

نسخة الطالب

التفوق في

الرياضيات

الوحدة الأولى
المنهاج الجديد

* التفاضل *

(2024)

قواعد الاشتقاق

قاعدة 1

إذا كان $f(x) = c$ فإن $f'(x) = 0$

مثال: جد $f'(x)$ للاقتارات التالية

$$1. f(x) = 3 \rightarrow f'(x) = 0$$

$$2. f(x) = 1/3 \rightarrow f'(x) = 0$$

$$3. f(x) = \pi \rightarrow f'(x) = 0$$

$$4. f(x) = e \rightarrow f'(x) = 0$$

قاعدة 2

إذا كان

$$f(x) = x^n \text{ فإن } f'(x) = n x^{n-1}$$

مثال: جد $f'(-2)$ للاقتارات التالية

$$1. f(x) = x^3 \rightarrow f'(x) = 3x^2$$

$$\rightarrow f'(-2) = 12$$

$$2. f(x) = x^4 \rightarrow f'(x) = 4x^3$$

$$\rightarrow f'(-2) = -32$$

$$3. f(x) = x \rightarrow f'(x) = 1$$

$$\rightarrow f'(-2) = 1$$

قاعدة 3

إذا كان $h(x)$ اقتران قابل للاشتقاق عند x وكان

c عدد ثابت وكان $f(x) = c h(x)$ فإن

الاقتران $f(x)$ قابل للاشتقاق عند x وان

$$f'(x) = c * h'(x)$$

مثال: جد $f'(-2)$ للاقتارات التالية

$$1. f(x) = 2x^3 \rightarrow f'(x) = 6x^2 \rightarrow$$

$$f'(-2) = 24$$

$$2. f(x) = \frac{x^4}{4} \rightarrow f'(x) = x^3 \rightarrow f'(-2)$$

$$= -8$$

$$3. f(x) = x \rightarrow f'(x) = 1 \rightarrow f'(-2)$$

$$= 1$$

قاعدة 4

إذا كان كل من الاقترانيين $h(x)$ ، $L(x)$ قابلاً

للاشتقاق عند x ، وكان $f(x) = L(x) \pm h(x)$ فإن

$$f'(x) = L'(x) \pm h'(x)$$

مثال: جد $f'(x)$ للاقتار التالي

$$f(x) = x^3 - 2x + 5$$

$$\rightarrow f'(x) = 3x^2 - 2$$

قاعدة 6

$$f(x) = (h(x))^n \rightarrow f'(x) = n(h(x))^{n-1} * h'(x)$$

مثال:

اوجد $f'(x)$

$$f(x) = (5x^2 - 2x + 5)^{100}$$

الحل:

$$f'(x) = 100(5x^2 - 2x + 5)^{99} * (10x - 2)$$

ملاحظة:

يمكن استخدام القاعدة لإيجاد مشتقة أي جذر

مثال:

إذا كان $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 3}$ جد $f'(x)$

الحل:

$$f(x) = (x^2 + 2x + 3)^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} (x^2 + 2x + 3)^{-\frac{1}{2}} * (2x + 2)$$

=

$$f'(x) = \frac{2x + 2}{2\sqrt{x^2 + 2x + 3}} : x^2 + 2x + 3 > 0$$

قاعدة 5

مشتقة الجذور

مشتقة الجذر التربيعي

$$f(x) = \sqrt{h(x)}, \quad h(x) \geq 0$$

فان

$$f'(x) = \frac{h'(x)}{2\sqrt{h(x)}} \quad h(x) > 0$$

مثال:

اوجد $f'(x)$ للاقتران على مجاله

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 3}$$

الحل:

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 2x + 3}} : x^2 + 2x + 3 > 0$$

بشكل عام

إذا كان

$$f(x) = \sqrt[n]{h(x)}$$

فان

$$f'(x) = \frac{h'(x)}{n\sqrt[n]{(h(x))^{n-1}}}$$

مثال:

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 5}$$

إذا كان

$f'(x)$

الحل:

$$f'(x) = \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2 + 5)^2}}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 2$$

الاتصال

يكون $f(x)$ متصل عند $x=a$ اذا تحقق الشروط التالية

1. $f(a)$ موجودة
2. $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$
3. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

التعريف العام للمشتقة

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

2. يكون $f'(a)$ موجودة اذا كان

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

الاقتران المتشعب

$$f(x) = \begin{cases} d(x), & x < a \\ h(x), & x \geq a \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} d'(x), & x < a \\ h'(x), & x > a \end{cases}$$

الاقتران المتشعب عند نقطة $x=a$

متصل

غير متصل

غير قابل للاشتقاق
 $f'_+(a) \neq f'_-(a)$

قابل للاشتقاق

غير قابل للاشتقاق
 $f'_+(a) = f'_-(a)$

الاتصال والاشتقاق

الاتصال والاشتقاق
-الاقتران-

غير قابل للاشتقاق

قابل للاشتقاق

غير متصل

متصل

متصل

الاتصال والاشتقاق
-الاقتران-

غير متصل

متصل

غير قابل للاشتقاق

غير قابل للاشتقاق

قابل للاشتقاق

مثال :

$$f(x) = \begin{cases} 4x, & x < 4 \\ x^2, & x \geq 4 \end{cases}$$

اوجد $f'(4)$

الحل :

نظرية (1)

إذا كان $f(x)$ غير متصل عند النقطة $x=a$ ، فإنه يكون غير قابل للاشتقاق عند تلك النقطة

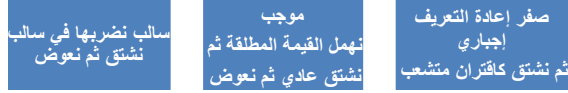
نظرية (2)

إذا كان $f(x)$ قابلاً للاشتقاق عند $x=a$ ، فإنه يكون متصلاً عند تلك النقطة

القيمة المطلقة



تعويض مباشر قبل الاشتقاق



*مثال:

إذا كان $f(x) = x/|x|$ ، أثبت أن $f'(0) = 0$

الحل:

$f(x)$ متصل على $\mathbb{R}$ لأنها قيمة مطلقة داخلها
كثير حدود مضروبه في كثير حدود

*مثال: إذا كان

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ x^2 - 2x, & x > 1 \end{cases}$$

أوجد $f'(1)$
الحل:

*مثال: إذا كان

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 2 \\ ax + b, & x > 2 \end{cases}$$

أوجد قيمة a, b اللتين تجعلان f قابلاً للاشتقاق
عند جميع قيم x الحقيقية
الحل:

قابلية الاشتقاق من الرسم

من رسمة $f(x)$ غير قابل للاشتقاق

- عند اطراف الفترة
- عند نقاط عدم الاتصال
- الرؤوس المدببة (حاد)
- المماس الراسي

ملاحظة : لايجاد المشتقة من رسمة $f(x)$

- اطراف الفترة المعرف عندها
- الاقتران غير قابلة للاشتقاق
- القمة والقاع المماس افقي المشتقة تساوي صفر
- المستقيم الافقي عند أي نقطة المشتقة تساوي صفر باستثناء الاطراف
- المسقيم المائل نأخذ أي نقطتين عليه

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

- اذا اعطي مماس عند نقطة وصنع المماس زاوية مع محور x الموجب والمماس فتكون المشتقة

$$f'(x) = \tan \theta$$

مثال :

إذا كان $f(x) = |4 - x|$ اوجد $f'(4)$

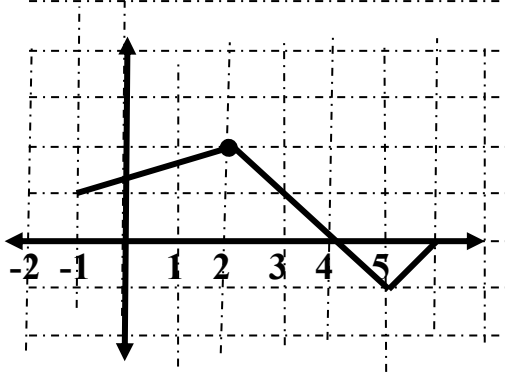
الحل :

$f(x)$ متصل عند $x = 4$

القيمة المطلقة دائما متصل اذا كان ما داخله متصل واذا كان داخله كثير حدود يكون غير قابل للاشتقاق عند اصفار القيمة المطلقة

ش 2018

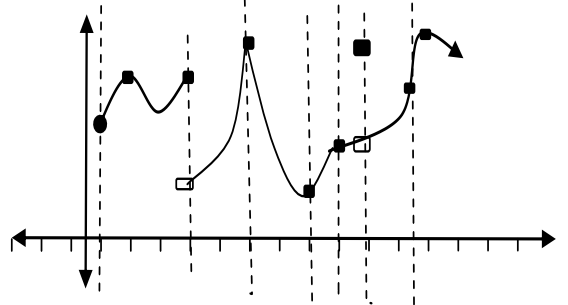
بالاعتماد على الشكل المجاور والذي يمثل منحنى
الاقتزان $f(x)$ المعرف على الفترة $[-1, 6]$ ، فإن
 $f'(0)$



- A) 0
B) D. N. E
C) $\sqrt{3}$
D) 4

مثال :

إذا كان الشكل السابق مثل منحنى الاقتزان $f(x)$
المعرف على $[1, \infty)$ جد جميع القيم في
مجال $f(x)$ والتي تكون عندها $f'(x)$ غير
موجودة

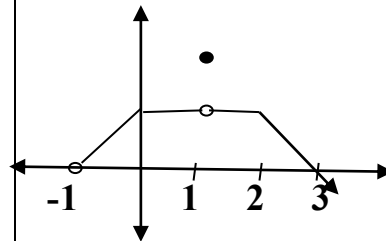


الحل $f(x)$ غير قابل للاشتقاق

- $x=1$ لأنه طرف فترة
- $x=4$ لأنه غير متصل
- $x=6$ لأنه رأس مدبب
- $x=8$ لأنها رأس مدبب
- $x=9$ لأنها رأس مدبب
- $x=10$ لأنه غير متصل رغم النهاية
موجودة
- $x=11.5$ لأنه مماس رأسي

ص 2011

إذا كان الشكل المجاور
يمثل منحنى الاقتزان
 $f(x)$ المعرف على
فان مجموعة $(-1, \infty)$



جميع القيم في مجال $f(x)$ والتي تكون عندها $f'(x)$
غير موجودة لان المشتقة من اليمين لا تساوي المشتقة
من اليسار

- A) $\{-1\}$
B) $\{0\}$
C) $\{0, 2\}$
D) $\{-1, 1\}$

مشتقة الاقترانات الدائرية

1. قاعدة دة

$$f(x) = \sin x \rightarrow f'(x) = \cos x$$

بشكل عام

$$f(x) = \sin(h(x)) \rightarrow f'(x) = \cos(h(x)) h'(x)$$

بشكل عام

$$(f(x) = \sin^n(h(x)))$$

$$\rightarrow f'(x) = n(\sin(h(x)))^{n-1} \cos(h(x)) h'(x)$$

ملاحظة : ماينطبق على $\sin x$ ينطبق على جميع الاقترانات الدائرية

ملاحظة - يا بنى

البرهان مطلوب للجميع... سنتعلمه سابقا

2. قاعدة دة

$$f(x) = \cos x \rightarrow f'(x) = -\sin x$$

3. قاعدة دة

$$f(x) = \tan x \rightarrow f'(x) = \sec^2 x$$

4. بشكل عام

$$f(x) = \cot x \rightarrow f'(x) = -\csc^2 x$$

5. قاعدة دة

$$f(x) = \sec x \rightarrow f'(x) = \sec x \tan x$$

6. قاعدة دة

$$f(x) = \csc x \rightarrow f'(x) = -\csc x \cot x$$

تمارين عام

(1)

$$f(x) = \begin{cases} 4x + 3, & x \leq -1 \\ x^2 + 1, & x > -1 \end{cases} \text{ اذا كان}$$

$$f(x) = \begin{cases} 5 - 3x^2, & x \leq -1 \\ 2x + 1, & x > -1 \end{cases}$$

وكان $L'(-1)$ اوجد $L(x) = f(x) + h(x)$

(2) اذا كان

$$f(x) = \begin{cases} (a + \sqrt{x})^2, & x \geq 9 \\ \frac{x^2}{27} + b, & x < 9 \end{cases}$$

وكان $f(x)$ قابل للاشتقاق عند $x=9$ اوجد
قيمة a, b

الحل: $a = -1, b = 1$

متطابقات مهمات

1. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
2. $\sin(-x) = -\sin x$
3. $\cos(-x) = \cos x$
4. $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$
5. $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$
 $= 2\cos^2 x - 1$
 $= \cos^2 x - \sin^2 x$
6. $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$
7. $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$
8. $\sec^2 x = \tan^2 x + 1$
9. $\csc^2 x = \cot^2 x + 1$
10. $\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$
11. $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$
12. $\sin x = \sin(\pi - x)$
13. $\sin x - \sin y = 2\cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$
14. $\cos x - \cos y = -2\sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$
15. $\sin x + \sin y = 2\sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$
16. $\cos x + \cos y = 2\cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$
17. $\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$

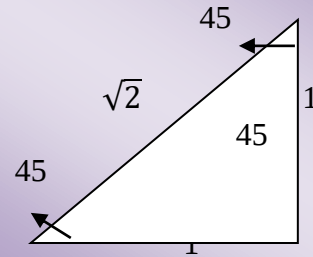
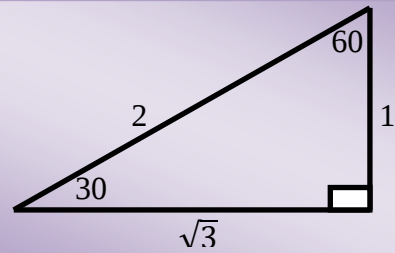
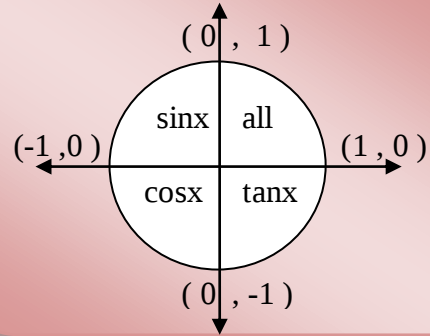
مثال:
إذا كان $f(x) = \sin(-x)$ فـ $f'(x)$ ؟

الحل:
 $f'(x) = -\cos(-x) = -\cos x$

ويمكن حله

$$f'(x) = \sin(-x) = -\sin x$$

تذكر



تذكر

1. $\sin x = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$
2. $\cos x = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$
3. $\tan x = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$
4. $\cot x = \frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}} = \frac{1}{\tan x}$
5. $\sec x = \frac{1}{\cos x}$
6. $\csc x = \frac{1}{\sin x}$
7. $\sin(-x) = -\sin x$
8. $\cos(-x) = \cos x$

مثال :

اوجد $\frac{dy}{dx}$ للاقتارات التالية

1. $y = -4\sin x + 2\cot x$
2. $y = \sin x^0$ (بالدرجات x)

الحل :

$$1. \frac{dy}{dx} = -4\cos x - 2\csc 2x$$

2. نحول الدرجات الى راد

$$y = \sin \frac{\pi}{180} x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\pi}{180} \cos \frac{\pi}{180} x$$

مثال :

اوجد $\frac{dy}{dx}$ للاقتاران

$$y = \sin^3 4x \quad \text{عندما } x = \frac{\pi}{12}$$

الحل :

$$\frac{dy}{dx} = 12\cos 4x \sin^2 4x \Big|_{\frac{\pi}{12}} = \frac{9}{2}$$

مثال :

اوجد $\frac{dy}{dx}$ للاقتاران

$$y = \sec^3 2x \quad \text{عندما } x = \frac{\pi}{6}$$

الحل :

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 6\sec 2x \tan 2x \sec^2 2x \Big|_{\frac{\pi}{6}} \\ &= 6\tan 2x \sec^3 2x \Big|_{\frac{\pi}{6}} = \end{aligned}$$

مثال :

اذا كان $f(x) = \sin^2 x$ جد $f'(x)$

الحل :

$$f'(x) = 2\sin x \cos x$$

لكن :

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x$$

$$f'(x) = 2\sin x \cos x = \sin 2x$$

مثال :

اذا كان

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & , 0 \leq x < \frac{2\pi}{3} \\ ax + b & , \frac{2\pi}{3} \leq x \leq 2\pi \end{cases}$$

قابلاً للاشتقاق عند $x = \frac{2\pi}{3}$ فجد قيم a, b

الحل :

$$b = \text{ومنها } a = \frac{-1}{2} \text{ اذن}$$

ص 2019

إذا كان $f(x) = \tan x$, $x \in (0, 2\pi)$ جد

$$f' \left(\frac{\pi}{4} \right)$$

- A) 8 B) -8 C) -2 D) 2

الحل :

$$f'(x) = \frac{-\pi \sec x \tan x}{\sec^2 x}$$

$$= \frac{-\pi \tan x}{\sec x}$$

$$f' \left(\frac{\pi}{6} \right) = \frac{-\pi \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{2}{\sqrt{3}}} = \frac{-\pi}{2}$$

مثال :

جد قيم x في الفترة $[-2\pi, 2\pi]$ التي تحقق

المعادلة $f'(x) = \text{zero}$ لكل مما يأتي.

