الدرس (3)

تمييز متوازي الأضلاع

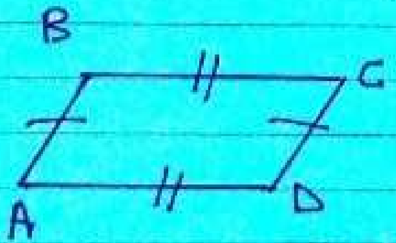
الوحدة (7)

تعلمت في الدرس السابق نظريات حول خصائص متوازي الأضلاع وسأتعلم في هذا الدرس عكس هذه النظريات ، بحيث يمكن تحديد ما اذا كان الشكل الرباعي متوازي اضلاع أم لا اذا كانت اضلاعه وزواياه واقطاره لها خصائص معينة

مفهوم أساسي

* عكس نظرية الأضلاع المتقابلة في متوازي الأضلاع *

اذا كان كل ضلعين متقابلين متطابقين في الشكل الرباعي ، فان الشكل الرباعي متوازي اضلاع

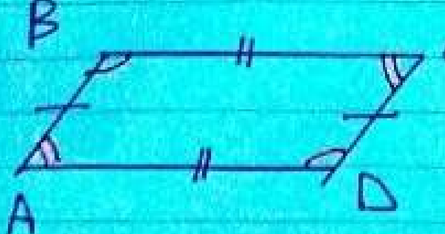


اذا كان $\overline{AB} \cong \overline{DC}$ ، $\overline{BC} \cong \overline{AD}$

فان ABCD متوازي اضلاع

* عكس نظرية الزوايا المتقابلة في متوازي الأضلاع *

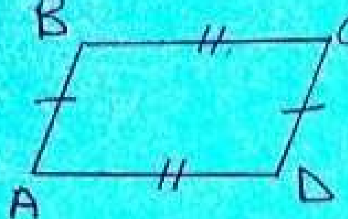
اذا كانت كل زاويتين متقابلتين متطابقتان في الشكل الرباعي فان الشكل الرباعي متوازي اضلاع.



اذا كان $\angle A \cong \angle C$ و $\angle B \cong \angle D$ فان الشكل الرباعي ABCD متوازي اضلاع

برهان النظرية « عكس نظرية الأضلاع المتقابلة في متوازي الأضلاع »

في الشكل المجاور، اذا كان $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ و $\overline{BC} \cong \overline{AD}$ ، فاثبت ان $ABCD$ متوازي أضلاع باستعمال البرهان ذي العمودين

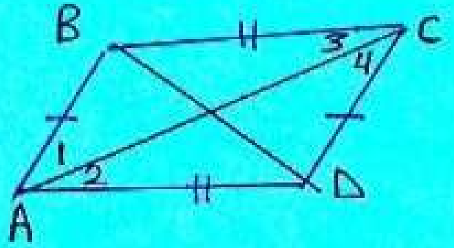


اخطط للبرهان باتباع الخطوات الآتية

خطوة (1): ارسم القطر $\overline{AC}$ لينتج $\triangle ABC$ و $\triangle CDA$

خطوة (2): استعمل حالة تطابق مثلثين بثلاثة أضلاع (SSS) لاثبت ان
$\triangle ABC \cong \triangle CDA$

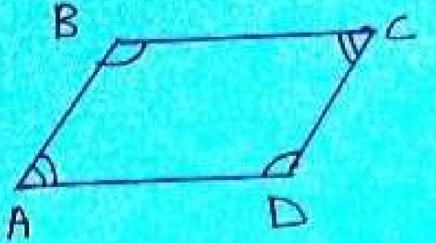
خطوة (3): استعمل الزوايا المتبادلة داخلياً، لاثبت ان الاضلاع المتقابلة متوازية



العبارات	المبررات
1) $\overline{BC} \cong \overline{DA}$ ، $\overline{AB} \cong \overline{CD}$	1) معطى
2) $\overline{AC}$	2) ضلع مشترك
3) $\triangle ABC \cong \triangle CDA$	3) SSS
4) $\angle 1 \cong \angle 4$ ، $\angle 3 \cong \angle 2$	4) زوايا متناظرة في مثلثين متطابقين
5) $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ و $\overline{BC} \parallel \overline{DA}$	5) عكس نظرية الزاويتين المتبادلتين داخلياً
6) $ABCD$ متوازي أضلاع	6) تعريف متوازي الأضلاع

