 0 \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x-2) = 0 \Rightarrow \boxed{x=0} \Leftrightarrow x-2=0 \Rightarrow \boxed{x=2}$$

$$\ddot{f}(x) = \frac{(x-1)^2(2x-2) - (x^2-2x)2(x-1)}{(x-1)^4} \Rightarrow = \frac{(x-1)(2x-2) - (x^2-2x)2}{(x-1)^3}$$

$$\Rightarrow = \frac{(2x^2 - 2x - 2x + 2) - (2x^2 - 4x)}{(x-1)^3} \Rightarrow = \frac{2x^2 - 2x - 2x + 2 - 2x^2 + 4x}{(x-1)^3} \Rightarrow \boxed{\ddot{f}(x) = \frac{2}{(x-1)^3}}$$

$$\ddot{f}(0) = \frac{2}{(0-1)^3} \Rightarrow \ddot{f}(0) = \frac{2}{-1} \Rightarrow \boxed{\ddot{f}(0) = -2 < 0}$$

$$f(x) = \frac{x^2}{x-1} \Rightarrow f(0) = \frac{0^2}{0-1} \Rightarrow \boxed{f(0) = 0}$$

$$\ddot{f}(2) = \frac{2}{(2-1)^3} \Rightarrow \ddot{f}(2) = \frac{2}{1} \Rightarrow \boxed{\ddot{f}(2) = 2 > 0}$$

$$f(x) = \frac{x^2}{x-1} \Rightarrow f(2) = \frac{2^2}{2-1} \Rightarrow f(2) = \frac{4}{1} \Rightarrow \boxed{f(2) = 4}$$

للاقتزان f قيمة عظمى محلية هي $f(0) = 0$

للاقتزان f قيمة صغرى محلية هي $f(2) = 4$

$$29) f(x) = x \ln x$$

$$\dot{f}(x) = (x) \left(\frac{1}{x} \right) + (\ln x)(1) \Rightarrow \dot{f}(x) = 1 + \ln x$$

$$1 + \ln x = 0 \Rightarrow \ln x = -1 \Rightarrow \boxed{x = e^{-1}}$$

$$\ddot{f}(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow \ddot{f}(e^{-1}) = \frac{1}{e^{-1}}$$

$$\ddot{f}(e^{-1}) = e > 0 \Rightarrow = e^{-1} \ln e^{-1} \Rightarrow = \frac{1}{e}(-1) \Rightarrow = -\frac{1}{e} \Rightarrow f(e^{-1}) = e^{-1}$$

للاقتزان f قيمة صغرى محلية هي $f(e^{-1}) = e^{-1}$

$$30) f(x) = \frac{x}{2^x}$$

$$\hat{f}(x) = \frac{(2^x) - (x)(2^x \ln 2)}{2^{2x}} \Rightarrow = \frac{1 - (x)(\ln 2)}{2^x} \Rightarrow = 2^{-x}(1 - (x)(\ln 2))$$

$$\Rightarrow \hat{f}(x) = 2^{-x} - (x)(2^{-x} \ln 2) \Rightarrow = 2^{-x}(1 - x \ln 2)$$

$$2^{-x}(1 - x \ln 2) = 0 \Rightarrow 1 - x \ln 2 = 0 \Rightarrow x \ln 2 = 1 \Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{\ln 2}}$$

$$\hat{f}(x) = 2^{-x}(1 - x \ln 2) \Rightarrow \hat{f}'(x) = 2^{-x}(-\ln 2) + (1 - x \ln 2)(-2^{-x} \ln 2)$$

$$\Rightarrow \hat{f}'(x) = (-2^{-x} \ln 2) + (1 - x \ln 2)(-2^{-x} \ln 2) \Rightarrow = -2^{-x} \ln 2 (1 + 1 - x \ln 2)$$

$$\Rightarrow \hat{f}'(x) = -2^{-x} \ln 2 (2 - x \ln 2)$$

$$\hat{f}'\left(\frac{1}{\ln 2}\right) = -2^{-\frac{1}{\ln 2}} \ln 2 \left(2 - \frac{1}{\ln 2} \ln 2\right) \Rightarrow = -2^{-\frac{1}{\ln 2}} \ln 2 (1) \Rightarrow = -2^{-\frac{1}{\ln 2}} \ln 2 < 0$$