1. $f(x) = x + \cos x$

2. $f(x) = \sec x$

الحل :

1. $f(x) = 1 - \sin x$ $(-2\pi, 2\pi)$

$$1 - \sin x = 0$$

$$\sin x = 1 \rightarrow x = -3\pi/2, \pi/2$$

2. $f(x) = \sec x \tan x$

$$\sec x \tan x = 0$$

$$\sec x \neq 0$$

$$\tan x = 0 \rightarrow \sin x = 0 \rightarrow x = -\pi, 0, \pi$$

ص 2009

إذا كان

$$y = a \sin x + b \cos x : a, b \text{ ثوابت}$$

$$(y')^2 + y^2 = a^2 + b^2$$

الحل :

ش 2007

$$y = \tan x + \frac{1}{3} \tan^3 x \text{ إذا كان}$$

$$\frac{dy}{dx} = \sec^4 x \text{ اثبت}$$

الحل :

$$\frac{dy}{dx} = \sec^2 x + \tan^2 x \sec^2 x$$

$$= \sec^2 x (1 + \tan^2 x)$$

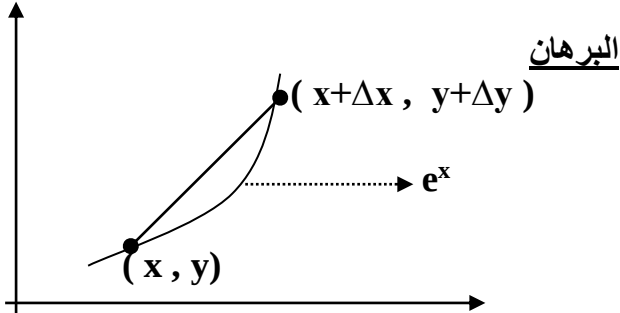
$$= \sec^2 x (\sec^2 x)$$

$$= \sec^4 x$$

الاقّة ران الأسّي

نظرية
إذا كان $y = e^x$: $e \approx 2.71$ العدد النيبيري

$$\frac{dy}{dx} = e^x$$



البرهان

تذكر

ميل المستقيم المار بالنقطتين (x_1, y_1) , (x_2, y_2)

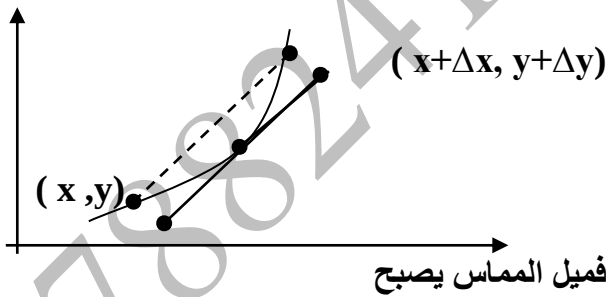
$$\frac{dy}{dx} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

فميل القاطع للاقتزان $y = e^x$ هو ميل المستقيم المار

بالنقطتين (x, y) , $(x + \Delta x, y + \Delta y)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x}$$

عندما تقترب x من $x + \Delta x$ في النهاية يصبح القاطع مماس



فميل المماس يصبح

$$m = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^x(e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} \quad \text{لكن} \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = 1$$

$$f'(x) = e^x$$

قيمتها 1 استخدم الجدول للتأكد

ش 2009

إذا كان $f(x) = \frac{1}{\sin x}$ فان $f'(x)$

- A) $\cot x \csc x$ B) $-\cot x \csc x$
C) $\sin x \cos x$ D) $-\cot x$

الحل :

$$f(x) = \frac{1}{\sin x} = \csc x$$

$$f'(x) = -\csc x \cot x$$

ص 2010

إذا كان $f(x) = \frac{1 + \sec x}{\sin x}$ فان $f'(\frac{\pi}{4})$

الحل :

بشكل عام

إذا كان $e \approx 2.71$: $y = e^{f(x)}$ العدد النيبيري

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)e^{f(x)}$$

امثلة: جد المشتقة الاولى لكل من
الاقتارات التالية

① $f(x) = 3e^x + 4x^2$

الحل:

$$f'(x) = 3e^x + 8x$$

② $f(x) = 3e^{3x+1} + 5x^{\frac{1}{2}}$

الحل:

$$f'(x) = 9e^{3x+1} + \frac{5}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = 9e^{3x+1} + \frac{5}{2\sqrt{x}}$$

③ $f(x) = 3e^{\frac{1}{x}} + 5$

الحل:

$$f'(x) = \frac{-3}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$$

$$f'(x) = 9e^{3x+1} + \frac{5}{2\sqrt{x}}$$

④ $f(x) = \frac{x e^x - x^4}{x}$

الحل:

$$= \frac{x e^x - x^4}{x} = e^x - x^3$$

$$f'(x) = e^x - 3x^2$$

⑤ $f(x) = 5e^x - \frac{1}{x^5}$

الحل:

$$f(x) = 5e^x - x^{-\frac{1}{5}}$$

$$f'(x) = 5e^x + \frac{1}{5}x^{-\frac{6}{5}}$$

$$= 5e^x + \frac{1}{5\sqrt[5]{x^6}}$$

⑥ $f(x) = e^{\sec x}$

الحل:

$$f'(x) = \sec x \tan x e^{\sec x}$$

⑦ $f(x) = \sin(e^x)$

الحل:

$$f'(x) = e^x \cos(e^x)$$

⑧ $f(x) = e^{\sin x}$

الحل:

$$f'(x) = \cos x e^{\sin x}$$

⑨ $f(x) = e^x - x^e$

الحل:

$$f'(x) = e^x - x^{e-1}$$

سؤال
 $f(x) = e^{3 \ln \sin x}$

الحل: ?????????????????????????????

الاقتران اللوغاريتمى

تذكر: $\Leftrightarrow$
 $y = \ln x \Leftrightarrow x = e^y : e \approx 2.71$
 قوانين اللوغاريتمات

- 1 $\ln 1 = 0$
- 2 $\ln e = 1$
- 3 $\ln(a * b) = \ln a + \ln b$
- 4 $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$
- 5 $\ln a^n = n \ln a$
- 6 $\ln e^{f(x)} = f(x)$
- 7 $\ln e^{f(x)} = f(x)$

ملاحظات :

- ❖ هذه القواعد صحيحة لاي اساس ليس شرط
- ❖ للاساس e
- ❖ $\ln x$ تعني لوغاريتم x الطبيعي
- ❖ اللوغاريتم الطبيعي اساسه e
- ❖ e يسمى العدد النيبيري
- ❖ قيمة e هي العدد الحقيقي التي تجعل المساحة المحصورة بين منحنى ومحور السينات والمستقيم $1/x$ هي وحدة واحدة والتي هي $e \approx 2.72$
- ❖ الاعداد الموجبة لها لوغاريتم اما السالبة والصفر ليس لها لوغاريتم

لتحويل اللوغاريتم من أي أساس إلى أي أساس e

- 1 $\log_{10} x = \frac{\ln x}{\ln 10}$
- 2 $\log_2 x = \frac{\ln x}{\ln 2}$

قاعدة :

إذا كان $y = a^{f(x)} : a > 0$ فان
 $y' = f(x) a^{f(x)} \ln a$

امثلة : جد المشتقة الاولى لكل من
 الاقترانات التالية

1 $f(x) = 4^x$

الحل:

$$f(x) = 4^x \ln 4$$

2 $f(x) = 4^{\tan x}$

الحل:

$$f'(x) = \sec^2 x 4^{\tan x} \ln 4$$

3 $f(x) = e^7$

الحل:

$$f'(x) = \text{zero}$$

4 $f(x) = 2^{3x}$

الحل:

$$f'(x) = 3 * 2^{3x} \ln 2$$

نظريية

إذا كان $y = \ln x : x > 0$ فان

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

للاستفسارات (1724)

لمزيد من الاسئلة المقترحة على كل وحدة
 صفحة الاستاذ ناصر الذينات وعلى نفس الموقع بالاضافة

وبما ان $\frac{DE}{FE}$ ميل المماس عند النقطة D للاقتران f فان

$$f'(x) = \frac{CB}{AB} = \frac{FE}{DE} = \frac{1}{\frac{DE}{FE}}$$

بما ان ميل المماس عند أي نقطة تقع على منحنى الاقتران الاسي الطبيعي هو الاحداثي y لهذه النقطة ، فهذا يعني ان ميل المماس عند النقطة D وبسبب الانعكاس فان الاحداثي y للنقطة D هو الاحداثي x للنقطة A وبذلك

$$g'(x) = \frac{CB}{AB} = \frac{FE}{DE} = \frac{1}{\frac{DE}{FE}} = \frac{1}{x}$$

بشكل عام

اذا كان $y = \ln f(x) : f(x) > 0$ فان

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

امثلة: جد المشتقة الاولى لكل من
الاقتران التالية

① $f(x) = \ln(x^2 + 3)(x^3 + 5x)^{18}$

الحل:

$$f(x) = \ln(x^2 + 3) + 18 \ln(x^3 - 5x)$$

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 3} + \frac{18(3x^2 - 5)}{x^3 - 5x}$$

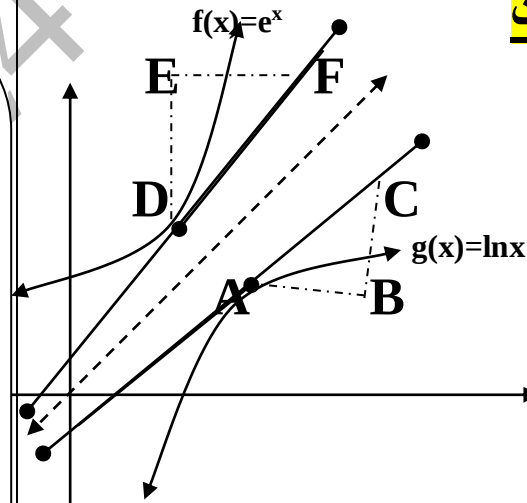
② $f(x) = \log_{10} 2x$

الحل:

$$f(x) = \log_{10} 2x = \frac{\ln 2x}{\ln 10}$$

$$f'(x) = \frac{2}{2x \ln 10}$$

الاثبات



ميل المماس عند النقطة A للاقتران $g(x)=\ln x$ هو

$$\frac{dy}{dx} = g'(x) = \frac{CB}{AB} \quad \text{اذن} \quad \frac{CB}{AB}$$

بما ان المثلث DEF هو انعكاس للمثلث ABC حول $y=x$ فانهما متطابقان لذا فان

$$\frac{CB}{AB} = \frac{FE}{DE}$$

8 $f(x) = e^{\ln(\sin 2x + \cos x)}$

الحل:

$$f(x) = \sin 2x + \cos x$$

$$f'(x) = 2\cos 2x - \sin x$$

9 $f(x) = e^7$

الحل:

$$f'(x) = \text{zero}$$

10 $f(x) = 2^{3x}$

الحل:

$$f'(x) = 3 * 2^{3x} \ln 2$$

11 $f(x) = \log_a x^3$

الحل:

$$f(x) = \frac{\ln a x^3}{\ln 10}$$

$$f'(x) = \frac{3a * x^2}{ax^3 \ln 10} = \frac{3}{x \ln 10}$$

ويمكن حله

$$f(x) = \frac{1}{\ln 10} (\ln a + 3 \ln x)$$

$$f'(x) = \frac{3}{x \ln 10}$$

3 $f(x) = \ln(x^3 + 3\cos 2x)^{\frac{1}{7}}$

الحل:

$$f(x) = \frac{1}{7} \ln(x^3 + 3\cos 2x)$$

$$f'(x) = \frac{3x^2 - 6\sin 2x}{7(x^3 + 3\cos 2x)}$$

4 $f(x) = \ln \frac{\cos^7 x}{(x^3 + 3x)^{\frac{1}{3}}}$

الحل:

$$f(x) = 7 \ln \cos x - \frac{1}{3} \ln(x^3 + 3x)$$

$$f'(x) = \frac{-7 \sin x}{\cos x} - \frac{3x^2 + 3}{3(x^3 + 3x)}$$

1 $\ln e^{f(x)} = f(x)$

2 $\ln e^{f(x)} = f(x)$

5 $f(x) = \ln e^{\cot x}$

الحل:

$$f(x) = \cot x$$

$$f'(x) = -\csc^2 x$$

6 $f(x) = \ln x^3 + e^{\tan x}$

الحل:

$$f(x) = 3 \ln x + e^{\tan x}$$

$$f'(x) = \frac{3}{x} + \sec^2 x e^{\tan x}$$

7 $f(x) = \ln e^x$

الحل:

$$f'(x) = 1$$

اسئلة وزارة

ص2008) اذا كان

$$y = ae^{2x} + \sin(\ln x) \quad a : \text{ ثابت وكان}$$

$$\frac{dy}{dx}\bigg|_{x=1} = e^3 + 1 \quad \text{اوجد قيمة } a.$$

الحل:

$$f'(x) = 2ae^{2x} + \frac{1}{x} \cos(\ln x)\bigg|_{x=1} = e^3 + 1$$

$$2ae^2 + \cos 0 = e^3 + 1 \rightarrow a = \frac{e}{2}$$

ش2010) اذا كان

$$f(x) = e^2 + \ln \cos x \quad \text{فان } f'(x)$$

$$\begin{aligned} &A) 2e - \tan x \quad \sqrt{B) - \tan x} \\ &C) \tan x + 2e \quad D) \tan x + e^2 \end{aligned}$$

ص2010) اوجد قيمة a اذا كان

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}} + a \ln \sqrt{x} \quad \text{وكان } f'(1) = e$$

الحل:

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} + \frac{a}{2\sqrt{x}}$$

$$f'(1) = -e + \frac{a}{2} = e \rightarrow a = 4e$$

ش2010) اذا كان

$$y = e^{a \cos x} + \ln \sin x$$

$$\frac{dy}{dx} = -2 \quad \text{عندما } x = \frac{\pi}{2} \quad \text{فما قيمة } a.$$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = -a \sin x e^{a \cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}\bigg|_{x=\frac{\pi}{2}}$$

$$-2 = -a(1) e^0 + 0 \rightarrow a = 2$$

ص2011) اذا كان $f(x) = \frac{e^x+1}{e^x}$ فما قيمة

$$f'(0)$$

$$A) 0 \quad \sqrt{B) 1} \quad C) 1 \quad D) D.N.E$$

ش2012) اذا كان

$$f(x) = e^{2x} + \ln(3x+1) \quad \text{فان } f'(x)$$

$$A) 4 \quad \sqrt{B) 5} \quad C) 3 \quad D) 2$$

ش2013) اذا كان

$$f(x) = e^{\sin^2 \frac{\pi}{2}} + \ln(1 - \cos 2x) \quad \text{فان } f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$A) \sqrt{e} + 2 \quad \sqrt{B) 2} \quad C) \sqrt{e} \quad D) \sqrt{2}$$

الحل:

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 + \frac{2 \sin 2x}{1 - \cos 2x}\bigg|_{x=\frac{\pi}{4}} = \frac{2}{1} = 2$$

ش2013) اذا كان

$$y = 4^{f(x)} \quad \text{وكان } f(x) \text{ قابل للاشتقاق}$$

$$y' = f'(x) 4^{f(x)} \ln 4 \quad \text{اثبت ان}$$

الحل:

$$\ln y = f(x) \ln 4$$

$$\frac{y'}{y} = f'(x) \ln 4$$

$$y' = y f'(x) \ln 4$$

$$y' = f'(x) 4^{f(x)} \ln 4$$

ص2013) اذا كان $f(x) = \ln e^{x^2+1}$

فان $f'(2)$ تساوي

$$\sqrt{A) 4} \quad B) 5 \quad C) 1 \quad D) 0$$

الحل:

$$f(x) = x^2 + 1 \rightarrow f'(x) = 2x \rightarrow$$

$$f'(2) = 4$$

تطبيقات هندسية :

معادلة المماس والعمودي عند نقطة

ميل المماس = $f'(x)$ عند نقطة التماس

معادلة المماس

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

معادلة العمودي على المماس

$$y - y_1 = -\frac{1}{m}(x - x_1)$$

- ملاحظات مهمة - يا بني
- كلمات لها معنى -

ملاحظة يمكن استخدام أي من قواعد الاشتقاق السابقة
والاحقة (الضرب والقسمة والسلسلة والضمني) لإيجاد
الميل عند نقطة التماس
ملاحظة انتبه انتبه انتبه اقرأ الملاحظة بشكل جيد

في اي سؤال يوجد فيه كلمة عند هذه تعني ان النقطة هي
نقطة تماس وهنا يكون ميل المماس = $f'(x)$ اما اذا كان في
السؤال كلمة المماس يمر او من نقطة مثل
(x, y) هذه على الاغلب تعني انها ليست نقطة تماس
فالذلك نجد نقطة التماس وذلك بفرض نقطة تماس ولتكن