التحقق من فهمي
85 ص
اثبات عكس نظرية الزوايا المتقابلة في متوازي اضلاع

في الشكل المجاور، اذا كان $\angle B \cong \angle D$ و $\angle A \cong \angle C$ فاثبت ان ABCD متوازي اضلاع



الحل :-

$\angle A \cong \angle C$ معطى
$\angle B \cong \angle D$

لكن مجموع زوايا الشكل الرباعي 360

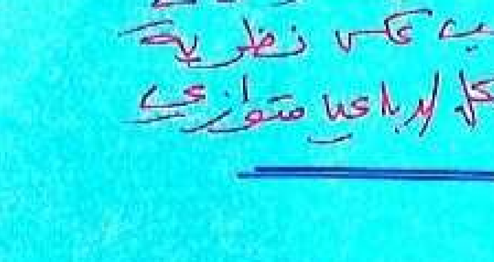
$$m\angle A + m\angle B + m\angle C + m\angle D = 360$$

نقسم على 2
$$2m\angle A + 2m\angle B = 360$$
$$m\angle A + m\angle B = 180$$

وعليه $\angle A$ و $\angle B$ متحالفتان ومجموع قياسهما 180
وحسب عكس نظرية التحالف فان $BC \parallel AD$
وبالمثل نتبع نفس الطريقة حيث نستبدل $m\angle A$ بـ $m\angle C$
واستبدل $m\angle B$ بـ $m\angle D$ وينتج $\angle C$ و $\angle D$
متحالفتان مجموع قياسهما 180 وحسب عكس نظرية
التحالف فان $AB \parallel CD$ وعليه الشكل الرباعي متوازي
اضلاع .

مسائل من الحياة

مثال
رافعة :- يبين الشكل المجاور رافعة للمركبات الثقيلة



① هل الشكل الرباعي QRSP متوازي اضلاع

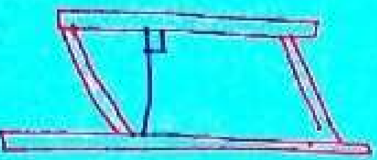
الحل :- بما أن كل ضلعين متقابلين
في الشكل الرباعي QRSP
متطابقان، فانه متوازي
اضلاع

② هل الشامنة موازية للارض؟ ابن اجابتي

الحل: بما أن QRSP متوازي اضلاع، فان $\overline{QR} \parallel \overline{PS}$
وبما أن $\overline{QR}$ يمثل المنصة التي تستقر عليها الشاحنة، و $\overline{PS}$ يقع على الارض فان الشاحنة موازية للارض

التحقق من فهمي
ص 86

③ ما أقصى ارتفاع يمكن ان ترفع الرافعة الشاحنة اليه؟ برر اجابتي



الحل: 2 m لان الضلع المائل PQ طوله 2m

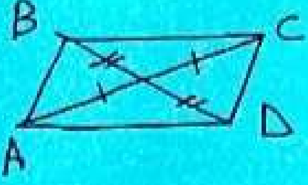
---

* عكس نظرية قطري متوازي الاضلاع *

مفهوم اساسي

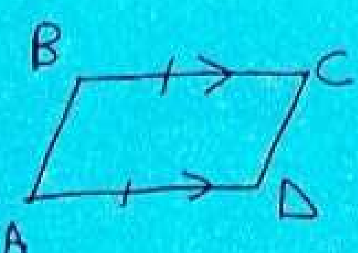
اذا كان قطرا شكل رباعي ينصف كل منهما الآخر، فان الشكل الرباعي متوازي اضلاع.

اذا كان $\overline{AC}$ و $\overline{BD}$ ينصف كل منهما الآخر فان ABCD متوازي اضلاع



* نظرية الاضلاع المتوازية والمتطابقة *

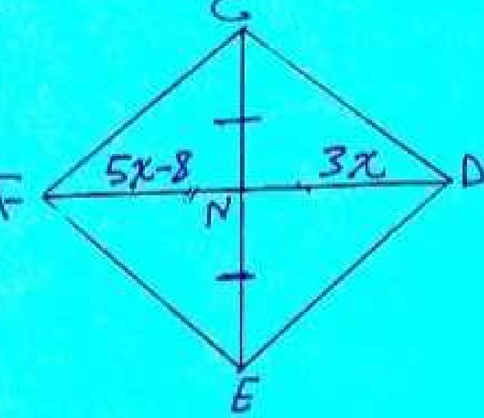
اذا توازى وتطابق ضلعان متقابلان في شكل رباعي، فان الشكل الرباعي متوازي اضلاع



