

إدارة المناهج والكتب المدرسية

إجابات و حلول الأسئلة

الصف: الثامن الأساسي الكتاب: الرياضيات الجزء: الأول

الوحدة (٥) المعادلات الخطية بمتغيرين

الدرس الأول: المعادلة الخطية بمتغيرين

فكر:

• طلبت المعلمة من الطالبات كتابة المعادلة $٢-(هـ - و - ٧) = ١٤$ على

الصورة العامة، فأجابت كل من سلمى وريم ورزان ولمى بالإجابات

الآتية على الترتيب:

$$٢-هـ - ٢ و = ٠$$

$$٢-هـ + ٢ و = ٠$$

$$-هـ + و = ٠$$

$$هـ - و = ٠$$

أيهن أصابت؟ برر إجابتك.

الحل:

رزان

$$٢-(هـ - و - ٧) = ١٤$$

$$٢-هـ + ٢ و + ١٤ = ١٤ \quad \text{ب طرح ١٤ من كلا الطرفين}$$

$$٢-هـ + ٢ و = ٠ \quad \text{بقسمة كلا الطرفين على ٢}$$

$$-هـ + و = ٠$$

تدريب ٢: ميّز المعادلة الخطية بمتغيرين من غيرها فيما يأتي:

أ) $٧ص + س = ٥٣$ ب) $١١ل - ٥ = ٥$

ج) $٤٤ - ك = ٢ل$ د) $٢,٩١س = ٢,٩١ص$

هـ) $٤ج + \sqrt[٣]{٢٨د} = ١٧$ و) $٠ = (ل - ١)ع$

الحل:

أ) $٧ص + س = ٥٣$ ✓ ب) $١١ل - ٥ = ٥$ ✗

ج) $٤٤ - ك = ٢ل$ ✗ د) $٢,٩١س = ٢,٩١ص$ ✓

هـ) $٤ج + \sqrt[٣]{٢٨د} = ١٧$ ✓ و) $٠ = (ل - ١)ع$ ✗

فكر ثم ناقش:

لماذا يُشترط في الصورة العامة للمعادلة الخطية بمتغيرين أن لا يكون معامل س فيها صفراً، كذلك أن لا يكون معامل ص فيها صفراً؟

الحل: حتى تبقى بمتغيرين.

تدريب ٣

أ) أي الأزواج الآتية حل للمعادلة -٢هـ - و = ٠ ، مبررا إجابتك:

$$(-١، ٢)، (٢، ٤)، (١١، -٢٢)$$

الحل: $(-١، ٢)، (١١، -٢٢)$ لأنهما يحققان المعادلة عند التعويض.

ب) تتكون إحدى المؤسسات من ٥٨ موظفة وموظف. اكتب المعادلة التي توضح العلاقة بين عدد الموظفات وعدد الموظفين ثم قدم حلين للمعادلة مبررا إجابتك.

الحل:

$$س + ص = ٥٨$$

$$(٤٤، ١٤) \text{ حل لأن } ٤٤ + ١٤ = ٥٨ \text{ بالمثل } (٥٠، ٨) \text{ حل.}$$

تدريب ٤

أ) أعد حل نشاط ٣ بجعل المتغير س موضوعاً للقانون.

$$(١) \quad ٦س - ٢ص = ٨ \quad \leftarrow \quad س = \frac{٨+٢ص}{٦}$$

$$(٢) \quad ١٥س = -٧ + ص \quad \leftarrow \quad س = \frac{-٧+ص}{١٥}$$

$$(٣) \quad \frac{٢}{٥}س + \frac{١}{٥}ص = ٠ \quad \leftarrow \quad س = -\frac{١}{٢}ص$$

$$(٤) \text{ ص } ٣ = ١٠ - \text{ ص } ٢ + \text{ ص } ٢ \leftarrow \text{ ص } = ٥ - \frac{\text{ ص }}{2}$$

(ب) كَوْن معادلةٍ خطيةً بمتغيرين وأعد صياغتها بجعل س موضوعاً لها ثم ص موضوعاً لها.

الحل:

$$\text{ ص } - \text{ ص } = ٦ \quad \text{ ومنه } \text{ ص } = \text{ ص } - ٦$$

ناقش صحة العبارات الآتية مدعماً إجاباتك بأمثلة إن لزم الأمر:

(١) عند تغيير موضوع القانون من س إلى ص مثلاً أو العكس فإن مجموعة حل المعادلة تتغير.

(٢) كل اقتران خطي هو معادلة خطية بمتغيرين، والعكس صحيح.

(٣) $\text{ ص } = - ٣$ هي معادلة خطية بمتغير واحد لكن ليست اقتراناً. برر إجابتك بطريقتين.

الحل:

(١) الجواب لا تتغير

مثال: مجموعة حل $\text{ ص } + \text{ ص } = ٠$ هي مجموعة جميع الأزواج المرتبة التي مسقطها الثاني معكوس الأول.

وعند وضع س موضوع للقانون، أو ص موضوع للقانون:

$\text{ ص } = -$ مجموعة الحل هي مجموعة جميع الأزواج المرتبة التي مسقطها الثاني معكوس الأول.

ص = - س مجموعة الحل هي مجموعة جميع الأزواج المرتبة التي مسقطها الأول معكوس للثاني.

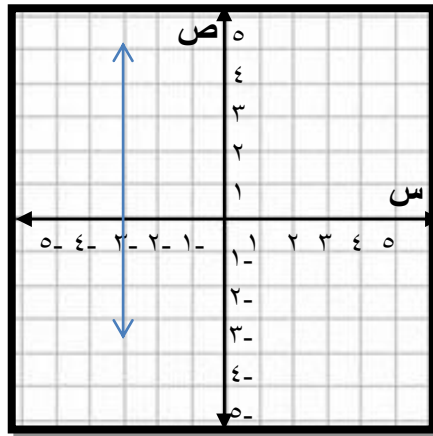
(٢) صحيح لأن ق(س) هي نفسها ص، فمثلاً ق(س) = ٢ س تكتب

ص = ٢ س. وكلتاها معادلة خطية بمتغيرين وبالمثل كلتاها اقتران خطي.

(٣) س = - ٣ هي معادلة خطية بمتغير واحد لكن ليست اقتراناً. برر إجابتك بطريقتين.

طريقة ١: الاقتران علاقة لكل عنصر في مجالها صورة واحدة فقط في المدى بينما س = - ٣ هي علاقة مجالها العدد -٣ والذي له عدد لانهائي من الصور في المدى حيث كل من (-٣ ، ١) ، (-٣ ، -١) تحققان المعادلة وغيرها الكثير.

طريقة ٢: بتمثيل العلاقة س = - ٣، واختبار الخط الرأسي نجد أنها ليست اقتران.



تمارين ومسائل

(١) ميّز المعادلات الخطية بمتغيرين فيما يأتي مبرراً إجابتك:

$$\text{أ) } \begin{cases} ١٨ + ص = ٩ س \\ ع (٢ - ع) = ٤ ل - ع^٢ \end{cases}$$

$$\text{ب) } \begin{cases} ٣ ن + ١٧ م = - م ن \\ ٥ ط = ي - ٥ ط \end{cases}$$

$$\text{ج) } ٢٨ = س \quad \text{د) } \frac{٣}{١١} ل = \frac{٣}{١١} ك \quad \text{هـ) } ٢٨ = س$$

الحل:

كل من أ ، ب ، ج ، و معادلة خطية بمتغيرين لأننا يمكننا وضعها

على الصورة العامة:

$$س + ب ص + ج = ٠ \text{ حيث } أ، ب، ج \in \mathbb{R}، أ، ب \neq ٠$$

(٢) أعد صياغة المعادلة $٤ل + ٩ = ل + ع$ بجعل ل موضوعاً للقانون،

ثم بجعل ع موضوعاً للقانون.

الحل:

$$ل = \frac{٤-٩}{٥}، \quad ع = ٩ - ٥ل$$

(٣) بيّن إذا كان الزوج المرتب إزاء كل معادلة فيما يأتي حلاً لها:

$$\text{أ) } ٢ س - ص = ٨ \quad (١، -٦) \quad \text{ب) } ٣ س + ٢ ص = -١٢ \quad (٤، ٠)$$

الحل:

$$(أ) (١، ٦) \text{ حل لأن } ٨ = (٦-) - (١)^2$$

$$(ب) (٤، ٠) \text{ ليس حل لأن } ١٢- \neq (٠)^2 + (٤)^3$$

(٤) أجب عن كل مما يأتي:

أ) هل يمثل قانون حساب مساحة الدائرة معادلةً خطيةً بمتغيرين؟ برّر إجابتك.

الجواب: لا لأن المتغير نق فيها مرفوع للقوى ٢

ب) قدّم أمثلة لقوانين رياضية تمثل معادلات خطيةً بمتغيرين.

الحل: محيط الدائرة:

$$م = \pi^2 \text{ نق}$$

٥) عددان، خمسة أمثال الأول مطروحا من الثاني يساوي ١٠، اكتب معادلة خطية بمتغيرين توضح العلاقة بين هذين العددين، ثم اكتب حلين لها مبررا إجابتك.

الحل: ص – ٥ س = ١٠ وكل من (١٥، ١)، (٢٠، ٢) حل لها لأنهما يحققانها عند التعويض.

٦) المعادلة $٤ = ص^2 + س^2$ هي معادلة دائرة، قال عادل هي معادلة بمتغيرين، وقال قصي هي معادلة ليست خطية، أيهما أصاب؟ برّر إجابتك.

عادل أصاب إذ أنها معادلة بمتغيرين لكنها ليست خطية لأن قوى كل متغير $\neq ١$.

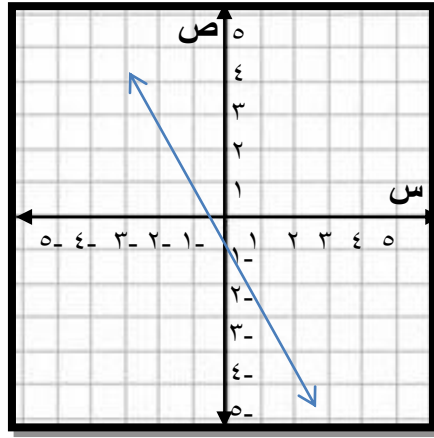
الدرس الثاني: التمثيل البياني لمعادلة خطية بمتغيرين

تدريب ١

مثّل مجموعة حل المعادلة $٣ + ٦س + ٣ص = ٠$ بيانياً، ثم حدّد أي النقاط الآتية تنتمي إلى مجموعة الحل مبرراً إجابتك:

$$(١٠، -٢١)، (٠، ٠)، (-\frac{1}{2}، ٠)، (-١٧، -٣٥).$$

الحل:



$(٠، ٠)$ من الرسم لا تقع على الخط إذا لا تنتمي لمجموعة الحل.

$(٠، -\frac{1}{2})$ من الرسم تقع على الخط إذا تنتمي لمجموعة الحل.

$(١٠، -٢١)$ تحقق المعادلة $٣ + ٦س + ٣ص = ٠$

عند التعويض فيها فهي حل لها.

$(٣٥، -١٧)$ لا تحقق المعادلة $٣ + ٦س + ٣ص = ٠$

عند التعويض فيها فهي ليست حل لها.

تدريب ٢

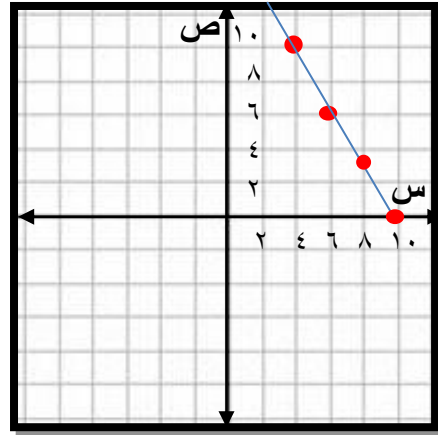
أ) حل المسألة الآتية بيانياً:

يبيع أحمد البناطيل والقمصان، إذا كان يربح في البنطال الواحد ثلاث دنانير وفي القميص الواحد دينارين، ويخطط ليكون مجموع أرباحه اليومية ٣٠ دينار. ما عدد البناطيل والقمصان التي عليه بيعها يومياً لتحقيق هذا الربح؟

الحل:

$$٣س + ٢ص = ٣٠ \text{ حيث } س \text{ عدد البناطيل، } ص \text{ عدد القمصان}$$

وبتمثيل المعادلة بيانياً لحصر كافة الحلول بيانياً



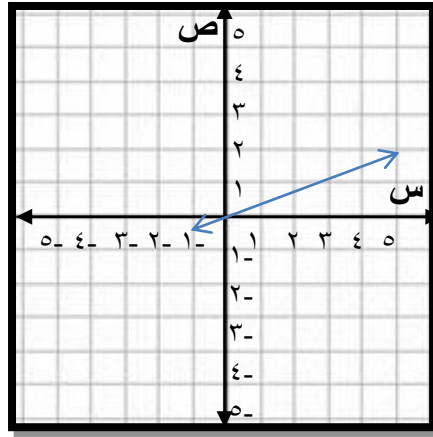
نجد أن الحل هو جميع الأزواج المرتبة التي تقع على الخط في الربع الأول من المستوى والتي كل من الإحداثياتها أعداد صحيحة والتي هي $(١٢, ٢)$ ، $(١٠, ٤)$ ، $(٦, ٦)$ ، $(٣, ٨)$ ، $(٠, ١٥)$ هي $(١٥, ٠)$.

تمارين ومسائل

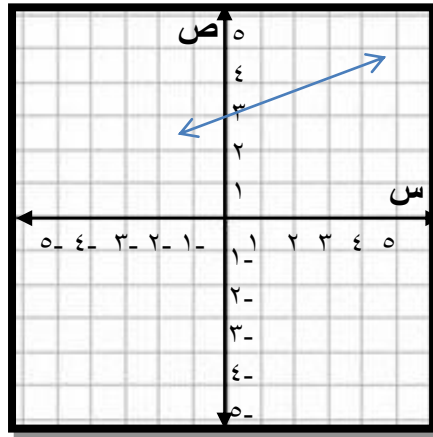
(١) أجب عن الأسئلة الآتية:

أ) مثل كل معادلة مما يأتي بيانياً:

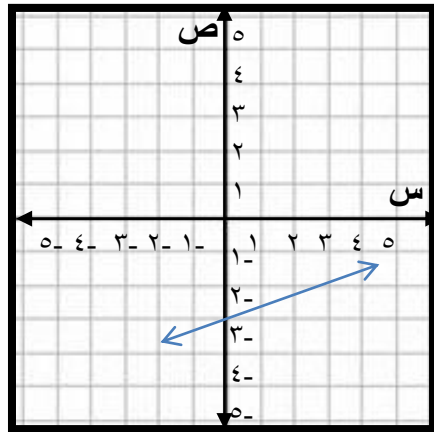
$$(١) \text{ ص } = \frac{1}{3} \text{ س}$$



$$(٢) \text{ ص } = \frac{1}{3} \text{ س} + ٣$$



$$(٣) \text{ ص } = \frac{1}{3} \text{ س} - ٣$$



(ب) أي الأزواج المرتبة $(٩، ٠)$ ، $(٠، ٣)$ ، $(-٢، -٧)$ ، $(٩، -٣)$ ، $(هـ، \frac{٥}{٣})$ ،

($\sqrt[3]{5}$ ، $3 - \frac{\sqrt[3]{5}}{3}$) ينتمي إلى مجموعة حل المعادلة :

$$\text{ص} = \frac{1}{3} \text{س} - 3?$$

الحل:

كل من $(٩, ٠)$ ، $(٠, ٣)$ ، $(\frac{٥}{٣}, ٥)$ ، من الرسم لاتنتهي لأن كل منها لا

يقع على الخط (بالنسبة للنقطة (هـ ، $\frac{2}{3}$) فإنها تعني كل عدد يرتبط

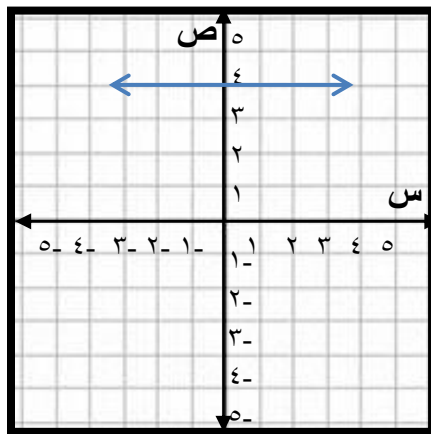
مع ثلثه ومن الخط البياني هذا لا يتحقق).

(٢٠٧ ، ٣٠٩) تنتمي لأنها تحقق المعادلة عند التعويض بها.

($\sqrt[3]{5}$ ، $3 - \frac{\sqrt[3]{5}}{3}$) لا تنتمي لأنها لا تحقق المعادلة عند التعويض بها.

(٢) مثل المعادلة ٣ ص - ١٢ = ٠ بيانياً، ثم حدد علاقة المستقيم الناتج مع كل من محور السينات ومحور الصادات.

الحل: ٣ ص - ١٢ = ٠ بوضع ص موضوع للقانون ص = ٤.



یوازي محور س

٣) كَوْن معادلةٍ خطيّة بمتغيرين في كلِّ مما يأتي، ثم مثّلها بيانياً:

أ) درجة حرارة الجو بالفهرنهايت ف تساوي تسع أخماس درجة الحرارة بالسيليسيوس مضافاً إليها ٣٢.

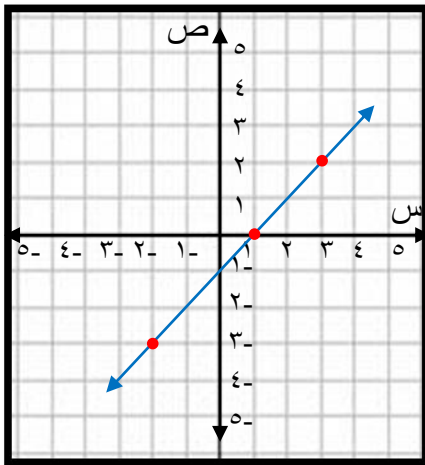
المعادلة هي: $ف = \frac{9}{5}س + ٣٢$ (عند التمثيل نعتبر ف هي ص)

ب) عدنان طبيعّان مجموعهما ١٧.

المعادلة هي: $س + ص = ١٧$ (عند التمثيل يكون الحل جميع الأزواج المرتبة التي مسقطيها عدنان طبيعّان)

ج) محيط شكلٍ تُساعيٍّ مُنتظمٍ.

ص = ٩س حيث س طول الضلع و ص المحيط.



٤) اكتب معادلة المستقيم الممثل جانبا؟

ثم تحقق من صحتها.

المعادلة:

$$ص = س - ١$$

والتحقق من الصحة بتعويض

نقطتين تقعان على الخط فيها مثل (٢ ، ٣) ، (٠ ، ١)

الدرس الثالث: حل المعادلتين الخطيتين بمتغيرين بيانياً

فكر ثم ناقش

- في نظام من معادلتين خطيتين بمتغيرين، لماذا تُعتبر مجموعة حله حلاً للمعادلة الأولى وكذلك للثانية؟
- كيف يمكنك التحقق من أنّ الزوج المرتب الناتج من تقاطع المستقيمين الممثلين لمجموعة حل معادلتين في نظام ما هو حل لهذا النظام؟

الحل:

جواب نقطة النقاش الأولى: لأن حل النظام يجب أن يحقق كلتا المعادلتين.
جواب نقطة النقاش الثانية: بالتعويضها في كلتا المعادلتين فإن حققت كلتا المعادلتين كانت حلاً للنظام.

تدريب ١

أ) بيّن فيما إذا كانت $\{(2, -2)\}$ مجموعة حل للنظام $3س + ص = 4$

$$3س - ص = -4$$

بتعويض $(2, -2)$ في المعادلة الأولى نجد أن:

$$3س + ص = 3(2) + (-2) = 4$$

$$3س - ص = 3(2) - (-2) = 8 \neq -4$$

وفي الثانية نجد:

$$3س - ص = 3(2) - (-2) = 8 \neq -4$$

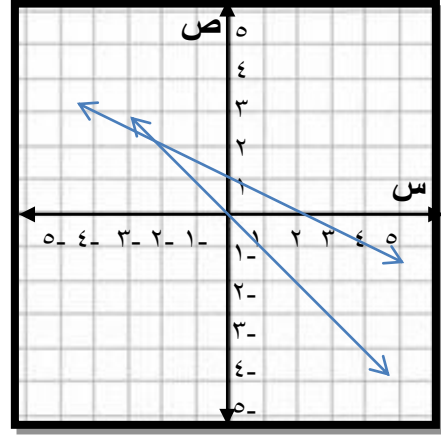
$$3س - ص = 3(2) - (-2) = 8 \neq -4$$

وبالتالي ليست حلا للنظام

(ب) جد مجموعة حل النظام الآتي بيانيا؟ ثم تحقق من صحة حلك.

$$\begin{cases} \text{س} + \text{ص} = ٥ \\ \text{ص} - \frac{1}{2}\text{س} = ١ \end{cases}$$

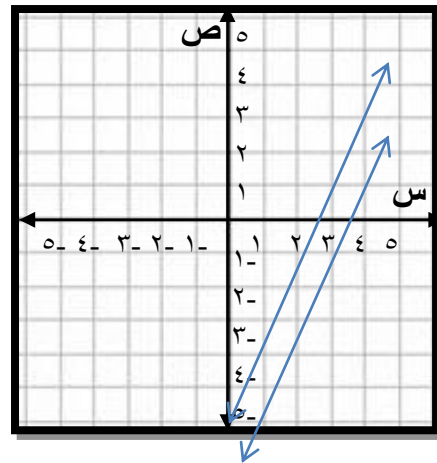
الحل:



الحل من الرسم هو (-٢ ، ٣) ونتحقق بالتعويض في كلتا المعادلتين.