ص 2013) اذا كان $f(x) = \sqrt{1+e^x}$ فما قيمة $\frac{dy}{dx}|_{x=0}$

الحل:

$$|_{x=0} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{e^x}{2\sqrt{1+e^x}}$$

تعديل ش 2013) اذا كان

$$f(x) = e^{\sin^2 \frac{\pi}{2}} + \ln(1 + \cos^2 x) \quad f'(\pi)$$

$$A) \sqrt{e} + 2 \quad B) 0 \quad C) \sqrt{e} \quad D) \sqrt{2}$$

الحل:

$$f'(\pi) = 0 + \frac{2\sin x \cos x}{1 + \cos^2 x} |_{x=\pi} = \frac{0}{1} = 0$$

ش 2017) اذا كان

$$\frac{dy}{dx}|_{x=0} \quad y = \sqrt{e^{2x} + \ln(x+1)}$$

الحل:

$$\frac{dy}{dx}|_{x=0} = \frac{2e^{2x} + \frac{1}{x+1}}{2\sqrt{e^{2x} + \ln(x+1)}} |_{x=0} =$$

مثال:

اذا كان $f(x) = 3e^{4x} + \ln(2x^2 + 1)$

: $x > -\frac{1}{2}$ ، العدد النبيري ، اوجد $f'(x)$

الحل:

$$f'(x) = 12e^{4x} + \frac{4x}{2x^2 + 1}, x > -\frac{1}{2}$$

مثال:

اذا كان $f(x) = \pi^{\pi x}$ ، اوجد $f'(x)$

الحل:

$$f'(x) = \pi(\pi)^{\pi x}$$

(x₁ , y₁) ثم نطبق القاعدة اللاحقة لنجد الاحداثي السيني

$$f'(x) = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

ثم نجد الاحداثي y ثم نجد ميل المماس بتطبيق

$$f'(x) = \text{ميل المماس}$$

كلمة العمودي يمر بالنقطة او من نقطة مثل (x , y) هذه

على الاغلب تعني انها ليست نقطة تماس فالدلك نجد نقطة

التماس وذلك بفرض نقطة تماس ولتكن (x₁ , y₁) ثم

نطبق القاعدة اللاحقة لنجد الاحداثي السيني

$$f'(x) * \frac{y - y_1}{x - x_1} = -1$$

كلمات مفتاحية

مثال :

اكتب معادلة المماس والعمودي لمنحنى الاقتران

$$f(x) = 2x^3 - 3x \text{ عند } x = 1$$

الحل :

$$f'(1) \text{ ميل المماس}$$

$$f'(x) = 6x^2 - 3$$

$$f'(1) = 6 - 3 = 3 = m$$

$$f(1) = -1 = y_1 \text{ فان } x_1 = 1$$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \text{ معادلة المماس}$$

$$y + 1 = 3(x - 1) \rightarrow y = 3x - 4$$

$$y - y_1 = -\frac{1}{m}(x - x_1) \text{ معادلة العمودي}$$

$$y + 1 = -\frac{1}{3}(x - 1) \rightarrow y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$$

*مثال :

اكتب معادلة المماس والعمودي لمنحنى الاقتران

$$f(x) = \ln \sqrt{x} \text{ عند } x = e$$

الحل :

$$f'(e) \text{ ميل المماس}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2x}$$

$$f'(e) = \frac{1}{2e} = m$$

$$f(e) = \frac{1}{2} = y_1 \text{ فان } x_1 = e$$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \text{ معادلة المماس}$$

$$y - \frac{1}{2} = \frac{1}{2e}(x - e) \rightarrow y = \frac{x}{2e}$$

$$y - y_1 = -\frac{1}{m}(x - x_1) \text{ معادلة العمودي}$$

$$y - \frac{1}{2} = -2e(x - e) \rightarrow y = -2ex + 2e^2 +$$

1. ميل المماس عند نقطة هي المشتقة الأولى عند تلك النقطة

2. ميل المماس = $\tan \theta$ التي يعينها المماس مع محور x الموجب

3. المستقيمان متوازيان... ميل الاول = ميل الثاني

4. المستقيمان متعامدان.. ميل الاول = ميل الثاني -1

5. المماس أفقي المشتقة = صفر

6. المماس يوازي محور x المشتقة = صفر

7. العمودي موازي لمحور y فان المماس موازي لمحور x أي المماس أفقي

8. الاقترانين متقاطعين.. الاقتران الاول = الاقتران الثاني

9. الاقتران f(x) يمر h(x)

(أ) مشتقة الاول = مشتقة الثاني

(ب) الاقتران الاول = الاقتران الثاني

10. إذا كان f(x) يقطع محور x عند x=a فان f(a)=0 (يعني جذر)

11. نقطة تقاطع الاقتران مع المحور x او المقطع x لمنحنى الاقتران يعني y=0

12. نقطة تقاطع الاقتران مع المحور y او المقطع y لمنحنى الاقتران يعني x=0

مثال :

إذا كان المماس لمنحنى الاقتران

$$f(x) = x^2 + 5x \text{ عندما } x = x_1 \text{ يصنع}$$

مع محور x الموجب زاوية قياسها 45° فجد

احداثيات نقطة التماس

الحل :

$$f'(x) = \tan \theta$$

$$\tan \frac{\pi}{4} = 2x_1 + 5$$

$$x_1 = -2 \text{ ومنها } 1 = 2x_1 + 5$$

عند $x_1 = -2$ فان

$$f(-2) = -6 = y_1$$

نقطة التماس (-2 , -6)

***مثال :**

اثبت ان مماس منحنى الاقتران منحنى

$$f(x) = \ln x \text{ عند النقطة } (e, 1)$$

يمر بنقطة الاصل

الحل :

$$f'(e) \text{ ميل المماس}$$

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$f'(e) = \frac{1}{e} = m$$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \text{ معادلة المماس}$$

$$y - 1 = \frac{1}{e}(x - e) \rightarrow y = \frac{x}{e}$$

عندما $x = 0$ فان $y = 0$ يعني يمر بالنقطة

(0 , 0) بنقطة الاصل

***مثال :**

اكتب معادلة المماس والعمودي لمنحنى الاقتران

$$f(x) = \sin x + \frac{1}{2}e^x \text{ عندما } (\pi, \frac{1}{2}e^\pi)$$

الحل :

$$f'(\pi) \text{ ميل المماس}$$

$$f'(x) = \cos x + \frac{1}{2}e^x$$

$$f'(\pi) = \cos \pi + \frac{1}{2}e^\pi = m = -1 + \frac{1}{2}e^\pi$$

معادلة المماس

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - \frac{1}{2}e^\pi = (\frac{1}{2}e^\pi - 1)(x - \pi)$$

معادلة العمودي على المماس

$$y - y_1 = \frac{-1}{m}(x - x_1)$$

$$y - \frac{1}{2}e^\pi = \frac{-1}{\frac{1}{2}e^\pi - 1}(x - \pi)$$

***مثال :**

اثبت ان المقطع x للعمودي على المماس

لمنحنى الاقتران $f(x) = \ln x$ عند النقطة

$$(e, 1) \text{ هو } e + \frac{1}{e}$$

الحل :

$$f'(e) \text{ ميل المماس}$$

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$f'(e) = \frac{1}{e} = m$$

معادلة العمودي على المماس

$$y - y_1 = \frac{-1}{m}(x - x_1)$$

$$y - 1 = -e(x - e) \rightarrow y = ex + 1 + e^2$$

عندما $y = 0$ فان $x = 0$

$$0 = -ex + 1 + e^2 \rightarrow x = \frac{1 + e^2}{e} = e + \frac{1}{e}$$

مثال:

جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران
 $y = \sin x + \cos x$ عند النقطة $(\pi, -1)$

الحل:

$$y' = \cos x - \sin x$$

$$y' = m_{x=\pi} = -1 - 0 = -1$$

معادلة المماس

$$y + 1 = -1(x - \pi)$$

$$y = -x + \pi - 1$$

مثال*:

إذا كان $y = e^x - ax$ حيث a عدد حقيقي ،
 اوجد معادلة المماس عند نقطة تقاطع الاقتران مع
 المحور y

الحل:

عند نقطة تقاطع الاقتران مع المحور y تكون

$$x=0 \text{ ومنها } y=1$$

$$f'(0) \text{ ميل المماس}$$

$$f'(x) = e^x - a$$

$$f'(0) = 1 - a = m$$

معادلة المماس

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 1 = (1 + a)x \rightarrow y = ax + x + 1$$

مثال:

جد النقط التي يكون عندها المماس لمنحنى

الاقتران $f(x) = x^3 - 2x + 5$ ، يعامد

المستقيم $h(x) = x + 1$

الحل:

$$f'(x) \cdot h'(x) = -1$$

$$(3x^2 - 2)(1) = -1$$

$$3x^2 = 1 \rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

النقاط

$$\left(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{\sqrt{3}} + 1\right)$$

مثال:

جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران

$f(x) = x^3 + x$ عند النقطة التي يكون

ميل المماس عندها يساوي 4

الحل:

$$f'(x) = 3x^2 + 1$$

$$3x^2 + 1 = 4$$

$$3x^2 = 3 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1$$

عندما $x = 1$ فان $f(1) = 2$

$$y - 2 = 4(x - 1) \rightarrow y = 4x - 2$$

عندما $x = -1$ فان $f(-1) = -2$

$$y + 2 = 4(x + 1) \rightarrow y = 4x + 2$$

***مثال:**

إذا كان $y = ke^x$ حيث $k > 0$ وكان منحناه يقطع المحور y عند النقطة P ،

1 أوجد نقطة تقاطع مماس منحنى الاقتران عند النقطة P مع المحور x

2 إذا كان العمودي على المماس عند النقطة P يقطع المحور x عند النقطة $(100,0)$ فابعد قيمة k

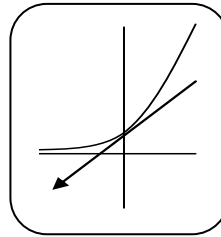
الحل:

ميل المماس $y' =$ عند نقطة التماس

$$y' = ke^x$$

يقطع المحور y عند النقطة p

$$p(0, k)$$



$$y'|_{x=0} = ke^0 = k$$

معادلة المماس

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

1 $y - k = k(x - 0) \rightarrow y = kx + k$ يتقاطع مع المحور x عندما $y=0$ ومنها $x=-1$ ومنها $0 = k(x+1)$

2 معادلة العمودي

$$y - y_1 = \frac{-1}{m}(x - x_1)$$

$y - k = \frac{-1}{k}(x - 0) \rightarrow y = \frac{-1}{k}x + k$ العمودي يقطع المحور x عند النقطة $(100,0)$

$$y = \frac{-1}{k}x + k \rightarrow 0 = \frac{-100}{k} + k$$

$$k = \frac{100}{k} \rightarrow k^2 = 100 \rightarrow k = \pm 10$$

10- مرفوضة لان $k > 0$ ومنها $k = 10$

***مثال:**

إذا كان $f(x) = 2e^x + 3x + 5x^3$ ، اثبت عدم وجود مماس ميله يساوي 2

الحل:

ميل المماس $f'(x)$

$$f'(x) = 15x^2 + 2e^x + 3$$

بما ان

$$e^x > 0, \quad 15x^2 > 0$$

فان

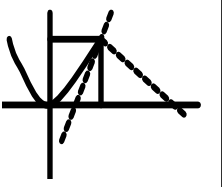
$$15x^2 + 2e^x + 3 \neq 2$$

***مثال:**

أوجد مساحة المثلث الذي يتكون من المماس والعمودي لمنحنى الاقتران $f(x) = x^2$ عند النقطة $(2, 4)$ مع محور السينات.

الحل:

النقطة $(2, 4)$ نقطة تماس
ميل المماس $f'(2)$



$$f'(x) = 2x \rightarrow f'(2) = 4$$

معادلة المماس

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 4 = 4(x - 2) \rightarrow y = 4x - 4$$

عندما $y=0$ فان $x=1$

معادلة العمودي على المماس

$$y - y_1 = \frac{-1}{m}(x - x_1)$$

$$y - 4 = \frac{-1}{4}(x - 2) \rightarrow y = \frac{-1}{4}x + \frac{9}{2}$$

عندما $y=0$ فان $x=18$

الارتفاع = 4 ، طول القاعدة = 18-1 = 17

$$A_{\Delta} = \frac{1}{2} * 17 * 4 = 34$$

مثال :

جد معادلة المماس لمنحنى $y = \frac{1}{x}$ ، $x > 0$ ،
والذي يمر بالنقطة (0 ، 1)

الحل :

(0 ، 1) ليست نقطة تماس ..

نفرض نقطة تماس (x , y)

$$y' = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

$$\frac{-1}{x^2} = \frac{\frac{1}{x} - 1}{x - 0}$$

$$-x = x - x^2 \rightarrow x^2 - 2x = 0$$

ومنها $x = 2$ او $x = 0$ مرفوضة why

عند $x = 2$ فان $y = \frac{1}{2}$

اصبحت نقطة التماس هي (2 , $\frac{1}{2}$)

$$m = y' = \frac{-1}{x^2} \Big|_{x=2} = \frac{-1}{4}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 1 = \frac{-1}{4}(x - 0)$$

$$\rightarrow y = \frac{-1}{4}x + 1$$

مثال :

إذا كان المماس لمنحنى $f(x) = ax^2 - 9$
يوازي المستقيم $h(x) = x + 3$ عندما $x=1$
فان قيمة a تساوي

√A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{-1}{2}$ C) 1 D) 2

الحل :

المماسين متوازيين $f'(1) = h'(1)$

$$2ax \Big|_{x=1} = 1$$

$$2a = 1 \rightarrow a = \frac{1}{2}$$

مثال :

جد نقاط تعامد مماسي منحنىي الاقترانيين

$$f(x) = x^2, h(x) = x^2 + 2x + 1$$

الحل :

المماسين متعامدين $f'(x) \times h'(x) = -1$

$$2x(2x + 2) = -1$$

$$4x^2 + 4x + 1 = 0 \rightarrow (2x + 1)^2 = 0$$

$$\rightarrow x = \frac{-1}{2}$$

فنقطة تعامد مماسي منحنىي الاقترانيين f , h

$$\left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{4} \right)$$

مثال :

إذا كان المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ مماساً
أفقياً عند النقطة (3 ، 1) اوجد معادلة المماس
والعمودي على المماس عند تلك النقطة

الحل :

معادلة المماس $y=3$ why
معادلة العمودي $x=1$ why

مثال :

اوجد معادلة المماس المرسوم لمنحنى الاقتران

$$f(x) = 2x + \sin x \text{ عند النقطة } (\pi, 2\pi)$$

الحل :

عند النقطة (π , 2π)

$$m = f'(\pi) = 2 + \cos x \Big|_{x=\pi} = 1$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 2\pi = 1(x - \pi) \rightarrow y = x + \pi$$

***مثال:**

اوجد قيمة x التي يكون عندها المماس افقي

$$f(x) = e^x - 2x$$

الحل:

$$f'(x) = 0 \text{ المماس افقي}$$

$$f'(x) = e^x - 2 = 0 \rightarrow e^x = 2$$

$$\ln e^x = \ln 2 \rightarrow x = \ln 2$$

مثال:

اذا كان $y = \sec x$ فبين ان لمنحنى $f(x)$ عند

$x=0$ مماساً يوازي محور السينات

الحل: المطلوب ميل مماس y يساوي ميل محور x

؟؟

ميل مماس محور x يساوي 0

ميل مماس $y = \sec x$ هو

$$y' = \sec x \tan x|_{x=0} = \frac{0}{1} = 0$$

اذن ميل مماس y عند $x=0$ يساوي ميل محور x عند تلك النقطة

مثال:

اذا كان المستقيم $y=3x-1$ مماساً لمنحنى
الاقتزان $f(x)$ عند النقطة $(2, 5)$ اوجد

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - 5}{h}$$

الحل:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - 5}{h} = f'(2) = m = y' = 3$$

ص 2010

جد معادلة المماس والعمودي على المماس لمنحنى

$$f(x) = x^2 + |x - 4|$$

عندما $x=3$.