اذا كان $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$ و $\overline{BC} \cong \overline{AD}$
فان ABCD متوازي اضلاع

* يمكن استعمال شروط متوازي الأضلاع لإيجاد القيم المجهولة التي تجعل الشكل الرباعي متوازي أضلاع

مثال جد قيمة x التي تجعل الشكل الرباعي FCDE المجاور متوازي أضلاع



الحل: بناءً على عكس نظرية قطري متوازي الأضلاع، وبما أنه معطى في الشكل $\overline{CN} \cong \overline{EN}$، فإن قيمة x هي التي تجعل $\overline{FN} \cong \overline{DN}$

$FN = DN$

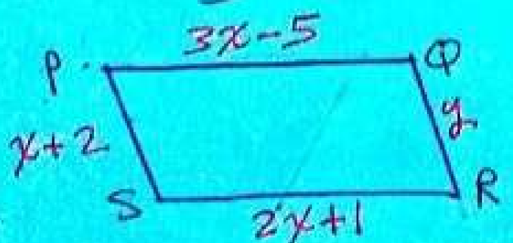
$5x - 8 = 3x$ شكل معادلة

حل المعادلة

$$5x - 8 = 3x$$
$$-3x \quad -3x$$
$$2x - 8 = 0$$
$$+8 \quad +8$$
$$\frac{2x}{2} = \frac{8}{2}$$
$$\boxed{x = 4}$$

التحقق من فهمك ص87

جد قيمتي x و y اللتين تجعلان الشكل الرباعي PQRS المجاور متوازي أضلاع



الحل: نجد x و y اللتين تجعلان كلا ضلعين متقابلين متطابقين

حساب x

$$PQ = SR$$
$$3x - 5 = 2x + 1$$
$$-2x \quad -2x$$
$$x - 5 = 1$$
$$+5 \quad +5$$
$$\boxed{x = 6}$$

حساب y

$$QR = PS$$
$$y = x + 2$$
نعوض $x = 6$
$$y = 6 + 2$$
$$\boxed{y = 8}$$

ملخص المفهوم

* طرائق اثبات ان الشكل الرباعي متوازي اضلاع *

يكون الشكل الرباعي متوازي اذا حقق أياً من الشروط الآتية:

1) اذا كان كل ضلعين متقابلين منه متوازيين «التعريف»

2) اذا كان كل ضلعين متقابلين منه متطابقين «عكس نظرية الاضلاع المتقابلة في متوازي الأضلاع»

3) اذا كانت كل زاويتين متقابلتين منه متطابقتين «عكس نظرية الزوايا المتقابلة في متوازي الأضلاع»

4) اذا كان قطراه ينصف كل منهما الآخر «عكس نظرية قطري متوازي الأضلاع»

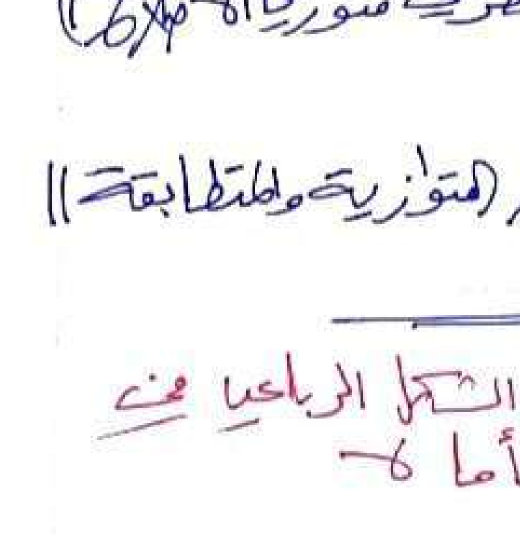
5) اذا كان منه ضلعان متقابلان متوازيان ومتطابقان «نظرية الاضلاع المتوازية والمتطابقة»

---

* يمكن استعمال الميل لتحديد ما اذا كان الشكل الرباعي في المستوى الاحداثي متوازي اضلاع أم لا