تدريب ٢: جد مجموعة حل كل من النظامين الآتيين:

أ) $\begin{cases} ٢\text{س} + ٥\text{ص} = ٢ \\ ٢\text{س} + ٧\text{ص} = ٢ \end{cases}$

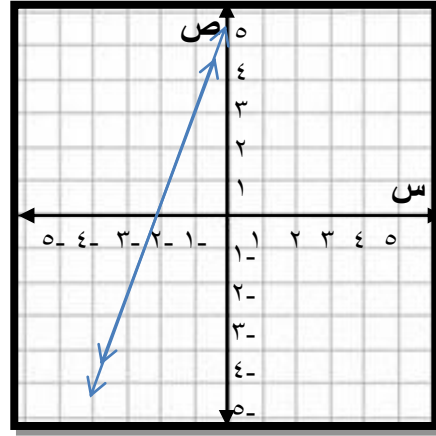


الخطان متوازيان

لا يوجد حل للنظام

$$\text{ب) ص} = 3\text{س} + 6, 6\text{س} - 2\text{ص} = 12$$

الخطان منطبقان إذن عدد الحلول
مجموعة غير منتهية من النقاط وهي
مجموعة جميع النقاط التي تقع على
أحد الخطين.



إذا انطبق المستقيمان الناتجان عن تمثيل معادلتين، فإن مجموعة حل
النظام هي مجموعة غير منتهية من النقاط، وهي مجموعة جميع النقاط
الواقعة على أحد الخطين .

نشاط ٢

النتيجة

يكون:

حل النظام حلاً حيداً إذا كانت قيمة أ في المعادلة الأولى لا تساوي
قيمتها في الثانية وقيمة ب في الأولى لا تساوي قيمتها في الثانية.
لا يوجد حل للنظام إذا كانت قيمة أ في المعادلة الأولى تساوي قيمتها
في الثانية
مجموعة حل النظام مجموعة غير منتهية من النقاط إذا كانت قيمة أ في
المعادلة الأولى تساوي قيمتها في الثانية وقيمة ب في الأولى تساوي قيمتها
في الثانية .

تمارين ومسائل

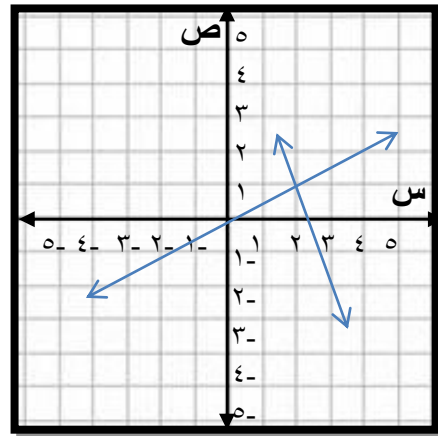
(١) تحقق فيما إذا كانت النقطة المُعطاة لكل نظامٍ مما يأتي هي حل له:

أ) $\text{ص} = \frac{2}{3}\text{س}$	ب) $\text{س} = 3 + \text{ص}$	ج) $\text{ص} - 2\text{س} = 1$
$\text{ص} + \frac{1}{3}\text{س} = 6$	$6\text{ص} - 2\text{س} = 4$	$2\text{س} - 3 = 3$
النقطة (٦ ، ٩)	النقطة (١- ، ١-)	النقطة (٥ ، ٠)

الحل:

- أ) لا تحقق المعادلة الثانية إذن هي ليست حلاً للنظام.
 ب) حل للنظام لأنها تحقق كلتا المعادلتين
 ج) لا تحقق كلتا المعادلتين لهذا هي ليست حل للنظام

(٢) حل نظام المعادلات $0,5\text{س} = \text{ص}$ ، $2\text{ص} + 6\text{س} = 14$ بيانياً.



الحل (٢ ، ١)

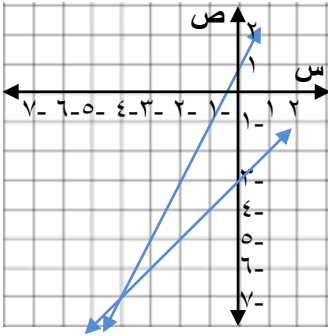
٣) ما قيمة المتغير ب التي تجعل النقطة (٢ ، ٦) حلاً للنظام:

$$\text{ص} = ٢ + \text{س}$$

$$\text{ص} = ٢,٥ + \text{س}$$

الحل: ب = ١ (بتعويض النقطة في المعادلة الثانية)

٤) أي أنظمة المعادلات الآتية يمثلها الرسم المجاور؟



أ) $\text{ص} = ٢ + \text{س} - ١$ ب) $\text{ص} = ٢ + \text{س} - ١$

ص = - + س + ٣ ص = ٢ + س - ٣

ج) $\text{ص} = ٢ + \text{س} + ١$ د) $\text{ص} = ٢ + \text{س} + ١$

ص - = ٢ + س - ١ ص = س - ٣

الحل: د

٥) أعط نظاماً من معادلتين خطيتين بمتغيرين بحيث يكون المستقيمان

النتائج عن تمثيلها:

أ) متوازيان ب) متطابقان ج) متقاطعان

الحل:

أ) $٥ = \text{ص} + ٢\text{س}$ ، $٠ = \text{ص} + ٢\text{س}$

ب) $٥ = \text{ص} + ٤\text{س}$ ، $١٥ = \text{ص} + ١٢\text{س}$

ج) $\text{ص} = \text{س}$ ، $\text{ص} = ٣ + ١$

الدرس الرابع: حل المعادلتين الخطيتين بمتغيرين بالتعويض

تدريب ١

استخدم طريقة التعويض في حل النظام

$$\text{س} + ٣ \text{ص} = ١٢ ، \text{س} - ٤ = ٤$$

الحل:

$$\text{نعوض ص} = \text{س} - ٤ \text{ في } \text{س} + ٣ \text{ص} = ١٢$$

$$\text{س} + ٣(\text{س} - ٤) = ١٢$$

$$\text{س} + ٣\text{س} - ١٢ = ١٢$$

$$٤ \text{س} = ٢٤$$

$$\boxed{\text{س} = ٦} \text{ ونعوض بقيمة س في } \text{س} - ٤ = ٤$$

$$\boxed{\text{ص} = ٢} .$$

تدريب ٢

استخدم طريقة التعويض في حل الأنظمة الآتية:

$$\text{أ) } ٦ - \text{س} + ٣ \text{ص} = ٢ ، \text{ص} = ٢ - ٤$$

الحل:

$$\text{نعوض ص} = ٢ - ٤ \text{ في } ٦ - \text{س} + ٣ \text{ص} = ٢$$

$$٦ - \text{س} + ٣(٢ - ٤) = ٢$$

$$٦ - \text{س} + ٦ - ١٢ = ٢$$

١٢- $\neq ٢$ بما أننا وصلنا لتناقض إذا الخطان الناتجان عن تمثيل المعادلتين السابقتين لا يتقاطعان، إذن لا يوجد حل للنظام.

$$(ب) \quad ٤ ص = ٨ - ٢ س , \quad ٥ س + ١٠ ص = ٢٠$$

الحل:

$$٤ ص = ٨ - ٢ س \quad \text{نضع ص موضوع للقانون}$$

$$ص = ٢ - \frac{١}{٢} س \quad \text{نعوضها في } ٥ س + ١٠ ص = ٢٠$$

$$٥ س + ١٠ (٢ - \frac{١}{٢} س) = ٢٠$$

$$٥ س + ٢٠ - ٥ س = ٢٠$$

$٢٠ = ٢٠$ إذن الخطان الناتجان عن تمثيل المعادلتين السابقتين منطبقان ومنه مجموعة حل النظام هي مجموعة كل النقاط الواقعة على خط أحدهما.

تدريب ٣

(أ) عددان مجموعهما ١١، ثلاثة أمثال أحدهما يزيد عن مثلي العدد الآخر بمقدار ٥، ما العددان؟

الحل:

نكون معادلتين ثم نحلها بالتعويض

$$س + ص = ١١ ، ٣س - ٢ص = ٥$$

وبالحل بالتعويض يكون حل النظام هو: $(\frac{28}{5} , \frac{27}{5})$

ب) اشترى مازن قلّمي حبرٍ وثلاثة دفاتر دفع ١٥٥ قرشاً ثمناً لها، إذا علمت أنّ ثمن الدفتر الواحد ٣٥ قرشاً. كَوّن نظام معادلاتٍ تعبّر عن مشتريات مازن ثم حلّها. ماذا يمثل الحل الذي حصلت عليه؟

الحل:

نكون معادلتين ثم نحلّهما بالتعويض

$$٢س + ٣ص = ١٥٥ ، ٣٥ = ص$$

حل النظام هو: $(٣٥ ، ٢٥)$ بمعنى ثمن القلم ٢٥ قرشا

فكر

حلّ النظام الآتي المكوّن من ثلاثٍ معادلاتٍ خطيّةٍ بثلاث متغيرات بالتعويض؟ ثمّ تحقق من حلك.

$$ل + ع + س = ٧$$

$$٥ = س + ع$$

$$٢ - ع - ٤س = -١٤$$

الحل:

$$\begin{aligned} \text{ع} + \text{س} &= ٥ \text{ ومنه } \text{س} = ٥ - \text{ع} \text{ نعوضها في } ٢ \text{ ع} - ٤ \text{ س} = -١٤ \\ \text{فتكون قيمة ع} &= ١ \text{ وبالعودة والتعويض في } \text{س} = ٥ - \text{ع} \text{ تكون قيمة} \\ \text{س} &= ٤ \text{ ، ثم نعوض في ل} + \text{ع} + \text{س} = ٧ \text{ بقيمة كل من س ، ع} \\ \text{ومنه ل} &= ٢ \end{aligned}$$

تمارين ومسائل

(١) ع، ل زاويتان متتامتان، كون معادلتين لإيجاد قياس كلٍ منهما في الحالات الآتية:

$$\text{أ) ل} = ٤ - \text{ع} \quad \text{ب) ع} = ٢ \text{ ل} \quad \text{ج) ل} = ٢ (٥ - \text{ع})$$

الحل:

ع، ل زاويتان متتامتان، ومنه المعادلة الأولى هي: $\text{ع} + \text{ل} = ٩٠^\circ$

ثم نحل بالتعويض مع المعادلة الموضحة في كل فرع:

$$\text{أ) ل} = ٧٠^\circ \text{ ، } \text{ع} = ٢٠^\circ$$

$$\text{ب) ل} = ٣٠^\circ \text{ ، } \text{ع} = ٦٠^\circ$$

$$\text{ج) ل} = ٥٠^\circ \text{ ، } \text{ع} = ٤٠^\circ$$

(٢) عددان مختلفان، ٥ أمثال العدد الأصغر مطروحاً من مثلي العدد الأكبر يساوي ١٦، والعدد الأكبر مضافاً إليه ٣ أمثال العدد الأصغر يساوي ٦٣. ما العددان؟

الحل:

نكون معادلتين ٢ ص - ٥ س = ١٦ ، ٣ ص + ٣ س = ٦٣

وبالحل بالتعويض يكون س = ١٠ ، ص = ٣٣

(٣) أراد أحمد الاشتراك في نادٍ رياضيٍّ، زار الأندية القريبة فكانت العروض الشهرية الشاملة فيها كالتالي:

رسوم الاشتراك الشهري	
٥٠ ديناراً رسم تسجيلٍ للمرة الأولى، و ١٠ دنانير شهرياً	النادي الأول
١٥ ديناراً شهرياً	النادي الثاني

أ (بعد كم شهرٍ ستتساوى كلفة الاشتراك في الناديين؟ ماذا ستكون هذه الكلفة؟

الحل:

نكون معادلتين ١٠ س + ٥٠ = ص ، ١٥ س = ص حيث ص الرسم الشهري ، و س عدد الأشهر.

وبالحل بالتعويض يكون الجواب أن الكلفة تتساوى بعد ١٠ شهور.

ب) حدد أي الاشتراكين أفضل خلال فترات الاشتراك الآتية مبرراً
إجابتك:

(١) ٧ أشهر.

(٢) ١٠ أشهر.

(٣) سنة كاملة.

الحل:

أ) النادي الثاني لأنه الأرخص خلال هذه الفترة وبتجاهل المميزات
الأخرى.

ب) أي منهما جيد إذا نظرنا إلى التكلفة فقط وبتجاهل المميزات
الأخرى.

ج) النادي الأول لأنه الأرخص خلال هذه الفترة وبتجاهل المميزات
الأخرى.

الدرس الخامس: حل المعادلتين الخطيتين بمتغيرين بالحذف

تدريب ١

(١) استخدم طريقة الحذف في حل الأنظمة الآتية، ثم صف المستقيمات الناتجة عن تمثيل كل منها معتمداً على مجموعة الحل دون تمثيلها:

$$\begin{array}{ll} \text{أ) } 3س + 2ص = 6 & \text{ب) } 3س + 3ص = 12 \\ -س + ص = -2 & ص = س - 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{ج) } 4ص = 8 - 2س & \text{د) } 6س + 3ص = 2 \\ 5س + 10ص = 20 & ص = 2س - 4 \end{array}$$

الحل:

$$\text{أ) } 3س + 2ص = 6$$

$$-س + ص = -2 \dots\dots (٢)$$

بضرب المعادلة ٢ في ٣ ثم جمعها مع المعادلة الأولى ينتج:

٥ص = ٠ ومنه ص = ٠ ثم نعوض قيمة ص في أي من المعادلتين

$$\text{فتكون النتيجة } ٢ = ٢$$

حل النظام (٢ ، ٣) ، والمستقيمان متقاطعان

$$\text{ب) } 3س + 3ص = 12 \dots\dots (١)$$

$$ص = س - 4 \dots\dots \text{نعيد كتابتها لتصبح}$$

$$-س + ص = -4 \dots\dots (٢)$$

بجمع المعادلتين (١) ، (٢) ينتج $ص = ٢$ ونعوّضها في إحدى المعادلتين فتكون $س = ٦$

حل النظام (٦ ، ٦) المستقيمان متقاطعان

(ج) $٤ ص = ٨ - ٢ س$... نعيد ترتيبها ونقسمها على ٢ فتصبح

$$س + ٢ ص = ٤ \quad (١) \dots$$

$$٥ س + ١٠ ص = ٢٠ \quad (٢) \dots$$

بضرب المعادلة (١) في -٥ ثم جمعها مع (٢) ينتج

$٠ = ٠$ وهذا يعني أن الخطين منطبقين وبالتالي لدينا عدد لانهائي من

الحلول للنظام.

$$(د) \quad ٦ - س + ٣ ص = ٢$$

$$ص = ٢ - س - ٤ \dots \text{ نعيد كتابتها لتصبح}$$

$$-٢ س + ص = -٤ \quad (٢) \dots \text{ نضرب (٢) في -٣ ثم نجمعها مع}$$

المعادلة الأولى فينتج $٠ \neq ١٠$ ، وهذا يعني أن الخطين متوازيين

وهذا يعني عدم وجود حل للنظام.

(٢) س ، ص زاويتان متكاملتان، يزيد قياس س بمقدار 104° على قياس ص. ما قياس الزاويتين؟

الحل:

نكون معادلتين

$$\text{ص} + \text{س} = 180^\circ$$

$$\text{ص} - \text{س} = 104^\circ \text{ بجمع المعادلتين ينتج:}$$

$$\text{ص} = 142^\circ \text{ نعوض بقيمتها في أي معادلة فيكون الناتج س} = 38^\circ$$

تمارين ومسائل

(١) استخدم طريقة الحذف في حل أنظمة المعادلات الخطية الآتية، ثم تحقق من صحة حلك:

$$\text{أ) } \begin{cases} 5\text{س} + 7\text{ص} = 11 \\ 5\text{س} + 3\text{ص} = 19 \end{cases}$$

الحل:

بضرب المعادلة الثانية في -١ ثم إضافتها للأولى ينتج:

$$\text{ص} = 2 \text{ نعوضها في أي معادلة فينتج}$$

$$\text{س} = 5 \text{ الحل } (-5, -2)$$

التحقق بتعويضها في كلتا المعادلتين.

$$(ب) \quad 2س + 3ص = 12, \quad 5س - 3ص = 13$$

الحل:

بضرب المعادلة الثانية في 3 ثم جمعها مع الأولى ينتج:

س = 3 ثم نعوضها في إحدى المعادلتين فنحصل على

$$ص = 2 \text{ حل النظام } (2, 3)$$

$$(ج) \quad 2س + 6ص = 12, \quad 7س - 3ص = 23$$

الحل:

بضرب المعادلة الثانية في 2 ثم جمعها مع الأولى ينتج:

س = $\frac{17-}{8}$ ثم نعوضها في إحدى المعادلتين فنحصل على

$$ص = \frac{65}{24} \text{ حل النظام } \left(\frac{65}{24}, \frac{17-}{8}\right)$$

(2) ما قيمة ب التي تجعل النقطة (2,6) حلاً للنظام:

$$ص = 6س + 2ب, \quad 3س = 3أ + ب$$

نعوض (2, 6) في كلتا المعادلتين ثم نحل بالحذف

$$\text{فتكون } أ = \frac{1}{15}, \quad ب = \frac{4}{5}$$

٣) مع فاطمة وأخيها خالد قطع من الحلوى، إذا أعطت فاطمة خالدًا خمسة قطع حلوى يتساوى عدد قطع الحلوى مع كليهما، وإذا أعطى خالد فاطمة خمسة قطع حلوى يصبح عدد القطع مع فاطمة مثلي عددها عند خالد. فما عدد قطع الحلوى مع كليهما؟

الحل:

نكون معادلتين:

نفرض عدد قطع حلوى فاطمة = س

نفرض عدد قطع حلوى خالد = ص

$$س - ٥ = ٥ + ص ، ٢(ص - ٥) = س + ٥$$

بحل المعادلتين بالحذف ينتج:

$$س = ٣٥ ، ص = ٢٥$$

مراجعة

(١) ميّز المعادلات الخطية بمتغيرين فيما يأتي:

$$\text{أ) } \frac{1}{\text{س}} - \text{ص} = \text{ع} : \text{س} \neq ٠ \quad \text{ب) } \text{ع} + \text{ه} = \text{ل} = \text{ل} - ١$$

$$\text{ج) } ٣ \text{ م} - \text{م} = ٢ \quad \text{د) } ٨ \text{ ه} + \text{ع} = ١٤ \text{ ز}$$

$$\text{ه) } ٢,٥ \text{ ك} - ٤,٣ \text{ ل} = ٠ \quad \text{و) } ٩ \text{ س}^٢ + \text{س} = ٣ \text{ ص}^٢ - \text{ص}$$

$$\text{ز) } \frac{١١ \text{ ط} - \text{ح}}{3-} = ٦٣ \quad \text{ح) } \text{أ}^٢ - \text{ع} - ٢ \text{ أ} \text{ ل} + \text{أ} = ٠ : \text{أ ثابت}$$

الحل:

المعادلات الخطية في متغيرين هي في كل من:

ب ، ه ، ز ، ح.

(٢) أعد صياغة المعادلة $٤(٢ - ٣ \text{ ص}) = ٢٤ \text{ س}$ ، جاعلا ص موضوعاً للقانون، ثم س موضوعاً له.

الحل:

$$\text{ص} = - \text{س} + \frac{2}{3} , \quad \frac{\text{ص}}{2} - \frac{1}{3} = \text{س}$$

٣) جد قيمة المتغير التي تجعل الزوج المرتب إزاء كل معادلةٍ حلاً لها.

أ) $ص = ٢ س + ٥$ (١-، ص) الحل $ص = ٣$

ب) $ص = ٣ س - ١$ (٥، س) الحل $ص = ٢$

ج) $٤ س - ٧ ص = ١٩$ (٤-، ص) الحل $ص = ٥$

د) $٦ س + ٥ ص = ٢١$ (٣-، ٢ + س) الحل $ص = ٤$

٤) تحقق فيما إذا كانت النقطة المُعطاة لكل نظامٍ مما يأتي تمثل حلاً له:

ب) $٦ = ٢ ص + س$

$٣ = ص - س$

النقطة (٤، ١) ✗

أ) $٥ = ٢ س - ص$

$١ = ٢ س + ص$

النقطة (١، ٣) ✗

د) $٨ = ٥ ص + ٢ س$

$٥ = ٣ س - ٢ ص$

النقطة (١، ٢-) ✗

ج) $٤ = ٢ ص - س$

$٥ = ٣ س + ص$

النقطة (١، ٢-) ✓

٥) حل أنظمة المعادلات الخطية الآتية مستخدماً الطريقة الموضحة بجانب

كل منها:

أ) $٣ = ٤ س - ص$

ص = ٢ س + ٣ (بيانيا) الحل: (١-، ١)

ب) $١٦ = ٣ ص + س$

س = ٤ ص + ٢ (بالتعويض) الحل: (١٠، ٢)

$$(ج) ٢ س + ٦ ص = ٤$$

$$٤ س + ٥ ص = ١٥ \text{ (بالحذف) } \text{الحل: } (٥ ، ١)$$

(٥) ناقش صحة العبارة الآتية مبرراً إجابتك ومستشهداً بمثالٍ يدعمها.