الحل:

***مثال:**

اوجد معادلة المماس المرسوم لمنحنى الاقتزان

$$f(x) = \cos x + \sin x$$

π

الحل:

$$f(\pi) = \cos \pi + \sin \pi = -1$$

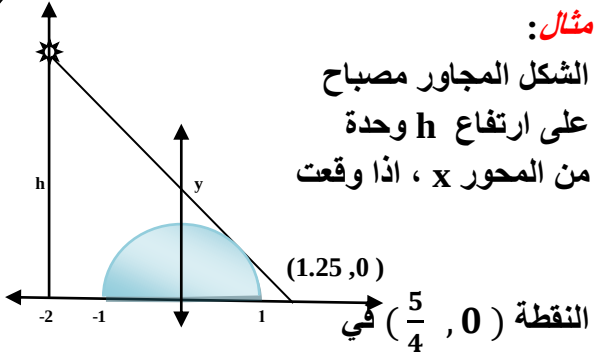
$$f'(x) = -\sin x + \cos x$$

$$m = f'(\pi) = -1 \text{ ميل المماس}$$

معادلة المماس

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y + 1 = -1(x - \pi) \rightarrow y = -x + \pi - 1$$



نهاية الشعاع الصادر
من المصباح ، الذي يمس منحنى العلاقة :
 $x^2 + y^2 = 1$ فجد ارتفاع المصباح h
الحل:

ش2013) اوجد مساحة المثلث القائم الزاوية
الذي يتكون من المماس المرسوم لمنحنى
العلاقة $y = \sqrt{x} : x > 0$ عند النقطة
 $(4, 2)$ ومحور السينات والمستقيم $x=4$.
الحل:

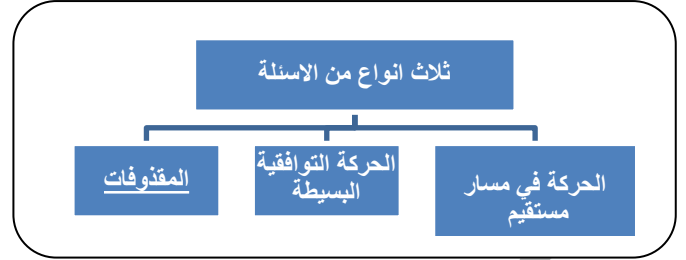
$$\text{مساحة } \Delta = \frac{1}{2} \times \text{القاعدة} \times \text{الارتفاع}$$

$$8 = 4 - 4 = \text{طول القاعدة}$$

$$y=2 \text{ الارتفاع}$$

$$\text{مساحة } \Delta = \frac{1}{2} \times 8 \times 2$$

تطبيقات فيزيائية



• السرعة = $\frac{\text{المسافة}}{\text{الزمن}}$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s(t)}{\Delta t} = s'(t) = v(t)$$

وفي هذه الحالة تسمى السرعة اللحظية

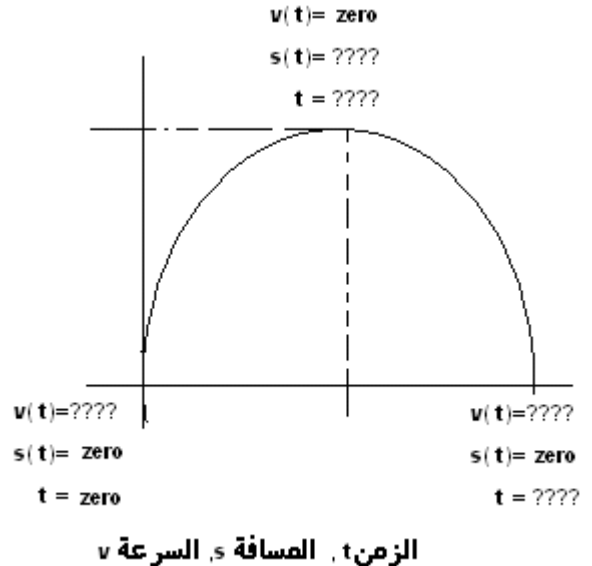
$$v(t) = s'(t)$$

واذا كان $s(t)$ قابلاً للاشتقاق في t

$$v'(t) = s''(t) = a(t) \quad \text{فان}$$

يسمى تسارع الجسيم في اللحظة t

المقذوفات



ملاحظات

- 1) اذا كان مقذوف من اعلى بناية نضيف للعلاقة ارتفاع البناية اذا كانت غير مضافة
- 2) اذا كان المقذوف من عمق نطرح مقدار العمق اذا كانت غير مطروحة
- 3) زمن الصعود = $\frac{1}{2}$ (الزمن الذي يستغرقه الجسم حتى يعود الى سطح الارض)
- 4) اقصى ارتفاع $s(t)|_{v=0}$
- 5) زمن الصعود = زمن الهبوط
- 6) السرعة نازل سالب صاعد موجب
- 7) هناك فرق بين السرعة اللحظية والسرعة المتوسطة, والسرعة المتجهة كما هو وارد في بداية التعريف وكذلك التسارع
- 8) عندما يكون $s(t)$ سالب يكون موقعها يسار

مثال:

يتحرك جسيم على خط مسقيم وفق المعادلة

$$S(t) = t^3 - 3t^2 + 4$$

s : المسافة بالامتار ، t الزمن بالثواني
اوجد

1. سرعة و تسارع الجسيم عندما $t=3$
2. الفترة الزمنية التي تكون فيها سرعة الجسيم سالبة
3. جد قيمة t عندما يكون الجسم في حالة سكون لحظي
4. في أي اتجاه يتحرك الجسم عندما $t = 5$
5. متى يعود الجسم الى موقعه الاصلي

الحل :

$$v(t) = 3t^2 - 6t$$

$$a(t) = 6t - 6$$

$$1. v(t) = v(3) = 3(9) - 6(3) = 9m/s$$

$$a(3) = 6(3) - 6 = 12m/s^2$$

$$2. v(t) = 0$$

$$3t^2 - 6t = 0 \rightarrow t(3t - 6) = 0 \rightarrow t = 0, t = 2$$

مثال:

يتحرك جسيم على خط مسقيم وفق المعادلة

$$S(t) = 1 - \cos t, t \in [0, 2\pi]$$

المسافة بالامتار ، t الزمن بالثواني

اوجد

1. سرعة و تسارع الجسيم بعد t
2. الفترة الزمنية التي تكون فيها سرعة الجسيم سالبة
3. جد قيمة t عندما يكون الجسم في حالة سكون لحظي لأول مرة
4. في أي اتجاه يتحرك الجسم عندما $t = \frac{\pi}{3}$
5. متى يعود الجسم الى موقعه الاصلي اول مرة بعد الحركة
6. جد موقع الجسم عندما يصل الى اقصى سرعة.

الحل :

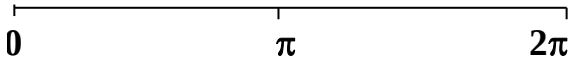
$$1. v(t) = \sin t, t \in (0, 2\pi)$$

$$a(t) = \cos t, t \in (0, 2\pi)$$

$$2. v(t) = 0 \rightarrow \sin t = 0$$

$$\rightarrow t = 0, \pi, 2\pi$$

+++++-----



السرعة $v(t)$ سالبة بالفترة $(\pi, 2\pi)$

3. يكون في حالة سكون لحظي عندما يتغير

اشارة السرعة $t = \pi$

$$4. v\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = +$$

يتحرك باتجاه اليمين

$$5. s(t) = s(0) \rightarrow 1 - \cos t = 0$$

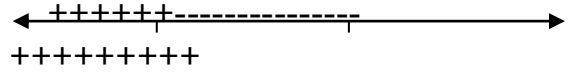
$$\rightarrow \cos t = 1 \rightarrow t = 0, 2\pi$$

مرفوضة . لماذا ؟ $t = 0$

6.

يصل الى اقصى سرعة عندما يكون التسارع صفر

$$a(t) = 0 \rightarrow t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$



السرعة سالبة بالفترة $(0, 2)$

$$3. t = 0, t = 2$$

$$4. v(5) = 3(5)^2 - 6(5) = 75 - 30 = 45m/s$$

يتحرك باتجاه اليمين

$$5. s(t) = s(0) \rightarrow s(0) = 4$$

$$t^3 - 3t^2 = 0 \rightarrow t^2(t - 3) = 0$$

$$t = 0, t = 3$$

حتى يعود الجسم الى موقعه الاصلي عندما

مثال:

يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث ان بعده

عن نقطة الاصل بالامتار بعد t ثانية يساوي

$$s(t) = \frac{1}{3}t^3 - 2t^2 + 3t + 5$$

s : المسافة بالامتار ، t الزمن بالثواني

اوجد بعد الجسيم عن نقطة الاصل وسرعته

عندما ينعدم تسارعه .

الحل :

$$v(t) = s'(t) = t^2 - 4t$$

$$a(t) = v'(t) = 2t - 4$$

عندما ينعدم التسارع

$$a(t) = 0 \rightarrow 2t - 4 = 0 \rightarrow t = 2$$

$$s(2) = \frac{1}{3}(2)^3 - 2(2)^2 + 3(2) + 5$$

$$s(2) = \frac{8}{3} - 8 + 6 + 5 = \frac{17}{3} m$$

مثال:

يتحرك جسيم في خط مستقيم طبقاً للمعادلة

$$s(t) = e^t - 4t : t \geq 0$$

المسافة بالامتار ، t الزمن بالثواني

اوجد الموقع الابتدائي للجسيم ثم تسارع

الجسيم في اللحظة التي تنعدم فيها السرعة

الحل :

$$v(t) = e^t - 4$$

$$a(t) = e^t$$

الموقع الابتدائي

$$s(0) = e^0 - 4(0) = 1$$

عندما ينعدم السرعة $v(t)=0$ ومنها

$$e^t - 4 = 0 \rightarrow e^t = 4 \rightarrow t = \ln 4$$

التسارع عندما ينعدم السرعة

$$a(\ln 4) = e^{\ln 4} = 4 \text{ m/s}^2$$

ص2008

يتحرك جسيم على خط مسقيم وفق لمعادلة

$$S(t) = 2t^3 - 3t^2 + 12$$

s : المسافة بالامتار ، t الزمن بالثواني اوجد

1. تسارع الجسيم عندما تنعدم السرعة

2. الفترة الزمنية التي تكون فيها سرعة

الجسيم سالبة

الحل : 6 m/s^2 , $(0, 1)$, ؟؟؟؟

ش2013

يتحرك جسيم على خط الاعداد وفق المعادلة

$$s(t) = t^2 - 7t - 8 : t \geq 0$$

s المسافة بالامتار ، t الزمن بالثواني

1. جد سرعة الجسيم وتسارعه عندما $t = 4$.

2. جد قيم t التي يكون عندها الجسيم في حالة

سكون لحظي

3. في أي اتجاه يتحرك الجسيم عندما $t = 2$

4. متى يعود الجسيم الى موقعه الابتدائي

مثال

يتحرك جسيم في خط مستقيم طبقاً للمعادلة
 $S(t) = 2t^3 - 17t^2 + 44t + 10$
 s : المسافة بالامتار ، t الزمن بالثواني
 جد السرعة والتسارع عندما $s(t) = 46m$
 الحل :

عندما $s(t) = 46m$

$$2t^3 - 17t^2 + 44t + 10 = 46$$

$$2t^3 - 17t^2 + 44t - 36 = 0$$

تحلل بالقسمة التركيبية

$$(t - 2)(2t^2 - 13t + 18) = 0$$

$$(t - 2)(2t - 9)(t - 2) = 0 \rightarrow$$

$$t = 4\frac{1}{2}, 2$$

السرعة

$$v(t) = s'(t) = 6t^2 - 34t + 44$$

$$v(2) = 24 - 68 + 44$$

$$v(4.5) = 6(4.5)^2 - 34(4.5) + 44$$

التسارع

$$a(t) = 12t - 34$$

$$a(2) = 24 - 34$$

$$a(4.5) = 12(4.5) - 34$$

مثال:

يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث أن
 المسافة $s(t) = 6t^2 - t^3$
 فما المسافة التي يقطعها الجسيم حتى يصبح
 تسارعه صفر ؟

$$\sqrt{A) 16 \quad B) 24 \quad C) 12 \quad D) 32}$$

الحل :

السرعة

$$v(t) = s'(t) = 12t - 3t^2$$

التسارع

$$a(t) = v'(t) = 12 - 6t$$

$$12 - 6t = 0 \rightarrow t = 2$$

$$s(t) = 6t^2 - t^3$$

$$s(2) = 24 - 8 = 16$$

(ص 2014)

يتحرك جسيم حسب العلاقة

$$s(t) = \frac{1}{4}(t + 2)^4 - 6t^2$$

v : السرعة ، s : المسافة ، يتحرك جسيم في
 خط مستقيم طبقاً للمعادلة اوجد تسارع
 الجسيم عندما تكون سرعته 89 م / ث
 الحل :

$$v(t) = s'(t) = (t + 2)^3 - 12t$$

$$v(t) = 89 \rightarrow (t + 2)^3 - 12t = 89$$

$$(t + 2)^3 - 12t - 89 = 0$$

$$t^3 - 6t^2 - 81 = 0$$

بالقسمة التركيبية

$$(t - 3)(t^2 + 9t + 27) = 0$$

ومنها $t = 3$ فقط لان الجزء الاخر لا يحلل
 ؟؟؟؟

$$a(t) = v'(t) = 3(t + 2)^2 - 12$$

$$a(3) = 3(3 + 2)^2 - 12 = 63m/s^2$$

(ص 2016)

يتحرك جسيم حسب العلاقة

$$S(t) = 2\sin^2\left(\frac{1}{2}t\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}t : t \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

حيث S المسافة بالامتار ، t الزمن بالثواني جد تسارع الجسيم عندما تكون سرعته $m/t\sqrt{3}$

الحل :

$$V(t) = 2\sin\left(\frac{1}{2}t\right)\cos\left(\frac{1}{2}t\right) + \frac{3}{2}$$

$$V(t) = \sin t + \frac{3}{2} = \sqrt{3}$$

$$\sin t = \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \sin t = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow t = \frac{\pi}{3}$$

$$a(t) = v'(t) = \cos t$$

$$a\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos t\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} m/s^2$$

مثال

يتحرك جسيم في خط مستقيم طبقاً للمعادلة

$$S(t) = t^3 - 7t^2 + 9t + 1$$

s : المسافة بالامتار ، t الزمن بالثواني
اوجد تسارع الجسيم عندما تكون سرعته

$1m/s$

الحل :
السرعة

$$v(t) = s'(t) = 3t^2 - 14t + 9$$

عندما تكون سرعته $1m/s$

$$3t^2 - 7t + 9 = 1$$

$$\rightarrow 3t^2 - 14t + 8 = 0$$

$$t = \text{????}$$

التسارع

$$a(t) = v'(t) = 6t - 14$$

$$a(\text{???}) = \text{????}$$

مثال

قذف جسم رأسياً الى الأعلى من سطح الأرض حسب العلاقة

$$S(t) = 4.9t^2 - 24.5t : t \geq 0$$

1. الزمن اللازم بالثواني حتى يعود الجسم الى سطح الأرض

2. السرعة التي قذف بها

3. اللحظة التي يكون عندها سرعة الجسم $14.7m/s$

4. تسارع الجسم في كل لحظة.

