



ط ((U ((N ((

إدارة الامتحانات والاختبارات
قسم الامتحانات العامة

امتحان شهادة الدراسة الثانوية العامة لعام ٢٠٢٣ / التكميلي

(وثيقة محمية/محدود)

مدة الامتحان: ٣٠ : ٢٠

رقم المبحث: 205

المبحث: الرياضيات (الورقة الأولى، ف ١)

الفرع: العلمي + الصناعي جامعات

اسم الطالب:

اليوم والتاريخ: السبت ٢٠٢٣/١٢/٣٠

رقم الجلوس:

(1) إذا كان: $f(x) = e^2 - e^{-x}$ ، فإن $f'(1)$ ، هي :

$$f(x) = e^2 - e^{-x}$$

$$f'(x) = 0 - (-1 \times e^{-x}) \Rightarrow f'(x) = e^{-x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{e^x}$$

$$\Rightarrow f'(1) = \frac{1}{e^{(1)}} \Rightarrow f'(1) = \frac{1}{e}$$

a) $2e + \frac{1}{e}$

b) $2e - \frac{1}{e}$

c) $\boxed{\frac{1}{e}}$

d) $-\frac{1}{e}$

(2) إذا كان $f(x) = \sin \frac{x}{2} + \frac{\cos x}{2}$ ، فإن $f'(2\pi)$ هي :

$$f(x) = \sin \frac{x}{2} + \frac{\cos x}{2}$$

$$f'(x) = \frac{\cos(\frac{x}{2})}{2} - \frac{\sin(x)}{2} \Rightarrow f'(2\pi) = \frac{\cos(\frac{2\pi}{2})}{2} - \frac{\sin(2\pi)}{2}$$

$$\Rightarrow f'(2\pi) = \frac{\cos(\pi)}{2} - \frac{\sin(\pi)}{2} \Rightarrow = \frac{-1}{2} - \frac{0}{2} \Rightarrow \boxed{f'(2\pi) = \frac{-1}{2}}$$

a) 0

b) $\frac{1}{2}$

c) $\boxed{-\frac{1}{2}}$

d) -1

(3) إذا كان الاقتران: $s(t) = \frac{1}{3}t^3 - 5t^2 + 9t + 2$, $t \geq 0$ ، يمثل موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني، فإن تسارع هذا الجسم عندما يكون في حالة سكون لحظي لأول مرة بعد انطلاقه، هو:

$$s(t) = \frac{1}{3}t^3 - 5t^2 + 9t + 2$$

$$v(t) = t^2 - 10t + 9 \Rightarrow t^2 - 10t + 9$$

$$\Rightarrow (t - 9)(t - 1) = 0 \Rightarrow t = 9 \Leftrightarrow \boxed{t = 1} \text{ المرة الأولى}$$

$$a(t) = 2t - 10 \Rightarrow a(1) = 2(1) - 10 \Rightarrow \boxed{a(1) = -8}$$

a) $\boxed{-8 \text{ m/s}^2}$ b) 8 m/s^2 c) -16 m/s^2 d) 16 m/s^2

(4) إذا كان: $f(x) = \frac{-1}{6x - x^2}$ ، فإن $\hat{f}(2)$ هي :

$$f(x) = \frac{-1}{6x - x^2}$$

$$\hat{f}(x) = \frac{-(-1)(6 - 2x)}{(6x - x^2)^2} \Rightarrow \hat{f}(x) = \frac{(6 - 2x)}{(6x - x^2)^2}$$

$$\Rightarrow \hat{f}(2) = \frac{(6 - 2(2))}{(6(2) - 2^2)^2} \Rightarrow \frac{2}{64} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{32}}$$

a) $-\frac{1}{4}$ b) $-\frac{1}{32}$ c) $\frac{1}{4}$ d) $\boxed{\frac{1}{32}}$

(5) إذا كان: $f(x) = \frac{x^2 - 4}{2x}$ ، فإن $\hat{f}(-1)$ هي :

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{2x} \Rightarrow f(x) = \frac{x^2}{2x} - \frac{4}{2x} \Rightarrow f(x) = \frac{x}{2} - \frac{2}{x} \Rightarrow \hat{f}(x) = \frac{1}{2}x - 2x^{-1}$$

$$\hat{f}(x) = 0 + (-2)2x^{-3} \Rightarrow \hat{f}(x) = -4x^{-3} \Rightarrow \hat{f}(x) = \frac{-4}{x^3} \Rightarrow \hat{f}(-1) = \frac{-4}{(-1)^3} \Rightarrow \boxed{4}$$

a) $\boxed{4}$ b) -4 c) $\frac{5}{2}$ d) $-\frac{3}{2}$

(6) إذا كان: $f(x) = (\log_e x)^5$ ، فإن $\hat{f}(x)$ ، هي:

$$f(x) = (\log_e x)^5 \Rightarrow \hat{f}(x) = 5(\log_e x)^4 \left(\frac{1}{x}\right) \Rightarrow \hat{f}(x) = \frac{5(\log_e x)^4}{x}$$

a) $\frac{5 \log_e x}{x}$

b) $\boxed{\frac{5(\log_e x)^4}{x}}$

c) $\frac{5(\log_e x)^4}{x \ln x}$

d) $\frac{5 \log_e x}{x \ln x}$

(7) إذا كان: $f(x) = 7^{(x+1)^2}$ ، فإن للاقتران f مماساً أفقياً عندما x تساوي :

$$f(x) = 7^{(x+1)^2}$$

$$\hat{f}(x) = 7^{(x+1)^2} (2)(x+1) \ln 7 \Rightarrow \hat{f}(x) = (7^{(x+1)^2})(2x+2)(\ln 7) = 0$$

$$\Rightarrow 2x+2=0 \Rightarrow x+1=0 \Rightarrow \boxed{x=-1}$$

a) 7

b) 1

c) -2

d) $\boxed{-1}$

(8) إذا كان: $5y = \log(x - x^3)$ ، فإن $\frac{dy}{dx}$ تساوي :