مثال

أثبت ان $A(2,-1)$ و $B(1,3)$ و $C(6,5)$ و $D(7,1)$ تمثل متوازي أضلاع



__خطوة (1)__: امثل الشكل الرباعي في المستوى الاحداثي

__خطوة (2)__: جد ميل كل ضلع من اضلاع الشكل الرباعي حسب القانون $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

ميل $\overline{AB}$: $m = \frac{3 - -1}{1-2} = -4$

ميل $\overline{CD}$: $m = \frac{1-5}{7-6} = -4$

ميل $\overline{BC}$: $m = \frac{5-3}{6-1} = \frac{2}{5}$

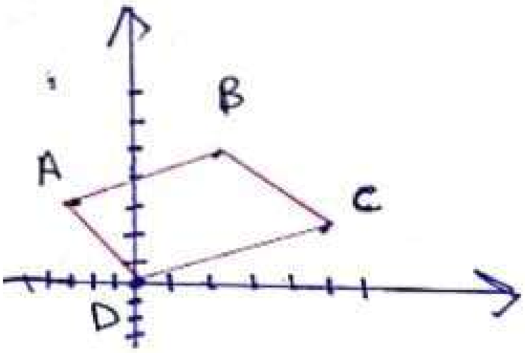
ميل $\overline{DA}$: $m = \frac{-1-1}{2-7} = \frac{2}{5}$

__خطوة (3)__: نقارن ميل كل ضلعين متقابلين

بما ان كل ضلعين متقابلين لهما الميل نفسه فهما متوازيان وعليه تشكل متوازي اضلاع «التعريف»

التقويم من واجبي صـ 88

أثبت أن $D(0,0)$ و $C(5,2)$ و $B(2,5)$ و $A(-3,3)$ تمثل رؤوس متوازي أضلاع.



الحل:- ميل $\overleftrightarrow{AB}$ ∴ $m=\frac{5-3}{2+3}=\frac{2}{5}$

ميل $\overleftrightarrow{BC}$ ∴ $m=\frac{2-5}{5-2}=\frac{-3}{3}=-1$

ميل $\overleftrightarrow{CD}$ ∴ $m=\frac{0-2}{0-5}=\frac{2}{5}$

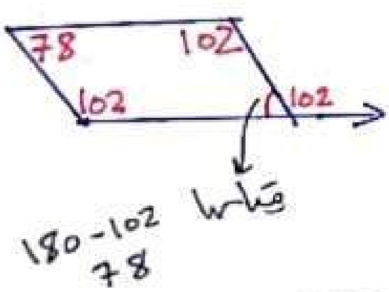
ميل $\overleftrightarrow{DA}$ ∴ $m=\frac{3-0}{-3-0}=-1$

بما أن كل ضلعين متقابلين لهما الميل نفسه، فعليه كل ضلعين متقابلين متوازيين، إذن الشكل الرباعي ABCD متوازي أضلاع

التدرب وحل المسائل صـ 88

أبيّن ما إذا كان كل شكل من الأشكال الرباعية الآتية متوازي أضلاع أم لا، مبررًا إجابتي

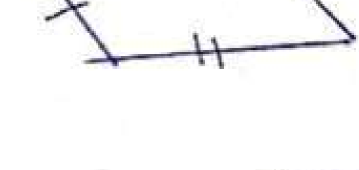
(1)



كل زاويتين متقابلتين متطابقتين وعليه متوازي أضلاع

« عكس نظرية الزوايا المتقابلة في متوازي الأضلاع »

(2)



كل ضلعين متقابلين متطابقين وعليه متوازي أضلاع

« عكس نظرية الأضلاع المتقابلة في متوازي الأضلاع »

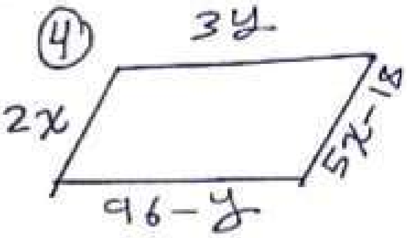
(3)

توجد زاويتان في وضع تبادل متطابقتين وعليه $\angle 1 \cong \angle 2$ فإن $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ وبما أنهما متطابقين $AB \cong CD$ وعليه الشكل متوازي أضلاع

« نظرية الأضلاع المتوازية والمتطابقة »

جد قيمة x و y اللتين تجعلان كل شكل مما يأتي متوازي اضلاع

(4)



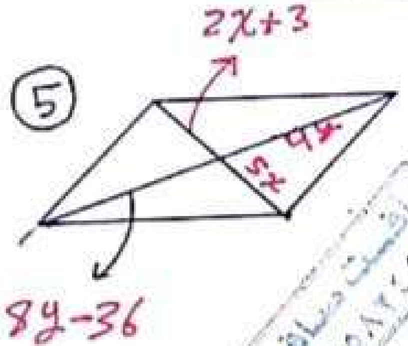
الحل :- كل ضلعين متقابلين متطابقان :-

$$3y = 96 - \cancel{y}$$
$$+y \qquad \cancel{+y}$$
$$\frac{4y}{4} = \frac{96}{4}$$
$$\boxed{y = 24}$$

$$5x - 18 = \cancel{2x}$$
$$-2x \qquad \cancel{-2x}$$
$$3x - \cancel{18} = 0$$
$$\cancel{+18} \quad +18$$
$$\frac{3x}{3} = \frac{18}{3}$$
$$\boxed{x = 6}$$

---

(5)



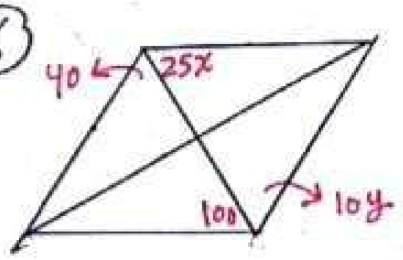
الحل :- انصاف الاقطار تنصف كل منها الآخر

$$5x = 2x + 3$$
$$-2x \qquad -2x$$
$$\frac{3x}{3} = \frac{3}{3}$$
$$\boxed{x = 1}$$

$$8y - 36 = \cancel{4y}$$
$$-4y \qquad \cancel{-4y}$$
$$4y - \cancel{36} = 0$$
$$\cancel{+36} \quad +36$$
$$\frac{4y}{4} = \frac{36}{4}$$
$$\boxed{y = 9}$$

---

(6)

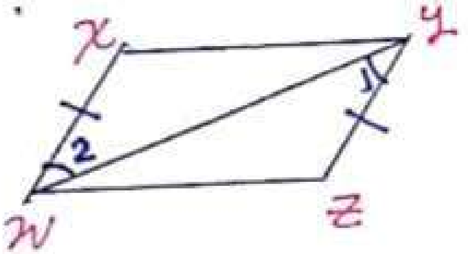


الحل :- الزوايا المتبادلة متطابقة ليصبح الشكل متوازي اضلاع

$$\frac{40}{10} = \frac{10y}{10}$$
$$\boxed{y = 4}$$

$$\frac{25x}{25} = \frac{100}{25}$$
$$\boxed{x = 4}$$

7) استعمل المعلومات المعطاة في الشكل الآتي لكتابة برهان سهمي لاثبت ان الشكل الرباعي $XYZW$ متوازي اضلاع



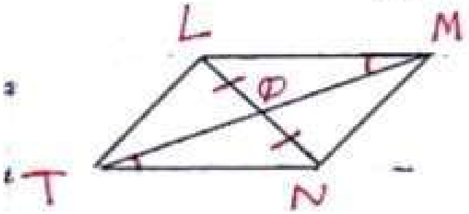
الحل :-

$\angle XWY \cong \angle ZYW$ (معطى) → $\overline{WX} \parallel \overline{YZ}$ (زاويتان متبادلتان داخلياً) → $XYZW$ متوازي اضلاع

$\overline{WX} \cong \overline{YZ}$ (معطى) → $XYZW$ متوازي اضلاع (نظرية الاضلاع المتوازية والمتطابقة)

---

8) استعمل المعلومات المعطاة في الشكل الآتي لكتابة برهان سهمي لاثبت ان الشكل الرباعي $LMNT$ متوازي اضلاع



$\overline{LQ} \cong \overline{NQ}$ (معطى)

$\angle LMQ \cong \angle NTQ$ (معطى)

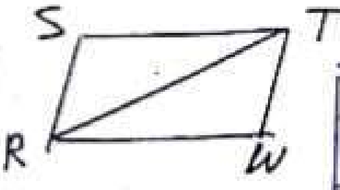
$\angle LQM \cong \angle NQT$ (متقابلتان بالرأس)

→ $\triangle NQT \cong \triangle LQM$ (AAS) → $\overline{TQ} \cong \overline{MQ}$ (ضلعان متناظران في مثلثين متطابقين) → $LMNT$ متوازي اضلاع (شكل رباعي قطراه ينصف كل منهما الآخر)

$\overline{LQ} \cong \overline{NQ}$ → $LMNT$ متوازي اضلاع

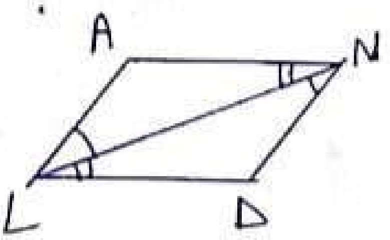
---

9) في الشكل الآتي لاذا كان $\triangle TRS \cong \triangle RTW$ فأثبت ان $RSTW$ متوازي اضلاع باستعمال البرهان ذي العمودين



العبارات	المبررات
$\triangle TRS \cong \triangle RTW$	معطى
$\angle STR \cong \angle WRT$	زاويتان متناظرتان في مثلثين متطابقين
$\overline{ST} \parallel \overline{RW}$	الزاويتان $\angle WRT$ و $\angle STR$ متطابقتان ومتبادلتان داخلياً
$\overline{ST} \cong \overline{RW}$	ضلعان متناظران في مثلثين متطابقين
ABCD متوازي اضلاع	شكل رباعي فيه ضلعان متقابلان متطابقان ومتوازيان

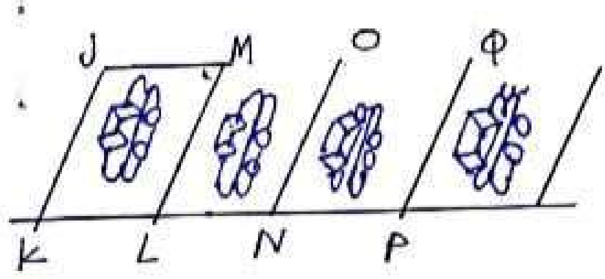
⑮ استعمل المعلومات المعطاة في الشكل الآتي لكتابة برهان ذي العمودين لأثبت ان الشكل الرباعي ANDL متوازي اضلاع .



العبارات	المبررات
$\angle ANL \cong \angle DLN$	معطى
$\overline{AN} \parallel \overline{DL}$	الزاويتان $\angle ANL$ و $\angle DLN$ متطابقتان ومتبادلتان داخلياً
$\angle ALN \cong \angle DNL$	معطى
$\overline{AL} \parallel \overline{DN}$	الزاويتان $\angle ALN$ و $\angle DNL$ متطابقتان ومتبادلتان داخلياً
ANDL متوازي اضلاع	تعريف متوازي الاضلاع

⑮ موقف سيارات :- يبين الشكل المجاور موقفاً للسيارات . اذا كان

$KL = JM = 3m$ و $JK = LM = 7m$ و $m\angle JKL = 60$



⑪ هل الجزء من الموقف JKLM متوازي اضلاع ؟ برر اجابتك

الحل: نعم لأنه كل ضلعين متقابلين متطابقين

(عكس نظرية الاضلاع المتقابلة في متوازي الأضلاع)

⑫ جد كلاً من $m\angle KLM$ و $m\angle KJM$ و $m\angle JML$

الحل:

$m\angle KLM = 180 - 60 = 120$ « لأنه $\angle JKL$ و $\angle KLM$ في وضع تحالف »

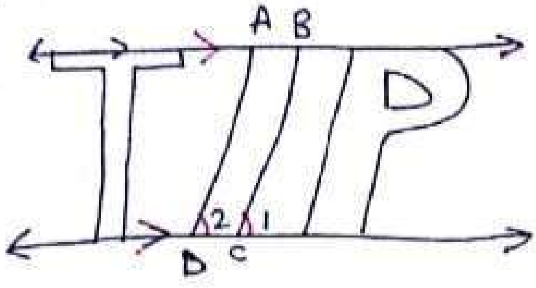
$m\angle KJM = 120$ « $\angle KJM$ تقابل $\angle KLM$ وهما متطابقتان ».

$m\angle JML = 60$ « تقابل الزاوية $\angle JKL$ »

⑬ هل $\overline{JK} \parallel \overline{PQ}$ ؟ ابرر اجابتك

الحل:- لا نستطيع الحكم على استقامتها لعدم توفر كافي من الزوايا

حاسوب: تسمح معالجات نصوص حاسوبية عدة بكتابة الكلمة بالخط العادي أو الخط المائل ، هل حرف I متوازي أضلاع.



الحل:- نعم أو لا :-

معطى $CD \parallel AB$

$\angle 1 \cong \angle 2$ معطى وهما متناظرة

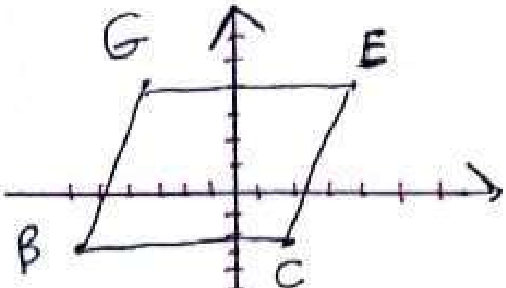
تناظر معلوم $AD \parallel BC$

«تماس مسافة التوازيين (التناظرية)»

وعليه ... كل ضلعين متقابلين متوازيين فإن حرف I متوازي أضلاع «تعريف»

امثل في المستوى الاحداثي الشكل الرباعي المعطاة احداثيات رؤوسه في ما يأتي ، وأحدد ما اذا كان متوازي أضلاع أم لا.

(15) $B(-6,-3)$, $C(2,-3)$, $E(4,4)$, $G(-4,4)$



الحل:- نجد ميل كل ضلعين متقابلين

الضلع GE :- $m = \frac{4-4}{-4-4} = 0$

الضلع BC :- $m = \frac{-3--3}{2--6} = 0$

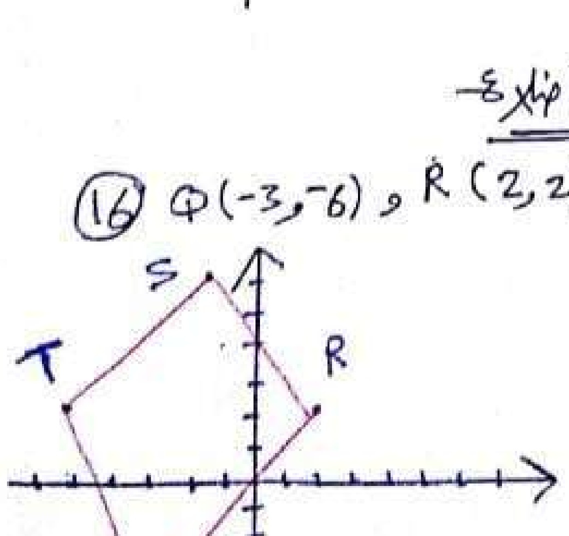
الضلع GB :- $m = \frac{4+3}{-4+6} = \frac{7}{2}$

الضلع EC :- $m = \frac{4+3}{4-2} = \frac{7}{2}$

كل ضلعين متقابلين متوازيان ، الشكل متوازي أضلاع

---

(16) $Q(-3,-6)$ و $R(2,2)$ و $S(-1,6)$ و $T(-5,2)$

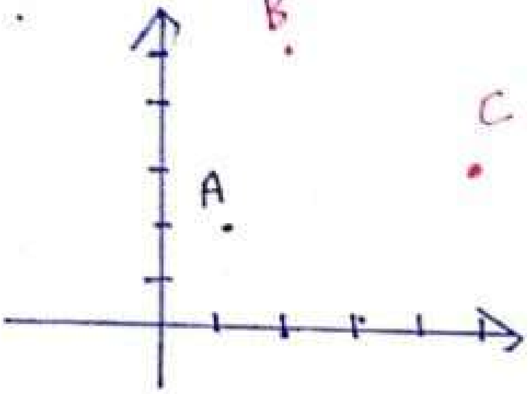


الضلع TS :- $m = \frac{2-6}{-5+1} = 1$

:QR $m = \frac{2+6}{2+3} = \frac{8}{5}$

هنا الضلعان المتقابلان غير متوازيان وعليه الشكل ليس متوازي أضلاع

تدريب :- تمثل النقاط A و B و C في المستوى الاحداثي المجاور رؤوس شكل رباعي ، جد احداثيات النقطة الرابعة في كل من الحالات الآتية ، مبرراً اجابتي



(17) النقطة D حيث ABCD متوازي اضلاع

الحل :- نلاحظ انه اذا اردنا الوصول من B الى A فاننا ننزل 3 وحدات للاسفل ووحدة لليسار ، وبالمثل نعمل عند C وتكون النقطة D احداثياتها $(4,0)$

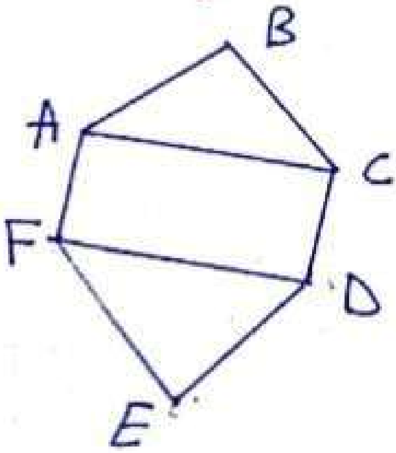
« التحرك من A بعكس عقارب الساعة »

(18) النقطة E حيث ABEC متوازي اضلاع

الحل: هنا عند التحرك من A إلى B يجب التحرك للاعلى ليصبح الشكل متوازي اضلاع ، حيث من A الى B تحركنا خطوة لليمين و 3 خطوات للاعلى وبالمثل نعمل من النقطة C وتكون النقطة D احداثياتها $(6,6)$

---

(19) أثبت ان الشكل الرباعي FACD متوازي اضلاع علماً بأن ABCDEF سداسي منتظم



الحل :

$\overline{FA} \cong \overline{DC}$ « اضلاع مضلع منتظم »

$\triangle FED$ ، $\triangle ABC$ فيهما :-

$\overline{AB} \cong \overline{FE}$ اضلاع منتظم

$\overline{BC} \cong \overline{ED}$ الاضلاع متطابقة

$\angle B \cong \angle E$ والزوايا متطابقة

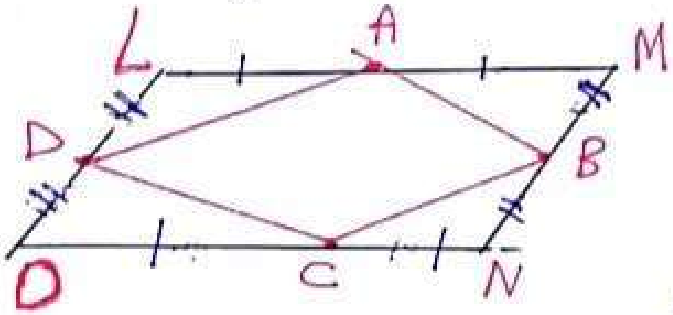
وعليه المثلثان متطابقان وعليه :-

$AC \cong FD$ « ضلعان متناظران في مثلثين متطابقين »

بما ان كل ضلعين متقابلين متطابقين فان الشكل الرباعي FACD متوازي اضلاع .

« عكس نظرية الاضلاع المتقابلة في متوازي اضلاع »

20 تحدٍّ :- يبين الشكل المجاور متوازي الاضلاع LMNO وتمثل النقاط A,B,C,D منتصفات اضلاعه . أثبت ان الشكل ABCD متوازي اضلاع .



الحل :- بما أن LMNO متوازي اضلاع فان كل ضلعين متقابلين متطابقان وبما ان A و B و C و D منتصفات الاضلاع فان :-

$LA \cong AM \cong OC \cong CN$

$LD \cong DO \cong \overline{MB} \cong \overline{BN}$

نطابق المثلثان $\triangle AMB$ و $\triangle ODC$

$\overline{AM} \cong \overline{OC}$

$MB \cong \overline{OD}$

$\angle m = \angle O$ متقابلين في متوازي اضلاع

وعليه المثلثان متطابقان SAS

وينتج ان $\overline{AB} \cong \overline{DC}$ ضلعان متناظران في مثلثان متطابقين

وبالمثل نطابق المثلثان $\triangle CNB$ و $\triangle DLA$

وينتج $DA \cong CD$

وبما ان الشكل الرباعي ABCD فيه كل ضلعين متقابلين متطابقين وعليه الشكل الرباعي متوازي اضلاع

" عكس نظرية الاضلاع المتقابلة في متوازي الاضلاع "


WWW.JNOB-JO.COM