الحل :

1. يعود الجسم على سطح الأرض $s(t)=0$

$$t(4.9t-24.5)=0 \text{ ومنها } t=0, t=5 \text{ مرفوضة } \chi$$

2. السرعة التي قذف بها $v(0)=\text{????}$

$$v(t)=9.8t-24.5$$

$$v(0)=9.8(0)-24.5=24.5$$

$$t|_{v(t)=14.7}=\text{????} \quad 3.$$

$$9.8t-24.5=14.7 \rightarrow t=4$$

$$a(t)=v'(t)=9.8m/s^2 \quad 4.$$

مثال :

يتحرك جسيم في خط مستقيم طبقاً للمعادلة

$$S(t) = t^3 - 3t^2 + 3t + 3$$

s : المسافة بالامتار ، t الزمن بالثواني

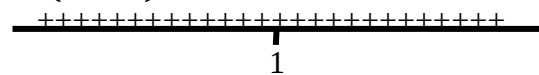
اثبت ان الجسيم يتوقف مرة واحدة دون ان يغير من اتجاه حركته

الحل :

يتوقف الجسم عندما $v(t)=0$

$$v(t) = 3t^2 - 6t + 3 = 0$$

$$(t-1)^2 = 0 \rightarrow t = 1$$



بما ان السرعة حافظة على اشارتها

اذن الجسم لا يغير اتجاه حركته

مثال

قذفت كرة رأسياً الى أعلى من قمة برج ارتفاعه 160 قدماً
إذا كانت المسافة المقطوعة تتعين حسب العلاقة

$$S(t) = -16t^2 + 48t + 160 : t \geq 0$$

: ف المسافة بالاقدام ، ن الزمن بالثواني اوجد

1. اقصى ارتفاع تصل اليه الكرة
2. سرعة الكرة لحظة اصطدامها بالارض

الحل:

$$v(t) = -32t + 48$$

$$1. s(t)|_{v(t)=0} \dots v(t) = 0 \rightarrow t = 1.5$$

$$S(1.5) = -16(1.5)^2 + 48(1.5) + 160 = 196m$$

$$2. v(t)|_{s(t)=0} \dots s(t) = 0$$

$$\rightarrow t^2 - 3t - 10 = 0$$

$$(t - 5)(t + 2) = 0 \rightarrow t = 5$$

$$v(5) = -32(5) + 48 = -112m/s$$

مثال:

يتحرك جسيم حسب العلاقة

$$S(t) = \sin 5t + \cos 5t$$

اثبت ان $a(t) + 25s(t) = 0$
الحل:

$$v(t) = S(t) = 5\cos 5t - 5\sin 5t$$

$$a(t) = v(t) = -25\sin 5t - 25\cos 5t$$

$$a(t) = -25(\sin 5t + \cos 5t)$$

$$a(t) + 25s(t) = 0$$

مثال:

. قذف جسم رأسياً الى الأعلى من سطح الأرض
حسب العلاقة $s(t) = 36t - 8t^2$ ، ما
الزمن اللازم بالثواني الذي يحتاجه الجسم وهو
صاعد حتى تبلغ سرعته ثلث السرعة التي قذف
بها ؟

مثال

اسقط جسم من ارتفاع (100) م عن سطح الارض : ف
المسافة بالامتار ، ن الزمن بالثواني حسب العلاقة
 $s_1(t) = 5t^2$ وفي نفس الوقت اطلق جسم من سطح
الارض للأعلى حيث المسافة التي يقطعها الجسم هي
 $s_2(t) = 50t - 5t^2$ جد سرعة كل من الجسمين
عندما يكون لهما الارتفاع نفسه عن سطح الارض
الحل :

$$s_1(t) + s_2(t) = 100$$

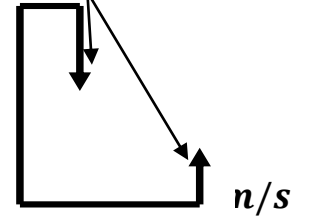
$$5t^2 + 50t - 5t^2 = 100$$

$$50t = 100 \rightarrow t = 2$$

$$v_1(t) = 10t \rightarrow$$

$$v_2(t) = 50 - 10t$$

$$\rightarrow v_2(t) = 50 - 20 = 30m/s$$



تطبيقات الحركة التوافقية البسيطة

مثال :

يتحرك جسم معلق بزنبرك ، للاعلى وللأسفل
ويمثل الاقتران $s(t) = 7\sin t$ موقع
الجسم عند أي زمن لاحق ، حيث t الزمن
بالثواني ، و s الموقع بالسنتيمترات . اوجد
1. السرعة المتجه وتسارعه عند أي لحظة
2. صف حركة الجسم

يتحرك جسم معلق بزنبرك ، شد 5 وحدات
اسفل الاتزان $s = 0$ ثم ترك عند الزمن $t = 0$
ليتحرك الى الاعلى والى الاسفل ، ويمثل الاقتران
 $s(t) = 5\cos t$ موقع الجسم عند أي زمن
لاحق ، حيث t الزمن بالثواني ، s الموقع
بالسنتيمترات . اوجد
1. السرعة المتجه وتسارعه عند أي لحظة
2. صف حركة الجسم

الحل :

1.

السرعة المتجهه

$$v(t) = s'(t) = -5\sin t$$

التسارع

$$a(t) = v'(t) = -5\cos t$$

2.

- $-5 \leq s(t) \leq 5$ - القيمة السالبة فوق
موقع الاتزان
- السرعة المتجهه يكون اكبر ما يمكن في
الاتجاه الموجب والاتجاه السالب عندما
يمر في موقع الاتزان وهنا يكون
 $s(t) = 0 \rightarrow \cos t = 0 \rightarrow t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

$$v\left(\frac{\pi}{2}\right) = -5\sin\frac{\pi}{2} = -5$$

$$v\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -5\sin\frac{3\pi}{2} = 5$$

- التسارع معكوس موقع قيمة موقع الجسم
 $s(t)$, $v(t)=0$ يكون اكبر تسارع
...السبب.. محصلة القوى تسحب الجسم
الى الاسفل اذا كان اعلى موقع الاتزان
و.. محصلة القوى تسحب الجسم الى
الاعلى اذا كان اسفل موقع الاتزان
- التسارع يكون صفر عند موقع الاتزان
...السبب.. لان قوة الجاذبية وقوة
الزنبرك تلغي بعض

قواعد الاشتقاق

مشتقة الضرب

قاعدة

إذا كان كل من الاقترانين $f(x)$ ، $g(x)$ قابلا للاشتقاق عند x ، وكان $A(x) = f(x) \times g(x)$ ، فإن،

$$A'(x) = f(x) \times g'(x) + g(x) \times f'(x)$$

أي مشتقة حاصل ضرب اقترانين

= الاول $\times$ مشتقة الثاني + الثاني $\times$ مشتقة الاول

الاثبات :

$$\begin{aligned} A'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{A(x+h) - A(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\ &\quad \text{طرح واضافة } f(x)g(x+h) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x+h)}{h} \\ &\quad \text{نجزء} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\ &\quad \text{نخرج عامل مشترك} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h)(f(x+h) - f(x))}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x)(g(x+h) - g(x))}{h} \\ &\quad \text{نختصر ونعوض} \\ A'(x) &= f(x) \times g'(x) + g(x) \times f'(x) \end{aligned}$$

بشكل عام

$$(fgh)'(x) = (f'gh)(x) + (fg'h)(x) + (fgh')(x)$$

مثال :

جد $f'(x)$ للاقترانات التالية

$$1. f(x) = (1-2x)(3x^2+6)$$

$$2. f(x) = x(x^2+2)(1-2x^2)$$

الحل :

$$\begin{aligned} 1. f'(x) &= (1-2x)(6x) + (3x^2+6)(-4x) \\ &= 6x - 12x^2 - 6x^2 - 24x \\ &= -12x^2 + 6x - 24x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. f'(x) &= (x^3+2x)(1-2x^2) \\ f'(x) &= (x^3+2x)(-4x) + (1-2x^2)(3x^2+2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= -4x^4 - 8x^2 + 3x^2 - 6x^4 + 2 - 4x^2 \\ &= -10x^4 - 9x^2 + 2 \end{aligned}$$

مثال :

إذا كان $L(x) \cdot h(x) = a$: ثابت وكان

$$h'(2) = 3, h(2) = -2\sqrt{a}$$

$$L'(2)$$

الحل :

$$\frac{d}{dx}(L(x) \cdot h(x)) = \frac{d}{dx}(a)$$

$$L(x) \cdot h'(x) + h(x) \cdot L'(x) = 0$$

$$L(2) \cdot h'(2) + h(2) \cdot L'(2) = 0$$

$$L'(2) = \frac{-\frac{a}{-2\sqrt{a}} \cdot 3}{-2\sqrt{a}}$$

$$L'(2) = \frac{3a}{2\sqrt{a}} \cdot \frac{1}{-2\sqrt{a}}$$

$$L'(2) = \frac{-3}{4}$$

مثال :

جد $f'(1)$ للاقتران التالي

$$f(x) = |x - 1|(x^2 + 2x + 1)$$

الحل :

$$\begin{array}{c} (1-x)(x^2+2x+1) \quad (x-1)(x^2+2x+1) \\ \leftarrow \text{-----} \text{+++++} \text{-----} \rightarrow \\ 1 \end{array}$$

$f(x)$ متصل عند $x=1$ لان

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) = 0$$

$$\begin{aligned} f'_+(1) &= (x-1)(2x+2) + (x^2+2x+1)(1)|_{x=1} \\ &= 0 + 4 = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'_-(1) &= (1-x)(2x+2) + (x^2+2x+1)(-1)|_{x=1} \\ &= 0 + -4 = -4 \end{aligned}$$

مثال :

اذا كان $f(1) = -3$, $f'(1) = 2$,

جد

$$(\sqrt{x} f(x))'(1)$$

الحل :

$$(\sqrt{x} f(x))'(1)$$

$$= \sqrt{x} f'(x) + \frac{f(x)}{2\sqrt{x}} \Big|_{x=1}$$

$$= \sqrt{1} f'(1) + \frac{f(1)}{2\sqrt{1}}$$

$$= 2 + \frac{-3}{2} = \frac{1}{2}$$

مثال : واجب

اذا كان $L(2)=-1$, $L'(2) = 4$, $h'(2)=1$,

جد $f'(2)$ للاقتران

$$1 \quad f(x) = L(x) h(x)$$

$$2. f(x) = h(x) \sqrt{x^2 + 1}$$

الحل :

1

$$f'(x) = L(x) * h'(x) + h(x) * L'(x)$$

$$f'(2) = L(2) * h'(2) + h(2) * L'(2)$$

$$= (-1) * (1) + (-5) * (4)$$

$$= -21$$

2

$$f'(x) = h(x) \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + h'(x) \sqrt{x^2+1}$$

$$f'(2) = h(2) \frac{2}{\sqrt{5}} + h'(2) \sqrt{5}$$

$$= \frac{-10}{\sqrt{5}} + \sqrt{5}$$

$$= \frac{-5}{\sqrt{5}} = -\sqrt{5}$$

مثال :

اذا كان $f(x) = e^{x^2} \ln x$ اوجد $f'(x)$

الحل :

$$f'(x) = \frac{e^{x^2}}{x} + 2xe^{x^2} \ln x$$

مثال :

إذا كان $f(x) = (x-a)L(x)$ حيث $L(x)$
اقتران متصل عند $x=a$ فبين ان
 $f'(a) = L(a)$ حيث a ثابت

مثال :

جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران
 $f(x) = (x-1)e^x + 3\ln x + 2$
عند النقطة $(1, 2)$

الحل :

النقطة $(1, 2)$ نقطة تماس

$f'(1)$ ميل المماس

$$f'(x) = (x-1)e^x + e^x + \frac{3}{x}$$

$$f'(1) = e + 3$$

معادلة المماس

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 2 = (e + 3)(x - 1)$$

$$\rightarrow y = (e + 3)(x - 1) + 2$$

$$\rightarrow y = (e + 3)x - e - 1$$

مثال :

إذا كان $f(x) = \ln(x^2 + 3)(x^3 + 5x)^{18}$

اوجد $f'(x)$

الحل :

$$f(x) = \ln(x^2 + 3) + 18\ln(x^3 + 5x)$$

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 3} + \frac{18(3x^2 + 5)}{x^3 + 5x}$$

$$= \frac{2x}{x^2 + 3} + \frac{54x^2 + 90}{x^3 + 5x}$$

ش (2007)

إذا كان

$$f'(-1) = \text{فان } (1 + x^2)f(x) + 12 = 4x^3$$

$$\sqrt{A) - 2 \quad B) 14 \quad C) - 6 \quad D) 0$$

ش2008)

إذا كان $f(x)$ قابل للاشتقاق لجميع قيم x
وكان $L(x) = x^2 f(x)$ جد $L'(x)$

ص2015)

إذا كان $f(x) = x\sqrt{x+1}$
جد $f'(3)$

ص2013)

إذا كان $f(x) = xf(x) + 1$ فان $f'(2)$
A) 1 B) -1 C) 0 D) 2

ش2015)

ليكن $f(x) = x|\sin x|$, $x \in [0, 2\pi]$
اوجد $f'(\frac{\pi}{2})$

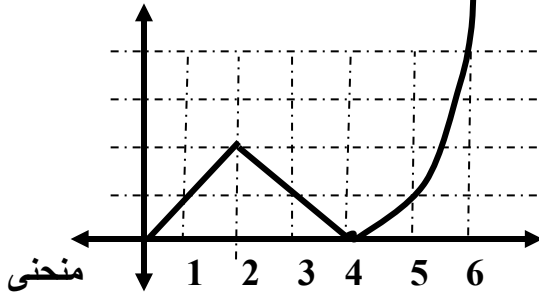
الحل : $f(x)$ متصل عند $x = \frac{\pi}{2}$

$$f(x) = x \sin x$$

$$f'(x) = x \cos x + \sin x \Big|_{x=\frac{\pi}{2}} = 1$$

ش2017

بالاعتماد على الشكل المجاور والذي يمثل



الاقتران في المتصل على الفترة [0, 6]، جد

$$\frac{d}{dx} = \sqrt{3x + f(x)}|_{x=3}$$

$$= \frac{3 + f'(x)}{2\sqrt{3x + f(x)}}|_{x=3} = \frac{3 - 1}{2\sqrt{9 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

ش2017

جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران
 $f(x) = (x + 3)^2$ المرسوم من النقطة

(0, 0)

الحل :

ص2015

إذا كان $L(x)$, $h(x)$ اقترانين قابلين للاشتقاق ،

وكان $L(x) \cdot h^2(x) = a$ حيث a ثابت ، $a \neq 0$ ،

وكان $h'(2) = 3\sqrt{a}$, $h(2) = -2\sqrt{a}$

جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران $L(x)$ عند

$x=2$.

الحل :

$$L(x) = \frac{a}{h^2(x)} \rightarrow L(2) = \frac{a}{4a} = \frac{1}{4}$$

$$L'(x) = \frac{-2ah(x)h'(x)}{h^4(x)}$$

$$L'(2) = \frac{-2ah(2)h'(2)}{h^4(2)}$$

$$= \frac{12a^2}{16a^2} = \frac{3}{4}$$

معادلة المماس

$$y - \frac{1}{4} = \frac{4}{3}(x - 2)$$

ش2017

إذا كان $f(2) = \frac{1}{2}$, $f'(2) = 2$ اثبت

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x - 4f(x)}{(x - 2)f(x)} = -6$$

مثال :

- أوجد $f'(x)$ للاقتران
1. $f(x) = x^2 \csc x$
 2. $f(x) = x \tan x$
 3. $f(x) = e^x (\tan x - x)$
 4. $f(x) = \sqrt[3]{x} (\sqrt{x} + 3)$
 5. $f(x) = (x^3 - x)(x - 1)(x^2 + x + 1)$

ص (2018)

أوجد $f'(3)$ للاقتران
 $x \in (-1, 4] : f(x) = |(x-3)(x+1)|$
الحل :

$$\begin{array}{c} -x^2+2x+3 \quad \quad x^2-2x-3 \\ \hline -1 \quad \quad 3 \quad \quad 4 \end{array}$$

$$f'(x) = \begin{cases} -2x+2 & , \quad -1 < x < 3 \\ 2x-2 & , \quad 3 < x < 4 \\ \text{D.N.E} & , \quad x = 4 \\ \text{D.N.E} & , \quad x = 3 \end{cases}$$

$f(x)$ متصل عند $x = 3$
 $f_+'(x) = 4$, $f_-'(x) = -4$
 $f'(3)$ غير قابل للاشتقاق لأن
 $f_+'(3) \neq f_-'(3)$

ش (2019)

أوجد $f'(3)$ للاقتران
 $f(x) = x|x-4|$
الحل :

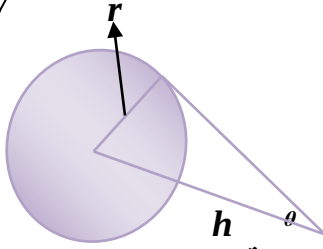
$$\begin{array}{c} x^2-4x \quad \quad 4x-x^2 \\ \hline 4 \end{array}$$

$$f(x) \text{ متصل عند } x = 4$$

$$f_+'(x) = 2x-4|_{x=4} = 4$$

$$, \quad f_-'(x) = 4-2x|_{x=4} = -4$$

$f'(4)$ غير قابل للاشتقاق لأن
 $f_+'(4) \neq f_-'(4)$



***مثال:**

عندما ترصد الاقمار

الصناعية الارض

، فانه يمكنها مسح جزء

فقط من سطح الارض

وبعض الاقمار الصناعية

تحتوي مستشعرات لقياس الزاوية θ بالراديان

المبينة في الشكل المجاور اذا كان h يمثل المسافة

بين القمر الصناعي و سطح الارض بالكيلومترات ،

r يمثل نصف قطر الارض بالكيلومتر ، فاجب عن

السؤالين التاليين

1 اثبت ان $h=r(csc \theta - 1)$

2 جد معدل h بالنسبة الى θ عندما

$r=6371km : \theta = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$

الحل:

***مثال:**

اكتب معادلة المماس والعمودي لمنحنى الاقتران

$f(x)=e^x \cos x + \sin x$ عند $(0, 1)$

الحل:

النقطة $(0, 1)$ نقطة تماس

$f'(0)$ ميل المماس

$$f'(x) = -e^x \sin x + e^x \cos x + \cos x$$

$$f'(0) = 0 + 1 + 1 = 2$$

معادلة المماس

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 1 = 2(x - 0) \rightarrow y = 2x + 1$$

معادلة العمودي

$$y - y_1 = \frac{-1}{m}(x - x_1)$$

$$y - 1 = \frac{-1}{2}(x - 0) \rightarrow y = \frac{-1}{2}x + 1$$

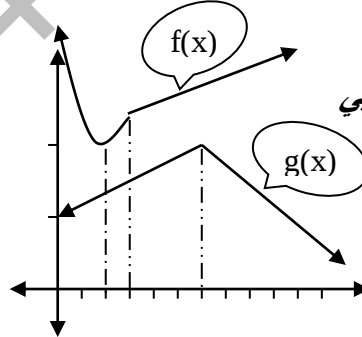
***مثال:**

الرسم المجاور يمثل منحنىي

الاقترايين $f(x), g(x)$

وكان $P(x)=f(x)g(x)$

اوجد $P'(2)$



قاعدة

مشتقة القسمة

إذا كان L, h اقترانين قابلين للاشتقاق عند x وكان $L(x) \neq 0$ ، وكان

$$f(x) = \frac{h(x)}{L(x)}, L(x) \neq 0$$

$f(x)$ قابل للاشتقاق عند x فإن:

$$f'(x) = \frac{L(x)h'(x) - h(x)L'(x)}{L^2(x)}, L(x) \neq 0$$

$$\text{مشتقة القسمة} = \frac{\text{المقام} \times \text{مشتقة البسط} - \text{البسط} \times \text{مشتقة المقام}}{(\text{المقام})^2}$$