$$5y = \log(x - x^3) \Rightarrow y = \frac{\log(x-x^3)}{5}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{1-3x^2}{5(x-x^3) \ln 10}}$$

a) $\frac{1-3x^2}{(x-x^3) \ln 10}$

b) $\frac{1-3x^2}{5(x-x^3)}$

c) $\boxed{\frac{1-3x^2}{5(x-x^3) \ln 10}}$

d) $\frac{1-3x^2}{x-x^3}$

(9) ميل المماس لمنحنى العلاقة: $(x-3)(y+2) = 5$ ، عند النقطة $(4, 3)$ ، هو :

$$(x-3)(y+2) = 5$$

$$(x-3) \left(\frac{dy}{dx}\right) + (y+2)(1) = 0$$

$$(4-3) \left(\frac{dy}{dx}\right) + (3+2)(1) = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} + 5 = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{dy}{dx} = -5}$$

a) $\boxed{-5}$

b) 5

c) $-\frac{1}{5}$

d) $\frac{1}{5}$

10) إذا كان : $x > 0$ ، $y = x^{2x}$ ، فإن $\frac{d}{dx}(\ln y)$ هي :

$$\ln y = \ln x^{2x} \Rightarrow \ln y = 2x \ln x \Rightarrow \frac{y}{y} = 2x \left(\frac{1}{x} \right) + (\ln x \times 2)$$

$$\Rightarrow \frac{y}{y} = 2 + 2 \ln x \Rightarrow \frac{y}{y} = 2(1 + \ln x)$$

- a) $1 + \ln x$ b) $2(1 + \ln x)$ c) $2(x + \ln x)$ d) $2x^{2x}(1 + \ln x)$

11) حلقت طائرة أفقياً على ارتفاع 12 km من سطح الأرض، ومرت أثناء تحليقها مباشرة فوق رادار على الأرض. إذا كان معدل تغير البعد بين الطائرة ورادار 200 km/h ، فإن سرعة الطائرة في اللحظة التي يكون بعدها عن الرادار يساوي 13 km هي :

$$L = 13 , y = 12 , x = \text{مجهول}$$

$$\frac{dL}{dt} = 200 , \quad \frac{dy}{dt} = 0 \quad \text{لأن } y \text{ ثابت}$$

$$\frac{dx}{dt} = \text{المطلوب}$$

$$L^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow 13^2 = x^2 + 12^2 \Rightarrow 169 = x^2 + 144$$

$$\Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x = 5$$

$$L^2 = x^2 + y^2$$

$$2L \frac{dL}{dt} = 2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt}$$

$$2(13)(200) = 2x \frac{dx}{dt} + 2(12)(0) \Rightarrow 5200 = 2(5) \frac{dx}{dt}$$

$$\Rightarrow 5200 = 10 \frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = 520$$

- a) 260 km/h b) 520 km/h c) 1040 km/h d) 1300 km/h

(12) صفيحة معدنية رقيقة على شكل مثلث متطابق الضلعين، وطول كل منهما 6 cm ، إذا سخنت الصفيحة بحيث تبقى محافظة على شكلها ، وكان معدل التغير في مساحة سطحها يساوي $36 \text{ cm}^3/\text{s}$ ، فإن معدل التغير في الزاوية المحصورة بين الضلعين المتطابقين عندما يكون قياس الزاوية بينهما $\frac{\pi}{3}$ ، هو:

$$\frac{dA}{dt} = 36 \text{ cm}^3/\text{s} , \frac{d\theta}{dt} = ? , \theta = \frac{\pi}{3}$$

$$A = \frac{1}{2}s^2 \sin \theta \Rightarrow A = \frac{1}{2}(6)^2 \sin \theta \Rightarrow A = 18 \sin \theta$$

$$\frac{dA}{dt} = 18 \cos \theta \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow 36 = 18 \cos \left(\frac{\pi}{3}\right) \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow$$

$$36 = 18 \left(\frac{1}{2}\right) \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow 36 = 9 \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \boxed{\frac{d\theta}{dt} = 4 \text{ rad/s}}$$

a) 12 rad/s b) $\frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ rad/s}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ rad/s}$ d) $\boxed{4 \text{ rad/s}}$

(13) إذا كان : $f(x) = x^{\frac{2}{5}} + 3$ ، فإن القيمة العظمى المطلقة للاقتزان f في الفترة $\left[-1, \frac{1}{2}\right]$ هي :

(1) الخطوة الأولى: أيجاد المشتقة

$$f(x) = x^{\frac{2}{5}} + 3 \Rightarrow \hat{f}(x) = \frac{2}{5}x^{-\frac{3}{5}} \Rightarrow \hat{f}(x) = \frac{2}{5\sqrt[5]{x^3}}$$

(2) الخطوة الثانية: أجد قيم x التي تكون عندها مشتقة الاقتزان صفراً ، أو غير موجودة.

$$\hat{f}(x) = \frac{2}{5\sqrt[5]{x^3}} \neq 0$$

$$\hat{f}(x) = \text{غير موجودة} \Rightarrow x = 0$$

يوجد قيمة حرجة وحيدة في الفترة المفتوحة $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$ هي $x = 0$

(3) الخطوة الثالثة: أيجاد قيم الاقتزان f عند النقطة/النقاط الحرجة و طرفي المجال.