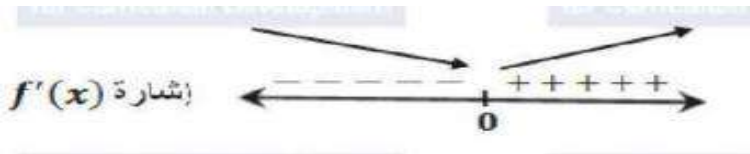
$$f(x) = \frac{x}{2^x} \Rightarrow f\left(\frac{1}{\ln 2}\right) = \frac{\frac{1}{\ln 2}}{2^{\frac{1}{\ln 2}}}$$

للاقتزان f قيمة صغرى محلية هي $f\left(\frac{1}{\ln 2}\right) = \frac{\frac{1}{\ln 2}}{2^{\frac{1}{\ln 2}}}$

$$31) f(x) = x^{\frac{2}{3}} - 3$$

$$\hat{f}(x) = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} \Rightarrow \hat{f}'(x) = \frac{2}{3^{\frac{1}{3}} x^{\frac{4}{3}}}$$

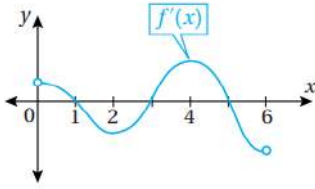
$\hat{f}'(x)$ لا تساوي صفراً أبداً، لكنها غير موجودة عند $x = 0$ فلا يمكن تطبيق اختبار المشتقة الثانية لمعرفة القيم القصوى، لذا نستخدم اختبار المشتقة الأولى بدراسة إشارتها:



$$f(x) = x^{\frac{2}{3}} - 3 \Rightarrow f(0) = (0)^{\frac{2}{3}} - 3 \Rightarrow f(0) = -3$$

للاقتزان f قيمة صغرى محلية هي $f(0) = -3$

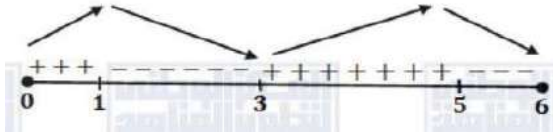
يبين الشكل المجاور منحنى المشتقة الأولى للاقتران $f(x)$ المتصل على الفترة $[0, 6]$. استعمل التمثيل البياني لإيجاد كل مما يأتي:



(32) قيم x التي يكون عندها للاقتران f قيم قصوى محلية ، مبيناً نوعها .

نلاحظ من الرسم المعطى أن $f'(x) = 0$ عند $x = 1$ ، $x = 3$ ، $x = 5$

وأن إشارة $f'(x)$ على النحو الآتي :



للاقتران f قيمة عظمى محلية هي $x = 3$

للاقتران f قيمة صغرى محلية هي $x = 1$ ، $x = 5$

(33) فترات التزايد وفترات التناقص للاقتران f .

الاقتران f متزايد على $(0, 1)$ ، $(3, 5)$ ، ومتناقص على $(1, 3)$ ، $(5, 6)$.

(34) إذا كان للاقتران $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ قيمة عظمى محلية عندما $x = -3$ ، وقيمة صغرى محلية عند النقطة $(1, -14)$ ، فأوجد قيمة كل من الثوابت a و b و c .

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

الاقتران f كثير حدود فهو قابل للاشتقاق على R ، بما أن كل نقطة قيمة قصوى هي نقطة حرجية ،

$$\text{فإن } f'(1) = 0 \text{ و } f'(-3) = 0$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

$$f'(-3) = 3(-3)^2 + 2a(-3) + b = 0 \Rightarrow 27 - 6a + b = 0 \quad \dots \dots (1)$$

$$f'(1) = 3(1)^2 + 2a(1) + b = 0 \Rightarrow 3 + 2a + b = 0 \quad \dots \dots (2)$$

النقطة $(1, -14)$ تقع على منحنى الاقتران ، لذا فإن $f(1) = -14$

$$f(1) = (1)^3 + a(1)^2 + b(1) + c = -14 \Rightarrow f(1) = 1 + a + b + c = -14 \quad \dots \dots (3)$$

ب طرح المعادلتين (1) و (2) نجد أن :

$$27 - 6a + b = 0 \quad \dots \dots (1)$$

$$(-) 3 + 2a + b = 0 \quad \dots \dots (2)$$

$$24 - 8a = 0 \Rightarrow 8a = 24 \Rightarrow \boxed{a = 3}$$

بتعويض قيمة $a = 3$ في المعادلة (2) نجد أن :

$$3 + 2(3) + b = 0 \Rightarrow 3 + 6 + b = 0 \Rightarrow \boxed{b = -9}$$

ثم بتعويض قيمة كل من a و b في المعادلة (3) نجد أن :

$$1 + 3 - 9 + c = -14 \Rightarrow -5 + c = -14 \Rightarrow \boxed{c = -9}$$

(35) إذا كان للاقتران $f(x) = \sqrt{x+1} + \frac{b}{x}$ نقطة انعطاف عندما $x = 3$ ، فأجد قيمة الثابت b .

$$f(x) = \sqrt{x+1} + \frac{b}{x} \Rightarrow \dot{f}(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{b}{x^2} \Rightarrow = \frac{1(x+1)^{-\frac{1}{2}}}{2} - bx^{-2}$$

$$\dot{f}(x) = \frac{-1(x+1)^{-\frac{3}{2}}}{4} + 2bx^{-3} \Rightarrow = \frac{-1}{4(x+1)(x+1)^{\frac{1}{2}}} + \frac{2b}{x^3} \Rightarrow = \frac{-1}{4(x+1)\sqrt{x+1}} + \frac{2b}{x^3}$$

بما أنه يوجد نقطة انعطاف عند $x = 3$ فإما أن يكون $\dot{f}(3) = 0$ أو $\dot{f}(3)$ غير موجودة .

لكن بالنظر إلى قاعدة الاقتران $\dot{f}(x)$ فإن $\dot{f}(x)$ غير موجودة عند $x = -1$ و $x = 0$

إذن $\dot{f}(3) = 0$ ، ومنه :

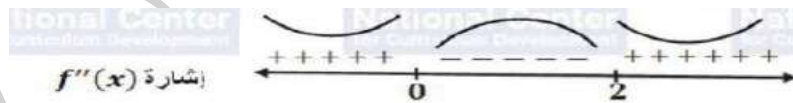
$$\dot{f}(3) = \frac{-1}{4(3+1)\sqrt{3+1}} + \frac{2b}{3^3} \Rightarrow = \frac{-1}{4(4)\sqrt{4}} + \frac{2b}{27} \Rightarrow \dot{f}(3) = \frac{-1}{32} + \frac{2b}{27}$$

$$\frac{-1}{32} + \frac{2b}{27} = 0 \Rightarrow \frac{2b}{27} = \frac{1}{32} \Rightarrow 64b = 27 \Rightarrow b = \frac{27}{64}$$

استعمل التمثيل البياني المجاور لمنحنى $\dot{f}(x)$ لإيجاد كل مما يأتي :

(36) فترات التفرع للأعلى وللأسفل لمنحنى الاقتران f .

نلاحظ من الشكل أن $\dot{f}(x) = 0$ عند $x = 0$ و $x = 2$ وأن إشارة $\dot{f}(x)$ على النحو الآتي :

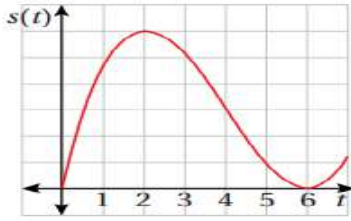


الاقتران f مقعر للأسفل في $(0, 2)$

الاقتران f مقعر للأعلى في $(-\infty, 0)$ ، $(2, \infty)$

(37) الإحداثي x لنقاط انعطاف منحنى الاقتران f .

توجد نقطتا انعطاف عند $x = 0$ ، $x = 2$



يمثل الاقتران $s(t)$ المبين في الشكل المجاور موقع جسم يتحرك

في مسار مستقيم ، حيث s الموقع بالأمتار ، و t الزمن بالثواني :

(38) أجد قيم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون .

يكون الجسم في حالة سكون عندما $v(t) = 0$ أي $\dot{s}(t) = 0$

وهذا يحدث عندما يكون لمنحنى $s(t)$ مماس أفقي ، أي عند $t = 2$ و $t = 6$

(39) ما الفترات الزمنية التي يتحرك فيها الجسم في الاتجاه الموجب والاتجاه السالب؟

يتحرك الجسم في الاتجاه الموجب أو السالب تبعاً لإشارة $\dot{s}(t) = v(t)$ وهذه الإشارة ترتبط بكون منحنى $s(t)$ متزايداً أو متناقصاً :

يتحرك الجسم بالاتجاه الموجب في كل من الفترتين : $(0, 2)$ ، $(6, 7)$ لأن اقتران الموقع متزايد فيهما.

ويتحرك في الاتجاه السالب في الفترة $(2, 6)$ لأن اقتران الموقع متناقص فيها .

(40) إذا كان تسارع الجسم صفراً عندما $t = 4$ ، فما الفترات التي تتزايد فيها سرعة الجسم ؟ وما الفترات التي تتناقص فيها سرعة الجسم؟

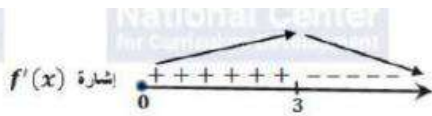
تتزايد $v(t)$ عندما $\dot{v}(t) = \ddot{s}(t)$ يكون موجباً . أي عندما يكون منحنى $s(t)$ مقعراً للأعلى ، أي في الفترة $(4, 7)$.

تتناقص $v(t)$ عندما $\dot{v}(t) = \ddot{s}(t)$ يكون سالباً . أي عندما يكون منحنى $s(t)$ مقعراً للأسفل ، أي في الفترة $(0, 4)$.

(41) مكبرات صوت : يمثل الاقتران $f(x) = \frac{1500}{x^2 - 6x + 10} - 150$ الربح الأسبوعي (بالدينار) لأحد المصانع من إنتاجه ، حيث x عدد مكبرات الصوت المباعة . أجد عدد مكبرات الصوت الذي يحقق أكبر ربح ممكن.

$$f(x) = \frac{1500}{x^2 - 6x + 10} - 150 \Rightarrow \dot{f}(x) = \frac{-1500(2x + 6)}{(x^2 - 6x + 10)^2} \Rightarrow \frac{-1500(2x + 6)}{(x^2 - 6x + 10)^2} = 0$$

$$-1500(2x - 6) = 0 \Rightarrow 2x - 6 = 0 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow \boxed{x = 3}$$



القيمة الحرجة الوحيدة هي $x = 3$ لأن المقام لا يساوي صفراً .

بدراسة إشارة $\dot{f}(x)$ نلاحظ أن للاقتران f قيمة عظمى عندما $x = 3$ أي أن عدد مكبرات الصوت اللازم انتاجها وبيعها لتحقيق أكبر ربح أسبوعي ممكن هو 3 .

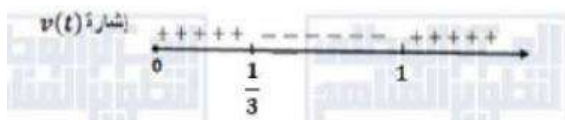
يمثل الاقتران $s(t) = t^3 - 2t^2 + t, t \geq 0$ موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم ، حيث s الموقع بالأمتار ، و t الزمن بالثواني :

(42) ما الفترات الزمنية التي يتحرك فيها الجسم في الاتجاه الموجب والاتجاه السالب؟

$$s(t) = t^3 - 2t^2 + t \Rightarrow v(t) = 3t^2 - 4t + 1$$

$$3t^2 - 4t + 1 = 0 \Rightarrow (3t - 1)(t - 1) = 0$$

$$3t - 1 = 0 \Rightarrow 3t = 1 \Rightarrow \boxed{t = \frac{1}{3}}$$



$$t - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{t = 1}$$

يتحرك الجسم بالاتجاه الموجب في كل من الفترتين $(0, \frac{1}{3})$ ، $(1, \infty)$.

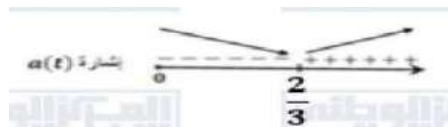
ويتحرك في الاتجاه السالب في الفترة $(\frac{1}{3}, 1)$.

(43) ما الفترات التي تتزايد فيها سرعة الجسم المتجهة؟ وما الفترات التي تتناقص فيها سرعة الجسم المتجهة؟

تتزايد $v(t)$ وتتناقص وفقاً للإشارة $a(t) = \dot{v}(t)$

$$\dot{v}(t) = a(t) = 6t - 4$$

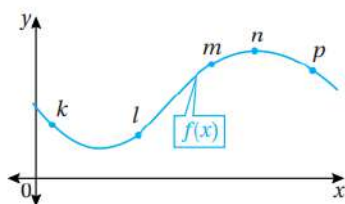
$$6t - 4 = 0 \Rightarrow 6t = 4 \Rightarrow t = \frac{4}{6} \Rightarrow t = \frac{2}{3}$$



تتزايد سرعة الجسم في الفترة $(\frac{2}{3}, \infty)$ وتتناقص على الفترة $(0, \frac{2}{3})$

مهارات التفكير العليا: صفحة 115

تبرير : يبين الشكل المجاور منحنى الاقتران $f(x)$. أحدد النقطة (النقاط) من بين مجموعة النقاط : $\{k, l, m, n, p\}$ على منحنى الاقتران التي تحقق كلا من الشروط الآتية ، مبرراً إجابتي :



(44) أن تكون إشارة كل من $\dot{f}(x)$ و $\ddot{f}(x)$ موجبة .

تكون $\dot{f}(x) > 0$ و $\ddot{f}(x) > 0$ عند النقاط التي يكون عندها

الاقتران f متزايداً ومنحناه مقعراً للأعلى.

النقطة التي تحقق هذين الشرطين من بين النقاط المحددة على الرسم هي: l

(45) أن تكون إشارة كل من $f(x)$ و $f'(x)$ سالبة .

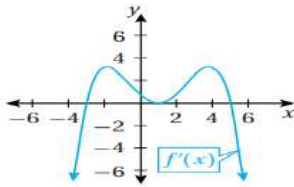
تكون $f(x) < 0$ و $f'(x) < 0$ عند النقاط التي يكون عندها الاقتران f متناقصاً ومنحناه مقعراً للأسفل.

النقطة التي تحقق هذين الشرطين من بين النقاط المحددة على الرسم هي: p

(46) أن تكون إشارة $f(x)$ سالبة ، وإشارة $f'(x)$ موجبة .

تكون $f(x) < 0$ ، و $f'(x) > 0$ عند النقاط التي يكون عندها الاقتران f متناقصاً ومنحناه مقعراً للأعلى.

النقطة التي تحقق هذين الشرطين من بين النقاط المحددة على الرسم هي: k

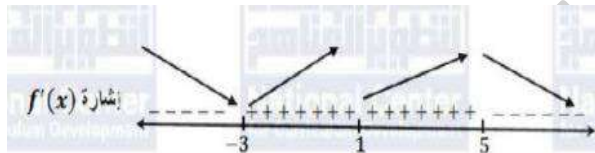


تبرير: أستعمل التمثيل البياني المجاور لمنحنى $f(x)$ لإيجاد

كل مما يأتي ، مبرراً إجابتي :

(47) قيم x التي يكون عندها للاقتران f قيم قصوى محلية ، مبيناً نوعها .

نلاحظ من الرسم $f(x) = 0$ عند $x = -3$ ، $x = 1$ ، $x = 5$ وأن إشارة $f'(x)$ على النحو الآتي:



للاقتران f قيمة صغرى محلية عند $x = -3$

للاقتران f قيمة عظمى محلية عند $x = 5$

(48) فترات التزايد وفترات التناقص للاقتران f .

الاقتران f متزايد على $(-3, 5)$ ومتناقص على $(-\infty, -3)$ ، $(5, \infty)$

(49) فترات التقعر للأعلى وللأسفل لمنحنى الاقتران f .

يكون منحنى f مقعراً للأعلى في الفترة (أو الفترات) التي يكون فيها f' متزايداً حيث تكون في

هذه الفترات مشتقة f' أي f'' موجبة ، يتضح من الرسم أن f' متزايدة في الفترتين: $(1, 4)$ ،

$(-\infty, -2)$ ، وعندما تكون f' متناقصة في فترة ما تكون f'' سالبة ويكون منحنى f مقعراً للأسفل

، ويتضح من الرسم أن f' متناقصة في الفترتين : $(-2, 1)$ ، $(4, \infty)$

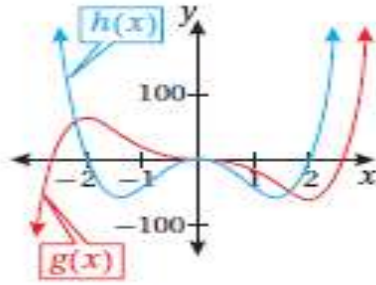
إذن منحنى f مقعر للأسفل في الفترتين $(-2, 1)$ ، $(4, \infty)$

ومقعر للأعلى في الفترتين $(1, 4)$ ، $(-\infty, -2)$

(50) الإحداثي x لنقاط الانعطاف .

الاقتزان f له ثلاث نقاط انعطاف عند على $x = -2$ ، $x = 1$ ، $x = 4$ لأن الاقتزان f قيم قصوى عندها .

(51) تحد : أستعمل التمثيل البياني المجاور لمنحنيي الاقتزانين $h(x)$ ، $g(x)$ لتحديد الاقتزان الذي يمثل مشتقة للآخر ، مبرراً إجابتي .



$h(x)$ هو مشتقة $g(x)$ أي $g(x) = h(x)$ وليس العكس .

التبرير : بما أن أحدهما هو مشتقة الآخر (من المعطيات) ،

يكفي ملاحظة الفترة $x < -2$ حيث g متزايد و h أكبر من الصفر ،

وهذا ينسجم مع كون h هو مشتقة g ،

بينما في هذه الفترة نفسها h متناقص و g لا يحافظ على الإشارة السالبة ،

وهذا يؤكد أن g ليس مشتقة h والنظر لباقي الفترات بالمنهجية نفسها يؤدي إلى ذات النتيجة .

كذلك للاقتزان g قيمة عظمى محلية عند $x = -2$ ، ونلاحظ أن $h(-2) = 0$ ، ما يؤكد أن $g(x) = h(x)$.