نتيجة

إذا كان h اقتران قابل للاشتقاق عند x ، a ثابت وكان

$$f(x) = \frac{a}{h(x)}, h(x) \neq 0$$

$f(x)$ قابل للاشتقاق عند x فإن:

$$f'(x) = \frac{-a * h'(x)}{h^2(x)}, h(x) \neq 0$$

$$\text{مشتقة ثابت على مقام} = \frac{-\text{الثابت} \times \text{مشتقة المقام}}{(\text{المقام})^2}$$

***مثال:**

اكتب معادلة المماس والعمودي لمنحنى الاقتران

$$f(x) = (2x + 1)^5(x^3 - x + 1)^4$$

$$(1, f(1))$$

الحل:

مثال :

اوجد $f'(x)$ للاقتزان

① $f(x) = \frac{x^2 + 1}{2x}, x \neq 0$

② $f(x) = \frac{1}{x^2}, x \neq 0$

الحل:

①

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x)(2x) - (x^2 + 1)(2)}{(2x)^2}, x \neq 0 \\ &= \frac{4x^2 - 2x^2 - 2}{(2x)^2} \\ &= \frac{2x^2 - 2}{4x^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2x^2} \end{aligned}$$

②

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-2x}{(x^2)^2}, x \neq 0 \\ &= \frac{-2}{x^3} \end{aligned}$$

مثال :

اوجد $f'(x)$ للاقتزان

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x}, & x \leq 1 \\ \sqrt{x^2 + 1}, & x > 1 \end{cases}$$

الحل:

$f(x)$ متصل على $R - \{0, 1\}$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-2}{x^2}, & x < 1 \\ \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}, & x > 1 \\ \text{D. N. E}, & x = 1, x = 0 \end{cases}$$

ص 2009

اذا كان $f(x) = \frac{\pi}{\sec x}$ فان $f'(\frac{\pi}{6})$

A) $\frac{\pi}{2}$

B) $\frac{-\sqrt{3}\pi}{2}$

C) $\frac{\sqrt{3}\pi}{2}$

√ D) $\frac{-\pi}{2}$

ص 2011

اذا كان $f(x) = \frac{e^x + 1}{e^x}$ فان $f'(0)$

A) 0

B) 1

√ C) -1

D) D. N. E

ش 2019

اذا كان $f(x), h(x)$ قابلين للاشتقاق وكان

$$f(x) = h(x) - \frac{1}{h(x)}$$

فان $h'(2) = -1, h(2) = \frac{1}{2}$

A) 3

B) -3

C) 5

√ D) -5

مثال:

اذا كان $h(-2) = -1, h'(-2) = 2$ جد $f'(-2)$

للاقتزان $f(x)$

① $f(x) = \frac{x^2 - x}{h^2(x)}, h(x) \neq 0$

② $f(x) = \frac{h(x)}{x}, x \neq 0$

الحل: واجب

مثال:

إذا كان $h'(2) = 1$, $L(2) = -1$, $L'(2) = 4$ و $h(2) = -5$ جـ $f'(2)$ للاقتراح $f(x)$

① $f(x) = \frac{L(x)}{h(x)}$, $h(x) \neq 0$

② $f(x) = \frac{L(x)}{h(x) + 3}$, $h(x) \neq -3$

الحل:

①

$$f'(x) = \frac{h(x) \times L'(x) - L(x) \times h'(x)}{(h(x))^2}$$

$$f'(2) = \frac{h(2) \times L'(2) - L(2) \times h'(2)}{(h(2))^2} = \frac{(-5)(4) - (-1)(1)}{25} = \frac{-19}{25}$$

②

$$f'(x) = \frac{(h(x) + 3) \times L'(x) - L(x) \times h'(x)}{(h(x))^2}$$

$$f'(2) = \frac{(h(2) + 3) \times L'(2) - L(2) \times h'(2)}{(h(2))^2} = \frac{(-2)(4) - (-1)(1)}{4} = \frac{-7}{4}$$

***مثال:**

إذا كان $f(x) = \frac{\sin x}{e^x}$ جـ $f'(x)$

الحل: واجب

مثال: واجب

إذا كان $h(x)$, $g(x)$ قابلين للاشتقاق

عند $x = -2$ وكان $h'(-2) = 5$, $h(-2) = -3$

جـ $g'(-2) = 2$, $g(-2) = -1$

① $(hg)(-2)$

② $\left(\frac{h}{g}\right)'(-2)$

③ $(5h - 3hg)(-2)$

الحل:

مثال: واجب

إذا كان العلاقة $\frac{1}{f} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ ربط بين البعد

البؤري (f) لعدسة محدبة . x ، y تمثلان بعد الجسم موضوع امام العدسة ، وبعد الصورة المتكونة له عن مركز العدسة على الترتيب . إذا كانت $f = 2$ جد :

الصيغة عامة لايجاد معدل تغير y بالنسبة الى x ، معدل تغير y بالنسبة الى x عندما تكون $x = 12$.
الحل:

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \rightarrow \frac{1}{y} = \frac{1}{x} - \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{y} = \frac{2-x}{2x} \rightarrow y = \frac{2x}{2-x}$$

$$y' = \frac{(2-x)(2) - (2x)(-1)}{(2-x)^2}$$

$$y' = \frac{-4}{(2-x)^2}$$

$$y'|_{x=12} = \frac{-4}{(2-12)^2} = \frac{-4}{100} = \frac{-1}{25}$$

واجب حل المسألة في بداية درس مشتقتا الضرب

والقسمة ص 28

مناقشة مثال 3 من درس القسمة ص 33 سطوع العين

***مثال: واجب**

يعطى عدد سكان مدينة صغيرة بالاقتران

$$p(t) = \frac{500t}{2t + 1} \quad t: \text{الزمن بالسنوات} \quad P: \text{عدد السكان بالآلاف}$$

1. جد معدل تغير عدد السكان في المدينة بالنسبة الى الزمن
2. جد معدل تغير عدد السكان في المدينة عندما $t=12$ فسر معنى الناتج

مثال:

$$f(x) = \frac{h(x)}{l(x)(x^2+1)}$$

$$h(1) = -2, h'(1) = L(1) = -1, f'(1) = 3$$

$$L'(1) = 3$$

الحل:

$$f'(x) = \frac{l(x)(x^2+1)h'(x) - h(x)((l(x)(2x) + (x^2+1)L'(x))}{(l(x)(x^2+1))^2}$$

$$f'(1) = \frac{l(1)(1^2+1)h'(1) - h(1)((l(1)(2 \cdot 1) + (1^2+1)L'(1))}{(l(1)(1^2+1))^2}$$

$$3 = \frac{(-1)(2)(-1) - (-2)((-1)(2) + (2L'(1)))}{((-1)(2))^2}$$

$$3 = \frac{2 - ((-4) + 2L'(1))}{4}$$

$$12 = 2 + 4 + 2L'(1)$$

$$L'(1) = 3$$

يمكن حله :

$$l(x) = \frac{h(x)}{f(x)(x^2+1)}$$

$$l'(x) = \frac{f(x)(x^2+1)h'(x) - h(x)((f(x)(2x) + (x^2+1)f'(x))}{(f(x)(x^2+1))^2}$$

يمكن حله :

$$\ln f(x) = \ln h(x) - (\ln L(x) + \ln(x^2+1))$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{h'(x)}{h(x)} - \frac{L'(x)}{L(x)} - \frac{2x}{x^2+1}$$

$$\frac{f'(1)}{f(1)} = \frac{h'(1)}{h(1)} - \frac{L'(1)}{L(1)} - \frac{2}{2}$$

$$\frac{3}{1} = \frac{-2}{-2} - \frac{L'(1)}{-1} - \frac{2}{2}$$

$$L'(1) = 3$$

ص 2010

$$f(x) = \frac{x+\sec x}{\sin x} \quad \text{فان} \quad f'(\frac{\pi}{4})$$

الحل:

$$f(x) = \frac{2-\cos \frac{\pi}{2}}{\cos x}$$

$$f'(x)$$

$$A) \sec x \tan x$$

$$B) \text{zero}$$

$$C) -2 \sec x \tan x$$

$$\sqrt{D) 2 \sec x \tan x}$$

$$f(x) = \frac{x+\sec x}{\sin x} \quad \text{ص 2010} \quad \text{اذا كان}$$

$$f'(\frac{\pi}{4})$$

$$A) \sec x \tan x$$

$$B) \text{zero}$$

$$C) -2 \sec x \tan x$$

$$\sqrt{D) 2 \sec x \tan x}$$

$$f(x) = \frac{l(x)}{xh(x)} \quad \text{ص 2014} \quad \text{اذا كان}$$

$$f'(2) = L(2) = -3, h(2) = L'(2) = 1,$$

$$h'(2)$$

الحل:

$$\ln f(x) = \ln L(x) - (\ln h(x) + \ln x)$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{L'(x)}{L(x)} - \frac{h'(x)}{h(x)} - \frac{1}{x}$$

$$\frac{f'(2)}{f(2)} = \frac{L'(2)}{L(2)} - \frac{h'(2)}{h(2)} - \frac{1}{2}$$

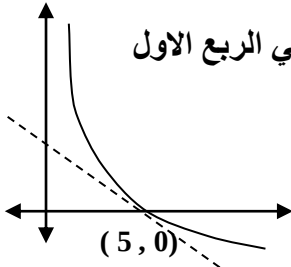
$$\frac{-3}{-3} = \frac{1}{-3} - \frac{h'(1)}{1} - \frac{1}{2}$$

$$h'(2) = ?$$

يمكن حله :

$$h(x) = \frac{l(x)}{xf(x)}$$

ش2015



جد مساحة المثلث الواقع في الربع الاول

والمحصور بين محوري

x و y ومماس منحنى

العلاقة :

$$y = \frac{5}{x} - \frac{x}{5}, x \neq 0 \text{ عند النقطة } (5, 0)$$

ص2015) اوجـد $\frac{dy}{dx}$

$$y = \frac{|x^2 - 5x + 4x|}{x(x-1)}, x \in (1, 5]$$

ص2011

$$f(x) = \frac{e^x + 1}{e^x}, x \neq \frac{-3}{a}$$

فما قيمة $f'(0)$

- A) 0 B) 1 C) -1 D) D.N.E

$$A_{\Delta} = \frac{1}{2} \times \text{القاعدة} \times \text{الارتفاع}$$

$$A_{\Delta} = \frac{1}{2} \times 5 \times 2 = 5$$

مثال :

جد معادلة المماس للاقتربات التالية عند النقطة المعطاه

① $f(x) = \frac{1+x}{1+e^x}$, $(0, \frac{1}{2})$

② $f(x) = e^x \cos x + \sin x$, $(0, \frac{1}{2})$

ص2018)

جد $f'(4)$ للاقتربان $f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} 4 & , 1 \leq x < 4 \\ \frac{16}{2x-4} & , 4 \leq x < 6 \end{cases}$$

الحل : $f(x)$ متصل على $x=4$

$$f'(x) = \begin{cases} \text{zero} & , 1 \leq x < 4 \\ \frac{-32}{(2x-4)^2} & , 4 \leq x < 6 \end{cases}$$

$$f'_+(x) = -2, f'_-(x) = \text{zero}$$

$$f'(4) \text{ D.N.E}$$

تمرين عام

1

ابحث قابلية ق للاشتقاق عند $x = 4$

$$f(x) = \begin{cases} 4 & , x = 4 \\ \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} & , x \neq 4 \end{cases}$$

2

$$f(x) = \frac{1}{3+ax} \quad , x \neq \frac{-3}{a}$$

3

$$f'(1) = 2 \text{ فما قيمة } a$$

$$f(x) = \frac{\csc x}{1+\tan x}$$

اوجد $f'(x)$

4

بدأ شخص بنفخ بالون على شكل كرة ، جد قاعة $\frac{dV}{dt}$ عامة لحساب معدل تغير حجم البالون بالنسبة الى نصف قطره ، ثم جد معدل تغير الحجم عندما نق $= 10$ سم

5

$$\text{اذا كان } f(x) = ax^2 + 3x \text{ حيث } a \text{ ثابت وكان } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = 9 \text{ فما قيمة } a$$

6

$$\text{اذا كان } f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx - 6 & , x < 2 \\ 5x + 2b & , x \geq 2 \end{cases}$$

وكان $f(x)$ قابل للاشتقاق عند $x=2$ اوجد قيمة a, b

$$b = -11 \quad , \quad a = 4$$

7

مخروط من الثلج ارتفاعه ثلاثة أمثال نصف قطر قاعدته r ، اخذ المخروط بالذوبان بحيث يحافظ على شكله، جد معدل تغير حجم المخروط v بالنسبة لارتفاعه (h) عندما يكون نصف قطر قاعدته $10m$

$$\frac{dv}{dh} = 100\pi$$

8

جد $f'(x)$ للاقتدرات التالية

$$1. f(x) = (1-4x^2)(7x^3+x)$$

$$2. (3x^2+6)(1/4 - 2x)$$

$$3. f(x) = |x-1|(x^2+2x+1)$$

9

اذا كان $f(x) = |x-1| - |x|$ حدد فيما اذا كان هذا الاقتران قابل للاشتقاق عند النقطة $(0, 1)$

10

اذا كان $f(x) = |x+1| - |x-1|$ حدد فيما اذا كان هذا الاقتران قابل للاشتقاق عند النقطة $x=-1$ ام لا ؟

11

$$\text{اذا كان } f(x) = \begin{cases} ax + 2 & , x < 3 \\ x^2 + b & , x \geq 3 \end{cases}$$

وكان $f(x)$ قابل للاشتقاق عند $x=3$ اوجد قيمة a, b

12

$$f(x) = \frac{L(x)}{h(x)} \quad , \quad h(x) \neq 0$$

وكان $L(x), h(x)$ قابلا للاشتقاق عند $x=a$ وكان $f'(x) = 0$ اثبت ان

$$f(x) = \frac{L'(x)}{h'(x)} \quad , \quad h(x) \neq 0$$

13

صفحة معدنية مستطيلة الشكل تتمدد بانتظام بحيث يبقى طولها يساوي ثلاثة امثال عرضها اوجد معدل التغير في مساحة هذه الصفحة بالنسبة الى طولها عندما يكون طولها 15 سم

المشتقات العليا

• إذا كان $y = f(x)$ قابل للاشتقاق

المشتقة الاولى $y' = f'(x)$

• إذا كان $y' = f'(x)$ قابل للاشتقاق

المشتقة الاولى للاقتران السابق $y' = f'(x)$

وهو المشتقة الثانية $y'' = f''(x)$

• إذا كان $y'' = f''(x)$ قابل للاشتقاق

المشتقة الاولى للاقتران السابق $y'' = f''(x)$

وهو المشتقة الاولى $y'' = f''(x)$ وهو

المشتقة الثالثة $f^{(3)}(x) = y^{(3)}$

ويرمز للمشتقة الاولى $f'(x)$

ويرمز للمشتقة الثانية $f''(x)$

ويرمز للمشتقة الثالثة $f^{(3)}(x)$

ويرمز للمشتقة اربعة $f^{(4)}(x)$

مثال:

إذا كان $f(x) = x^3 - 4x + 5$ جد $f'(1), f''(1)$

الحل:

$$f'(x) = 3x^2 - 4 \rightarrow f'(1) = -1$$

$$f''(x) = 6x \rightarrow f''(1) = 6$$

14

جد معدل تغير مساحة المربع بالنسبة الى محيطه عندما يكون محيطه (24) سم .

15

إذا كان $f(x) * h(x) = 1$ وكان $h'(1) = 3$ ،
فما قيمة $h(1) = 5$.