$$f(-1) = (-1)^{\frac{2}{5}} + 3 \Rightarrow = ((-1)^5)^{\frac{2}{5}} + 3 \Rightarrow = (-1)^{\frac{10}{5}} + 3$$

$$\Rightarrow = (-1)^2 + 3 \Rightarrow = 1 + 3 \Rightarrow \boxed{f(-1) = 4}$$

$$f(0) = (0)^{\frac{2}{5}} + 3 \Rightarrow \boxed{f(0) = 3}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{5}} + 3 \Rightarrow = \frac{1^{\frac{2}{5}}}{2^{\frac{2}{5}}} + 3 \Rightarrow = \frac{1}{2^{\frac{2}{5}}} + 3$$

$$\Rightarrow = 0.76 + 3 \Rightarrow \boxed{f\left(\frac{1}{2}\right) = 3.76}$$

(4) الخطوة الرابعة: نقارن بين القيم

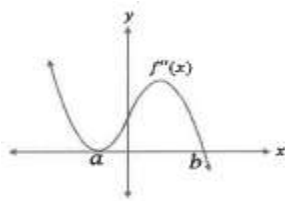
القيمة العظمى المطلقة للاقتران f هي : $f(-1) = 4$

a) $\boxed{4}$

b) 3

c) $3 + \frac{1}{\sqrt[5]{2}}$

d) $3 + \frac{1}{\sqrt[5]{4}}$



(14) إذا كان الشكل الآتي يمثل منحنى المشتقة للاقتران f ، فإن الفترة

التي يكون فيها منحنى الاقتران f يكون مقعراً للأسفل هي :

a) $(0, \infty)$

b) $\boxed{(b, \infty)}$

c) $(-\infty, b)$

d) (a, b)

(15) إذا كان الاقتران : $v(t) = 12t - 2t^2$, $t \in [0, 10]$ ، يمثل السرعة المتجهة لجسم يتحرك في مسار مستقيم ، حيث v السرعة المتجهة بالمتراً لكل ثانية ، و t الزمن بالثواني ، فإن الفترة الزمنية التي تتناقص فيها سرعة الجسم المتجهة ، هي :

إذا كانت إشارة التسارع موجبة فإن السرعة تتزايد.

إذا كانت إشارة التسارع سالبة فإن السرعة تتناقص.

$$v(t) = 12t - 2t^2$$

$$a(t) = 12 - 4t \Rightarrow 12 - 4t = 0$$

$$\Rightarrow 4t = 12 \Rightarrow \boxed{t = 3}$$



الفترة التي يكون فيها التسارع يساوي صفر وهي $t = 3$

نختار الفترة أكبر من 3 وندرس الإشارة $12 - 4(4) = -4$ الإشارة سالبة (تنقص)

نختار الفترة اقل من 3 وندرس الإشارة $12 - 4(2) = 4$ الإشارة موجبة (تزايد)

اذن الفترة هي (3 , 10)

- a) (0 , 3) b) (3 , 10) c) (0 , 6) d) (6 , 10)

16) إذا كان الاقتران: $S(x) = 200 - x$ يمثل سعر القطعة الواحدة من أحد المنتجات بالدينار، حيث x عدد القطع المباعة من المنتج، فإن أعلى إيراد يمكن تحقيقه عندما يكون عدد القطع المباعة ، هو:

(سعر بيع القطعة) $\times$ (عدد القطع المباعة) = الإيراد

$$R(x) = x(200 - x) \Rightarrow R(x) = 200x - x^2$$

$$R'(x) = 200 - 2x$$

$$200 - 2x = 0 \Rightarrow 2x = 200 \Rightarrow x = 100$$

- a) 100 b) 10000 c) 200 d) 20000

17) الإحداثي x للنقطة P التي تقع على المستقيم: $y = 3 - \frac{1}{2}x$ ، والتي يكون بعدها أقل ما يمكن عن نقطة الأصل ، هو:

افترض أن النقطة الواقعة على منحنى الاقتران $f(x)$ هي (x, y) ، وأن d هي المسافة بينها وبين نقطة الأصل $(0, 0)$. باستعمال قانون المسافة بين نقطتين ، فإن الاقتران الذي يمثل المسافة d يكتب كما يأتي:

$$d = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2} \Rightarrow d = \sqrt{x^2 + y^2}$$

الخطوة الاولى: اكتب الاقتران الذي أريد أن أجد قيمته القصوى بدلالة متغير واحد .

بما أن النقطة (x, y) تقع على منحنى الاقتران $f(x)$ ، فإن $y = f(x) = 3 - \frac{1}{2}x$

اكتب الاقتران d بدلالة متغير واحد :

$$d(x) = \sqrt{x^2 + \left(3 - \frac{1}{2}x\right)^2}$$

اذن الاقتران الذي يمثل المسافة بين النقطتين هو : $d(x) = \sqrt{x^2 + \left(3 - \frac{1}{2}x\right)^2}$

الخطوة الثانية: أجد القيم الحرجة .

$$\dot{d}(x) = \frac{2x + (2) \left(-\frac{1}{2}\right) \left(3 - \frac{1}{2}x\right)}{2\sqrt{x^2 + \left(3 - \frac{1}{2}x\right)^2}} \Rightarrow = \frac{2x - \left(3 - \frac{1}{2}x\right)}{2\sqrt{x^2 + \left(3 - \frac{1}{2}x\right)^2}}$$

$$\frac{2x - \left(3 - \frac{1}{2}x\right)}{2\sqrt{x^2 + \left(3 - \frac{1}{2}x\right)^2}} = 0 \Rightarrow 2x - \left(3 - \frac{1}{2}x\right) = 0$$

$$\Rightarrow 2x - 3 + \frac{1}{2}x = 0 \Rightarrow \frac{5}{2}x - 3 = 0 \Rightarrow \frac{5}{2}x = 3 \Rightarrow \boxed{x = \frac{6}{5}}$$

a) $\boxed{\frac{6}{5}}$

b) $\frac{3}{5}$

c) $\frac{5}{4}$

d) $\frac{5}{2}$

(18) إذا كان: $\sqrt{-1} = i$ ، فإن قيمة المقدار $i^9 \times \sqrt{-16}$ هي :

$$i^9 \times \sqrt{-16}$$

$$i^9 \times 4i = 4i^{10} \Rightarrow = 4(i^2)^5 \Rightarrow = 4(-1)^5 \Rightarrow = 4(-1) \Rightarrow \boxed{= -4}$$