دائماً مجموعة حل نظام معادلتين خطيتين بمتغيريين هي مجموعة غير منتهية من النقاط.

$$\text{الجواب لا فالنظام } ص = ٤ س - ٣ ، ص = ٢ س + ٣$$

$$\text{حله نقطة واحدة } (-١ ، ١)$$

اختبار ذاتي

(١) يتكون هذا السؤال من ٤ فقراتٍ من نوع الاختيار من متعدد، لكل فقرةٍ منها ٤ بدائلٍ واحدٍ فقط منها صحيحٌ، ضع دائرةً حول رمزِ البديلِ الصحيح:

(١) أي الأزواج المرتبة الآتية ليس حلاً للمعادلة $٥ س - ٤ ص = ٧$ ؟

(أ) $(٩- ، ١٣-)$ (ب) $(٥+ ، ٩-)$ (ج) $(٧ ، ٧)$ (د) $(١١ ، ١٢)$

(٢) المجموعة $\{(٥ ، ٠) ، (٦ ، ١-)\}$ هي مجموعةٌ جزئيةٌ من

مجموعة حل المعادلة:

$$(ب) ٥ س = ٥ - ص$$

$$(د) ص = - س$$

$$(أ) ٣ = ص - س$$

$$(ج) ص = ٧ س$$

(٣) أي الأزواج المرتبة يعتبر حلاً لنظام المعادلات

$$\text{ص} - ٣ = ٢ \text{ س} ، \text{ص} + ٢ = ٤ -$$

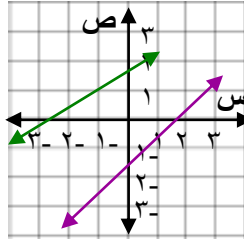
(أ) (٠ ، ٢) (ب) (٢ ، ٠) (ج) (٠ ، ٢-) (د) (٠ ، ٢-)

(٤) ما قيمة المتغيرين و ، هـ التي تجعل مجموعة حل النظام

$$\text{ص} = ٢ \text{ س} + و ، \text{ص} = ٢ - \text{س} - هـ ، \text{غير منتهية} ؟$$

(أ) و = ٣ ، هـ = ٣ (ب) و = ٣ ، هـ = ٣-

(ج) و = ٣- ، هـ = ٣- (د) و = ٠ ، هـ = ٣



(٢) تقول مها أنه لا يوجد حلّ لنظام المعادلات

الخطية الممثل بالرسم المجاور، بينما تقول أمل أنه

يوجد حلّ واحد للنظام. أيهما أصابت؟ برر

إجابتك.

الحل: أمل أصابت لأنه عند مد الخطين يتقاطعا في نقطة.

(٣) كوّن أنظمة معادلات خطية تحقق الشروط الآتية:

أ) مجموعة الحل ϕ

$$\text{الحل: س} + \text{ص} = ٧ ، ٢ \text{ س} + ٢ \text{ ص} = ١$$

ب) مجموعة الحل $\{(٠، -٤)\}$

$$\text{الحل: س} - ٤ = \text{ص} ، ٣ \text{ س} - ٨ = ٢ \text{ ص}$$

٤) إذا كانت تعرفه المكالمات في شركتي اتصالاتٍ كما هو موضحٌ في الجدول، أجب عن الأسئلة التي تليه:

الشركة أ	٧ قروشٍ للدقيقة الأولى ثم تزيد قرشاً واحداً لكل دقيقةٍ تليها.
الشركة ب	قرشان للدقيقة الأولى ثم تزيد قرشان لكل دقيقةٍ تليها.

أ) كون معادلة تعبر عن تعرفه كل شركة.

الحل: نفرض s عدد الدقائق بعد الدقيقة الأولى

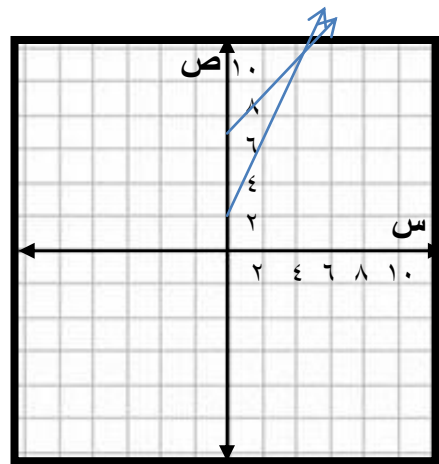
$$٧ + s = ص$$

$$٢ + ٢s = ص$$

ب) مثل تعرفتي الشركتين بيانياً على الرسم نفسه.

(إرشاد تحتاج إلى التمثيل في الربع الأول فقط من المستوى الديكارتي،

برر ذلك)



ج) بعد كم دقيقة من المكالمات تتساوى التعريفتين؟

بعد ٦ دقائق مع الدقيقة الأولى.

د) يريد صاحب محلٍ شراء خطٍ من إحدى الشركتين، بأي التعريفتين تنصحهُ؟ برر إجابتك.

بالشركة الأولى لأنها بعد ٦ دقائق من المكالمات تصبح أرخص.

إدارة المناهج والكتب المدرسية

إجابات وحلول أسئلة مادة الرياضيات

الجزء الثاني

الصف: الثامن

عنوان الوحدة : المثلثات.

رقم الوحدة: (٧)

الدرس الأول: خصائص المثلث (١)

تدريب (١): أي الأطوال الآتية تمثل أطوال أضلاع مثلث؟ مبررا إجابتك.

(أ) ٤ سم ، ٦ سم ، ٦ سم.

(ب) ٨ سم ، ٣ سم ، ٥ سم.

(ج) ٢،٥ سم ، ٦،٥ سم ، ١٠ سم.

الحل:

(أ) تشكل أضلاع مثلث، لأن $٦ + ٦ = ١٢ > ٤$ ، $٦ + ٤ = ١٠ > ٦$.

(ب) لا تشكل أضلاع مثلث لأن $٨ = ٥ + ٣$ $\nless ٨$.

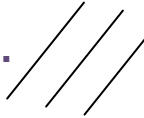
(ج) لا تشكل أضلاع مثلث لأن $٩ = ٢،٥ + ٦،٥$ $\nless ١٠$.

ناقش صحة العبارات الآتية، مبررا إجابتك:

- مجموع طولي الضلعين الأصغرين في المثلث مختلف الأضلاع $<$ طول الضلع الأكبر.
- كل ثلاث قطع متساوية في الطول تصلح لتشكيل مثلث.

الحل:

• العبارة صحيحة لأن مجموع طولي أي ضلعين في المثلث < طول الضلع الثالث.

• العبارة خاطئة ، يمكن أن تكون القطع على الشكل .

فكر وناقش:

هل يمكن رسم مثلث أطوال أضلاعه ٨سم، ٨سم، ٦سم؟ برر إجابتك.

الحل:

لا يمكن لأن مجموع طولي الضلعين الأصغرين $\nless$ الضلع الثالث، حيث أن $٨+٨=١٦$.

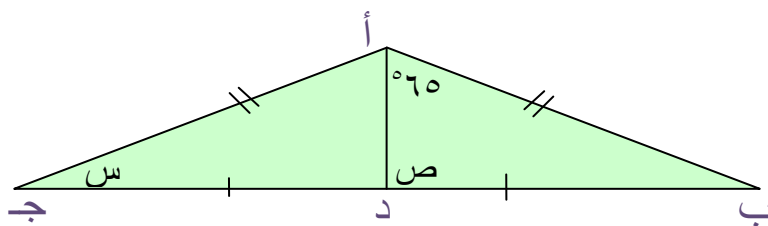
تدريب (٢): $\triangle$ أ هـ س أطوال أضلاعه أ هـ = ١١سم، أ س = ١٥سم، هـ س = ٨سم، سمّ الزاوية الكبرى، والزاوية الصغرى.

الحل:

(إرشاد: يمكن الاستعانة بالرسم).

الزاوية الكبرى هي $\sphericalangle$ هـ ، أما الصغرى فهي $\sphericalangle$ أ.

تدريب (٣): جد $\sphericalangle$ ق ص، $\sphericalangle$ ق س في الشكل الآتي.



مبررا إجابتك، وبطريقتين مختلفتين .

الحل:

نسمي المثلث أ ب جـ .

$\sphericalangle$ ص = ٩٠° ، لأن من خصائص المثلث المتطابق الضلعين (الضلع النازل من الرأس على منتصف القاعدة يكون عموديا عليها).

$\sphericalangle$ س = ٢٥° ، لأن في المثلث أ د جـ $\sphericalangle$ جـ أ د = ٦٥° ، $\sphericalangle$ أ د جـ = ٩٠° .

(خصائص متطابق الضلعين، ومجموع زوايا المثلث = 180°).

إجابات التمارين و المسائل

(١) أي الأطوال في كل مما يأتي تمثل أطوال أضلاع مثلث؟ مبررا إجابتك.

(أ) ٢١ سم ، ١٣ سم ، ٢٦ سم.

(ب) ٦ سم ، ١٠ سم ، ٨ سم.

(ج) ١٨،٥ سم ، ٥،٣ سم ، ١٣،٢ سم.

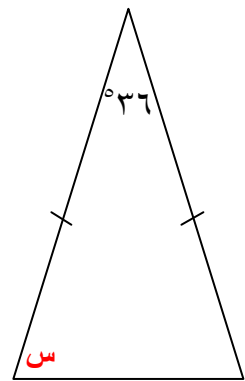
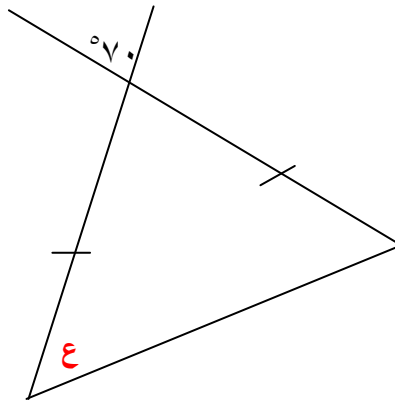
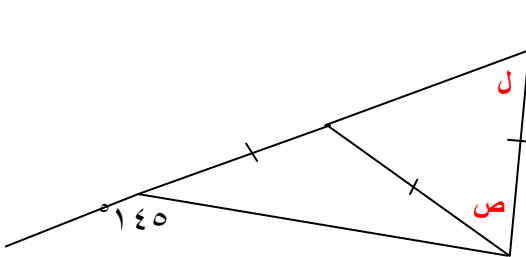
(د) ٦ سم ، ٦ سم ، ٦ سم.

الحل:

الأطوال في الفروع (أ ، ب ، د) تشكل مثلثا لأن مجموع طولي أي ضلعين أكبر من الضلع

الثالث. أما الفرع (ج) لا تشكل الأطوال فيه مثلثا لأن $١٨،٥ = ١٣،٢ + ٥،٣$.

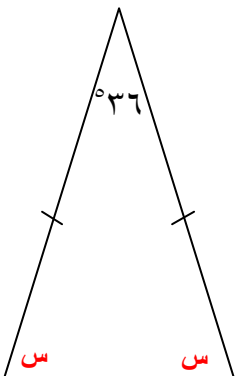
(٢) جد قيم الزوايا المجهولة في كل شكل من الأشكال الآتية، مبررا إجابتك:



الحل:

$$(أ) \quad 180^\circ = 2س + 36^\circ$$

(مجموع زوايا المثلث، زوايا القاعدة متساوية في متطابق الضلعين)



إذن $s = 72^\circ$.

(ب) (إرشاد يمكن تسمية المثلث أو ترقيم الزوايا).

$$1 \times = 70^\circ \text{ (تقابل بالرأس).}$$

$$180^\circ = 70^\circ + 2e$$

(مجموع زوايا المثلث، زوايا القاعدة متساوية في متطابق الضلعين)

إذن $s = 55^\circ$.

(ج) (إرشاد رقم الزوايا)

لإيجاد قيمة ص:

$$1 \times = 145^\circ + 180^\circ \text{ (تجاور على مستقيم).}$$

$$1 \times = 35^\circ$$

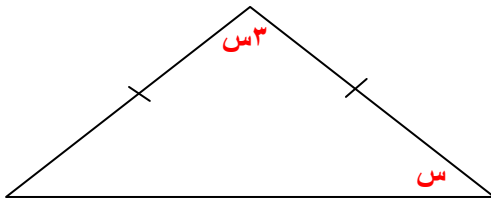
$$2 \times = 1 \times = 35^\circ \text{ (زوايا قاعدة في متطابق الضلعين).}$$

$$ص = 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ$$

لإيجاد قيمة ل:

$$ص + ل + 3 \times = 180^\circ \text{ (مجموع زوايا المثلث).}$$

$$ل = 3 \times = 62,5^\circ \text{ (خصائص متطابق الضلعين).}$$

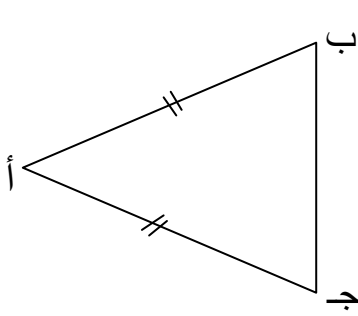


(٣) حل المسألة الواردة في بداية الدرس.

الحل: (إرشاد: نستعين برسم توضيحي).

$$س + س + 3س = 180^\circ \leftarrow 5س = 180^\circ \leftarrow س = 36^\circ = \text{زاوية القاعدة.}$$

زاوية الرأس = $3 \times 36^\circ = 108^\circ$



٤) الشكل المجاور يبين Δ أ ب ج فيه أ ب = أ ج ،

ارسم خطا يقسمه إلى مثلثين متطابقين.

الحل:

من خصائص المثلث المتطابق الضلعين (العمود النازل من الرأس على القاعدة ينصف القاعدة وينصف زاوية الرأس)، فيقسم المثلث إلى مثلثين متطابقين .

إذن ارسم أ د $\perp$ ب ج .

٥) اعتمادا على خصائص المثلث المتطابق الضلعين، بين أن قياس كل زاوية في المثلث المتطابق الأضلاع تساوي 60° .

الحل:

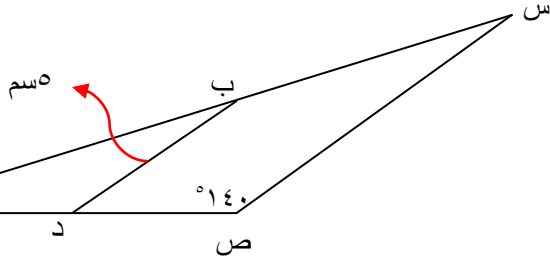
المثلث متطابق الأضلاع زواياه متساوية (خصائص المثلث متطابق الأضلاع).

نفرض قياس الزاوية يساوي س؛

إذن $3س = 180^\circ \leftarrow س = 180^\circ \div 3 = 60^\circ$.

الدرس الثاني: خصائص المثلث (٢).

تدريب (١): في الشكل المجاور؛ إذا علمت أن ب د قطعة مستقيمة واصله بين منتصفي الضلعين ع ص ، و ع س ، وأن طولها ٥سم، وأن ق $\parallel$ ب د ع =



فجد طول س ص ، ق $\parallel$ ب د ع .

مع التبرير.

الحل:

س ص = ٢ × ب د = ١٠سم. (نتيجة القطعة الواصلة بين منتصفي ضلعين في المثلث)

ق $\parallel$ ب د ع = ص = ١٤٠°. (الزاويتان متناظرتان)

تدريب (٢): في الشكل المجاور:

جد كلا من طول أ ب ، طول د ج ،

ق $\parallel$ ص ، ق $\parallel$ س. مع التبرير.

الحل:

لإيجاد طول كل من أ ب ، د ج :

$\triangle$ أ ل د متطابق الأضلاع. (معطيات)

طول ل د = طول أ ل = $\frac{ب ج}{٢} = \frac{٩}{٢} = ٤,٥$ سم. (نتيجة القطعة الواصلة بين منتصفي ضلعين في المثلث).

طول د ج = طول أ د = ٤,٥ سم.

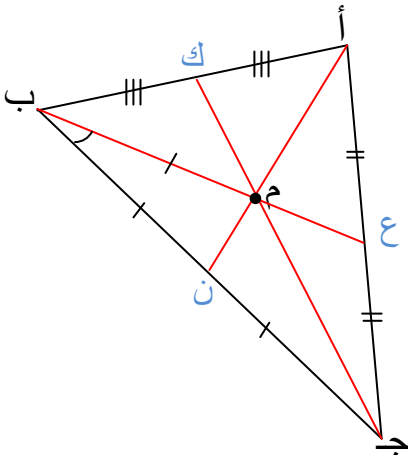
لإيجاد قياس كل من ص، س:

$$\cancel{ق} \cancel{ص} = \cancel{ق} \cancel{د} \cancel{ج} \cancel{ب} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ \text{ (نتيجة، وتجاور على مستقيم).}$$

$$\cancel{ص} \cancel{د} \cancel{أ} \cancel{ل} = 60^\circ. \text{ (المثلث متطابق الأضلاع من المعطيات).}$$

$$\cancel{س} \cancel{د} \cancel{ج} \cancel{ب} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ \text{ (تجاور على مستقيم).}$$

تدريب (٣): في الشكل الآتي، إذا علمت أن $أع = ٨،٣$ سم، $ع م = ٢$ سم،



قياس $\cancel{ن} \cancel{ب} \cancel{م} = 20^\circ$. جد كلا من:

طول أ ج ، طول ب ع ، طول ب ج ،

ق $\cancel{ب} \cancel{ن} \cancel{أ}$.

الحل:

من الشكل نجد أن م نقطة تلاقي القطع المتوسطة في $\Delta أ ب ج$.

$$\text{طول أ ج} = 2 \times أ ع = 2 \times ٨،٣ = ١٦،٦ \text{ سم.}$$

$$\text{طول ع ب} = ع م + م ب$$

$$= ٢ + ٤ = ٦ \text{ سم. (ب م : م ع = ٢ : ١ = س : ٢ ← س = ب م = ٤ سم)}$$

لكن د م = ١٢ سم ، ومنه م ص = ٦ سم. لماذا؟

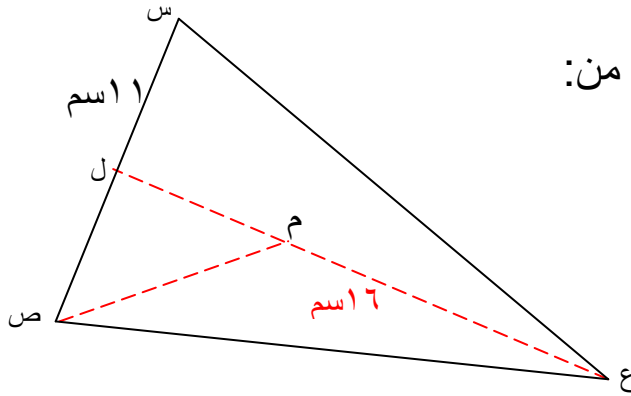
$$\text{إذن د ص} = ١٢ + ٦ = ١٨ \text{ سم.}$$

$$\text{طول ب ج} = 2 \times ب ن = 2 \times ٤ = ٨ \text{ سم. (ب ن = ب م من المعطيات)}$$

$$\cancel{ق} \cancel{ب} \cancel{ن} \cancel{أ} = 80^\circ \text{ (} \Delta ب م ن \text{ متطابق الضلعين، } \cancel{ب} = 20^\circ \text{ من المعطيات).}$$

إجابات التمارين و المسائل

(١) في الشكل المجاور، م نقطة تلاقي القطع المتوسطة،



ع م = سم ٦، س ل = سم ١، فجد كلاً من:

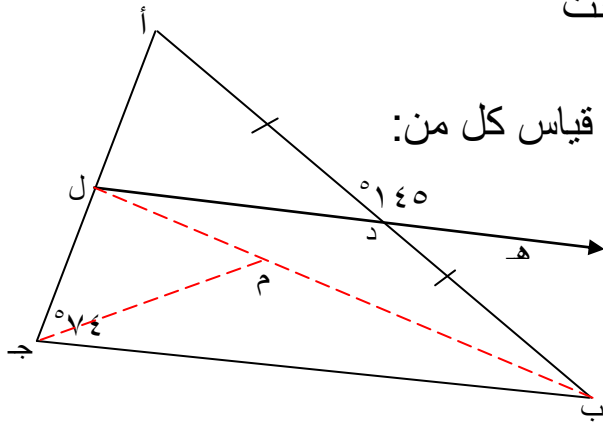
س ص، ع ل، مبرراً إجابتك.

الحل:

$$س ص = ع ل = ٢ \times ص ل = ٢٢ سم.$$

$$ع ل = ع م + م ل = ١٦ + ٨ = ٢٤ سم. (م ل = ع م \div ٢ \text{ نتيجة}).$$

(٢) إذا كانت م نقطة تلاقي القطع المتوسطة، وكانت



ق $\angle$ أ ج ب = ٧٤° ، ق $\angle$ أ د هـ = ١٤٥° . فجد قياس كل من:

ق $\angle$ أ ب ج، ق $\angle$ أ. مبرراً إجابتك.

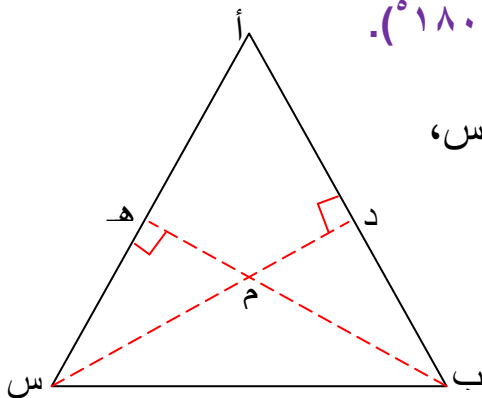
الحل:

$$ق \angle أ د ل = ٣٥^\circ \text{ (تجاور على مستقيم).}$$

$$ق \angle أ ب ج = ق \angle أ د ل = ٣٥^\circ \text{ (تناظر).}$$

$$ق \angle أ = ٧١^\circ \text{ (مجموع زوايا المثلث أ ب ج تساوي } ١٨٠^\circ \text{).}$$

(٣) إذا كانت م نقطة تلاقي القطع المتوسطة في Δ أ ب س،



وكانت س د $\perp$ أ ب، ب هـ $\perp$ أ س.

فبين أن Δ أ ب س متطابق الأضلاع.

الحل:

Δ أ ب س فيه

طول أ د = طول ب د (م نقطة تلاقي منتصفات الأضلاع).

س د $\perp$ أ ب (معطيات)

ينتج أن المثلث متطابق الضلعين فيه أ س = ب س (خصائص المثلث متطابق الضلعين)

كذلك أ ه = ه س (م نقطة تلاقي منتصفات الأضلاع)

ب ه $\perp$ أ س (معطيات)

ينتج أن المثلث متطابق الضلعين فيه أ ب = ب س (خصائص المثلث متطابق الضلعين)

بما أن أ س = ب س = أ ب

إذن المثلث متطابق الأضلاع.

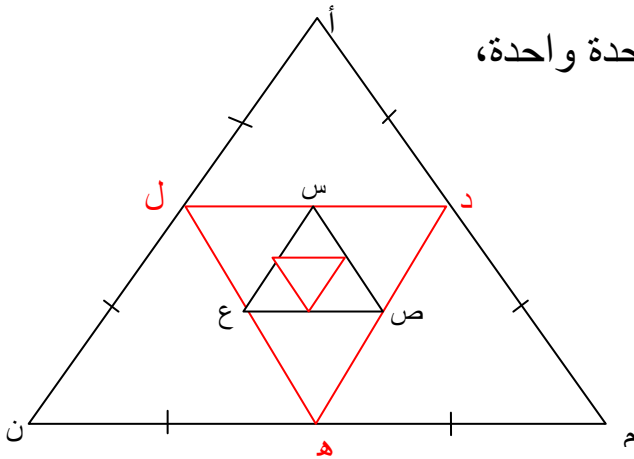
(٤) Δ أ م ن متطابق الأضلاع، وُصِلت منتصفات أضلاعه فتكون Δ د ه ل، كذلك وُصِلت منتصفات أضلاع Δ د ه ل فتكون Δ س ص ع، ثم استمرت العملية على النمط نفسه، كما في الشكل الآتي؛

• هل جميع المثلثات الناتجة متطابقة الأضلاع؟

• إذا علمت أن طول ضلع Δ أ م ن وحدة واحدة،

فجد محيط كلٍّ من:

Δ أ م ن ، Δ د ه ل، Δ س ص ع .



الحل:

(أ) جميع المثلثات متطابقة لأن؛

د ل منتصف م ن ، د ه منتصف أ ن ، كذلك ل ه منتصف أ م ، وبما أن المثلث أ م ن متطابق الأضلاع ، ينتج أن المثلث د ه ل متطابق الأضلاع.
وبنفس الطريقة نجد أن المثلث س ص ع متطابق الأضلاع.

(ب) محيط المثلث = مجموع أطوال أضلاعه

محيط المثلث أ م ن = ٣ وحدات طول.

ومن الفرع (أ) نجد أن محيط المثلث د ه ل = $\frac{1}{4}$ محيط المثلث أ م ن

$$= \frac{3}{4} \text{ وحدة طول.}$$

كذلك محيط المثلث س ص ع = $\frac{1}{4}$ محيط المثلث د ه ل = $\frac{1}{4} \times \frac{3}{4}$

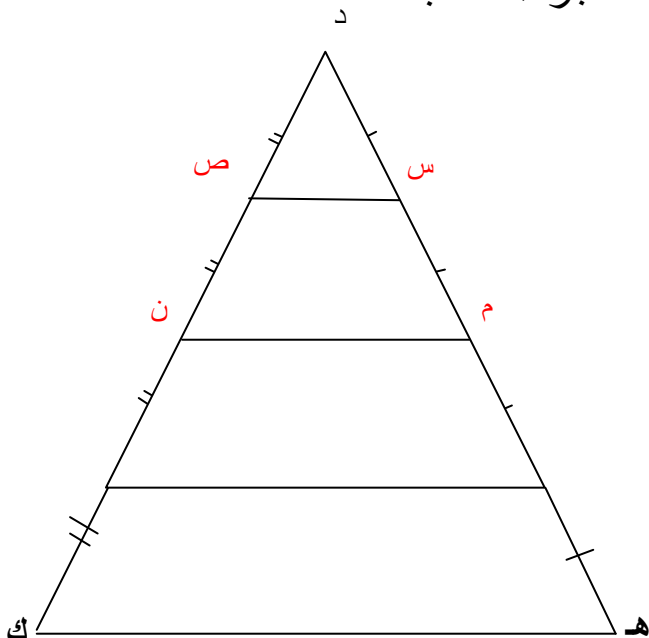
$$= \frac{3}{16} \text{ وحدة طول.}$$

(٥) Δ د ه ك قُسم ضلعا د ه ، د ك إلى أربعة أجزاء متطابقة،

ما العلاقة بين أطوال س ص ، ه ك؟

الحل:

من النتيجة نجد أن



س ص = نصف طول م ن

كذلك م ن = نصف طول ه ل

إذن س ص = $\frac{1}{4} \times$ ه ك

الدرس الثالث: الزاوية الخارجة للمثلث

تدريب (١): Δ أ ب ج فيه $\angle$ أ = 75° ، $\angle$ ب = 43° ، أ ب د خارجة للمثلث وقياسها

يساوي 137° . جد قياسات زوايا المثلث؟ برر خطوات حلك، ثم تحقق من صحة الحل.

(حل السؤال بطريقتين مختلفتين).

الحل:

$$137^\circ = 75^\circ + \angle ج$$

إذن $\angle ج = 62^\circ$ (نتيجة الزاوية الخارجة).

$$\angle أ ب ج = 180^\circ - 137^\circ = 43^\circ \text{ (الزاويتان أ ب ج ، أ ب د تجاور على مستقيم)}$$

التحقق من صحة الحل:

$$\text{نجد مجموع زوايا المثلث (} 180^\circ = 62^\circ + 43^\circ + 75^\circ \text{)}$$

إذن الحل صحيح.

ناقش صحة العبارات الآتية، مبررا إجابتك.

- إذا كانت لمثلث زاوية خارجة منفرجة، فإن المثلث حاد الزوايا.

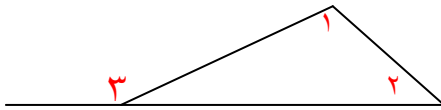
- إذا كانت لمثلث زاويتان خارجتان منفرجتان، فإن المثلث حاد الزوايا.
- الزاوية الخارجة للمثلث أكبر من أي زاوية داخلية ما عدا المجاورة لها.

الحل:

- العبارة خاطئة مثال الشكل المجاور فيه الزاوية الخارجة منفرجة وإحدى زوايا المثلث منفرجة.

- العبارة خاطئة كما في الشكل فيه الزاويتان الخارجتان منفرجتان وإحدى زوايا المثلث منفرجة.

- العبارة صحيحة، لأن:



$$\angle 1 + \angle 2 = \angle 3$$

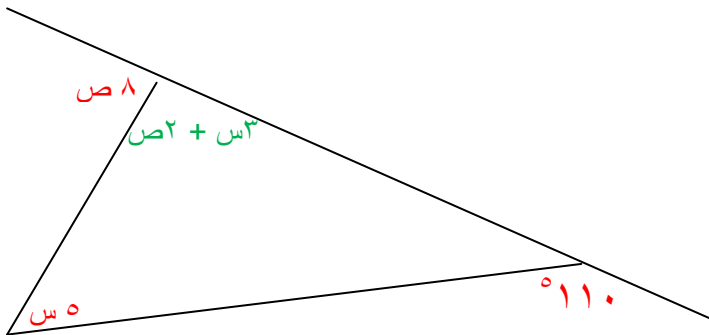
إذن $\angle 3$ أكبر من الزاوية ١ والزاوية ٢.

بالنسبة للزاوية المجاورة قد تكون زاوية المثلث منفرجة وهنا تكون الزاوية الخارجة المجاورة لها حادة.

فكر وناقش:

جد قيمة كل من س، ص في الشكل:

الحل:



$$110^\circ = \angle 5 + \angle 2 + \angle 3 \quad (\text{نتيجة الزاوية الخارجية})$$

$$110^\circ = \angle 8 + \angle 2 + \dots \quad ١$$

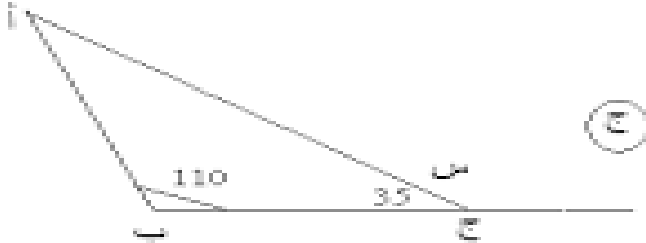
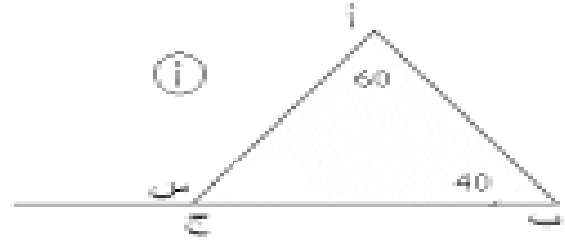
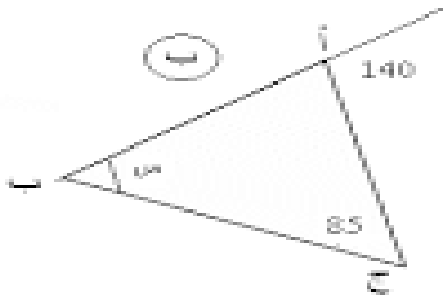
$$3س + 2ص + 8ص = 180^\circ \text{ (تجاور على مستقيم)}$$

$$180^\circ = 3س + 8ص + 2 \dots\dots\dots$$

بحل نظام المعادلات الناتج بطريقة الحذف أو طريقة التعويض نجد أن $س = 10^\circ$ ، $ص = 15^\circ$

إجابات التمارين و المسائل

(١) جد قيمة الزاوية س في كل مما يأتي:



الحل:

(أ) $س = 60^\circ + 40^\circ = 100^\circ$ (الزاوية س زاوية خارجية).

(ب) $س = 140^\circ - 85^\circ = 55^\circ$ (نتيجة الزاوية الخارجية).

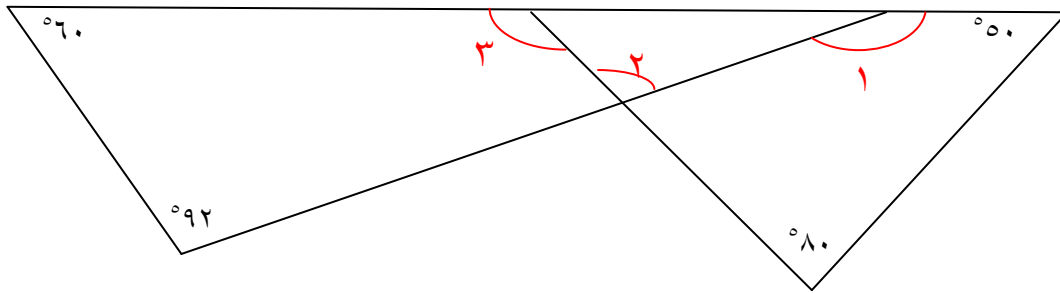
(ج) نجد قياس الزاوية أ أولاً ثم نجد قيمة س

$$\text{الزاوية أ} = 180^\circ - (110^\circ + 35^\circ) = 35^\circ$$

$$\text{إذن س} = 110^\circ + 35^\circ = 145^\circ$$

$$\text{(حل آخر س} = 180^\circ - 35^\circ = 145^\circ \text{ تجاور على مستقيم)}$$

٢) جد قياس الزوايا ١ ، ٢ ، ٣ في الشكل الآتي:

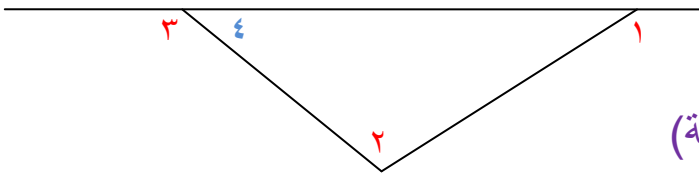


الحل:

$$1 \neq 60^\circ + 92^\circ = 152^\circ$$

$$3 \neq 50^\circ + 80^\circ = 130^\circ$$

لإيجاد ٢ نرسم المثلث الصغير



$$1 \neq 2 \neq 4 \text{ (زاوية خارجية)}$$

$$\text{لكن} \quad 4 \neq 180^\circ - 3 \neq 50^\circ \text{ (تجاور على مستقيم)}$$

$$2 \neq 50^\circ - 152^\circ = 102^\circ$$

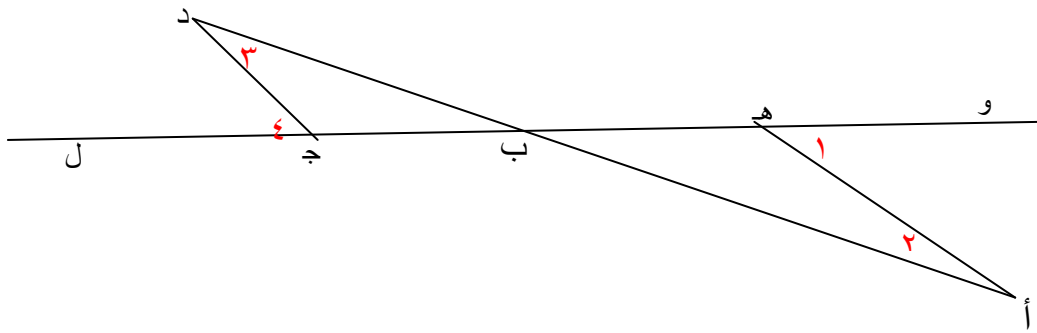
(٣) قياس الزاوية الخارجة لمثلث ١١٧° ، وقياس الزاويتين الداخليتين له $٢س + ٧$ ، $٦١ - ٢س$. جد قيمة $س$.

الحل:

$$(٢س + ٧) + (٦١ - ٢س) = ١١٧ \quad (\text{نتيجة الزاوية الخارجة للمثلث}).$$

$$١١٧ = ٦٧ + ٢س \quad \leftarrow \quad ٥٠ = ٢س \quad \leftarrow \quad ٢٥ = س$$

(٤) إذا كانت $\overline{أه} \parallel \overline{ج د}$ في الشكل الآتي، بين أن $\angle ق = \angle ٤$.



الحل:

نفرض أن $\angle أ ب ه$ هي ٥ ، $\angle د ج ب$ هي ٦

$$\angle ١ = \angle ٢ + \angle ٥ \quad (\text{نتيجة الزاوية الخارجة}).$$

$$\angle ٤ = \angle ٣ + \angle ٦ \quad (\text{نتيجة الزاوية الخارجة}).$$

$$\text{لكن } \angle ٥ = \angle ٦ \quad (\text{تقابل بالرأس})$$

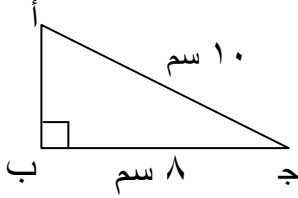
$$\angle ٣ = \angle ٢ \quad (\text{زاويتان متبادلتان لأن } \overline{أه} \parallel \overline{ج د})$$

$$\text{إذن } \angle ١ = \angle ٢ + \angle ٣ = \angle ٤ \quad \text{وهو المطلوب.}$$

الدرس الرابع: مبرهنة فيثاغورس

تدريب ١: Δ أ ب ج قائم الزاوية في ب فيه أ ج = ١٠ سم، ب ج = ٨ سم، احسب طول أ ب.

الحل:



بما أن Δ أ ب ج قائم الزاوية نطبق مبرهنة فيثاغورس.

$$(\text{طول الوتر})^2 = (\text{طول الضلع الأول})^2 + (\text{طول الضلع الثاني})^2$$

$$(\text{أ ج})^2 = (\text{أ ب})^2 + (\text{ب ج})^2$$

$$(10)^2 = (\text{أ ب})^2 + (8)^2 \leftarrow (\text{أ ب})^2 = 100 - 64 = 36$$

$$\text{أ ب} = \sqrt{36} = 6 \text{ ، لكن } 6 \text{ مرفوض لماذا؟}$$

إذن أ ب = ٦ سم لماذا؟

تدريب ٢: بين أي الأطوال الآتية تمثل أطوال أضلاع مثلث قائم الزاوية.

(أ) ٤ سم، ٨ سم، ١١ سم. (ب) ٣٠ سم، ٤٠ سم، ٥٠ سم.

(ج) ١٠ سم، ٧ سم، ١٣ سم. (د) ٣ سم، ٣ سم، $3\sqrt{2}$ سم.

الحل:

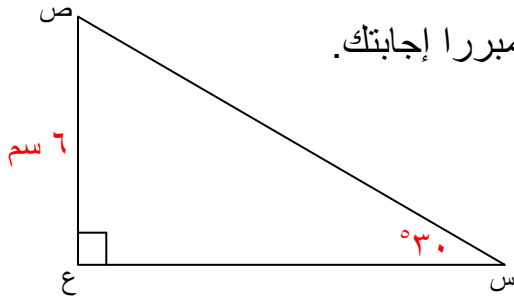
$$(أ) \text{ المثلث ليس قائما لأن } (4)^2 + (8)^2 = 16 + 64 = 80 \neq (11)^2$$

$$(ب) \text{ المثلث قائما لأن } (30)^2 + (40)^2 = 900 + 1600 = 2500 = (50)^2$$

$$(ج) \text{ المثلث ليس قائما لأن } (7)^2 + (10)^2 = 49 + 100 = 149 \neq (13)^2$$

$$(د) \text{ بما أن } (3)^2 + (3)^2 = 9 + 9 = 18 = (3\sqrt{2})^2 \text{ ، إذن المثلث قائم الزاوية.}$$

تدريب ٣: في الشكل المجاور جد طول الضلع س ع .مبررا إجابتك.

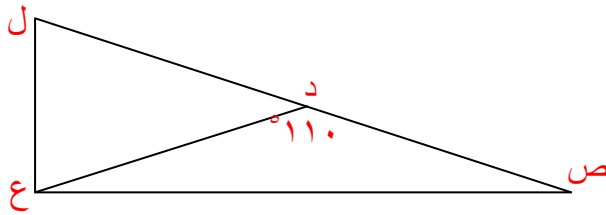


الحل:

$$س ع = ٢ \times ص ع$$

$$= ١٢ \text{ سم} = ٦ \times ٢ \text{ (نتيجة المثلث الثلاثيني الستيني)}$$

تدريب ٤: Δ ص ع ل قائم الزاوية في ع، النقطة د منتصف ص ل، ق $\angle$ ص د ع = ١١٠° ، احسب ق $\angle$ ص.



الحل:

(إرشاد: ارسم شكلا للتوضيح)

د منتصف ص ل $\leftarrow$ ص د = د ع (نتيجة طول القطعة الواصلة من رأس القائمة إلى منتصف الوتر تساوي طول نصف الوتر)

إذن المثلث ص د ع متطابق الضلعين فيه زاوية الرأس = ١١٠°

$$\angle ص = ١٨٠^\circ - ١١٠^\circ = ٧٠^\circ \div ٢ = ٣٥^\circ$$

فكرونناقش:

تسمى الأضلاع ٣، ٤، ٥ ثلاثية فيثاغورس، لأنها تحقق مبرهنة فيثاغورس.

أوجد مجموعتين على الأقل من ثلاثيات فيثاغورس .

الحل:

هناك عدة مجموعات جميعها تنتج عن النسب المتكافئة ؛ مثل:

$$(٦، ٨، ١٠)، (٩، ١٢، ١٥)، (١٢، ١٦، ٢٠)، (١٥، ٢٠، ٢٥)، (٣٠، ٤٠، ٦٠)$$

إجابات التمارين و المسائل

(١) أي مما يأتي تمثل أطوال أضلاع مثلث قائم الزاوية :

(أ) ٣سم، ٥سم، ٩سم. (ب) ٢٠سم، ٢٤سم، ٢٥سم.

(ج) ٥ دسم، ١٠ دسم، $\sqrt{٧٥}$ دسم. (د) ١٢ دسم، ٢١ دسم، ١٥ دسم.

الحل:

(أ) بما أن $\angle(٣) + \angle(٥) \neq \angle(٩)$ ، إذن المثلث ليس قائماً.

(ب) $\angle(٢٠) = \angle(٢٤)$ ، $\angle(٢٤) = \angle(٢٥)$ ، $٦٢٥ = ٥٧٦ + ٤٠٠ \neq ٦٢٥$ فالمثلث ليس قائماً.

(ج) $\angle(١٠) = \angle(\sqrt{٧٥}) + \angle(٥)$ لذلك المثلث قائم.

(د) $\angle(١٢) = \angle(١٥)$ ، $\angle(١٥) = \angle(٢١)$ ، $٤٤١ = ٢٢٥ + ١٤٤ \neq ٤٤١$ فالمثلث ليس قائماً.

(٢) جد طول الضلع الثالث في كل مما يأتي:

(أ) Δ س د ب قائم في د فيه س د = ١٥سم، د ب = ٨سم.

(ب) Δ م ن ل قائم في ل فيه م ل = ١سم، م ن = $\sqrt{٣}$ سم.

(ج) مثلث قائم الزاوية طول أحد أضلاعه ٧، ٠سم، وطول وتره ٢، ٥سم.

الحل:

(أ) $\angle(س ب) = \angle(س د) + \angle(د ب)$

$$٦٤ + ٢٢٥ = \angle(٨) + \angle(١٥) =$$

$$س ب = \sqrt{٢٨٩} +$$

$$(ب) \quad (م ن)^2 = (م ل)^2 + (ل ن)^2$$

$$(ل ن)^2 + (١)^2 = (\sqrt{٣})^2$$

$$(ل ن)^2 = ٣ - ١ = ٢ \quad \leftarrow \quad ل ن = \sqrt{٢} \text{ سم.}$$

$$(ج) \quad (الوتر)^2 = (الضلع١)^2 + (الضلع٢)^2$$

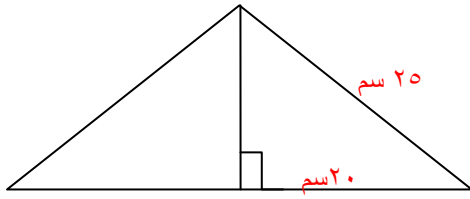
$$(٢،٥)^2 = (٠،٧)^2 + (الضلع٢)^2$$

$$(الضلع٢)^2 = ٦،٢٥ - ٠،٤٩ = ٥،٧٦$$

$$الضلع٢ = \sqrt{٥،٧٦} = ٢،٤ \text{ سم}$$

(٣) Δ د ه و متطابق الضلعين طول ضلعه ٢٥ سم، وطول قاعدته ٤٠ سم، جد طول ارتفاعه.

الحل:



(إرشاد: يمكن الاستعانة بالرسم)

ارتفاع المثلث = العمود النازل من رأس المثلث على قاعدته.

بما أن المثلث متطابق الضلعين فالعمود ينصف قاعدته (خصائص متطابق الضلعين).

$$(ارتفاع المثلث)^2 = (٢٥)^2 - (٢٠)^2 = ٦٢٥ - ٤٠٠ = ٢٢٥$$

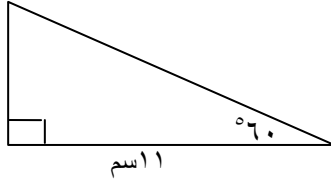
$$ارتفاع المثلث = \sqrt{٢٢٥} = ١٥ \text{ سم.}$$

(٤) مثلث قائم الزاوية متطابق الضلعين طول وتره يساوي $\sqrt{١٠}$ سم، جد طول كل من الضلعين الآخرين.

الحل:

نفرض طول ضلع القائمة = س

$$\text{من فيثاغورس (} \sqrt{١٠} \text{)} \quad س^2 + س^2 = (\sqrt{١٠})^2 \quad \leftarrow \quad ٢س^2 = ١٠ \quad \leftarrow \quad س = \sqrt{١٠} \text{ سم.}$$



٥) احسب محيط المثلث في الشكل المجاور.

الحل:

بما أن المثلث ثلاثيني ستيني، والضلع المقابل للزاوية التي قياسها ٥٣° يساوي ١١ سم

إذن طول الوتر يساوي ٢٢ سم (نتيجة المثلث الثلاثيني الستيني)

$$(الضلع_٢)^2 = (الوتر)^2 - (الضلع_١)^2 \quad \text{مبرهنة فيثاغورس}$$

$$(الضلع_٢)^2 = (٢٢)^2 - (١١)^2 = ٤٨٤ - ١٢١ = ٣٦٣$$

$$الضلع_٢ = \sqrt{٣٦٣} = \sqrt{١١}$$

$$\text{إذن محيط المثلث} = ٢٢ + ١١ + \sqrt{١١} = ٣٣ + \sqrt{١١} \text{ سم.}$$



يحتاج أحد رجال الإنقاذ إلى تثبيت سلم على بناية طولها ١٥ م،

٦) إذا علمت أن من شروط السلامة أن تكون المسافة بين قاعدة

السلم والمبنى بمقدار ربع طول السلم تقريبا، جد المسافة

التقريبية لبعد قاعدة السلم عن البناية.

الحل:

نفرض طول السلم = س متر ← المسافة بين قاعدة السلم والمبنى = $\frac{س}{٤}$ متر.

$$(س)^2 = \left(\frac{س}{٤}\right)^2 + (١٥)^2 \quad \leftarrow \quad س^2 - \frac{س^2}{١٦} = ٢٢٥$$

$$س = \sqrt{\frac{١٦ \times ٢٢٥}{١٥}} = \frac{٢٠}{\sqrt{١٥}} \text{ متر.}$$

$$\text{المسافة} = \frac{٥}{٣} \sqrt{١٥} \text{ متر} = ١,٣ \text{ متر تقريبا.}$$

(٧) س ص ع مثلث قائم الزاوية في ص، النقطة ب منتصف س ع، ج منتصف ص ع. أثبت أن $\overline{AB} \perp \overline{CE}$.

الحل:

بما أن ب منتصف س ع ، ج منتصف ص ع (معطيات)

إذن ب ج توازي س ص (القطعة الواصلة بين منتصفي ضلعي مثلث توازي الضلع الثالث)

ومنه الزاوية ج والزاوية ص متساويتان (وضع تناظر)

إذن الزاوية ب ج ع = 90°

ومنه أن $\overline{AB} \perp \overline{CE}$ وهو المطلوب.

(٨) فكر: عين العدد الحقيقي $\sqrt{2}$ على خط الأعداد باستخدام مبرهنة فيثاغورس.

الحل:

• ارسم مثلثا قائما متطابق الضلعين فيه طول ضلع القائمة ١ سم، فيكون الوتر يساوي $\sqrt{2}$ وحدة طول.

• افتح الفرجار فتحة تساوي طول الوتر.

• ارسم خط أعداد ، ثم ثبت الفرجار عليه من العدد صفر، وارسم قوسا يقطع خط الاعداد.

ستجد أن القوس قطع خط الأعداد بين العددين ١ ، ٢ وهو أقرب إلى ١.

نقطة التقاطع تساوي العدد $\sqrt{2}$.

اختبار ذاتي

(١) ناقش صحة كل عبارة من العبارات الآتية مبررا إجابتك.

- (أ) لأي ثلاث أعداد، إذا كان مجموع العددين الأصغر $<$ العدد الأكبر، فإن هذه الأعداد يمكن أن تكون أطوال أضلاع في مثلث.
- (ب) في Δ س ص ل ؛ إذا كانت $\angle$ س منفرجة، فإن الضلع ص ل هو أطول أضلاع المثلث.
- (ج) إذا كانت $\angle$ هـ د ك خارجة للمثلث هـ د ن، فإنها منفرجة.
- (د) إذا كانت إحدى القطع المتوسطة في مثلث عمودية على الضلع الساقطة عليه، فإن المثلث متطابق الضلعين.
- (هـ) في Δ أ ب ج إذا وُجد قطعتان متوسطتان عموديتان على ضلعيه، فإن المثلث متطابق الأضلاع.
- (و) الزوايا الخارجة للمثلث حاد الزوايا، جميعا منفرجة.
- (ز) في المثلث القائم الزاوية، مساحة المثلث المنتظم المنشأ على الوتر تساوي مجموع مساحتي المثلثين المنتظمين المنشأين على الضلعين الآخرين.

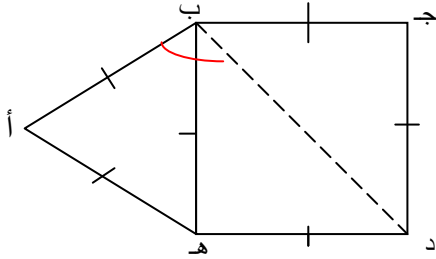
الحل:

- (أ) نعم ، لأن من خصائص المثلث (مجموع طولي أي ضلعين أكبر من طول الضلع الثالث).
- (ب) نعم ، لأن الزاوية س هي أكبر الزوايا ، فيقابلها أطول الأضلاع وهو الضلع ص ل.
- (ج) لا، عبارة خاطئة قد تكون الزاوية الخارجية مجاورة لزاوية قائمة فتكون قائمة، أو مجاورة لزاوية منفرجة فتكون حادة.
- (د) نعم ، القطعة المتوسطة تصل بين زاوية مثلث ومنتصف الضلع المقابل له، ومن خصائص المثلث المتطابق الضلعين أن القطعة الواصلة بين رأس المثلث ومنتصف قاعدته تكون عمودية على القاعدة.
- (هـ) نعم، كما في فرع (د)، وإذا وجد قطعتان عموديتان فإن الأضلاع الثلاثة متطابقة.

و) نعم، لأن مجموع زاوية المثلث والزاوية الخارجة المجاورة لها تشكل زاوية مستقيمة، وبما أن زاوية المثلث حادة فالزاوية الخارجة تكون منفرجة.

ز) نعم، ويمكنك أن تتحقق باستخدام قانون مساحة المثلث.

٢) في الشكل المجاور جد $\angle \text{أ ب د}$:



الحل:

$$\angle \text{أ ب د} = \angle \text{أ ب هـ} + \angle \text{هـ ب د}$$

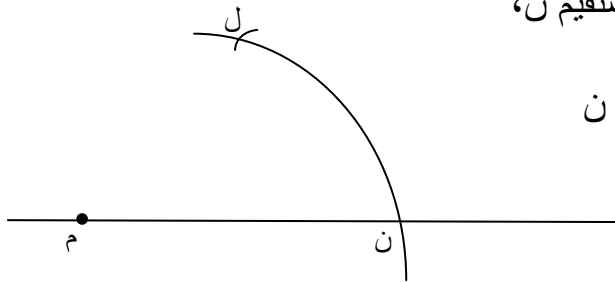
$$= 60^\circ + 45^\circ \quad (\angle \text{أ ب هـ} = 60^\circ \text{ زاوية في مثلث متطابق الاضلاع})$$

$$(\angle \text{هـ ب د} = 45^\circ \text{ زاوية في مثلث قائم متطابق الضلعين})$$

$$= 105^\circ$$

*٣) رُسم قوس دائرة مركزها م فقطع الخط المستقيم ن،

ثم رُسم قوس دائرة بنفس فتحة الفرجار مركزها ن



فقطع القوس الأول في ل. جد $\angle \text{م ل ن}$.

الحل:

$$\angle \text{م ل ن} = 60^\circ \text{ لأن المثلث م ل ن مثلث متطابق الأضلاع.}$$

إدارة المناهج والكتب المدرسية

إجابات و حلول الأسئلة

الصف: الثامن الأساسي

الكتاب: الرياضيات

الجزء: الأول

رقم الوحدة: (٨)

اسم الوحدة: المجسمات

الدرس الأول: الشبكات

أكمل الفراغ في الجدول الآتي بوضع إشارة (✓) أو (X)، للإجابة عن السؤال أعلاه:

ثلاثي الأبعاد	ثنائي الأبعاد	
X	✓	الشبكة
✓	X	المجسم

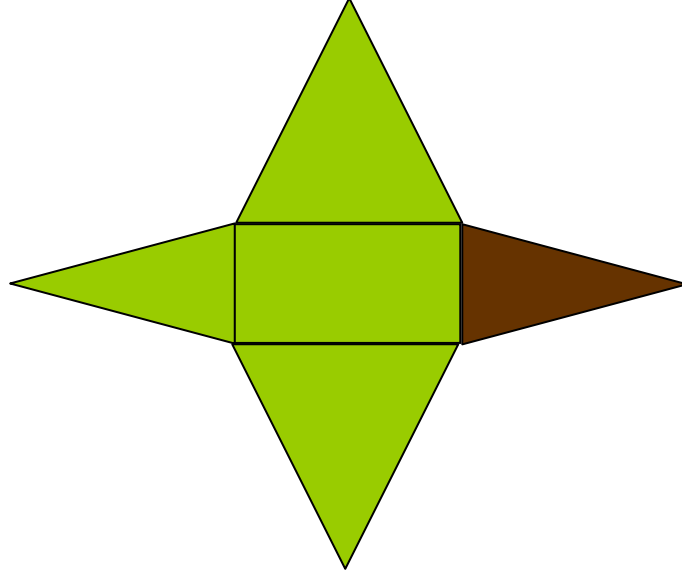
تدريب (١): أنا مجسم شبكتي تتكون من مستطيل، وأربعة مثلثات متطابقة الضلعين، عند طيها تلتقي رؤوسها في نقطة واحدة، فمن أنا؟ وماذا تسمى نقطة الالتقاء؟

الحل:

هرم رباعي، والنقطة تسمى رأس الهرم

تدريب (٢): ارسم شبكة لكل مجسم من المجسمات الآتية:

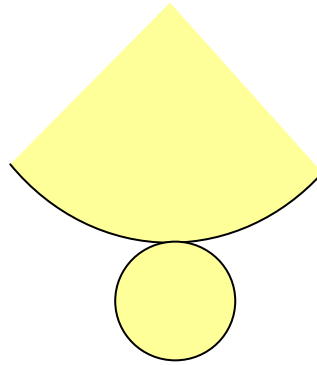
(أ)



(ب)



(ج)



تمارين ومسائل

(١) اكتب المجسم الذي تكونه كل شبكة مما يأتي:

(أ) هرم رباعي

(ب) اسطوانة

(ج) منشور ثلاثي

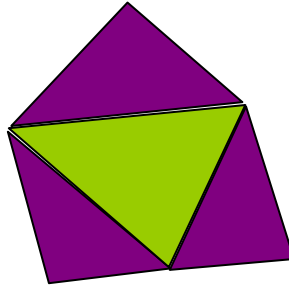
(د) مخروط

(٢) ارسم شبكة لكل مجسم مما يأتي، ثم قارن ما تتوصل إليه بما يتوصل إليه زملاؤك .

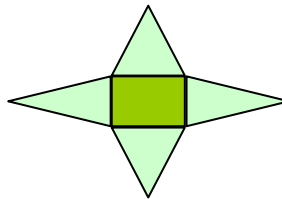
(أ) منشور ثلاثي

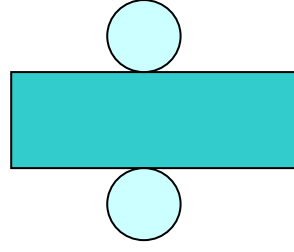


(ب) هرم ثلاثي



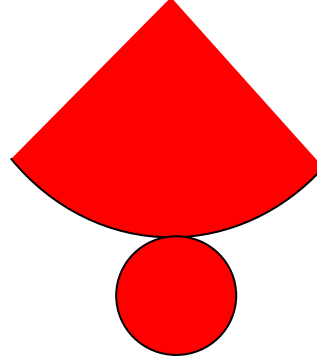
(ج) هرم رباعي



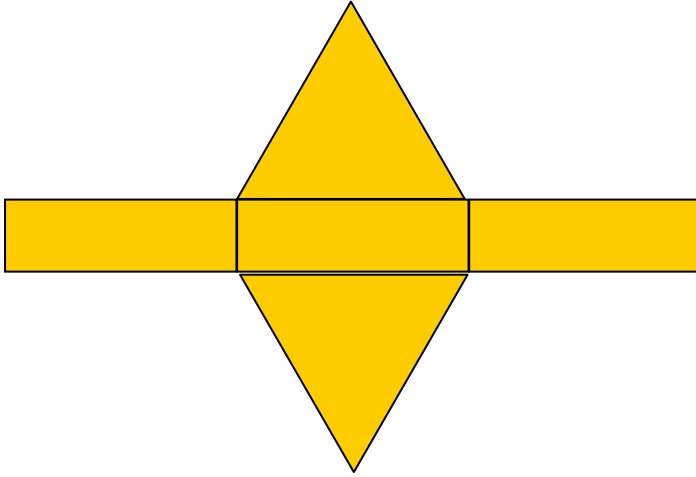


(د) اسطوانة

(هـ) مخروط



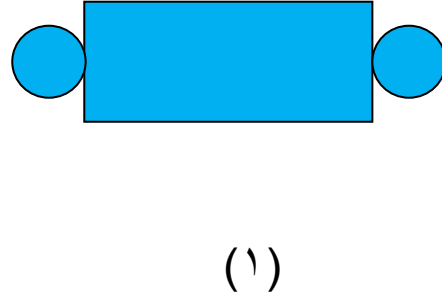
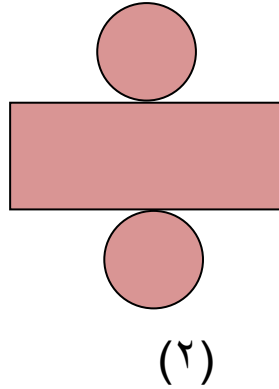
(٣) كلف معلم الرياضيات الطالب سعيد برسم شبكة هرم ثلاثي، فرسم الطالب سعيد الشبكة الآتية:



هل تتفق مع ما رسمه سعيد ؟ مبرراً إجابتك.

الحل: لا، لأن سعيد رسم منشور ثلاثي

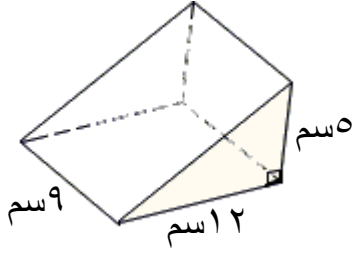
(٤) طلبت معلمة الرياضيات رسم شبكة لمجسم الأسطوانة، فرسمت راما الشبكة (١)، ورسمت الشبكية (٢):



هل تتفق مع ما رسمته كل من راما، ورسم؟ مبرراً إجابتك.

الحل: نعم، لأن كل منهما رسم مجسم اسطوانة

الدرس الثاني: حجم المنشور الثلاثي، ومساحة سطحه



تدريب (١): جد حجم المنشور الثلاثي

المجاور؟

الحل:

حجم المنشور = مساحة القاعدة $\times$ الارتفاع

$$9 \times 5 \times 12 \times \frac{1}{2} =$$

$$= 30 \times 9 = 270 \text{ سم}^3$$

تدريب (٢): منشور ثلاثي مساحته الكلية ٤٨ سم^٢، ومساحته الجانبية

٣٦ سم^٢. جد مساحة قاعدته؟

الحل:

المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدتين

$$48 = 36 + \text{مساحة القاعدتين}$$

$$\text{مساحة القاعدتين} = 12 \text{ سم}^2$$

$$\text{إذن: مساحة القاعدة} = 6 \text{ سم}^2$$

تمارين ومسائل

(١) منشور ثلاثي أطوال قاعدته هي: ٦ سم، ٨ سم، ١٠ سم، وارتفاعه ١١ سم. جد حجمه، ومساحته الكلية؟

الحل:

المثلث الذي أطوال أضلاعه ٦، ٨، ١٠ هو مثلث قائم زاوية

حجم المنشور = مساحة القاعدة × الارتفاع

$$= \frac{1}{2} \times 6 \times 8 \times 11$$

$$= 24 \times 11$$

$$= 264 \text{ سم}^3$$

(٢) منشور ثلاثي حجمه ٢٨ م^٣، ومساحة قاعدته ٧ م^٢. جد ارتفاعه.

الحل:

حجم المنشور = مساحة القاعدة × الارتفاع

$$28 = 7 \times \text{الارتفاع}$$

$$\text{الارتفاع} = 28 \div 7 = 4 \text{ م}$$

(٣) منشور ثلاثي مساحته الجانبية ٣١ ٢!، وارتفاعه ٢! ٤ سم. جد محيط قاعدته؟

الحل:

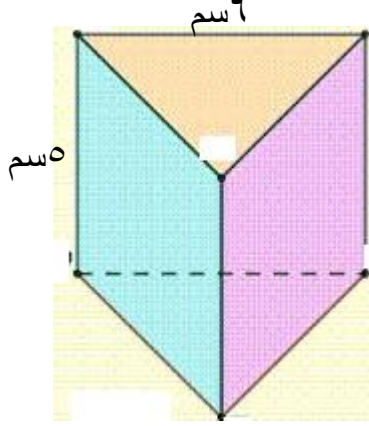
المساحة الجانبية = محيط القاعدة × الارتفاع

$$31 \ 2! = \text{محيط القاعدة} \times 2! \ 4$$

$$\text{محيط القاعدة} = 31 \ 2! \div 2! \ 4$$

$$= 7 \text{ سم}$$

٤) يمثل الشكل المجاور منشور ثلاثي مساحته الجانبية ٨٠ سم^٢، وارتفاعه ٥ سم، وقاعدته على شكل مثلث متطابق الضلعين طول قاعدته ٦ سم. جد المساحة الكلية لسطح المنشور.



الحل:

$$\text{المساحة الجانبية} = \text{محيط القاعدة} \times \text{الارتفاع}$$

$$٨٠ = \text{محيط القاعدة} \times ٥$$

$$\text{محيط القاعدة} = ٨٠ \div ٥ = ١٦ \text{ سم}$$

$$\text{محيط القاعدة} = ٢س + ٦$$

$$١٦ = ٢س + ٦$$

$$س = ٥$$

$$\text{إذن: مساحة القاعدة (مثلث)} = \frac{1}{2} \times \text{القاعدة} \times \text{الارتفاع}$$

$$= \frac{1}{2} \times ٦ \times ٤$$

$$= ١٢$$

$$\text{المساحة الكلية} = \text{المساحة الجانبية} + ٢ \times \text{مساحة القاعدة}$$

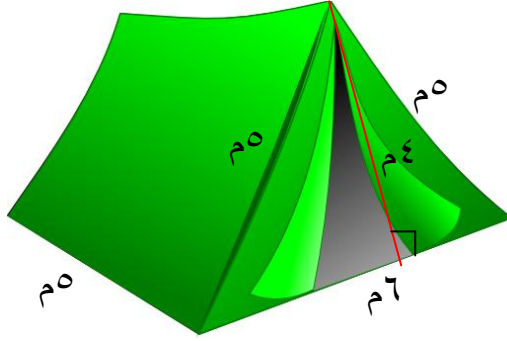
$$= ٨٠ + ٢ \times ١٢$$

$$= ٨٠ + ٢٤$$

$$= ١٠٤ \text{ سم}^٢$$

٥) ينتج مصنع خيماً كما في الشكل المجاور، إذا كان تكلفة المتر المربع الواحد ١,٥ دينار.

جد تكلف ٩ خيم مشابهه؟



الحل:

المساحة الجانبية = محيط القاعدة × الارتفاع

$$= ٥ \times ١٦$$

$$= ٨٠ \text{ م}^٢$$

مساحة القاعدة (مثلث) = $\frac{1}{2} \times$ القاعدة $\times$ الارتفاع

$$= \frac{1}{2} \times ٦ \times ٤$$

$$= ١٢$$

المساحة الكلية = المساحة الجانبية + ٢ × مساحة القاعدة

$$= ٨٠ + ١٢ \times ٢$$

$$= ٨٠ + ٢٤$$

$$= ١٠٤ \text{ سم}^٢$$

تكلفة الخيمة الواحدة = $١٠٤ \times ١,٥ = ١٩٦$ دينار

إذن: تكلفة ٩ خيم مشابهه = $١٩٦ \times ٩ = ١٧٦٤$ دينار

٦) ارسم شبكة لمنشور ثلاثي مساحته الجانبية ٦٠ سم^٢.

الحل: يوجد إجابات مختلفة وتعطي نفس النتيجة

٧) ارسم شبكة لمنشور ثلاثي مساحته الكلية ٦٠ سم^٢.

الحل: يوجد إجابات مختلفة وتعطي نفس النتيجة

الدرس الثالث: حجم الاسطوانة، ومساحة سطحها

تدريب (١): علبة حليب للأطفال على شكل اسطوانة حجمها ١٨٠٠ سم^٣، وارتفاعها ٢٠ سم. جد مساحة قاعدتها؟

الحل:

$$\text{حجم الاسطوانة} = \text{مساحة القاعدة} \times \text{الارتفاع}$$

$$١٨٠٠ = \text{مساحة القاعدة} \times ٢٠$$

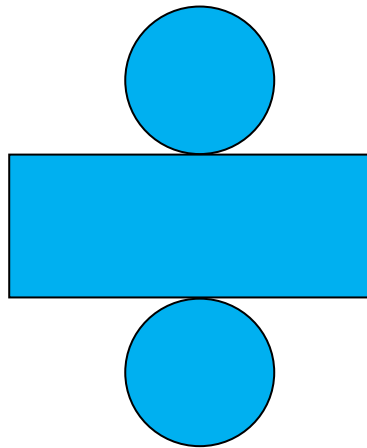
$$\text{مساحة القاعدة} = ١٨٠٠ \div ٢٠ = ٩٠ \text{ سم}^٢$$

تدريب (٢):

اسطوانة دائرية قائمة طول قطر قاعدتها ١٤ سم، وارتفاعها ٣ سم:

أ) ارسم شبكة لهذه الاسطوانة؟

الحل:



ب) جد مساحتها الكلية؟ ثم تحقق من صحة الحل.

الحل:

المساحة الجانبية = $\pi \times 2$ نق ع

$$= \pi \times 2 \times 7 \times 3 = \pi \times 42 \text{ سم}^2$$

مساحة القاعدة = $\pi \times 2$ نق

$$= \pi \times (7)^2 = \pi \times 49 \text{ سم}^2$$

المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدتين

$$= \pi \times 42 + \pi \times 49 \times 2$$

$$= \pi \times 140 \text{ سم}^2$$

التحقق:

المساحة الكلية = $\pi \times 2$ نق (ع + نق)

$$= \pi \times 2 \times (7 + 3) =$$

$$= \pi \times 14 \times 10 = \pi \times 140 \text{ سم}^2 \quad \checkmark$$

تدريب (٣): اسطوانة دائرية مساحتها الكلية ٧٢ سم^٢، ومساحة قاعدتها

١٦ سم^٢. جد مساحتها الجانبية؟

الحل:

المساحة الكلية = المساحة الجانبية + $2 \times$ مساحة القاعدة

$$72 = \text{المساحة الجانبية} + 2 \times 16$$

$$\text{المساحة الجانبية} = 72 - 32 =$$

$$= 40 \text{ سم}^2$$

تمارين ومسائل

(١) اسطوانة دائرية قائمة طول قطر قاعدتها ٢,٥ سم، وارتفاعها ٤ سم. جد حجمها، ومساحتها الكلية؟ ثم تحقق من صحة الحل.

الحل:

$$\text{حجم الاسطوانة} = \text{مساحة القاعدة} \times \text{الارتفاع}$$

$$= \pi \text{ نق}^2 \times \text{ع}$$

$$= \pi (١,٢٥)^2 \times ٤$$

$$= \pi ٦,٢٥$$

$$\text{المساحة الجانبية} = ٢ \pi \text{ نق} \times \text{ع}$$

$$= ٢ \pi \times ١,٢٥ \times ٤ = ١٠ \pi \text{ سم}^2$$

$$\text{مساحة القاعدة} = \pi \text{ نق}^2$$

$$= \pi (١,٢٥)^2 = ١,٥٦٢٥ \pi \text{ سم}^2$$

$$\text{المساحة الكلية} = \text{المساحة الجانبية} + \text{مساحة القاعدتين}$$

$$= ١٠ \pi + ٢ \times ١,٥٦٢٥ \pi$$

$$= ١٣,١٢٥ \pi \text{ سم}^2$$

التحقق:

$$\text{حجم الاسطوانة} = \text{مساحة القاعدة} \times \text{الارتفاع}$$

$$= \pi ١,٥٦٢٥ \times ٤$$

$$= \pi ٦,٢٥ \text{ سم}^3 \quad \checkmark$$

$$\text{المساحة الكلية} = ٢ \pi \text{ نق} (\text{ع} + \text{نق})$$

$$= ٢ \pi (١,٢٥ + ٤) \times ١,٢٥$$

$$= ٢,٥ \pi \times ٥,٢٥ = ١٣,١٢٥ \pi \text{ سم}^2 \quad \checkmark$$

(٢) اسطوانة دائرية قائمة سعتها ٦,٢٨ لتر، وارتفاعها ٢٠ سم. جد طول نصف قطر قاعدتها؟ ثم تحقق من صحة الحل،
معتبراً $(\pi \approx 3,14)$.

الحل:

$$\text{حجم الاسطوانة} = \text{مساحة القاعدة} \times \text{الارتفاع}$$

$$6280 = \text{مساحة القاعدة} \times 20$$

$$\text{مساحة القاعدة} = 6280 \div 20 = 314 \text{ سم}^2$$

$$\text{مساحة القاعدة} = \pi \text{ نق}^2$$

$$314 \approx 3,14 \times \text{نق}^2$$

$$100 = \text{نق}^2$$

$$\text{نق} = 10 \text{ سم}$$

التحقق:

$$\text{حجم الاسطوانة} = \text{مساحة القاعدة} \times \text{الارتفاع}$$

$$= \pi \text{ نق}^2 \times \text{ع}$$

$$\approx 3,14 \times (10)^2 \times 20$$

$$\approx 314 \times 20 = 6280 \text{ سم}^3$$

$$= 6,26 \text{ لتر} \quad \checkmark$$

(٣) اسطوانة دائرية قائمة حجمها ٣٥٢ سم^٣ ، وطول قطرها ٨ سم، جد ارتفاعها؟ ثم تحقق من صحة الحل.

الحل:

$$\text{حجم الاسطوانة} = \text{مساحة القاعدة} \times \text{الارتفاع}$$

$$352 = \pi \text{ نق}^2 \times \text{ع}$$

$$352 = (22 \div 7) \times (4)^2 \times \text{ع}$$

$$\text{ع} = 7 \text{ سم}$$

التحقق:

$$\text{حجم الاسطوانة} = \text{مساحة القاعدة} \times \text{الارتفاع}$$

$$= \pi \text{ نق}^2 \times \text{ع}$$

$$\approx (22 \div 7) \times (4)^2 \times 7$$

$$\approx 22 \times 16 \times 1 \approx 352 \text{ سم}^3 \quad \checkmark$$

٤) ورقة مستطيلة الشكل طولها ٤٤ سم، وعرضها ٢٢، كما في الشكل

الآتي:



قام سعيد بعمل اسطوانة منها ارتفاعها ٢٢ سم، وقام علي بعمل اسطوانة منها ارتفاعها ٤٤ سم. أيهما أكبر حجماً؟ مبرراً إجابتك.

الحل: الاسطوانة التي عملها سعيد

التبرير:

اسطوانة سعيد: ارتفاعها = ٢٢ سم ، محيط قاعدتها = ٤٤ سم

$$\text{محيط القاعدة} = 2\pi \text{ نق}$$

$$44 = 2\pi \text{ نق}$$

$$\text{نق} \approx 7 \text{ سم}$$

$$\text{حجم الاسطوانة} = \pi \text{ نق}^2 \times \text{ع}$$

$$\approx \pi (7)^2 \times 22 = 1078 \pi \text{ سم}^3 \approx 3388 \text{ سم}^3$$

اسطوانة علي: ارتفاعها = ٤٤ سم ، محيط قاعدتها = ٢٢ سم

محيط القاعدة = $2\pi r$ نق

$$2\pi r = 22$$

$$r = 3.5 \text{ سم}$$

حجم الاسطوانة = $\pi r^2 \times \text{ع}$

$$= \pi (3.5)^2 \times 44 = 539\pi \text{ سم}^3 = 1694 \text{ سم}^3$$

٥) يبين الشكل أدناه علبة كرتونية، طول قاعدتها ١٤سم، وعرضها ١١سم،

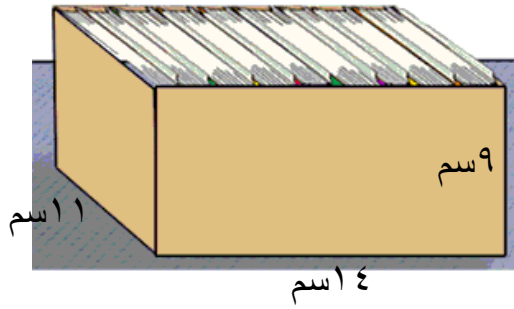
وارتفاعها ٩سم. إذا قررت الشركة

المصنعة استعمال تصميم جديد للعلبة

بالحجم والارتفاع نفسه، ولكن بشكل

اسطواني. جد طول قطر قاعدة

الاسطوانة الذي يمكن استعماله؟



الحل: العلبة على شكل منشور رباعي (متوازي مستطيلات)

حجم متوازي المستطيلات = مساحة القاعدة $\times$ الارتفاع

$$= (14 \times 11) \times 9 = 1386 \text{ سم}^3$$

حجم الاسطوانة = $\pi r^2 \times \text{ع}$

$$\pi r^2 \times 9 = 1386$$

$$r^2 = \frac{1386}{9\pi} = 7 \times 22$$

$$r^2 = \frac{7 \times 22}{\pi} = 49$$

$$r = 7 \text{ سم}$$

$$r = 7 \text{ سم}$$

طول قطر قاعدة الاسطوانة = ١٤ سم

الدرس الرابع: حجم المخروط ، ومساحة سطحه

تدريب (١): مخروط دائري قائم مساحة قاعدته ٣١٤ سم^٢، وارتفاعه ١٥ سم. جد:

الحل:

$$(أ) \text{ حجم المخروط} = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

$$= \frac{1}{3} \times 314 \times 15 =$$

$$= 314 \times 5 = 1570 \text{ سم}^3$$

$$(ب) \text{ مساحة القاعدة} = \pi r^2$$

$$314 \approx 3.14 \times r^2$$

$$r^2 = 100$$

$$r = 10 \text{ سم}$$

تدريب (٢): مخروط دائري قائم ارتفاعه ١٢ سم، وطول قطر قاعدته ١٠ سم. جد طول راسم المخروط، وحجمه؟

الحل:

$$(ل) = (ع) + (نق)$$

$$(ل) = (١٢) + (٥)$$

$$(ل) = 144 + 25 = 169$$

$$\text{إذن: طول الراسم (ل) = } 13 \text{ سم}$$

$$\text{حجم المخروط} = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

$$= \frac{1}{3} \times \pi \times (٥)^2 \times 12 =$$

$$= 100 \pi \text{ سم}^3$$

تدريب (٣): مخروط دائري قائم طول نصف قطر قاعدته ٥ سم، وارتفاعه ١٢ سم، جد مساحته الكلية؟ ثم تحقق من صحة الحل.

الحل:

$$^2(ل) = ^2(ع) + ^2(نق)$$

$$^2(ل) = ^2(١٢) + ^2(٥)$$

$$^2(ل) = ١٤٤ + ٢٥ = ١٦٩$$

إذن: طول الراسم (ل) = ١٣ سم

المساحة الجانبية للمخروط = π ل نق

المساحة الجانبية للمخروط = $\pi \times ١٣ \times ٥$

$$= ٦٥ \pi \text{ سم}^2$$

$$\text{مساحة القاعدة} = \pi \times (٥)^2$$

$$\text{مساحة القاعدة} = ٢٥ \pi$$

المساحة الكلية للمخروط = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة

$$= ٦٥ \pi + ٢٥ \pi$$

$$= ٩٠ \pi \text{ سم}^2$$

التحقق:

المساحة الكلية للمخروط = π نق (ل + نق)

المساحة الكلية للمخروط = $\pi \times (٥ + ١٣) \times ٥$

$$= ١٨ \times \pi \times ٥ = ٩٠ \pi \text{ سم}^2 \quad \checkmark$$

تمارين ومسائل

(١) جد حجم مخروط دائري قائم طول قطره قاعدته ٢٠م، وارتفاعه ٢٥م؟
الحل:

$$\begin{aligned}\text{حجم المخروط} &= \pi r^2 \text{نق} \div 3 \\ &= \pi \times (10)^2 \times 25 \div 3 \\ &= \pi \times 2500 \times 25 \div 3 \\ &\approx 833,3 \pi \text{ سم}^3\end{aligned}$$

(٢) مخروط دائري قائم، حجمه ٣٦٣ سم^٣، وارتفاعه ٩سم. جد طول نصف قطر قاعدته؟
الحل:

$$\begin{aligned}\text{حجم المخروط} &= \pi r^2 \text{نق} \div 3 \\ 363 &= \pi r^2 \times 9 \div 3 \\ \text{نق} &= 121 \\ \text{نق} &= 11 \text{ سم}\end{aligned}$$

(٣) مخروط دائري قائم طول قطره قاعدته ٦ سم، وطول راسمه ٥ سم جد كلاً مما يأتي:

الحل:

$${}^2(ل) = {}^2(ع) + {}^2(نق)$$

$${}^2(٥) = {}^2(ع) + {}^2(٣)$$

$${}^2(ع) = ٢٥ - ٩ = ١٦$$

إذن: الارتفاع (ع) = ٤ سم

أ) حجم المخروط = ${}^3(٣) \pi \times \text{نق} \times \text{ع}$

$$= {}^3(٣) \pi \times ٤$$

$$= ١٢ \pi \text{ سم}^3$$

ب) المساحة الجانبية للمخروط = $\pi \times \text{ل} \times \text{نق}$

$$\text{المساحة الجانبية للمخروط} = \pi \times ٥ \times ٣ = ١٥ \pi \text{ سم}^2$$

ج) مساحته الكلية؟ ثم تحقق من صحة الحل.

$$\text{مساحة القاعدة} = \pi \times {}^2(نق)$$

$$= \pi \times {}^2(٣) = ٩ \pi \text{ سم}^2$$

المساحة الكلية للمخروط = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة

$$= ١٥ \pi + ٩ \pi$$

$$= ٢٤ \pi \text{ سم}^2$$

التحقق:

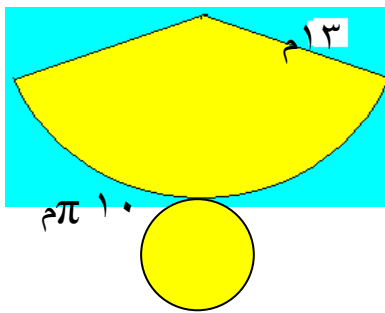
المساحة الكلية للمخروط = $\pi \times \text{نق} \times (\text{ل} + \text{نق})$

$$= \pi \times ٣ \times (٥ + ٣)$$

$$= ٢٤ \pi \text{ سم}^2 \quad \checkmark$$

٤) الرسم الجانبي يمثل شبكة مخروط دائري قائم طول راسمه ١٣ م،

ومحيط قاعدته ١٠π م، جد كلاً مما يأتي:



أ) حجم المخروط؟

ب) مساحته الجانبية؟

ج) مساحته الكلية؟ ثم تحقق من صحة الحل.

الحل:

محيط القاعدة = 2π نق

$10\pi = 2\pi$ نق

نق = 5 م

$(ل) = (ع) + (نق)$

$(13) = (ع) + (5)$

$(ع) = 169 - 25 = 144$

إذن: الارتفاع (ع) = 12 سم

حجم المخروط = $\frac{1}{3} \pi (نق)^2 ع$

$= \frac{1}{3} \pi (5)^2 \times 12 = 100\pi$ سم³

المساحة الجانبية للمخروط = $\pi ل$ نق

$= \pi \times 13 \times 5 = 65\pi$ سم²

مساحة القاعدة = $\pi (نق)^2$

$= \pi (5)^2 = 25\pi$ سم²

المساحة الكلية للمخروط = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة

$= 65\pi + 25\pi$

$= 90\pi$

التحقق:

المساحة الكلية للمخروط = $\pi (ل + نق)$

$$(5+13) \times 5 \times \pi =$$

$$18 \times \pi 5 =$$

$$\checkmark \quad 90 \pi \text{ سم}^2 =$$

٥) اسطوانة، ومخروط لهما نفس الحجم والارتفاع، إذا كان طول نصف قطر قاعدة الاسطوانة ٤ سم، وارتفاعها ١٨ سم.. جد طول نصف قطر قاعدة المخروط ؟

الحل:

$$\text{حجم الاسطوانة} = \pi \text{ نق}^2 \times \text{ع}$$

$$18 \times \pi (4)^2 =$$

$$288 \pi \text{ سم}^3 =$$

$$\text{حجم المخروط} = \frac{1}{3} \pi \text{ نق}^2 \times \text{ع}$$

$$288 \pi = \frac{1}{3} \pi \times \text{نق}^2 \times 18$$

$$48 = \text{نق}^2$$

$$\text{نق} \approx 6,9 \text{ سم}$$

٦) قبة على شكل مخروط، حجمها ١٨٠ سم^٣، وارتفاعها ١٥ سم. جد طول الرأس؟ ثم تحقق من صحة الحل.

الحل:

حجم المخروط = $\pi \times 3! \times \text{نق}^2 \text{ع}$

$$180 \pi = \pi \times 3! \times \text{نق}^2 \times 10$$

$$\text{نق}^2 = 36$$

$$\text{نق} = 6 \text{ سم}$$

$$\text{نق}^2(\text{ع}) + \text{نق}^2(\text{ل}) = \text{نق}^2(\text{ل})$$

$$6^2(10) + 6^2(6) = 6^2(\text{ل})$$

$$261 = 36 + 225 = 6^2(\text{ل})$$

$$\text{إذن: طول الراسم (ل) = } 16,2 \text{ سم}$$

التحقق:

(٧) هل يبقى حجم المخروط ثابتاً، إذا أضفنا ١ لنصف القطر، وطرحنا ١ من الارتفاع؟ مبرراً إجابتك.

الحل: لا

مخروط دائري قائم طول نصف قطر قاعدته ٨ م، وارتفاعه ٢٤ م؟

الحل:

حجم المخروط = $\pi \times 3! \times \text{نق}^2 \text{ع}$

$$24 \times \pi \times 3! \times 8^2 =$$

$$24 \times \pi \times 3! \times 6^2 =$$

$$= 512 \pi \text{ سم}^3$$

إذا أضفنا ١ لنصف القطر يصبح ٩، وطرحنا ١ من الارتفاع، يصبح ٢٣

حجم المخروط = $\pi \times 3! \times \text{نق}^2 \text{ع}$

$$23 \times \pi \times 3! \times 9^2 =$$

$$= 3! \times \pi \times 81 \times 23$$

$$= 612 \pi \text{ سم}^3$$

٨) اثبت أن: المساحة الجانبية للمخروط $= \pi \times \text{ل} \times \text{نق}$ حيث: (ل) طول راسم المخروط، (نق) نصف قطر قاعدة المخروط.
الحل:

$$\text{طول القوس} = \frac{360}{\pi} \times \text{نق} \quad (١)$$

$$\text{مساحة القطاع الدائري} = \frac{360}{\pi} \times \text{نق}^2 \quad (٢)$$

$$\frac{360}{\pi} = \frac{\text{طول القوس}}{\text{نق}}$$

بالتعويض في المعادلة (٢) ينتج أن:

$$\text{مساحة القطاع الدائري} = \left(\frac{\text{طول القوس}}{\text{نق}} \right) \times \text{نق}^2$$

$$= \left(\frac{\text{نق}}{\text{نق}} \right) \times \text{نق}^2$$

حيث نق_١: نصف قطر قاعدة المخروط

نق_٢: نصف قطر الدائرة التي أخذ منها القطاع وهو راسم المخروط

$$= \left(\frac{\text{نق}_1}{\text{نق}_2} \right) \times \pi \times \text{نق}_2^2$$

$$= \pi \times \text{نق}_2^2 \times \frac{\text{ل}}{\pi} = \pi \times \text{ل} \times \text{نق}$$

إذن: المساحة الجانبية للمخروط = مساحة القطاع الدائري

$$= \pi \times \text{ل} \times \text{نق} \text{ وهو المطلوب}$$

الدرس الخامس: حجم الهرم ومساحة سطحه

تدريب (١): هرم ثلاثي ارتفاعه ١٥ م، وقاعدته على شكل مثلث طول قاعدته ١٠ سم، وارتفاعه ٧ سم. جد حجمه؟

الحل:

حجم الهرم = $3! \times \text{مساحة القاعدة} \times \text{الارتفاع}$

$$= 3! \times (7 \times 10 \times \frac{1}{2}) \times 15$$

$$= 3! \times 35 \times 15$$

$$= 35 \times 5$$

$$= 175 \text{ سم}^3$$

تدريب (٢): هرم ثلاثي أطوال قاعدته ٥، ٦، ٧ سم، وارتفاعه الجانبي ٨ سم. جد مساحته الجانبية؟ ثم تحقق من صحة الحل.

الحل:

المساحة الجانبية لسطح الهرم = $\frac{1}{2} \times \text{محيط القاعدة} \times \text{الارتفاع الجانبي للهرم}$

$$= \frac{1}{2} \times (7 + 6 + 5) \times 8$$

$$= \frac{1}{2} \times 18 \times 8$$

$$= 9 \times 8 = 72 \text{ سم}^2$$

التحقق:

$$\text{مساحة الوجه الأول} = \frac{1}{2} \times 5 \times 8 = 20 \text{ سم}^2$$

$$\text{مساحة الوجه الثاني} = \frac{1}{2} \times 6 \times 8 = 24 \text{ سم}^2$$

$$\text{مساحة الوجه الثالث} = \frac{1}{2} \times 7 \times 8 = 28 \text{ سم}^2$$

$$\checkmark \quad \text{المساحة الجانبية لسطح الهرم} = 20 + 24 + 28 = 72 \text{ سم}^2$$

تمارين ومسائل

(١) أوجد حجم هرم ارتفاعه ١٧ متر، وقاعدته مربعة الشكل طول ضلعها ٢٢ متر؟

الحل:

حجم الهرم = $3! \times \text{مساحة القاعدة} \times \text{الارتفاع}$

$$= 3! \times (22 \times 22) \times 17$$

$$= 3! \times 484 \times 17$$

$$= 8228 \times 3!$$

$$\approx 2742,7 \text{ سم}^3$$

(٢) أوجد ارتفاع شمعة على شكل هرم حجمها ٨٤٧ سم^٣، ومساحة قاعدتها ١٢١ سم^٢؟

الحل:

$$\text{حجم الهرم} = 3! \times \text{مساحة القاعدة} \times \text{الارتفاع}$$

$$847 = 3! \times 121 \times ع$$

$$2541 = 121 \times ع$$

$$ع = 21 \text{ سم}$$

التحقق:

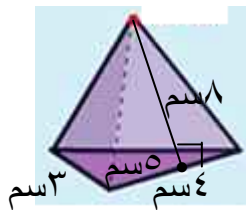
$$\text{حجم الهرم} = 3! \times \text{مساحة القاعدة} \times \text{الارتفاع}$$

$$= 3! \times 121 \times 21 = 847 \text{ سم}^3$$

✓

(٣) هرم ثلاثي أطوال قاعدته ٥، ٤، ٣ سم، وارتفاعه الجانبي ٨ سم، كما

هو موضح جانباً جد:



(أ) المساحة الجانبية.

(ب) المساحة الكلية.

الحل:

(أ) المساحة الجانبية لسطح الهرم $= \frac{1}{2} \times \text{محيط القاعدة} \times \text{الارتفاع الجانبي}$

$$= \frac{1}{2} \times (3 + 4 + 5) \times 8$$

$$= \frac{1}{2} \times 12 \times 8$$

$$٦ \times ٨ = ٤٨ \text{ سم}^2$$

(ب) المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة

$$= ٤٨ + (٣ \times ٤ \times \frac{1}{2})$$

$$= ٤٨ + ٦$$

$$= ٥٤ \text{ سم}^2$$



(٤) الشكل الموضح جانباً يمثل هرم رباعي قاعدته مستطيلة الشكل طولها ١٥ م، وعرضها ١٠ م، ومساحته الجانبية ٢٢٥ م^٢.
جد ارتفاعه الجانبي؟

الحل:

المساحة الجانبية = $\frac{1}{2} \times$ محيط القاعدة $\times$ الارتفاع الجانبي

$$٢٢٥ = \frac{1}{2} (١٠ \times ٢ + ١٥ \times ٢) \times ع$$

$$٢٢٥ = \frac{1}{2} \times ٥٠ \times ع$$

$$٢٢٥ = ٢٥ \times ع$$

$$ع = ٩ \text{ سم}$$

(٥) الهرم الأكبر "خوفو" من أهرامات الجيزة في مصر يبلغ ارتفاعه ١٤٦,٥ متر، وقاعدته مربعة الشكل طول ضلعها ٢٣٠ متر. أوجد حجمه؟

الحل:

حجم الهرم الأكبر "خوفو" = $\frac{1}{3} \times$ مساحة القاعدة $\times$ الارتفاع

$$= \frac{1}{3} (٢٣٠ \times ٢٣٠) \times ١٤٦,٥$$



$$= 3! \times 52900 \times 146,5$$

$$= 3! \times 7749850$$

$$\approx 2083283,3 \text{ م}^3$$

٦) ارسم شبكة لهرم ثلاثي بحيث تكون مساحته الجانبية (٦٠) سم^٢.

الحل: يوجد إجابات مختلفة وتعطي نفس النتيجة

٧) ارسم شبكة لهرم رباعي بحيث تكون مساحته الكلية (٦٠) سم^٢.

الحل: يوجد إجابات مختلفة وتعطي نفس النتيجة

الدرس السادس: حجم الكرة ومساحة سطحها

تدريب (١): جد طول قطر كرة حجمها $\frac{500}{3} \pi$ سم^٣.

الحل:

$$\text{حجم الكرة} = \frac{4}{3} \pi \text{ نق}^3$$

$$\frac{500}{3} \pi = \frac{4}{3} \pi \text{ نق}^3$$

$$125 = \text{نق}^3$$

$$\text{نق} = 5 \text{ سم}$$

تدريب (٢): جد مساحة سطح كرة طول نصف قطرها ١٠ سم؟

$$(\text{اعتبر } \pi \approx 3,14)$$

الحل:

$$\text{مساحة سطح الكرة} = 4\pi \text{ نق}^2$$

$$= 4 \times 3,14 \times (10)^2$$

$$= 4 \times 3,14 \times 100$$

$$= 1256 \text{ سم}^2$$

تدريب (٣): خزان ماء مساحة سطحه 324π م^٢ جد:

(أ) طول نصف قطر الخزان.

(ب) حجم الخزان.



الحل:

$$\text{أ) مساحة سطح الكرة} = 4\pi \text{ نق}^2$$

$$324\pi = 4\pi \times \text{نق}^2$$

$$324 = 4 \times \text{نق}^2$$

$$81 = \text{نق}^2$$

$$\text{نق} = 9 \text{ م}$$

(ب) حجم الخزان = $\pi r^3 = 9\pi$ م^٣

$$= \pi r^3 = 9\pi$$

$$= 9\pi \text{ م}^3$$

تمارين ومسائل

(١) كرة طول نصف قطرها ٢١ سم. جد حجمها، ومساحة سطحها؟

الحل:

$$\text{حجم الكرة} = \pi r^3 = 9\pi$$

$$= \pi r^3 = 9\pi$$

$$= 12348 \text{ سم}^3$$

(٢) جد طول نصف قطر كرة حجمها $\frac{4312}{3}$ سم^٣؟

الحل:

$$\text{حجم الكرة} = \pi r^3 = 9\pi$$

$$= \pi r^3 = \frac{4312}{3}$$

$$r^3 \approx 343$$

$$r \approx 7 \text{ سم}$$

(٣) جد مساحة سطح كرة حجمها ٦١٦ سم^٣؟

الحل:

$$\text{حجم الكرة} = \pi r^3 = 9\pi$$

$$= \pi r^3 = 616$$

$$نق^3 \approx 147$$

$$نق \approx 5,3 \text{ سم}$$

$$\text{مساحة سطح الكرة} = 4\pi \text{ نق}^2$$

$$= 4\pi \times (5,3)^2$$

$$= 351,68 \text{ سم}^2$$

٤) جد حجم الكرة التي مساحتها السطحية $100\pi \text{ سم}^2$ ؟
الحل:

$$\text{مساحة سطح الكرة} = 4\pi \text{ نق}^2$$

$$100\pi = 4\pi \times \text{نق}^2$$

$$\text{نق}^2 = 25$$

$$\text{نق} = 5 \text{ سم}$$

$$\text{حجم الكرة} = \frac{4}{3}\pi \text{ نق}^3$$

$$= \frac{4}{3}\pi \times (5)^3$$

$$\approx 523,6 \text{ سم}^3$$

$$\approx 523,8 \text{ سم}^3$$

٥) مكعب من الرصاص حجمه $3880,8 \text{ سم}^3$ ، صُهر وبقى محافظاً على حجمه لإعادة صنعه على صورة كرة جد:

الحل:

$$\text{أ) حجم الكرة} = \frac{4}{3}\pi \text{ نق}^3$$

$$3880,8 = \frac{4}{3}\pi \times \text{نق}^3$$

$$\text{نق}^3 = 9261$$

$$\text{نق} = ٢١ \text{ سم}$$

$$\text{ب) مساحة سطح الكرة} = ٤ \pi \text{ نق}^٢$$

$$= ٤ \pi \times (٢١)^٢$$

$$= ١٧٦٤ \pi \text{ سم}^٢$$



٦) الشكل الجانبي يمثل بالون كروي يستخدم لدراسة الطقس ويبلغ حجمه ٣٦π سم^٣، جد المساحة السطحية للبالون؟

الحل:

$$\text{حجم البالون} = \frac{٤}{٣} \pi \text{ نق}^٣$$

$$٣٦ \pi = \frac{٤}{٣} \pi \times \text{نق}^٣$$

$$\text{نق}^٣ = ٢٧$$

$$\text{نق} = ٣ \text{ سم}$$

$$\text{مساحة سطح البالون} = ٤ \pi \text{ نق}^٢$$

$$= ٤ \pi \times (٣)^٢$$

$$= ١٠٨ \pi \text{ سم}^٢$$



٧) كرة قدم طول محيط دائرتها 42π سم، جد مساحتها السطحية؟

الحل:

محيط الدائرة = 2π نق

$42\pi = 2\pi$ نق

نق = 21 سم

مساحة سطح الكرة = 4π نق²

$$= 4\pi \times (21)^2$$

$$= 1764\pi \text{ سم}^2$$

الدرس السابع: معامل التغير

تدريب (١): هرم رباعي قاعدته مستطيلة الشكل أبعاده ٨ سم، ٦ سم، وارتفاعه ٩ سم. جد:

أ) محيط قاعدة الهرم.

ب) حجم الهرم.

ج) محيط قاعدة الهرم بعد ضرب جميع أبعاده بالعدد ٥. ماذا تلاحظ؟

د) حجم الهرم بعد ضرب جميع أبعاده بالعدد ٥. ماذا تلاحظ؟

الحل:

أ) محيط قاعدة الهرم = $2 \times 8 + 2 \times 6$

$$= 16 + 12 = 28 \text{ سم}$$

ب) حجم الهرم = $\frac{1}{3} \times$ مساحة القاعدة $\times$ الارتفاع

$$= \frac{1}{3} \times 48 \times 9$$

$$= 144 \text{ سم}^3$$

ج) أبعاد الهرم بعد ضرب جميع أبعاده بالعدد ٥، تصبح ٤٠، ٣٠

$$\text{محيط قاعدة الهرم} = ٤٠ \times ٢ + ٣٠ \times ٢ =$$

$$= ٨٠ + ٦٠ = ١٤٠ \text{ سم}$$

نلاحظ أن المحيط بعد الضرب = ٥ × المحيط قبل الضرب

$$= ٥ \times ٢٨ = ١٤٠ \text{ سم} \quad \checkmark$$

(د) حجم الهرم = $٣! \times \text{مساحة القاعدة} \times \text{الارتفاع}$

$$= ٣! \times ١٢٠٠ \times ٩ =$$

$$= ٣٦٠٠ \text{ سم}^٣$$

نلاحظ أن الحجم بعد الضرب = $(٥)^٢ \times \text{الحجم قبل الضرب}$

$$= ٢٥ \times ١٤٤ = ٣٦٠٠ \text{ سم}^٣ \quad \checkmark$$

يسمى العدد ٥ معامل التغير

تدريب (٢): أكمل الفراغ في الجدول الآتي:

المخروط							
نصف القطر	الارتفاع	طول الراسم	محيط القاعدة	مساحة القاعدة	المساحة الجانبية	المساحة الكلية	الحجم
٢١	٢٨	٣٥	١٣٢	١٣٨٦	٢٣١٠	٣٦٩٦	١٢٩٣٦
٤٢	٥٦	٧٠	٢٦٤	٥٥٤٤	٩٢٤٠	١٤٧٨٤	١٠٣٤٨٨

نلاحظ أن: (١) $١٣٢ \times ٢ = ٢٦٤$ أو $٢٦٤ \times \frac{1}{2} = ١٣٢$

(٢) $١٣٨٦ \times (٢)^٢ = ١٣٨٦$ أو $١٣٨٦ \times (1/2)^٢ = ٥٥٤٤$

(٣) $٩٢٤٠ \times (٢)^٢ = ٩٢٤٠$ أو $٩٢٤٠ \times (1/2)^٢ = ٢٣١٠$

(٤) $١٤٧٨٤ \times (٢)^٢ = ١٤٧٨٤$ أو $١٤٧٨٤ \times (1/2)^٢ = ٣٦٩٦$

(٥) $١٠٣٤٨٨ \times (٢)^٣ = ١٠٣٤٨٨$ أو $١٠٣٤٨٨ \times (1/2)^٣ = ١٢٩٣٦$

يسمى كل من ٢، $\frac{1}{2}$ معامل التغير

تمارين ومسائل

(١) منشور ثلاثي حجمه ٧٦٨ سم^٣، وأبعاد قاعدته هي: ١٢، ١٦، ٢٠، ومساحته الجانبية ٣٨٤ سم^٢. إذا ضربت جميع أبعاده بـ $\frac{1}{4}$. جد حجم المنشور ومساحته الجانبية بعد إجراء عملية الضرب؟
الحل:

$$\begin{aligned} \text{حجم المنشور بعد إجراء عملية الضرب} &= \frac{1}{4} \times 768 \\ &= 192 \text{ سم}^3 \\ \text{مساحته الجانبية بعد إجراء عملية الضرب} &= \frac{1}{4} \times 384 \\ &= 96 \text{ سم}^2 \end{aligned}$$

التحقق:

$$\text{حجم المنشور} = \text{مساحة القاعدة} \times \text{الارتفاع}$$

$$768 = \frac{1}{2} \times 12 \times 16 \times \text{ع}$$

$$\text{ع} = 8 \text{ سم}$$

تصبح أبعاد المنشور بعد إجراء عملية الضرب ٣، ٤، ٥، والارتفاع = ٢

$$\text{المساحة الجانبية} = \text{محيط القاعدة} \times \text{الارتفاع}$$

$$✓ \quad ١٢ = ٢ \times ٢٤ \text{ سم}^٢$$

حجم المنشور = مساحة القاعدة $\times$ الارتفاع

$$٢ \times ٣ \times ٤ \times \frac{1}{2} =$$

$$✓ \quad ١٢ = \text{سم}^٣$$

(٢) اسطوانة دائرية قائمة نصف قطر قاعدتها ٩ سم، وحجمها ٥٣٤٦ سم^٣، إذا ضربت جميع أبعادها بـ @٣. جد حجم الاسطوانة بعد إجراء عملية الضرب؟ تم تحقق من صحة الحل.

الحل:

حجم الاسطوانة بعد إجراء عملية الضرب = @٣(٣) $\times$ ٥٣٤٦

$$= ١٥٨٤ \text{ سم}^٣$$

التحقق:

حجم الاسطوانة = $\pi \text{ نق}^٢ \times \text{ع}$

$$٥٣٤٦ = \pi \times ٨١ \times \text{ع}$$

$$\text{ع} = ٢١ \text{ سم}$$

بعد إجراء عملية الضرب يصبح نصف القطر = ٦، والارتفاع = ١٤

حجم الاسطوانة بعد إجراء عملية الضرب = $\pi \text{ نق}^٢ \times \text{ع}$

$$= ١٤ \times ٣٦ \times \pi$$

$$✓ \quad = ١٥٨٤ \text{ سم}^٣$$

(٣) هرم رباعي قاعدته مربعة الشكل طول ضلعها ٦ سم، ومساحته الجانبية ٦٠ سم^٢، إذا ضربت جميع أبعاد الهرم

الرباعي ب ١,٥ جد المساحة الجانبية للهرم بعد إجراء عملية الضرب؟
ثم تحقق من صحة الحل.

الحل:

$$\text{المساحة الجانبية للهرم بعد إجراء عملية الضرب} = (1,5) \times 60 \\ = 135 \text{ سم}^2$$

التحقق:

المساحة الجانبية لسطح الهرم = $\frac{1}{2} \times \text{محيط القاعدة} \times \text{الارتفاع الجانبي للهرم}$

$$60 = \frac{1}{2} \times 24 \times \text{ع}$$

$$\text{ع} = 5 \text{ سم}$$

بعد إجراء عملية الضرب يصبح طول القاعدة = ٩، والارتفاع = ٧,٥

المساحة الجانبية لسطح الهرم = $\frac{1}{2} \times \text{محيط القاعدة} \times \text{الارتفاع الجانبي للهرم}$

$$= 7,5 \times 36 \times \frac{1}{2}$$

$$= 135 \text{ سم}^2 \quad \checkmark$$

٤) مخروط دائري قائم طول نصف قطر قاعدته ٧ سم، وارتفاعه ٩ سم.
إذا جُمع لكل بُعد من أبعاده ٥. جد الحجم والمساحة الجانبية للمخروط قبل
إجراء عملية الجمع وبعدها؟ ماذا تستنتج؟

الحل:

$$\text{حجم المخروط} = \frac{1}{3} \pi r^2 \text{ع}$$

$$= \frac{1}{3} \pi \times 3^2 \times 9 = 147 \pi \text{ سم}^3$$

$$(ل) = (ع) + (نق)$$

$$(ل) = (٩) + (٧)$$

$$(ل) = ٨١ + ٤٩ = ١٣٠$$

إذن: طول الراسم (ل) $\approx 11,8$ سم

المساحة الجانبية للمخروط $= \pi \text{ ل نق}$

$$= \pi \times 11,8 \times 7 = 82,6 \pi \text{ سم}^2$$

تصبح الأبعاد بعد إجراء عملية الجمع، نق = 12، والارتفاع = 14

حجم المخروط $= \frac{1}{3} \pi \text{ نق}^2 \text{ ع}$

$$= \frac{1}{3} \pi \times 12^2 \times 14 = 672 \pi \text{ سم}^3$$

$$\text{ل} = \text{ع} + \text{نق}$$

$$\text{ل} = 12 + 14$$

$$\text{ل} = 196 + 144 = 340$$

إذن: طول الراسم (ل) $\approx 18,4$ سم

المساحة الجانبية للمخروط $= \pi \text{ ل نق}$

$$= \pi \times 18,4 \times 14 = 257,6 \pi \text{ سم}^2$$

نستنتج أن: ما ينطبق على عملية الضرب لا ينطبق على عملية الجمع

٥) مصنع للحلويات يعمل كعك العيد على شكل كرات قطر كل منها

٢,١ سم، قرر صاحب المعمل تصغير الكعكة إلى الثلثين، وذلك من أجل

إعادة تسعيرها. ما حجم الكعكة ومساحة سطحها بعد تعديل القطر؟

الحل:

طول القطر بعد التصغير = 1,4

حجم الكعكة $= \frac{4}{3} \pi \text{ نق}^3$

$$= \frac{4}{3} \pi (0,7)^3$$

$$\approx 0,343 \pi$$

$$\approx 0,46 \pi \text{ سم}^3$$

مساحة سطح الكرة = 4π نق²

$$= 4 \pi (0,7)^2$$

$$= 4 \times \pi \times 0,49$$

$$\approx 6,16 \pi \text{ سم}^2$$

التحقق:

حجم الكعكة = $\frac{4}{3} \pi$ نق³

$$= \frac{4}{3} \pi (1,05)^3$$

$$\approx 4,71 \pi$$

$$\approx 1,50 \pi \text{ سم}^3$$

حجم الكعكة بعد التصغير = $\frac{4}{3} \pi (0,7)^3$ × $1,50 \pi$

$$\approx 0,46 \pi \text{ سم}^3 \quad \checkmark$$

مساحة سطح الكرة = 4π نق²

$$= 4 \pi (1,05)^2$$

$$\approx 4,41 \pi$$

$$\approx 4,4 \pi \text{ سم}^2$$

مساحة سطح الكعكة بعد التصغير = $\frac{4}{3} \pi (0,7)^3$ × $4,4 \pi$

$$\approx 6,16 \pi \text{ سم}^2 \quad \checkmark$$

مراجعة

(١) ارسم شبكة تقريبية لكل مجسم من المجسمات الآتية:



ج

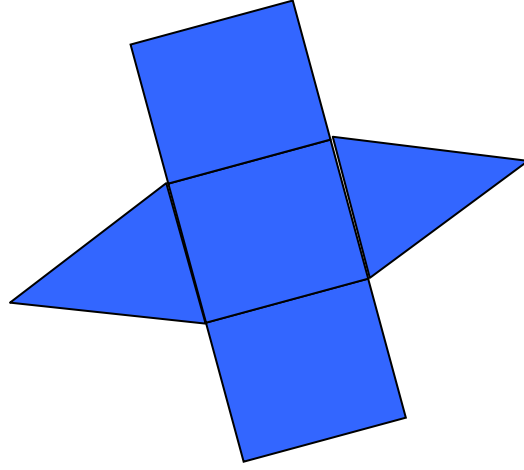


ب

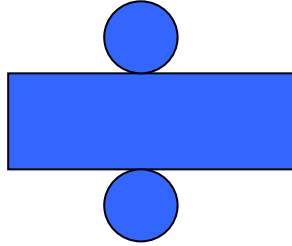


أ

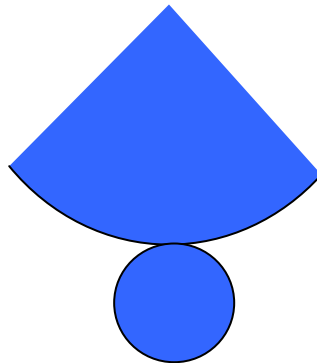
الحل:
(أ)



(ب)



(ج)



٢) منشور ثلاثي أطوال قاعدته هي: ٥ سم، ١٢ سم، ١٣ سم،

وارتفاعه ١٠ سم جد:

أ) حجمه.

ب) مساحته الكلية.

ج) مقدار التغير في الحجم والمساحة الكلية إذا ضربت أبعاده في ٣

الحل:

أ) حجم المنشور = مساحة القاعدة $\times$ الارتفاع

$$= \frac{1}{2} \times 12 \times 5 \times 10$$

$$= 300 \text{ سم}^3$$

ب) المساحة الجانبية = محيط القاعدة $\times$ الارتفاع

$$= 30 \times 10$$

$$= 300 \text{ سم}^2$$

مساحة القاعدة (مثلث) = $\frac{1}{2} \times$ القاعدة $\times$ الارتفاع

$$= \frac{1}{2} \times 12 \times 5$$

$$= 30 \text{ سم}^2$$

المساحة الكلية = المساحة الجانبية + ٢ $\times$ مساحة القاعدة

$$= 300 + 2 \times 30$$

$$= 300 + 60$$

$$= 360 \text{ سم}^2$$

ج) الحجم بعد الضرب = (٣) $\times$ الحجم قبل الضرب

$$= 27 \times 300 = 8100 \text{ سم}^3$$

مقدار التغير في الحجم = ٨١٠٠ - ٣٠٠

$$= ٧٨٠٠ \text{ سم}^٣$$

المساحة الكلية بعد الضرب = (٣)^٢ × المساحة الكلية قبل الضرب

$$= ٩ \times ٣٦٠$$

$$= ٣٢٤٠ \text{ سم}^٢$$

(٣) منشور قاعدته على شكل شبه منحرف طول قاعدتيه المتوازيتين

١٢ سم، ٨ سم وارتفاعها ٦ سم، وارتفاع المنشور ٩ سم. جد حجمه؟

الحل:

حجم المنشور = مساحة القاعدة × الارتفاع

$$= (٦ \times (٨ + ١٢) \times \frac{1}{2}) \times ٩$$

$$= ٦٠ \times ٩ = ٥٤٠ \text{ سم}^٣$$

(٤) هرم رباعي حجمه ٧٢ م^٣، وارتفاعه ٨ م جد مساحة قاعدته؟

الحل:

حجم الهرم = ٣! × مساحة القاعدة × الارتفاع

$$٧٢ = ٣! \times \text{مساحة القاعدة} \times ٨$$

$$\text{مساحة القاعدة} = ٢٧ \text{ م}^٢$$

(٥) هرم ارتفاعه ١٨ متر، وقاعدته مربعة الشكل طول ضلعها ٢٢ متر. جد:

(أ) حجمه

(ب) مقدار التغير في الحجم إذا تضاعفت أبعاده.

الحل:

(أ) حجم الهرم = ٣! × مساحة القاعدة × الارتفاع

$$= ٣! \times (٢٢ \times ٢٢) \times ١٨$$

$$= 290.4 \text{ م}^3$$

حجم الهرم بعد المضاعفة = $(2)^3 \times$ حجم الهرم المضاعفة

$$= 8 \times 290.4$$

$$= 2323.2 \text{ م}^3$$

$$\text{مقدار التغير} = 2323.2 - 290.4$$

$$= 2032.8 \text{ م}^3$$

٦) اسطوانة دائرية قائمة طول قطرها ١٤ سم، وارتفاعها ١٢ سم، جد:

أ) حجمها.

ب) مساحتها الكلية.

ج) التغير الحاصل في الحجم والمساحة الكلية إذا تضاعفت أبعادها.

الحل:

$$\text{أ) حجم الاسطوانة} = \pi \text{ نق}^2 \times \text{ع}$$

$$= \pi (7)^2 \times 12$$

$$= 588 \pi$$

$$= 588 \pi \text{ سم}^3$$

$$\text{ب) المساحة الكلية} = 2\pi \text{ نق} (\text{ع} + \text{نق})$$

$$= 2\pi \times 7 (12 + 7)$$

$$= 14\pi \times 19 = 266\pi \text{ سم}^2$$

ج) حجم الاسطوانة بعد التغير = $(2)^3 \times$ حجم الاسطوانة قبل التغير

$$= 8 \times 588 \pi \text{ سم}^3$$

$$= 4704 \pi \text{ سم}^3$$

$$\text{مقدار التغير} = 4704 \pi - 588 \pi$$

$$= 4116 \pi \text{ سم}^2$$

المساحة الكلية بعد التغير = $(2)^2 \times$ المساحة الكلية قبل التغير

$$= 4 \times \pi 266$$

$$= 1064 \pi \text{ سم}^2$$

$$\text{مقدار التغير} = 1064 \pi - \pi 266$$

$$= 798 \pi \text{ سم}^2$$

(٧) اسطوانة دائرية قائمة مساحتها الكلية ٧٠٤ سم^٢، وطول نصف قطرها

٧ سم جد ارتفاعها؟

الحل:

$$\text{المساحة الكلية} = 2\pi \text{ نق} (ع + \text{نق})$$

$$704 = 2\pi \times (7 + ع)$$

$$ع = 9 \text{ سم}$$

التحقق:

$$\text{مساحة القاعدة} = \pi \text{ نق}^2$$

$$= \pi (7)^2 = 154 \text{ سم}^2$$

$$\text{المساحة الكلية} = \text{المساحة الجانبية} + \text{مساحة القاعدتين}$$

$$704 = \text{المساحة الجانبية} + 154$$

$$\text{المساحة الجانبية} = 396 \text{ سم}^2$$

$$\text{المساحة الجانبية} = 2\pi \text{ نق} ع$$

$$396 = 2\pi \times 7 \times ع$$

$$396 = 44ع$$

$$ع = 9 \text{ سم} \quad \checkmark$$

٨) مخروط مساحة قاعدته ٣١٤ سم^٢، وارتفاعه ٢٤ سم جد:
أ) حجمه.

ب) مساحته الجانبية.

ج) مساحته الكلية.

الحل:

حجم المخروط = $\pi r^2 h \div 3$

$$\approx 3.14 \times 24 \times 2826 \div 3 \text{ سم}^3$$

مساحة القاعدة = πr^2

$$314 = \pi r^2$$

$$100 = r^2$$

$$10 \text{ سم} = r$$

$$L = r + h$$

$$L = 10 + 24$$

$$L = 34$$

إذن: طول الراسم (L) = ٣٤ سم

المساحة الجانبية للمخروط = $\pi r L$

$$= 3.14 \times 10 \times 34$$

مساحة القاعدة = πr^2

$$= 3.14 \times 100$$

المساحة الكلية للمخروط = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة

$$= 3.14 \times 100 + 3.14 \times 10 \times 34$$

$$= 360 \pi \text{ سم}^2$$

التحقق:

المساحة الكلية للمخروط $= \pi \text{ نق (ل + نق)}$

$$= \pi \times 10 \times (10 + 26)$$

$$= 36 \times \pi 10$$

$$= 360 \pi \text{ سم}^2 \quad \checkmark$$

٩) مخروط دائري قائم طول قطره قاعدته ٦ سم، وطول راسمه ٥ سم جد:

(أ) حجم المخروط؟

(ب) مساحته الجانبية؟

(ج) مقدار التغير في الحجم والمساحة الجانبية إذا ضربت أبعاده في ٣

الحل:

$$ل = ع + \text{نق}$$

$$٥ = ع + ٣$$

$$٢ = ع$$

إذن: ارتفاع المخروط = ٤ سم

(أ) حجم المخروط = $\frac{1}{3} \pi \text{ نق}^2 \text{ ع}$

$$= \frac{1}{3} \pi \times 9 \times 4$$

$$= 12 \pi \text{ سم}^3$$

(ب) المساحة الجانبية للمخروط $= \pi \text{ ل نق}$

$$= \pi \times 10 \times 15$$

(ج) الحجم بعد الضرب = $3 \times \text{الحجم قبل الضرب}$

$$= 27 \times 12 \pi$$

$$= 324 \pi \text{ سم}^3$$

$$\text{التغير في الحجم} = 324 \pi - 12 \pi = 312 \pi \text{ سم}^3$$

$$\text{المساحة الجانبية بعد الضرب} = (3) \times \text{المساحة الجانبية قبل الضرب}$$

$$= 9 \times 15 \pi$$

$$= 135 \pi \text{ سم}^2$$

$$\text{التغير في المساحة الجانبية} = 135 \pi - 15 \pi = 120 \pi \text{ سم}^2$$



٦) يمثل المجسم جانباً كرة طول قطرها ٦,١ م جد:

أ) حجمها.

ب) ومساحة سطحها.

الحل:

$$\text{حجم الكرة} = \frac{4}{3} \pi \text{ نق}^3$$

$$= \frac{4}{3} \pi (3,05)^3$$

$$\approx 124,4 \times \pi$$

$$\approx 39,9 \pi \text{ م}^3$$

$$\text{ب) مساحة سطح الكرة} = 4 \pi \text{ نق}^2$$

$$\approx 4 \times \pi \times (3,05)^2$$

$$\approx 37,2 \pi \text{ سم}^2$$

١٠) اسطوانتان دائريتان قائمتان طول نصف قطر الاسطوانة الأولى ٦سم، وحجمها 324π سم^٣، ومساحتها الجانبية 108π سم^٢، وطول نصف قطر الاسطوانة الثانية ٨سم، وحجمها 768π سم^٣، ومساحتها الجانبية 192π سم^٢ جد:

(أ) ارتفاع الاسطوانة الأولى.

(ب) ارتفاع الاسطوانة الثانية.

(ج) معامل التغير.

الحل:

$$(أ) \text{ حجم الاسطوانة الأولى } = \pi \text{ نق}^2 \times ع$$

$$324\pi = \pi (6)^2 \times ع$$

$$\text{ارتفاع الاسطوانة الأولى} = 9 \text{ سم}$$

$$(ب) \text{ حجم الاسطوانة الثانية } = \pi \text{ نق}^2 \times ع$$

$$768\pi = \pi (8)^2 \times ع$$

$$\text{ارتفاع الاسطوانة الثانية} = 12 \text{ سم}$$

$$(ج) \text{ معامل التغير} = \frac{3}{4} \text{ أو } \$3\frac{3}{4} \text{ (} \frac{3}{4} \text{)}$$

يوجد أكثر من طريقة لإيجاد معامل التغير منها

نق للأسطوانة الأولى = معامل التغير × نق للأسطوانة الثانية

$$\frac{\text{نق للأسطوانة الأولى}}{\text{نق للأسطوانة الثانية}} = \text{معامل التغير}$$

$$\frac{6}{8} =$$

$$\frac{3}{4} =$$

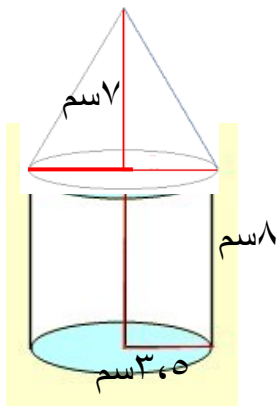
نق للأسطوانة الثانية = معامل التغير × نق للأسطوانة الأولى

$$\frac{\text{نق للأسطوانة الثانية}}{\text{نق للأسطوانة الأولى}} = \text{معامل التغير}$$

$$\frac{8}{6} =$$

$$\frac{4}{3} =$$

(١١) جد حجم الجسم المركب المرسوم جانباً؟



الحجم = حجم الاسطوانة + حجم المخروط

$$\pi \times \text{نق}^2 \times \text{ع} + \frac{1}{3} \pi \times \text{نق}^3 \times \text{ع} =$$

$$\pi \times (3.5)^2 \times 8 + \frac{1}{3} \pi \times (3.5)^3 \times 7 =$$

$$\approx 98\pi + 28.6\pi$$

$$\approx 126.6\pi \text{ سم}^3$$

التحقق:

$$\text{الحجم} = \pi \times \text{نق}^2 \times (\text{ع} + \frac{1}{3} \times \text{ع}^3 \times \text{ع})$$

$$= \pi \times (3.5)^2 \times (8 + \frac{1}{3} \times 7^3 \times 7)$$

$$\approx 12.25 \times \pi \times 10.333$$

$$\approx 126.6\pi \text{ سم}^3$$

✓

اختبار ذاتي

(١) يتكون هذا السؤال من (٦) فقرات، من نوع الاختيار من متعدد، لكل فقرة منها (٤) بدائل، واحد منها فقط صحيح. ضع دائرة حول رمز البديل الصحيح:

(١) منشور رباعي مساحته الجانبية ٤٨π سم^٢، وارتفاعه ٦ سم فإن طول محيط قاعدته يساوي:

الإجابة: (ج) ٨π سم

(٢) اسطوانة طول نصف قطرها ٧ سم، وارتفاعها ١٠ سم فإن مساحتها الكلية تساوي:

الإجابة: (أ) ٧٤٨π سم^٢

(٣) مخروط دائري قائم مساحة قاعدته ٦١٦π سم^٢ فإن محيط قاعدته يساوي

الإجابة: (ج) ٨٨ سم

(٤) هرم حجمه ١٧٥π سم^٣، وارتفاعه ٢٥ سم فإن مساحة قاعدته تساوي:

الإجابة: (ب) ٢١π سم^٢

(٥) كرة طول نصف قطرها ٦ سم فإن حجمها يساوي:

الإجابة: (د) ٢٨٨π سم^٣

(٦) كرة مساحة سطحها ٣٦π سم^٢ ضرب نصف القطر بـ $\frac{1}{2}$ فإن مساحة سطح الكرة بعد إجراء عملية الضرب يساوي:

الإجابة: (ب) ٩π سم^٢

(٢) منشور ثلاثي أطوال قاعدته هي: (٦) سم، (٨) سم، (١٠) سم، وارتفاعه (١١) سم. جد مساحته الجانبية؟

الحل:

المساحة الجانبية = محيط القاعدة $\times$ الارتفاع

$$= 24 \times 11$$

$$= 264 \text{ سم}^2$$

(٣) اسطوانة دائرية قائمة مساحة قاعدتها ١٥٤ سم^٢، وارتفاعها ٢٠ سم.

جد: أ) محيط قاعدتها ب) مساحتها الكلية

الحل:

مساحة القاعدة = $\pi \text{ نق}^2$

$$154 = \pi \text{ نق}^2$$

$$\text{نق}^2 \approx 49$$

$$\text{نق} \approx 7$$

أ) محيط القاعدة = $2\pi \text{ نق}$

$$= 2\pi \times 7$$

$$\approx 44 \text{ سم}$$

ب) المساحة الكلية = $2\pi \text{ نق} (ع + \text{نق})$

$$= 2\pi \times 7 (20 + 7)$$

$$\approx 1188 \text{ سم}^2$$

(٤) قبة على شكل مخروط، حجمها ١٨٠ π سم^٣، وارتفاعها ١٥ سم. جد

طول نصف قطرها؟

الحل:

$$\text{حجم المخروط} = \pi \cdot 3! \cdot \text{نق}^2 \cdot \text{ع}$$

$$\pi \cdot 180 = \pi \cdot 3! \cdot \text{نق}^2 \cdot 10$$

$$\text{نق}^2 = 36$$

$$\text{نق} = 6 \text{ سم}$$

٥) في حصة التربية المهنية، عمل أحد الطلبة كوباً اسطوانياً الشكل من الفخار بحيث كان حجمه $\pi \cdot 48$ سم^٣، ونصف قطر قاعدته ٢ سم، وعمل طالب آخر كوباً اسطوانياً الشكل أيضاً، بحيث كان طول قطر قاعدته ٨ سم، وارتفاعه ٢٤ سم جد:

(أ) حجم الكوب الثاني.

(ب) ارتفاع الكوب الأول. ✓

(ج) معامل التغير.

الحل:

$$\text{(أ) حجم الكوب الثاني} = \pi \cdot \text{نق}^2 \cdot \text{ع}$$

$$= \pi \cdot 16 \cdot 24$$

$$= 384 \pi \text{ سم}^3$$

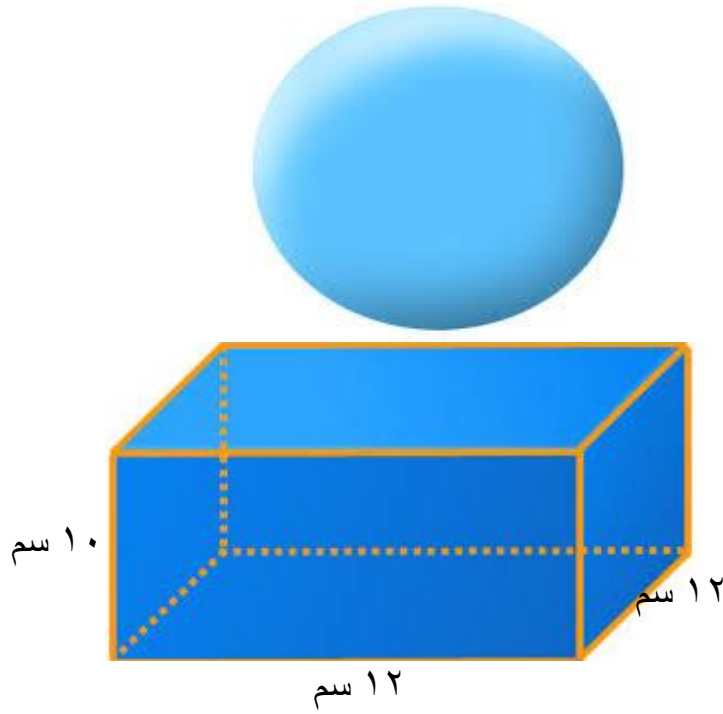
$$\text{(ب) حجم الكوب الأول} = \pi \cdot \text{نق}^2 \cdot \text{ع}$$

$$= \pi \cdot 4 \cdot \text{ع}$$

$$\text{ع} = 12 \text{ سم}$$

(ج) معامل التغير = ٢ أو 1/2

٦) جد حجم المجسم المركب المرسوم أدناه؟



الحل:

الحجم = حجم المنشور الرباعي (متوازي مستطيلات) + حجم الكرة

$$\pi r^3 + 12 \times 12 \times 10 = \text{نق}^3$$

$$\pi r^3 + 1440 = \times (6)^3$$

$$900 + 1440 \approx$$

$$\approx 2340 \text{ سم}^3$$