16

إذا كان $f(x) =$

$$\begin{cases} |1 - x^2| + 14x & , x < 1 \\ xh^2(x) + 10 & , x \geq 1 \end{cases}$$

$$xh^2(x) + 10 \quad , \quad x \geq 1$$

وكان $h(x)$ قابل للاشتقاق حيث

$h'(1) = h(1) = 2$ ابحث في قابلية الاشتقاق عند $x=1$

17

$$f(x) = \frac{L(x)}{h(x)} \quad , \quad h(x) \neq 0$$

وكان $L(x), h(x)$ قابلا للاشتقاق عند $x = a$

وكان $f'(x) = 0$ اثبت ان

$$f(x) = \frac{L'(x)}{h'(x)} \quad , \quad h(x) \neq 0$$

مثال:

إذا كان $y = e^{ax}$ فجد قيمة a التي تحقق

$$y'' - 5y' + 6y = 0$$

الحل:

$$y' = ae^{ax}$$

$$y'' = a^2 e^{ax}$$

$$y'' - 5y' + 6y = 0$$

$$a^2 e^{ax} - 5ae^{ax} + 6e^{ax} = 0$$

$$e^{ax}(a^2 - 5a + 6) = 0$$

$$e^{ax}(a - 3)(a - 2) = 0 \rightarrow a = 2, 3$$

مثال:

إذا كان $y = ae^{bx}$, $a, b \in \mathbb{R}$ وكان $y'' = y$ فما قيمة b

الحل: ج: $b = \pm 1$, $a \in \mathbb{R} - \{0\}$

مثال:

جد اقتران كثير حدود من الدرجة الثالثة

$$\text{حيث } f'(-1)=0, f''(-1)=3, f(-1)=-2,$$

$$f^{(3)}(-1)=6$$

الحل:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$f^{(1)}(-1) = 3 \text{ لكن}$$

$$3 = 3a - 2b + c \dots\dots\dots(1)$$

$$f^{(2)}(x) = 6ax + 2b$$

$$f^{(2)}(-1) = -2 \text{ لكن}$$

$$-2 = -6a + 2b \dots\dots\dots(2)$$

$$f^{(3)}(x) = 6a$$

$$f^{(3)}(-1) = 6 \text{ لكن}$$

$$6 = 6a \rightarrow a = 1$$

$$b = 2 \quad \text{نعوض في (2) فتكون}$$

$$c = 4 \quad \text{نعوض في (1) فتكون}$$

بالتعويض في المعادلة الأصلية $c = 3$

$$\text{اذن } f(x) = x^3 + 2x^2 + 4x + 3$$

لا تنسى ذكر الله أولاً

ملاحظة - يا بني - مهمة جداً

لا تنسى عند ايجاد المشتقات العليا الفحص المتتالي لقابلية الاشتقاق سواء للاقتران الاصلي او للمشتقات المتعاقبة

مثال :

اذا كان L, L', L'' قابلاً للاشتقاق عند x ،

وكان $f(x) = xL(x)$ فجد

$$f^{(3)}(x), f^{(2)}(x), f^{(1)}(x)$$

الحل :

قابل للاشتقاق $L(x)$

$$f'(x) = xL'(x) + L(x)$$

قابل للاشتقاق $L'(x)$

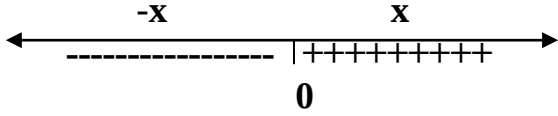
$$\begin{aligned} f''(x) &= xL''(x) + L'(x) + L'(x) \\ &= xL''(x) + 2L'(x) \end{aligned}$$

قابل للاشتقاق $L''(x)$

$$\begin{aligned} f'''(x) &= xL'''(x) + L''(x) + 2L''(x) \\ &= xL'''(x) + 3L''(x) \end{aligned}$$

مثال :

اذا كان $f(x) = |x|$ فجد $f''(x), x \in \mathbb{R}$
الحل :



$f(x)$ متصل على $\mathbb{R}$

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & , x < 0 \\ -1 & , x > 0 \\ \text{D.N.E} & , x = 0 \end{cases} \text{ why}$$

عندما $x = 0$ ، $f(x)$ متصل وغير قابل للاشتقاق لان

$$f'_+(0) \neq f'_-(0)$$

لايجاد المشتقة الثانية للاقتران $f(x)$ نبحث في اتصال المشتقة الاولى.....

$$f'(x) \text{ متصل على } \mathbb{R} - \{0\}$$

$$f''(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ 0 & , x > 0 \\ \text{D.N.E} & , x = 0 \end{cases} \text{ why}$$

عندما $x = 0$ ، $f''(x)$ غير قابل للاشتقاق لان

$f'(x)$ غير متصل عندما $x = 0$

مثال :

اذا كان $f(x) = \cos 2x$

اوجد $f''(x) + 6f(x)$

الحل :

*مثال :

$$y = \frac{x+1}{x-1} : x \neq 1 \text{ اذا كان } \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

الحل :

مثال :

إذا كان $f(x) = 3\sin 2x + 5\cos 2x$ أوجد $f^{(4)}(x)$

$$f'(x) = 6\cos 2x - 10\sin 2x$$

$$f^{(2)}(x) = -12\sin 2x - 20\cos 2x$$

$$f^{(3)}(x) = -24\cos 2x + 40\sin 2x$$

$$f^{(4)}(x) = 48\sin 2x + 80\cos 2x$$

مثال :

إذا كان $f(x) = 7x^3 - 5x^2 + x$ جد $f''(-2)$

الحل :

$$f'(x) = 21x^2 - 10x + 1$$

$$f''(x) = 42x - 10$$

$$f''(-2) = 42(-2) - 10 = 94$$

مثال :

إذا كانت $f(x) = 3x^n$ وكان $f^{(4)}(x) = ax^3$ فجد قيمة a

الحل :

$$f'(x) = 3nx^{n-1}$$

$$f''(x) = 3n(n-1)x^{n-2}$$

$$f^{(3)}(x) = 3n(n-1)(n-2)x^{n-3}$$

$$f^{(4)}(x) = 3n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4}$$

$$ax^3 = 3n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4}$$

$$3 = n - 4 \rightarrow n = 7$$

$$a = 3n(n-1)(n-2)(n-3)$$

$$a = 3(7)(6)(5)(4) = 2520$$

مثال :

إذا كانت $f(x) = 3x^n$ وكان $f^{(3)}(x) = a$ فجد قيمة a

الحل :

$$f'(x) = 3nx^{n-1}$$

$$f''(x) = 3n(n-1)x^{n-2}$$

$$f^{(3)}(x) = 3n(n-1)(n-2)x^{n-3}$$

$$ax^0 = 3n(n-1)(n-2)x^{n-3}$$

$$0 = n - 3 \rightarrow n = 3$$

$$a = 3n(n-1)(n-2)$$

$$a = 3(3)(2)(1) = 18$$

مثال :

إذا كان $y = 1 + \frac{1}{x}$ فجد $\frac{d^2y}{dx^2}$ ثم $\frac{d^{100}y}{dx^{100}}$

الحل :

$$y' = \frac{-1}{x^2} : x \neq 0$$

$$y'' = \frac{2x}{x^4} = \frac{2}{x^3} : x \neq 0$$

مثال :

إذا كان $y = (x^2 + 3x)|x|$ فجد $\frac{d^2y}{dx^2}$

الحل :

مثال :

إذا كان $f(x) = \frac{2}{x}$ اثبت ان

$$f''(1) = -4f'(2)$$

الحل :

$$f'(x) = \frac{-2}{x^2} \rightarrow f'(1) = -2$$

$$f''(x) = \frac{4}{x^3} \rightarrow f''(2) = \frac{1}{2}$$

$$-4f''(2) = (-4)\left(\frac{1}{2}\right) = -2 = f'(2)$$

ش(2007)

إذا كانت $f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$ وكان

$$f^{(3)}(x) = 210x^{n-3} \text{ فما قيمة } n.$$

A) 12 B) 10 C) 7 D) 5

ش(2008)

إذا كان $f(x) = (2x + 1)^3$ فإن $f^{(2)}(-1)$

A) -6 B) 6 C) -24 D) -12

ش(2013)

إذا كان $f(x) = \cos 4x$ فإن $f^{(2)}\left(\frac{\pi}{4}\right)$

A) -8 B) 0 C) 16 D) -16

ص(2016)

إذا كانت $f(x) = 0.25x^n, n \in \mathbb{R}$ وكان

$$f^{(4)}(x) = (a + 1)x^3 \text{ فجد قيمة } a.$$

الحل:

$$n=7, a=2019$$

مثال : إذا كان

$$f(x) = (3x^2 + 2)(x^3 - 2x + 1)$$

اثبت ان $f''(1)f'(1) = 210$

الحل :

مثال
كان $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n-1}}$ المشتقة النونية
فان $f^{(5)}(x)$
الحل:

مثال:
اذا كان $f(x) = \frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}$

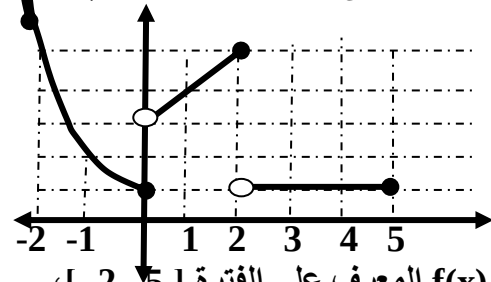
1. اوجد ميل المماس عند نقطة الاصل
 2. بين عدم وجود مماس افقي للاقتران $f(x)$
- الحل:**

ص 2016
اذا كان $L'(x)$ ، $f(x)$
اقتراين قابلين للاشتقاق بحيث ان
 $f(x) = (x+2)L'(2x)$
وكان $m(x)$ مماساً للاقتران $f(x)$
عند النقطة $(1, 6)$ كما هو موضح
في الشكل المجاور فجد $L''(2)$
الحل:

$$\begin{aligned} L''(2) &= L''(2x) \\ 2x &= 2 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L'(2x) &= \frac{f(x)}{x+2} \\ 2L''(2x) &= \frac{(x+2)f'(x) - f(x)}{(x+2)^2} \\ L''(2) &= \frac{(1+2)f'(1) - f(1)}{2(1+2)^2} \\ L''(2) &= \frac{(1+2)\tan(135^\circ) - 6}{18} = \frac{-3-6}{18} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

ص 2017
بالاعتماد على الشكل المجاور والذي يمثل
منحنى الاقتران $f(x)$ المعروف على الفترة $[-2, 5]$



جد $(f' * f)'(1)$

الحل:

$$\begin{aligned} (f' * f)'(x) &= f'(x) * f'(x) + f(x)f''(x) \\ (f' * f)'(1) &= f'(1) * f'(1) + f(1)f''(1) \\ (f' * f)'(1) &= \left(\frac{f(2) - f(1)}{2 - 1}\right)^2 + (4)(0) \\ (f' * f)'(1) &= \left(\frac{5 - 4}{2 - 1}\right)^2 + (4)(0) = 1 \end{aligned}$$

قاعدة السلسلة

قاعدة (1)

$$(f \circ h)'(x) = \frac{d}{dx} (f(h(x))) \\ = f'(h(x)) * h'(x)$$

قاعدة (2)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} * \frac{du}{dx}$$

قاعدة (3)

إذا كان $h(x)$ قابلاً للاشتقاق عند x ،

وكان $y = (h(x))^n : n \in \mathbb{Z}$ فان

$$y' = n(h(x))^{n-1} * h'(x) : n \in \mathbb{Z}$$

الاثبات :

نفرض ان $u = h(x), y = u^n$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} * \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = nu^{n-1} * h'(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = n(h(x))^{n-1} * h'(x)$$

ملاحظة - يا بني

يمكن اشتقاق جميع الجذور بنفس القاعدة الثالثة بعد تحويله الى شكل اسس

لا تنسى

إذا كان $e \approx 2.71 : y = e^{f(x)}$ العدد النيبيري

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)e^{f(x)}$$

إذا كان $y = a^{f(x)}$ فان

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)a^{f(x)} \ln a$$

مثال

إذا كان $f(x), h(x)$ افترايين قابلين للاشتقاق بحيث أن $f'(x) = h(x), h'(x) = -f(x)$ فان $f^{(4)}(x)$ تساوي

A) $h(x)$ B) $-f(x)$ C) $-f(x)$ D) $-h(x)$

مثال

إذا كان $y = e^x \sin x$ اثبت ان $y'' = 2y' - 2y$

مثال :

. إذا كان $f(x) = \sin x$, $h(x) = 2x$ فإن قيمة

$(hof)''(\frac{\pi}{6})$ يساوي

A) $\sqrt{3}$ B) $1 - \sqrt{3}$ C) $1 - \frac{2}{9}$ D) $\frac{2}{9}$

ملاحظة :

حل السؤال مرة أخرى لو كان المطلوب $(hof)'(\frac{\pi}{6})$

مثال :

. إذا كان $f(x) = x^3 - 2$ ، فما قيمة

$(f' \circ f)'(1)$ تساوي

A) 18 B) -18 C) -9 D) 9

مثال :

إذا كان $h(x)$ كثير حدود وكان $h(1) = -1$, $h'(1) = 5$

أوجد $(h^2)'(1)$

مثال :

إذا كان $f(x) = \sin x^2$, $y = f(\frac{2x-1}{x+1})$

أوجد y'

الحل :

مشتقة الاقترانات الدائرية

قاعدة

$$f(x) = \sin x \rightarrow f'(x) = \cos x$$

بشكل عام

$$f(x) = \sin(h(x)) \rightarrow$$

$$f'(x) = \cos(h(x))h'(x)$$

بشكل عام

$$f(x) = \sin^n(h(x)) \rightarrow$$

$$f'(x) = n \sin^{n-1}(h(x)) \cos(h(x)) h'(x)$$

قاعدة

إذا كان $y = \ln(f(x))$: $f(x) > 0$ فإن

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} * \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

تذكر

$$\textcircled{1} \ln e^{f(x)} = f(x)$$

$$\textcircled{2} e^{\ln f(x)} = f(x)$$

مثال :

إذا كان $f(x) = x^2 + 5$, $h(x) =$

جد $(foh)'(x)$ $\frac{1}{x}$

الحل : ج $\frac{-2}{x^3}$

المعادلات الوسيطة

مثال :

إذا كان $x = \sin t, y = \cos 2t$, أوجد $\frac{dy}{dx}$
الحل : ج $-4x$

مثال :

إذا كان $y = \tan x$ أثبت ان
 $y^{(3)} = 6\sec^4 x - 4\sec^2 x$

الحل :

مثال :

إذا كان $y = u^2 + 1, u = 3x + 5$,
 $L = 1$, أوجد $\frac{dy}{dL}$ عندما $x = 2L + 7$

الحل :

مثال :

مثال :

إذا كان $h(x) = ax^3, f(x) = \sqrt{x+1}$ وكان
 $(hof)'(3) = 12$ فما قيمة a .

الحل : $a=4$

مثال :

إذا كان $y = 3u^2 - 2u + 1, u = 2x + 3$
 أوجد $\frac{dy}{dx}$ عندما $x = 0$

مثال :

جد بدلالة $f'(x)$

1. $\frac{d}{dx}(f(x^2 + 1)) = f'(x^2 + 1)(2x)$
2. $\frac{d}{dx}((f(x))^2 + 3) = 2f(x)f'(x)$

اوجد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يلي

① $y = \sqrt[3]{(u^2 - 10u + 1)^2}, u = x^3 + 1$

② $y = \sin(\tan^2 x)$

③ $y = \sqrt[3]{(3u + 2)^5}, u = \frac{8}{x^2 + 3}$

④ $y = \tan t, t = 12x, x = \pi/6$

مثال : اوجد y''

①. $y = \sqrt{x^2 - 3x} - \frac{x}{1 - x}$

②. $y = \sec^3(\tan x) + 1$

مثال :

جد ميل المماس عند $x=1$ لمنحنى الاقتران
 $f(x) = (2x + 1)^5(x^3 - x + 1)^4$

مثال :

اذا كان $f(x)$ قابلاً للاشتقاق وكان

$f(\sin 2x) = \csc 2x : x \in (0, \pi] \Rightarrow f'(\frac{1}{2})$

الحل :

ملاحظة : ؟ ؟ ؟ حددت الفترة ج = 4-

مثال :

جد ميل العمودي لمنحنى الاقتران
 $f(x) = \frac{\cos 2x}{e^{2x}}$ عند $x = \frac{\pi}{2}$

مثال :

اذا كان $f(x^2) = 4x^2 + 2ax, a < 0$ وكانت

$f'(9) = 2$ اوجد قيمة a .

الحل : $a = 6$

مثال

إذا كان $h(x)=x^2$, $f'(x) = \sqrt{x}$ اوجد $(f \circ h)'(4)$
الحل: ج 1

مثال :

إذا كان $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2$, $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 8$ فجد

$$\lim_{h \rightarrow 6} \frac{f\left(\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)\right) - 2}{x - 6}$$

مثال :

إذا كان $y = \cot(t)$, $\frac{dt}{dx} = 2$ اوجد $\frac{dy}{dx}$ عندما $t = \frac{\pi}{6}$

A) $\frac{3}{4}$ B) 8 C) 48 D) $\sqrt{3} - 8$

مثال :

إذا كان $f(x)=x^2$, $h(1)=3$, $h''(1)=5$, $h'(1)=-2$ فان $(f \circ h)''(1)$ يساوي

A) 26 B) 4 C) 3 D) $\sqrt{38}$

مثال :

إذا كان $f(x)$ اقتران معرفاً على R , وكان

$h(x) = x^2 - 3$, $(h \circ f)'(1) = 24$, $f(1) = 4$, فان قيمة $f'(1)$

A) 24 B) 12 C) 8 D) $\sqrt{3}$

وزارة

إذا كان $f\left(\frac{1}{2}x\right) = (|x|)^3$ فجد $f'(-1)$

مثال :

إذا كان $h'(4) = 8$, $(f \circ h)'(4) = 16$,

فان قيمة $h(4)$ $f(x) = x^2 + 8$

A) 0 B) 6 C) 3 D) 1

مثال :

إذا كان $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$ وكان

$h(x) = 2x^3 - x$, فان قيمة $(f \circ h)'(1)$ يساوي

A) 1 B) 5 C) -1 D) $\sqrt{5}$

مثال :

إذا كان $f(x) = x(|x|)^7$ وكان $h'(1) = 3$

$h(1) = 1$, فما قيمة $(f \circ h)'(1)$.