a) $4i$

b) 4

c) $-4i$

d) $\boxed{-4}$

(19) إذا كان: $(2a - 3b) + (2b + 3a)i = 13$ ، فإن قيمتي a , b اللتين تحققان المعادلة على الترتيب، هما :

$$(2a - 3b) + (2b + 3a)i = 13 \Rightarrow (2a - 3b) + (2b + 3a)i = 13 + 0i$$

$$2a - 3b = 13 \Leftrightarrow 2b + 3a = 0$$

$$2a - 3b = 13 \Rightarrow \boxed{a = \frac{13}{2} + \frac{3}{2}b}$$

$$2b + 3a = 0 \Rightarrow \boxed{b = -\frac{3a}{2}}$$

$$a = \frac{13}{2} + \frac{3}{2} \left(-\frac{3a}{2} \right) \Rightarrow a = \frac{13}{2} - \frac{9a}{4}$$

$$\Rightarrow a + \frac{9a}{4} = \frac{13}{2} \Rightarrow \frac{13a}{4} = \frac{13}{2}$$

$$\Rightarrow \left[\frac{13a}{4} = \frac{13}{2} \right] \times \frac{4}{13} \Rightarrow \boxed{a = 2}$$

$$b = -\frac{3(2)}{2} \Rightarrow \boxed{b = -3}$$

a) $-2, 3$

b) $\boxed{2, -3}$

c) $-3, -2$

d) $3, 2$

(20) مقياس العدد المركب: $z = 6 - 3i$ ، هو :

$$|z| = \sqrt{(6)^2 + (-3)^2} \Rightarrow = \sqrt{36 + 9}$$

$$\Rightarrow = \sqrt{45} \Rightarrow = \sqrt{9 \times 5} \Rightarrow \boxed{|z| = 3\sqrt{5}}$$

a) 3

b) 9

c) $\sqrt{17}$

d) $\boxed{3\sqrt{5}}$

(21) ناتج: $z = \frac{1+8i}{1-2i}$ ، هو :

$$= \frac{1+8i}{1-2i} \times \frac{1+2i}{1+2i} \Rightarrow = \frac{1+2i+8i+16i^2}{(1)^2 + (2)^2}$$

$$\Rightarrow = \frac{1+2i+8i-16}{5} \Rightarrow = \frac{-15+10i}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow = \frac{-15}{5} + \frac{10}{5}i \Rightarrow = \boxed{-3 + 2i}$$

a) $3 - \frac{6}{5}i$

b) $5 - 2i$

c) $\frac{17}{5} + 2i$

d) $\boxed{-3 + 2i}$

(22) إذا كان: $z_1 = 2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} - i \sin \frac{2\pi}{3} \right)$ ، $z_2 = 4 \left(\cos \frac{3\pi}{4} - i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$ ، فإن $\frac{z_2}{z_1}$ تساوي:

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{r_2}{r_1} (\cos(\theta_2 - \theta_1) + i \sin(\theta_2 - \theta_1))$$

$$\Rightarrow = \frac{4}{2} \left(\cos \left(\frac{3\pi}{4} - \frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{3\pi}{4} - \frac{2\pi}{3} \right) \right)$$

$$\Rightarrow = 2 \left(\cos \left(\frac{9\pi}{12} - \frac{8\pi}{12} \right) + i \sin \left(\frac{9\pi}{12} - \frac{8\pi}{12} \right) \right) \Rightarrow \boxed{\frac{z_2}{z_1} = 2 \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right)}$$

a) $\frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right)$ b) $\boxed{2 \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right)}$ c) $2 \left(\cos \frac{17\pi}{12} + i \sin \frac{17\pi}{12} \right)$ d) $\frac{1}{2} \left(\cos \frac{17\pi}{12} + i \sin \frac{17\pi}{12} \right)$

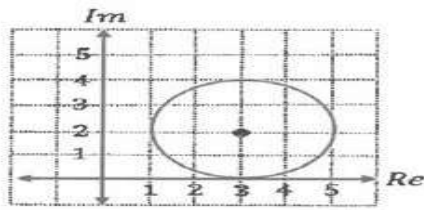
(23) إذا كان: $z_1 = 2 - 3i$ ، $z_2 = 3 + 2i$ ، فإن $Arg(z_1, z_2)$ تساوي:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2))$$

$$z_1 z_2 = (2 - 3i)(3 + 2i) \Rightarrow = (6 + 4i - 9i + 6) \Rightarrow = 12 - 5i$$

$$Arg(12 - 5i) = -\tan^{-1} \left(\frac{5}{12} \right)$$

a) $\tan^{-1} \left(\frac{5}{12} \right)$ b) $\tan^{-1} \left(\frac{5}{12} \right) - \pi$ c) $\boxed{-\tan^{-1} \left(\frac{5}{12} \right)}$ d) $\pi - \tan^{-1} \left(\frac{5}{12} \right)$



(24) إذا كان الشكل الآتي يمثل دائرة، فإن معادلة

المحل الهندسي (بدلالة z) له، هي:

مركز الدائرة: $(3, 2)$ ، نصف القطر $r = 2$

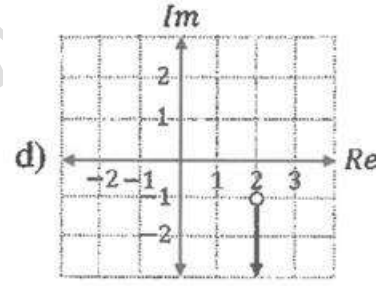
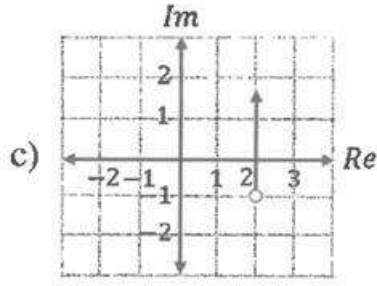
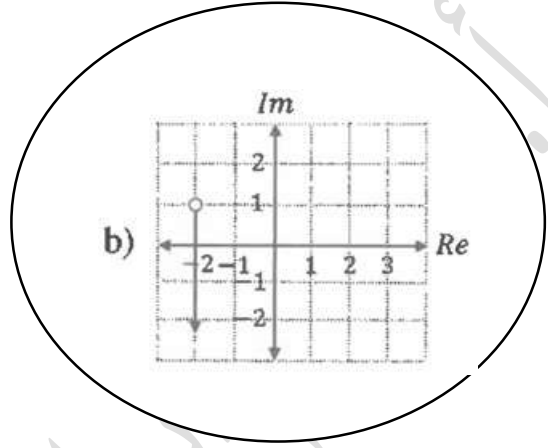
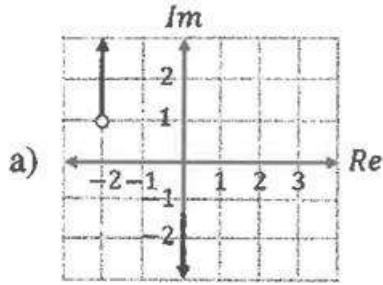
$$|z - (a + ib)| = r \Rightarrow |z - (3 + 2i)| = 2 \Rightarrow |z - 3 - 2i| = 2$$

a) $|z - 3 + 2i| = 2$ b) $|z - 2 + 3i| = 2$ c) $\boxed{|z - 3 - 2i| = 2}$ d) $|z - 2 - 3i| = 2$

(25) التمثيل البياني للمحل الهندسي الذي معادلته: $Arg(z + 2 - i) = -\frac{\pi}{2}$ ، هو الشكل:

$$Arg(z + 2 - i) = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow Arg(z - (-2 + i)) = -\frac{\pi}{2}$$

النقطة هي: $(-2, 1)$ ، الزاوية $-\frac{\pi}{2}$ سالبة اتجاه السهم للأسفل ، إذن b الإجابة الصحيحة.



السؤال الثاني: (22 علامة)

(1) ابحث قابلية الاقتران: $f(x) = (2x - 4)^{\frac{1}{3}} + 6$ للاشتقاق عندما $z = 2$ (12 علامة)
(استعمل التعريف العام للمشتقة لبحث قابلية الاشتقاق)

$$f(x) = (2x - 4)^{\frac{1}{3}} + 6$$

$$\hat{f}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \Rightarrow \hat{f}(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$$

$$\hat{f}(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2(2+h) - 4)^{\frac{1}{3}} + 6 - (0+6)}{h} \Rightarrow \hat{f}(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+2h-4)^{\frac{1}{3}}}{h}$$

$$\Rightarrow \hat{f}(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{2} h^{\frac{1}{3}}}{h} \Rightarrow \hat{f}(2) = \sqrt[3]{2} \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{1}{h^{\frac{2}{3}}} \right)$$

$$\hat{f}(2) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \sqrt[3]{2} \left(\frac{1}{h^{\frac{2}{3}}} \right) = \infty \text{ المشتقة من جهة اليسار}$$

$$\hat{f}(2) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \sqrt[3]{2} \left(\frac{1}{h^{\frac{2}{3}}} \right) = \infty \text{ المشتقة من جهة اليمين}$$

اي ان الاقتران $f(x)$ غير قابل للاشتقاق عندما $x = 2$

2) جد ميل العمودي على المماس لمنحنى الاقتران: $f(x) = \left(\frac{x^2+x}{x^2+1} \right)^5$ ، عندما $x = 1$ 10
علامات

الخطوة الأولى : إيجاد المشتقة

$$\hat{f}(x) = 5 \left(\frac{x^2+x}{x^2+1} \right)^4 \left(\frac{(x^2+1)(2x+1) - (x^2+x)(2x)}{(x^2+1)^2} \right)$$

الخطوة الثانية: إيجاد ميل المماس

$$\hat{f}(1) = 5 \left(\frac{(1)^2 + (1)}{(1)^2 + 1} \right)^4 \left(\frac{((1)^2 + 1)(2(1) + 1) - ((1)^2 + (1))(2(1))}{((1)^2 + 1)^2} \right)$$

$$\hat{f}(1) = 5 \left(\frac{(2)(3) - (2)(2)}{(2)^2} \right) \Rightarrow \hat{f}(1) = 5 \left(\frac{6-4}{4} \right) \Rightarrow \hat{f}(1) = \frac{5}{2}$$

الخطوة الثالثة: إيجاد ميل العامودي على المماس

$$m_1 = -\frac{1}{\frac{5}{2}} \Rightarrow m_1 = -\frac{2}{5}$$

السؤال الثالث: (28 علامة)

(1) إذا كانت B هي نقطة تقاطع منحنى العلاقة $x^3 + 4xy + y^3 = 0$ مع المستقيم $y = x$ في الربع الثالث من المستوى الإحداثي، وكان مماس منحنى العلاقة عند النقطة B يقطع المحور y في النقطة C ، فجد مساحة المثلث OBC ، حيث O هي نقطة الأصل. (10 علامات)

النقطة O من المعطيات هي نقطة الأصل $(0, 0)$

$$x^3 + 4xy + y^3 = 0, \quad y = x$$

$$x^3 + 4x(x) + x^3 = 0 \Rightarrow x^3 + 4x^2 + x^3 = 0 \Rightarrow 2x^3 + 4x^2 = 0$$

$$\Rightarrow 2x^2(x + 2) = 0 \Rightarrow 2x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$x + 2 = 0 \Rightarrow \boxed{x = -2} \Rightarrow \boxed{y = -2} \quad \text{في الربع الثالث}$$

النقطة B هي $(-2, -2)$

$$3x^2 + 4x \frac{dy}{dx} + 4y + 3y^2 \frac{dy}{dx} = 0$$

$$3(-2)^2 + 4(-2) \frac{dy}{dx} + 4(-2) + 3(-2)^2 \frac{dy}{dx} = 0$$

$$12 - 8 \frac{dy}{dx} - 8 + 12 \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow -8 \frac{dy}{dx} + 12 \frac{dy}{dx} = -12 + 8$$

$$\Rightarrow 4 \frac{dy}{dx} = -4 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -1$$

معادلة المماس عند النقطة B :

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - (-2) = -1(x - (-2))$$

$$\Rightarrow y + 2 = -(x + 2) \Rightarrow y + 2 = -x - 2 \Rightarrow \boxed{y = -x - 4}$$

من المعطيات تقاطع مع المحور y يعني $x = 0$:

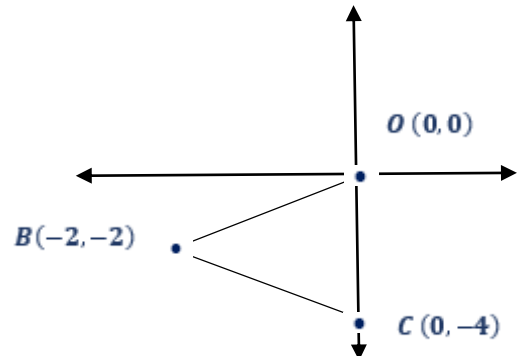
$$x = 0 \Rightarrow y = -x - 4 \Rightarrow y = -(0) - 4 \Rightarrow \boxed{y = -4}$$

النقطة C هي $(0, -4)$

مساحة المثلث OBC بوحدة المساحة هي:

$$A = \frac{1}{2} \times x \times y \Rightarrow$$

$$A = \frac{1}{2} \times |-4| \times |-2| \Rightarrow A = 4$$



(2) إذا كانت: $x = 3t^2 + 1$ ، $y = t^3 + 3t^2$ فجد $\frac{d^2y}{dx^2}$ للمعادلة الوسيطة عندما $t = 1$ (8 علامات)

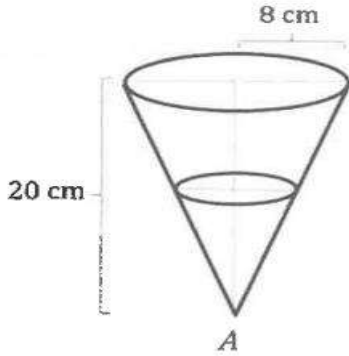
$$y = t^3 + 3t^2 \Rightarrow \frac{dy}{dt} = 3t^2 + 6t$$

$$x = 3t^2 + 1 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = 6t \Rightarrow \frac{dt}{dx} = \frac{1}{6t}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{3t^2 + 6t}{6t} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{3t(t+2)}{6t} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{t+2}{2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{2} \times \frac{dt}{dx} \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6t} \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{12t}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} \Big|_{t=1} = \frac{1}{12(1)} \Rightarrow \boxed{\frac{d^2y}{dx^2} \Big|_{t=1} = \frac{1}{12}}$$



(3) يستعمل قمع على شكل مخروط قائم، كما في الشكل المجاور، طول نصف قطر قاعدته 8 cm وعمقه 20 cm ، لصب الزيت في محرك سيارة بمعدل $35 \text{ cm}^3/\text{s}$ ، فيخرج الزيت من رأس القمع A إلى المحرك بمعدل $25 \text{ cm}^3/\text{s}$.

جد معدل التغير في ارتفاع سطح الزيت في القمع عند اللحظة

التي يصبح فيها نصف قطر سطح الزيت يساوي $\frac{1}{4}$ قطر القمع . (10 علامات)

الشكل مخروط رأسه للأسفل

نصف قطر المخروط $r_1 = 8 \text{ cm}$ ، نصف قطر سطح الزيت $r = \frac{1}{4}(8 \times 2) \Rightarrow \boxed{r = 4}$

ارتفاع المخروط $h_1 = 20 \text{ cm}$ ، ارتفاع الزيت في المخروط h .

حجم الزيت في الخزان V

التغير في حجم الماء النقص في الزيت - الزيادة في الزيت $\frac{dV}{dt}$

$$\frac{dV}{dt} = 35 - 25 \Rightarrow \frac{dV}{dt} = 10 \text{ cm}^3/\text{s}$$

المطلوب : معدل تغير ارتفاع الزيت في الخزان $\frac{dh}{dt}$

باستعمال تشابه المثلثات

$$\frac{r}{h} = \frac{r_1}{h_1} \Rightarrow \frac{r}{h} = \frac{8}{20} \Rightarrow \frac{r}{h} = \frac{2}{5} \Rightarrow 5r = 2h \Rightarrow \boxed{r = \frac{2}{5}h}$$

$$\frac{4}{h} = \frac{2}{5} \Rightarrow 2h = 20 \Rightarrow \boxed{h = 10}$$

العلاقة الرئيسية هي حجم المخروط

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \Rightarrow V = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{2h}{5}\right)^2 h \Rightarrow V = \frac{1}{3}\pi \frac{4h^2}{25} h \Rightarrow V = \frac{4\pi}{75} h^3$$

$$\frac{dV}{dt} = \left(\frac{4\pi}{75}\right) 3h^2 \frac{dh}{dt} \Rightarrow 10 = \left(\frac{4\pi}{25}\right) (10)^2 \frac{dh}{dt}$$

$$\Rightarrow 10 = (4\pi)(4) \frac{dh}{dt} \Rightarrow 10 = 16\pi \frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{10}{16\pi}$$

إذن يتزايد ارتفاع الزيت في القمع بمعدل $\frac{10}{16\pi} \text{ cm/s}$ عندما يكون ارتفاع الزيت 10 cm .

السؤال الرابع : (22 علامة)

(1) جد القيم القصوى المحلية (إن وجدت) للاقتران: $f(x) = \sqrt[3]{(x^2 - x)^2}$ (10 علامات)

(1) الخطوة الاولى: إيجاد المشتقة.

$$f(x) = \sqrt[3]{(x^2 - x)^2} \Rightarrow f(x) = (x^2 - x)^{\frac{2}{3}}$$

$$\hat{f}(x) = \frac{2}{3}(x^2 - x)^{-\frac{1}{3}}(2x - 1) \Rightarrow \hat{f}(x) = \frac{2(2x - 1)}{3\sqrt[3]{x^2 - x}}$$

2 (الخطوة الثانية: أجد قيم x التي تكون عندها مشتقة الاقتران صفراً ، أو غير موجودة.

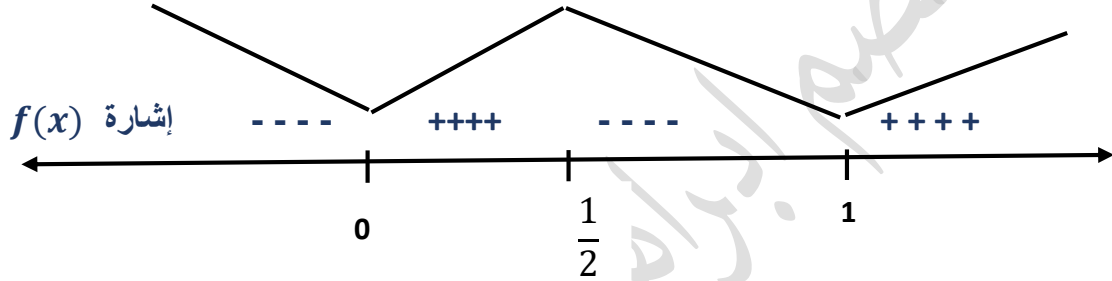
$$\hat{f}(x) = \frac{2(2x-1)}{3\sqrt[3]{x^2-x}} = 0 \Rightarrow 2(2x-1) = 0 \Rightarrow 2x-1 = 0 \Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{2}}$$

- القيم تكون عندها $\hat{f}$ غير موجودة

$$x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x-1) = 0 \Rightarrow \boxed{x=0} \Rightarrow x-1 = 0 \Rightarrow \boxed{x=1}$$

3 (الخطوة الثالثة: أبحث في إشارة المشتقة الأولى.

أختار بعض القيم التي هي أصغر من قيم x الحرجة وأكبر منها ، ثم أحدد إشارة المشتقة عند كل منها:



4 (الخطوة الرابعة : أجد القيم القصوى المحلية.

$$f(0) = \sqrt[3]{(0^2 - 0)^2} \Rightarrow \boxed{f(0) = 0}$$

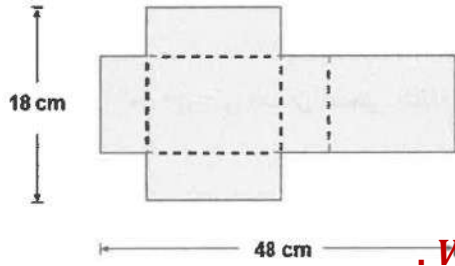
$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt[3]{\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)\right)^2} \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt[3]{\left(-\frac{1}{4}\right)^2}$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt[3]{\frac{1}{16}} \Rightarrow \boxed{f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt[3]{16}}}$$

$$f(1) = \sqrt[3]{((1)^2 - (1))^2} \Rightarrow \boxed{f(1) = 0}$$

وله قيمة صغرى محلية عند $f(0) = 0$ عند $x = 0$

وله قيمة صغرى محلية عند $f(1) = 0$ عند $x = 1$



(2) قطعة كرتون طولها 48 cm ، وعرضها 18 cm ، أزيل منها

مربعان متطابقان ومستطيلان متطابقان كما في الشكل المجاور،

بحيث أمكن طيها، وتكوين صندوق له غطاء منها.

(1) إذا علمت أن V هو حجم الصندوق الناتج، فحدد مجال الاقتران V .

(1) أكتب الاقتران $V(x)$ الذي يمثل حجم الصندوق .

الارتفاع $\times$ العرض $\times$ الطول = الحجم

$$V(x) = (24 - x)(18 - 2x)x$$

$$V(x) = (24 - x)(18x - 2x^2)$$

$$V(x) = 432x - 48x^2 - 18x^2 + 2x^3$$

$$V(x) = 2x^3 - 66x^2 + 432x$$

$$V(x) = 2x^3 - 66x^2 + 432x$$

(2) أحدد مجال الاقتران V .

حتى يتشكل لدينا صندوق، يجب أن تكون أبعاده كلها موجبة وذلك بتحقيق الشروط الثلاثة الآتية معاً:

$$x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0}$$

$$18 - 2x = 0 \Rightarrow 9 - x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 9}$$

$$24 - x = 0 \Rightarrow x = 24$$

في حال وجود قيمتين ل x نأخذ القيمة الأصغر ، لأن أي قيمة أكبر من $x = 9$ سيكون الناتج سالب ، ولا يمكن أن يكون الحجم سالب .

إذن مجال الاقتران $V(x)$ هو $0 \leq x \leq 9$

(2) جد أبعاد الصندوق بحيث يكون حجمه أكبر ما يمكن. (12 علامات)

(1) الخطوة الأولى: أجد القيم الحرجة للاقتران.

$$V(x) = 2x^3 - 66x^2 + 432x$$

$$\dot{V}(x) = 6x^2 - 132x + 432 \Rightarrow \dot{V}(x) = [6x^2 - 132x + 432] \div 6$$

$$\dot{V}(x) = x^2 - 22x + 72 \Rightarrow (x - 18)(x - 4) = 0$$

$$x - 18 = 0 \Rightarrow x = 18 \Leftrightarrow x - 4 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 4}$$

توجد قيمة حرجة واحدة في الفترة (0, 9) ، هي : $x = 4$.

(2) الخطوة الثانية : اختبار المشتقة الثانية وتعويض $x = 4$

$$\dot{V}(x) = 6x^2 - 132x + 432$$

$$\ddot{V}(x) = 12x - 132 \Rightarrow \ddot{V}(4) = 12(4) - 132$$

$$\Rightarrow 48 - 132 \Rightarrow \ddot{V}(4) = -84 < 0$$

إذن $x = 4$ قيمة عظمى .

(3) الخطوة الثالثة: أجد ابعاد الصندوق .

$$\text{الطول} = 24 - x \Rightarrow 24 - 4 = \boxed{20}$$

$$\text{العرض} = 18 - 2x \Rightarrow 18 - 2(4) \Rightarrow 18 - 8 = \boxed{10}$$

$$\text{الارتفاع} = x \Rightarrow \boxed{4}$$

السؤال الخامس: (28 علامة)

(1) اكتب العدد المركب: $z = -1 - i\sqrt{3}$ بالصورة المثلثية . (8 علامات)

$$|z| = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} \Rightarrow |z| = \sqrt{1+3} \Rightarrow |z| = \sqrt{4} \Rightarrow |z| = 2$$

يقع في الربع الثالث

$$\text{Arg}(z) = -\left(\pi - \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)\right)$$

$$\text{Arg}(z) = -\left(\pi - \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right)\right) \Rightarrow -(\pi - \tan^{-1}(\sqrt{3}))$$

$$\Rightarrow -\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow \boxed{\text{Arg}(z) = -\frac{2\pi}{3}}$$

$$z = 2\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

(2) إذا علمت أن $(2 + 4i) -$ هو أحد جذور المعادلة : $z^4 - 6z^3 + 14z^2 - 64z + 680 = 0$ ، فجد الجذور الثلاثة الأخرى لهذه المعادلة. (10 علامات)

بما أن $-2 - 4i$ هو أحد جذور المعادلة ، فإن مرافق هذا الجذر هو جذر آخر لهذه المعادلة.

الجذر الأول $-2 - 4i$

الجذر الثاني $-2 + 4i$

نقوم بإيجاد المعادلة التربيعية من الجذرين أعلاه وحسب القانون :

$$x^2 - (\text{مجموع الجذرين})x + (\text{حاصل ضرب الجذرين}) = 0$$

$$\text{مجموع الجذرين} = (-2 + 4i) + (-2 - 4i) \Rightarrow = (-2 - 2) + (4 - 4)i \Rightarrow \boxed{= -4}$$

$$\text{حاصل ضرب الجذرين} = (-2 + 4i) \times (-2 - 4i) \Rightarrow = (2)^2 + (4)^2 \Rightarrow = 4 + 16 \Rightarrow \boxed{= 20}$$

$$z^2 - (-4)z + (20) = 0 \Rightarrow \boxed{z^2 + 4z + 20 = 0}$$

نقوم بقسمة المعادلة في السؤال على المعادلة التربيعية لنجد المعادلة التربيعية الثانية :

$$\begin{array}{r} z^2 - 10z + 34 \\ \hline z^2 + 4z + 20 \quad \quad z^4 - 6z^3 + 14z^2 - 64z + 680 \\ \hline (-) z^4 + 4z^3 + 20z^2 \\ \hline -10z^3 - 6z^2 - 64z + 680 \\ (-) -10z^3 - 40z^2 - 200z \\ \hline 34z^2 + 136z + 680 \\ \hline 34z^2 + 136z + 680 \\ \hline 0 \end{array}$$

نستخدم القانون العام لحل المعادلة التربيعية الثانية لإيجاد الجذرين التربيعيين الآخرين:

$$z^2 - 10z + 34 \Rightarrow a = 1 \quad b = -10 \quad c = 34$$

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow z = \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4(1)(34)}}{2(1)}$$

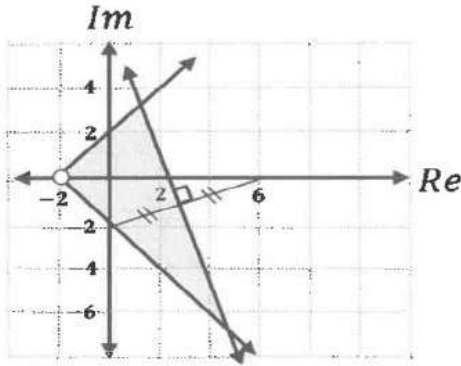
$$\Rightarrow = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 136}}{2}$$

$$\Rightarrow = \frac{10 \pm \sqrt{-36}}{2} \Rightarrow = \frac{10 \pm 6i}{2} \Rightarrow = \frac{10}{2} \pm \frac{6i}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{z_2 = 5 + 3i} \Leftrightarrow \boxed{z_3 = 5 - 3i}$$

إذن لهذه المعادلة الجذور 4 جذور هي :

$$\{z_1 = -2 - 4i, z_2 = -2 + 4i, z_3 = 5 + 3i, z_4 = 5 - 3i\}$$



(3) اكتب بدلالة z نظام متباينات للمحل الهندسي

الذي تمثله المنطقة المظللة في الشكل المجاور. (10 علامات)

هذه هي معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين $(0, -2)$ ، $(6, 0)$ ، وكونها متصل مما يدل وجود مساواة في المتباينة .

$$|z - (0 - 2i)| = |z - (6 + 0i)| \Rightarrow |z + 2i| = |z - 6|$$

$$|z - (3)| = |z - (2 + i)|$$

$$|(x - 3) + yi| = |(x - 2) + (y - 1)i|$$

$$\sqrt{(x - 3)^2 + y^2} = \sqrt{(x - 2)^2 + (y - 1)^2}$$

$$(x - 3)^2 + y^2 = (x - 2)^2 + (y - 1)^2$$

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 = x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1$$

$$2x - 2y - 4 = 0$$

$$x - y - 2 = 0$$

إذن معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة بالصيغة الديكارتية هي : $x - y - 2 = 0$