A) -24 B) -10 C) 7 D) 24

ملاحظة :

حل السؤال مرة أخرى عندما $h(1)=-1$

مثال :

إذا كان $y = \ln(ax+b)$ حيث a, b ثابتان موجبان ،
وكان ميل المماس لمنحنى الاقتران عند النقطة P هو 1 ،
اجب عن السؤالين التالية

1. اثبت ان الاحداثي للنقطة P اقل من 1

2. جد احداثيي النقطة التي يكون عندها ميل المماس 0.5

، علما بان P هي النقطة $(0,2)$

الحل :

وزارة

إذا كان $f(x) = 2\tan x$, $h(x) = \frac{a}{2x+1}$

وكان $(h \circ f)'(\frac{\pi}{4}) = \frac{8}{25}$ فما قيمة a .

مثال :

إذا كان $f(x) = x^2(|x|)^5$ وكان $h(2)=4$ ،

$h'(2) = -1$ فما قيمة $(f \circ h)'(2)$

A) $\sqrt{A} - 28$ B) 28 C) 7 D) -10

مثال :

إذا كان $f(x)$ قابلاً للاشتقاق ، وكان $f(x^3 + 1) = x$

فان $f'(9)$

A) $\frac{1}{12}$ B) $\frac{1}{6}$ C) 1 D) 2

مثال :

إذا كان $x = t^2$ ، $y = 2t$

1. جد معادلة العمودي على المماس عند $(t^2, 2t)$

2. اثبت ان مساحة المثلث المكون من العمودي على

المماس ، والمحورين الاحداثيين ، هي

$$\frac{1}{2}|t|(2+t^2)^2$$

مثال :

إذا كان $f(2x+1) = x^3 + 4x^2 - 3x + 5$

جد $f'(7)$

الحل : 24

تمرين عام

مثال

إذا كان $f(x) = \sin^n(h(x))$ اثبت ان
 $f'(x) = n \sin^{n-1}(h(x)) \cos(h(x)) h'(x)$

الحل :

مثال

إذا كان $e \approx 2.71$: $y = e^{f(x)}$ // العدد
 النسيبي اثبت ان

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) e^{f(x)}$$

مثال

إذا كان $y = \ln f(x) : f(x) > 0$ اثبت

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

مثال

إذا كان $y = \log 2x$ اوجد y'

الحل :

$$y = \frac{\ln 2x}{\ln 10}$$

$$y = \frac{2}{x \ln 10}$$

مثال

إذا كان $y = \ln(x^3 + 3\cos 2x)^{\frac{1}{7}}$ اوجد y'
 الحل :

$$y = \frac{1}{7} \ln(x^3 + 3\cos 2x)$$

$$y' = \frac{3x^2 - 6\sin 2x}{7(x^3 + 3\cos 2x)} \ln$$

مثال

إذا كان $L(x) = f(h(x))$ وكان $h(4)=4$

$$h'(4) = 5, L'(4) = 2, f'(4) = -5$$

الحل :

$$L'(x) = f'(h(x))h'(x)$$

$$L'(4) = f'(h(4))h'(4)$$

$$2 = f'(4)h'(4)$$

$$2 = -5h'(4)$$

$$h'(4) = \frac{-2}{5}$$

مثال

اوجد $\frac{dy}{dx}$ $y = \tan u, u = 4x^3 + x$

مثال

اوجد $\frac{dy}{dx}$ $y = r^2 + 3r, r = x^3 - 4$

مثال
إذا كان $y = f(x^2 + 2x)$, وكان $f'(3) = 5$ اوجد y' عند $x=1$

الحل:

$$y' = f'(x^2 + 2x)(2x + 2)$$

$$y'_{|x=1} = f'(1 + 2)(2 + 2)$$

$$y'_{|x=1} = 5(4) = 20$$

مثال
إذا كان $y = \cos(x + \frac{\pi}{2})$ اثبت ان $y'' + y = 0$

مثال اوجد y''

① $y = \sin(3x^2)$

② $y = x \tan(\frac{1}{x})$

الحل :

مثال
إذا كان $f(x) = \csc 2x$, $x \in (0, \pi/3]$ اوجد $f'(\frac{1}{2})$

الحل :

ملاحظة : ؟؟؟ حددت الفترة

الاشـــتقاق الضمني

العلاقة نوعان

لا يمكن فصل السينات عن
الصادات بسهولة
(مثال)
 $x^3 + 4xy^2 = 5x + 7y^3$

صريحة
يمكن فصل السينات عن
الصادات بسهولة
(مثال)
 $y = x^3 - 2y$

② $x + y^3 = xy$ عند النقطة (2, 8)

الحل : ج 0.25

③ $xy^2 - yx^2 = 2$ عند النقطة (2, 1)

الحل : ج 0

④ $f(y^2) = x$ وكان $f(1) = 3$ عند $y=1$

الحل : ج 1/6

ش2015

إذا كان $e^{xy} = x - y$ اثبت ان

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - xy + 1}{x^2 - xy + 1}$$

الحل

لإيجاد $\frac{dy}{dx}$ او y'

نعامل كل حد من الحدود على انه اقتران مستقل

وعند اشتقاق الصادي نضربه بـ $\frac{dy}{dx}$ او y'

مثال :

أوجد $\frac{dy}{dx}$ للعلاقات التالية

① $y = \sin(xy)$ عند النقطة $(\frac{\pi}{2}, 1)$

الحل :

وزارة

إذا كان $\frac{x}{y} - \frac{3y}{x} = 2$ ، عند $(3, 1)$

7 $2y = f(2x^2 - x), f'(6) = 4, x = 2$
الحل : ج 14

8 $x + \tan(xy) = 0$
الحل :

5 $y=2$ عند $f'(5)=4$ وكان $x = f(y^2 + 1)$
الحل : ج 1/16

9 $x + y = xy$

6 $\sqrt{xy} = 1$ ، عند $x=2$
الحل : ج -1/4

10 $3 + y^3 - 4xy = 64x$ عند $(4, 0)$
الحل :

11 إذا كان: $y = x^{\frac{m}{n}}$: $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ نسبي اثبت ان

$$y' = x^{\frac{m}{n}-1}$$

15 $y^2 = 3yx^2 + x^3$

الحل :

16 $4y^2 + 8y + 3x^2 = 45$

12 $x^3 = f(y+1)$ وكان $f'(5) = 4$ وكان

$f(5)=8$ عند $y=4$

الحل : ج 3

17 $x = \tan y$ عند $x = 3$

14 $y^2 + 4x^2 = 4xy$ عند النقطة $(-1, 3)$,

الحل : 2

18 $x^2 + 2x^2y^2 = 9$ عند $(1, 2)$

حل : -20/8

ش2012

اذا كان $x = \tan 3y$ اوجد $y^{(2)}$ عند $x = \pi/4$
الحل : -1/6

مثال:

اذا كان $y = \sqrt{h(x)}$ اثبت ان $y' = \frac{h'(x)}{\sqrt{h(x)}}$

$$y = t^2 - \frac{1}{3}t, x = \frac{1}{2}t^2 - 2t \quad (19)$$

اوجد $\frac{d^2y}{dx^2}$ عند $t = 6$

مثال:

اذا كان $y = \sqrt[7]{x^3 + 3\cos 2x}$ اوجد y'
الحل : يمكن استخدام $\ln$ ليجاد مشتقة الجذور بالاضافة لقواعد الجذور الذي سبق وان تعلمناها

$$y = (x^3 + 3\cos 2x)^{1/7}$$

$$\ln y = \frac{1}{7} \ln(x^3 + 3\cos 2x)$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{3x^2 - 6\sin 2x}{7(x^3 + 3\cos 2x)}$$

$$y' = \frac{3x^2 - 6\sin 2x}{7(x^3 + 3\cos 2x)} y$$

$$y' = \frac{3x^2 - 6\sin 2x}{7(x^3 + 3\cos 2x)} \sqrt[7]{x^3 + 3\cos 2x}$$

هل تستطيع تبسيط الناتج اكثر ؟

وزارة

اذا كان $\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} = \sqrt{xy}$ حيث $x > 0, y > 0$ جد $\frac{dy}{dx}$

$$y = t^3 - 3t, x = t^3 - 3t \quad (20)$$

اوجد $\frac{d^2y}{dx^2}$ عند $t = 1$

4 اوجد $y^{(2)}$ لكل ممايلي

① $3x^2 - 4y^2 = 2$

② $x^3 y^3 = 5$

③ $x \cos y = y$

④ $\frac{1}{\sqrt{y}} \sin x = 1$

مثال اوجد $\frac{dy}{dx}$

① $2xy + \pi \sin y = 2\pi, (1, 2\pi)$

الحل : $-\pi/2$

② $2x^3 - x^2 y - y^3 - 1 = 0, (2, -3)$

الحل : $23/36$

③ $\frac{1}{x} + \frac{3}{y} = 0, (2, 6)$

الحل : -3

مثال

مثال. اذا كان اذا كان $y = x^x$ ، اوجد y'
الحل :

$$\ln y = \ln x^x$$

$$\ln y = x \ln x$$

$$\frac{y'}{y} = x * \frac{1}{x} + \ln x$$

$$y' = (1 + \ln x)y$$

$$y' = (1 + \ln x)x^x$$

تمرين عام

مثال

① اذا كان $\sin y = x, y \in (0, 2\pi)$

اثبت ان $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

② اذا كان d^2y

جد $y = \cos 2t, x = \sin 2t$ عندما $t = \frac{\pi}{4}$

$$dx^2$$

③ اوجد $\frac{dy}{dx}$ للعلاقات التالية

① $x^2 + y^2 = 10$

② $x^3 - y^3 = 6xy$

③ $\sin(x^2 y^2) = x$

① إذا كان $y = x \tan x$ اثبت ان
 $y^{(2)} + 2y \sec^2 x = 2 \sec^2 x$
 الحل :

جد النقطة على المنحنى العلاقة $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 3$
 التي تحقق العلاقة $y' = -2$
 الحل: $x=1, y=4$

② إذا كان $y = (\sec x + \tan x)^n$ اثبت ان
 $y' = ny \sec x$
 الحل :

مثال :
 $y' \text{ جد } y = \sqrt[3]{2x-5}$

③ $y = \sec 2x$ اثبت $y'' - 8y^3 + y = 0$

مثال
 إذا كان $\sin y = x, y \in (0, 2\pi)$ اثبت ان
 $y^{(2)} = \tan y \sec^2 y$

④ $\sin y = x : |x| < 1$ اثبت ان $y'' = \tan y \sec^2 y$

مثال
 إذا كان $xy = \sin x$ اثبت ان
 $xy'' + 2y' + xy = 0$
 ويمكن ان يكون السؤال على صورة
 $y = \frac{\sin x}{x}, x \neq 0$ إذا كان
 الحل :

انتبه عندما $x \neq 0$ نستطيع ضرب تبادلي

⑤ $x + y = xy$ اثبت ان $y'' = \frac{2y^3}{x^3}$

تمرين عام

$$y' = \frac{y^2 - xy + 1}{x^2 - xy + 1}$$

الحل: :
انتبه انتبه امامك

7 اثبت ان $y = \sin x + \cos x$

$$yy'' + 1 = -\sin 2x$$

الحل: :

8 اثبت ان $y = \sec x + \tan x$

$$y'' = y^2 \sec x$$

6 اثبت ان $y = \tan(xy)$

$$y' = \frac{y + y^3}{1 - x(1 + y^2)}$$

9 $y = (\sin x + \cos x)^4$

6 $e^{xy} = x - y$ (2015 ش) اثبت ان

$$\frac{d}{dx}(y * \frac{dy}{dx}) = 0$$

الحل :

اثبت ان $y'' + 4y = 12 \cos^2 2x$
الحل :

13 اثبت ان $y = \sin x - \cos x$

$$(y')^2 + y^2 = 2$$

10 اذا كان $\sin y = \tan x$ ، فاثبت ان :

$$\tan y = \frac{y''}{2\sec^2 x + (y')^2}$$

11 اثبت أن $y = \cos 2x$

$$\sec x y' + 4 \sin x = 0$$

الحل :

14 اثبت ان $y = \sin^4 x$

$$y'' + 16y = 12 \sin 2x$$

12 اذا كان $y = \sqrt{x}$ اثبت ان

15 إذا كان $f(x)$ اقتران قابل للاشتقاق عند x ، وكانت

17 أثبت ان $y = \sec 2x$

$$y'' - 8y^3 + 4y = 0$$

الحل :

$$y = \cos^n(f^2(x))$$

حيث $x \in \mathbb{Z}$ الاعداد الصحيحة، اثبت أن

$$y' = -2n \cos^{n-1}(f^2(x)) \sin(f^2(x)) (f(x)) f'(x)$$

18

$$f(x) = (3x^2 + 2)(x^3 - 2x + 1) \text{ اذا كان}$$

$$f'(1) * f''(1) = 210 \text{ اثبت}$$

الحل :

16 $\tan y = x$ اثبت أن

$$y''(1 + x^2) = -\sin 2y$$

19 اذا كان $f(x) = \frac{2}{x}$ اثبت ان

$$f'(1) = -4f''(2)$$

تمارين عام

- ① إذا كان L, L', L'' قابلاً للاشتقاق عند x ،
 وكان $f(x) = xL(x)$ اثبت ان
 $f^{(2)}(x) = xL^{(2)}(x) + 2L(x)$
 $f^{(3)}(x) = xL^{(3)}(x) + 3L(x)$

- ② إذا كان $y = \cos(x + \frac{\pi}{2})$ اثبت ان
 $y + y^{(2)} = 0$

الحل :

20 إذا كان $f(x) = x^n$ وكان

$$f^{(3)}(x) = 60x^n - 3 \text{ فما قيمة } n.$$

الحل: ج $n=5$

5 إذا كان $y = \sqrt{x + \sqrt{1 + x^2}}$

اثبت ان $y' = \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}$

الحل:

3 إذا كان $9x^2 + 12xy + 4y^2 - 7 = 0$ اثبت $y' = 0$

4 إذا كان $x^2 + y^2 = a^2$: ثابت

فبين ان $\left| \frac{y}{(1+(y')^2)^3} \right| = \frac{1}{a}$

8 إذا كان $y = \cos(\sin(\tan \sqrt{x}))$ اوجد y'

6 ليكن $f(y) = \sin(h(y))$ و $h(1) = \pi/3$, $h^{(2)}(1) = 3$, $f^{(1)}(1) = 0$ علما بان $f^{(2)}(1)$ قابلان للاشتقاق

الحل: $f^{(2)}(1) = 3/2$

9 إذا كان $y = \sin(xy)$ اوجد y' عند $(\frac{\pi}{2}, 1)$ الحل: :

7 اوجد المشتقات المتتالية $f(x) = x^{4/3}$ عند $x=0$ الحل: ج $f^{(n)}(0)$ D.N.E

الحل: :

11 إذا كان $h(x)$ اقتران قابل للاشتقاق عند $x=-2$
فجد $h(-2)=1, h'(-2)=2$ في كل مما يلي
الحل :

1. $f(x) = h(x)\sqrt{x^2 + 1}$

2. $f(x) = \frac{x^2-x}{h^2(x)}$

3. $f(x) = h(x) - \frac{h(x)}{x}$

4. $f(x) = \tan(\pi h(x))$

12 إذا كان $h(x) = 3x^2$, $f(x) = x^3 + 2x$ اوجد

1. $(f \circ h)'(1)$

2. $(f \circ h)''(1)$

ج 108 , 324

10 ليكن $y^3 = f(2x^2 - x)$ وكان $f(6)=4, f'(6)=-4$

اوجد y' عندما $x=2$
الحل :

13

صفحة معدنية مستطيلة الشكل تتمدد بانتظام بحيث يبقى طولها يساوي ثلاثة امثال عرضها اوجد معدل التغير في مساحة هذه الصفحة بالنسبة الى طولها عندما يكون طولها 15 سم

الحل:

14 ليكن $f(y) = \sin(h(y))$, $h(1) = \pi/3$, $h'(1) = 0$

وجد $f''(1)$ علما بان f' , f قابلان

للاشتقاق

الحل: