الرياضيات

الصف الحادي عشر - الفرع العلمي

الفصل الدراسي الثاني

11

فريق التأليف

د. عمر محمد أبوغليون (رئيسًا)

هبه ماهر التميمي | يوسف سليمان جرادات | أ.د محمد صبح صبابحه

الناشر: المركز الوطني لتطوير المناهج

يسر المركز الوطني لتطوير المناهج استقبال آرائكم وملحوظاتكم على هذا الكتاب عن طريق العناوين الآتية:

06-5376262 / 237 06-5376266 P.O.Box: 2088 Amman 11941

@nccdjor feedback@nccd.gov.jo www.nccd.gov.jo

© Harper Collins Publishers Limited 2021.
- Prepared Originally in English for the National Center for Curriculum Development. Amman - Jordan
- Translated to Arabic, adapted, customised and published by the National Center for Curriculum Development. Amman - Jordan

All rights reserved. No part of this publication may be reproduced, sorted in retrieval system, or transmitted in any form by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording or otherwise , without the prior written permission of the publisher or a license permitting restricted copying in the United Kingdom issued by the Copyright Licensing Agency Ltd, Barnard's Inn, 86 Fetter Lane, London, EC4A 1EN.
British Library Cataloguing -in- Publication Data
A catalogue record for this publication is available from the Library.

الطبعة الأولى (التجريبية)

1442 هـ / 2021 م

المقدّمة

انطلاقًا من إيمان المملكة الأردنية الهاشـــمية الراســـخ بأهمية تنمية قدرات الإنسان الأردني، وتسليحه بالعلم والمعرفة؛ سعى المركز الوطني لتطوير المناهج، بالتعاون مع وزارة التربية والتعليم، إلى تحديث المناهج الدراسية وتطويرها، لتكون معينًا للطلبة على الارتقاء بمستواهم المعرفي، ومجاراة أقرانهم في الدول المتقدّمة. ولمّا كانت الرياضيات إحدى أهمّ المواد الدراسية التي تنمّي لدى الطلبة مهارات التفكير وحلّ المشكلات، فقد أولى المركز هـــذا المبحث عناية كبيرة، وحرص على إعداد كتب الرياضيات وفق أفضل الطرائق المتّبعة عالميًّا على يد خبراء أردنيين؛ لضمان انسجامها مع القيم الوطنية الراسخة، وتلبيتها لاحتياجات أبنائنا الطلبة والمعلّمين.

روعي في إعداد كتب الرياضيات تقديم المحتوى بصورة سلســـة، ضمن ســـياقات حياتية شائقة، تزيد رغبة الطلبة في التعلّم، ووظّفت فيها التكنولوجيا لتُســـهم في جعل الطلبة أكثر تفاعلًا مع المفاهيم المقدّمة لهم. ولأنّ التدرّب المكثّف على حلّ المسائل يُعدّ أحد أهمّ طرائق ترسيخ المفاهيم الرياضية وزيادة الطلاقة الإجرائية لدى الطلبة؛ فقد أُعدّ كتـــاب التمارين على نحو يقدّم للطلبة ورقة عمل في كل درس، تُحلّ بوصفها واجبًا منزليًّا، أو داخل الغرفة الصفية إنْ توافر الوقت الكافي. ولأنّنا ندرك جيدًا حرص المعلّم الأردني على تقديم أفضل ما لديه للطلبة؛ فقد جاء كتاب التمارين أداة مساعدة توفّر عليه جهد إعداد أوراق العمل وطباعتها.

من المعلوم أنَّ الأرقام العربية تُســـتخدَم في معظم مصادر تعليم الرياضيات العالمية، ولا سيّما على شبكة الإنترنت، التـــي أصبحت أداة تعليمية مهمّة؛ لما تزخر به من صفحات تقدّم محتـــوًى تعليميًّا تفاعليًّا ذا فائدة كبيرة. وحرصًا منّا على ألّا يفوت أبناءنا الطلبة أيّ فرصة، فقد استعملنا في هذا الكتاب الأرقام العربية؛ لجَسر الهوّة بين طلبتنا والمحتوى الرقمي العلمي، الذي ينمو بتســـارع في عالَـــم يخطو نحو التعليم الرقمي بوتيرة متسارعة.

ونحـــن إذ نقدّم الطبعة الأولى (التجريبية) من هذا الكتاب، نأمل أن تنال إعجاب أبنائنا الطلبة ومعلّميهم، وتجعل تعليم الرياضيات وتعلّمها أكثر متعة وســـهولة، ونعدهم بأن نستمرّ في تحسين هذا الكتاب في ضوء ما يصلنا من ملاحظات.

المركز الوطني لتطوير المناهج

قائمة المحتويات

قائمة المحتويات

الوحدة 5

التكامل
Integration

ما أهمية هذه الوحدة؟

التكامل هو عملية مُعاكِسة للتفاضل، وله تطبيقات علميــة وحياتيــة كثيرة. فمثــلًا، يســتعمل مُصمِّمو الســيّارات التكامل لحســاب قيمة تُســمّى مُؤشِّــر الخطورة، ويُمكِن بها تقدير شِــدَّة إصابة الرأس عند الاصطدام؛ بُغْيَــةَ تقليل هذه القيمة، وجعل السيّارة أكثر أمانًا.

تعلَّمْتُ سابقًا:

✓ إيجاد مشتقة كثيرات الحدود.

✓ إيجاد مشتقة اقترانات القوَّة.

✓ رسم منحنيات كثيرات الحدود باستعمال المشتقة والتحويلات الهندسية.

سأتعلَّم في هذه الوحدة:

- إيجاد التكامل المحدود والتكامل غير المحدود لاقترانات مختلفة.
- إيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى اقتران والمحور x، ومساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي اقترانين.
- إيجاد الحجوم الدورانية.

ملحوظة: أستعمل تدريبات (أستعد لدراسة الوحدة) في الصفحتين (6) و (7) من كتاب التمارين؛ لمراجعة هذه الموضوعات قبل البدء بدراسة الوحدة.

الدرس 1

التكامل غير المحدود

Indefinite Integral

فكرة الدرس

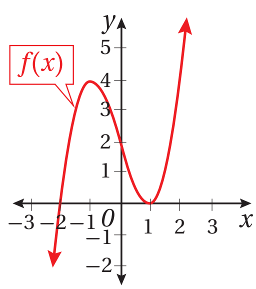
- تعرُّف التكامل بوصفه عملية عكسية للاشتقاق.
- إيجاد التكامل غير المحدود لاقترانات مختلفة.

المصطلحات الاقتران الأصلي، التكامل غير المحدود، المُكامَل، مُتغيِّر التكامل، الشرط الأولي.

مسألة اليوم يُبيِّن الشكل المجاور منحنى الاقتران $f(x)$،

حيث: $f'(x) = 3x^2 - 3$.

ما قاعدة الاقتران $f(x)$؟



الاقتران الأصلي

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّه إذا كان الاقتران $f(x)$ يُمثِّل سرعة جسم، فإنَّ مشتقة $f(x)$ تُمثِّل تسارع الجسم. ولكنْ، إذا علمْتُ تسارع الجسم، وأردْتُ إيجاد سرعته، فإنَّني بحاجة إلى طريقة عكسية تلغي المشتقة. وبكلمات أُخرى، إذا علمْتُ الاقتران $f(x)$، فإنَّني بحاجة إلى إيجاد اقتران ما، وليكن: $F(x)$، بحيث إنَّ: $F'(x) = f(x)$، ويُسمّى $F(x)$ **الاقتران الأصلي** (primitive function) للاقتران $f(x)$.

إذا كانت: $f(x) = 2x$، فإنَّ إحدى الصور المُحتمَلة للاقتران الأصلي $F(x)$، هي: $F(x) = x^2$، لكنَّها ليست الصورة الوحيدة له؛ فقد يكون في صورة: $F(x) = x^2 + 1$، أو صورة: $F(x) = x^2 - 3$؛ لأنَّ مشتقة كلٍّ منهما تساوي $2x$ (مشتقة الحدِّ الثابت تساوي صفرًا).

وبوجه عام، فإنَّ الاقتران الأصلي للاقتران: $f(x) = 2x$ يكون في صورة: $F(x) = x^2 + C$، حيث C ثابت.

مفهوم أساسي — **الاقتران الأصلي**

الاقتران الأصلي للاقتران المتصل $f(x)$ هو مجموعة الاقترانات: $F(x) + C$ التي تُحقِّق المعادلة الآتية، علمًا بأنَّ C ثابت:

$$f(x) = \frac{d}{dx}[F(x) + C]$$

مثال 1

أجد الاقتران الأصلي لكلٍّ من الاقترانين الآتيين:

1) $f(x) = 5x^4$

عند البحث عن اقتران مشتقته $5x^4$، أتذكَّر أنَّ أُسَّ x في مشتقة اقتران القوَّة أقل بواحد من أُسِّ x في الاقتران الأصلي. وبذلك، فإنَّ أُسَّ المُتغيِّر x في الاقتران الأصلي هو 5

وبما أنَّ مشتقة x^5 تساوي $5x^4$، فإنَّ الاقتران الأصلي للاقتران $f(x)$ هو:

$$F(x) = x^5 + C$$

2) $f(x) = -8x^{-9}$

عند البحث عن اقتران مشتقته $-8x^{-9}$، أتذكَّر أنَّ أُسَّ x في مشتقة اقتران القوَّة أقل بواحد من أُسِّ x في الاقتران الأصلي. وبذلك، فإنَّ أُسَّ المُتغيِّر x في الاقتران الأصلي هو -8

وبما أنَّ مشتقة x^{-8} تساوي $-8x^{-9}$، فإنَّ الاقتران الأصلي للاقتران $f(x)$ هو:

$$F(x) = x^{-8} + C$$

أتحقَّق من فهمي

أجد الاقتران الأصلي لكلٍّ من الاقترانين الآتيين:

a) $f(x) = 10x^9$

b) $f(x) = -11\,x^{-12}$

أتذكَّر

إذا كان: $y = x^n$، حيث n عدد حقيقي، فإنَّ: $\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$.

التكامل غير المحدود

تعلَّمْتُ في المثال السابق أنَّه يُمكِن كتابة العلاقة بين الاقتران $f(x)$ والاقتران الأصلي له في صورة المعادلة الآتية:

$$f(x) = \frac{d}{dx}[F(x) + C]$$

وأنَّه يُمكِن أيضًا كتابة هذه العلاقة في صورة المعادلة الآتية:

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C$$

تُسمّى المعادلة السابقة **التكامل غير المحدود** (indefinite integral) للاقتران $f(x)$، ويُسمّى $\int$ رمز التكامل، ويُسمّى الاقتران $f(x)$ **المُكامَل** (integrand)، وتُسمّى C **ثابت التكامل** (constant of integration)، أمّا dx فرمز يشير إلى أنَّ التكامل يتمُّ بالنسبة إلى المُتغيِّر x الذي يُسمّى **مُتغيِّر التكامل** (variable of integration).

> **أتعلَّم**
>
> التكامل والاشتقاق عمليتان عكسيتان. وقد سُمِّي التكامل غير المحدود بهذا الاسم؛ لأنَّه يتضمَّن الثابت C الذي يُمكِن تمثيله بأيِّ قيمة.

يُبيِّن المُخطَّط الآتي عناصر التكامل غير المحدود للاقتران: $f(x) = 3x^2$:

المُكامَل، ثابت التكامل، رمز التكامل، مُتغيِّر التكامل

$$\int 3x^2\, dx = x^3 + C$$

بما أنَّ: $\int f(x)\, dx = F(x) + C$ ، فهذا يعني أنَّ: $F'(x) = f(x)$، وبهذه العلاقة بين المشتقة ومعكوس المشتقة، يُمكِن التوصُّل إلى القواعد الآتية.

مفهوم أساسي
القواعد الأساسية للتكامل غير المحدود

إذا كان k عددًا حقيقيًّا، فإنَّ:

تكامل الثابت ① $\int k\, dx = kx + C$

تكامل اقتران القوَّة ② $\int x^n\, dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C, n \neq -1$

> **أتعلَّم**
>
> يُمكِن التحقُّق من صحة التكامل بإيجاد مشتقة الاقتران الناتج من التكامل.

مثال 2

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1 $\int 7\, dx$

$\int 7\, dx = 7x + C$ قاعدة تكامل الثابت

2 $\int x^{18}\, dx$

$\int x^{18}\, dx = \frac{1}{18+1} x^{18+1} + C$ قاعدة تكامل اقتران القوَّة

$= \frac{1}{19} x^{19} + C$ بالتبسيط

> **أتعلَّم**
>
> لإيجاد تكامل اقتران قوَّة، أتَّبع الخطوتين الآتيتين:
> - أرفع الأُسَّ بمقدار 1
> - أضرب في مقلوب الأُسِّ الجديد.

3 $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$

$\int \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = \int \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\, dx$ بكتابة المُكامَل في صورة أُسِّية

$= \int x^{-\frac{1}{2}}\, dx$ تعريف الأُسِّ السالب

$= \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}$ قاعدة تكامل اقتران القوَّة

$= 2\, x^{\frac{1}{2}} + C$ بالتبسيط

$= 2\sqrt{x} + C$ الصورة الجذرية

> **أتعلَّم**
>
> قبل البدء بعملية التكامل، أُعيد أولًا كتابة المُكامَل في صورة x^n.

أتحقَّق من فهمي

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

a) $\int 9\,dx$ b) $\int x^{-4}\,dx$ c) $\int \sqrt[6]{x}\,dx$

قواعد التكامل غير المحدود

تعلَّمْتُ في المثال السابق كيفية إيجاد تكامل غير محدود للثابت واقتران القوَّة. وسأتعلَّم الآن بعض القواعد التي تُسهِّل عملية إيجاد تكامل الاقترانات التي تحوي أكثر من حدٍّ من اقترانات القوَّة.

مفهوم أساسي

قواعد أُخرى للتكامل غير المحدود

إذا كان k ثابتًا، فإنَّ:

1. تكامل الاقتران المضروب في ثابت $\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$

2. تكامل المجموع أو الفرق $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

مثال 3

أجد كُلًّا من التكاملين الآتيين:

1 $\int (x^{-\frac{3}{2}} + 2)\,dx$

$\int (x^{-\frac{3}{2}} + 2)\,dx = \int x^{-\frac{3}{2}}\,dx + \int 2\,dx$ قاعدة تكامل المجموع

$= \dfrac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + 2x + C$ قاعدتا تكامل القوَّة، وتكامل الثابت

$= -2\,x^{-\frac{1}{2}} + 2x + C$ بالتبسيط

2 $\int (6x^2 - 2x^{-3})\,dx$

$\int (6x^2 - 2x^{-3})dx = 6\int x^2\,dx - 2\int x^{-3}\,dx$ قاعدتا تكامل اقتران القوَّة المضروب في ثابت، والفرق

$= 6\left(\frac{1}{3}x^3\right) - 2\left(\frac{1}{-2}x^{-2}\right) + C$ تكامل اقتران القوَّة

$= 2x^3 + x^{-2} + C$ بالتبسيط

أتعلَّم

أُلاحِظ أنَّه كُتِب ثابت تكامل واحد فقط، هو مجموع ثابتي التكامل الناتجين من التكاملين.

أتحقَّق من فهمي

أجد كُلًّا من التكاملين الآتيين:

a) $\int (2x^4 + 3x^3 - 7x^2)\, dx$

b) $\int (5x^{\frac{3}{2}} + 3x^2)\, dx$

تتطلَّب بعض التكاملات تبسيط المُكامَل إلى حدود جبرية، كلٌّ منها في صورة اقتران قوَّة، قبل البدء بعملية التكامل.

مثال 4 أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1 $\displaystyle\int \frac{3x + 2x^4}{x}\, dx$

بما أنَّه لا توجد قاعدة لتكامل القسمة، فإنَّني أحتاج إلى تبسيط المُكامَل إلى حدود جبرية منفصلة، كلٌّ منها في صورة اقتران قوَّة، قبل البدء بعملية التكامل. وفي هذه الحالة، يُمكِنني قسمة كل حدٍّ في البسط على المقام أولًا، ثم إجراء عملية التكامل.

$$\int \frac{3x + 2x^4}{x}\, dx = \int \left(\frac{3x}{x} + \frac{2x^4}{x}\right) dx$$ بقسمة كل حدٍّ في البسط على المقام

$$= \int (3 + 2x^3)\, dx$$ بالتبسيط

$$= 3x + \frac{1}{2}x^4 + C$$ قاعدتا تكامل اقتران القوَّة المضروب في ثابت، وتكامل الثابت

2 $\displaystyle\int \frac{(x+2)(x-2)}{\sqrt{x}}\, dx$

$$\int \frac{(x+2)(x-2)}{\sqrt{x}}\, dx = \int \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x}}\, dx$$ بالضرب

$$= \int (x^{\frac{3}{2}} - 4x^{-\frac{1}{2}})\, dx$$ بقسمة كل حدٍّ في البسط على المقام

$$= \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - 8x^{\frac{1}{2}} + C$$ قاعدة تكامل اقتران القوَّة المضروب في ثابت

3 $\displaystyle\int x\left(x^2 + \frac{2}{x}\right) dx$

$$\int x\left(x^2 + \frac{2}{x}\right) dx = \int (x^3 + 2)\, dx$$ بتوزيع الضرب على الجمع

$$= \frac{1}{4}x^4 + 2x + C$$ قاعدتا تكامل اقتران القوَّة، وتكامل الثابت

أتحقَّق من فهمي

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

a) $\int \frac{2x^2+4}{x^2}\, dx$ b) $\int \frac{x+2}{\sqrt{x}}\, dx$ c) $\int (2x+3)(x-1)\, dx$

تكامل $(ax+b)^n$

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّه إذا كان: $f(x) = (3x-5)^5$، فإنَّه يُمكِن استعمال قاعدة السلسلة لإيجاد مشتقة الاقتران f، حيث: $f'(x) = 15(3x-5)^4$.

إذا أردْتُ إيجاد التكامل غير المحدود: $\int (3x-5)^4\, dx$، فإنَّني أبدأ أولًا التفكير في الاقتران: $f(x) = (3x-5)^5$، الذي يزيد أُسُّه بمقدار 1 على درجة المُكامَل. وفي هذه الحالة، فإنَّ: $f'(x) = 15(3x-5)^4$. ولأنَّ هذا المُكامَل مضروب في 15؛ فإنَّ:

$$\int (3x-5)^4\, dx = \frac{1}{15}(3x-5)^5 + C$$

أتعلَّم

ضرب ناتج التكامل في $\frac{1}{15}$ يلغي العدد 15 الناتج من اشتقاق: $(3x-5)^5$.

بوجه عام، يُمكِن إيجاد التكامل غير المحدود لأيِّ اقتران في صورة: $f(x) = (ax+b)^n$، باستعمال القاعدة الآتية.

مفهوم أساسي **تكامل $(ax+b)^n$**

إذا كان: $f(x) = (ax+b)^n$، حيث a و b عددان حقيقيان، $a \neq 0$، فإنَّ تكامل هذا المقدار هو:

$$\int (ax+b)^n\, dx = \frac{1}{a(n+1)}(ax+b)^{n+1} + C, \quad n \neq -1$$

مثال 5

أجد كُلًّا من التكاملين الآتيين:

1 $\int (x+7)^5\, dx$

$$\int (x+7)^5\, dx = \frac{1}{5+1}(x+7)^{5+1} + C$$ تكامل $(ax+b)^n$

$$= \frac{1}{6}(x+7)^6 + C$$ بالتبسيط

2 $\int \frac{1}{\sqrt{4x-2}}\, dx$

$$\int \frac{1}{\sqrt{4x-2}}\, dx = \int (4x-2)^{-\frac{1}{2}}\, dx$$ بكتابة المُكامَل في صورة أُسِّية

$$= \frac{1}{4\times\frac{1}{2}}(4x-2)^{\frac{1}{2}} + C$$ تكامل $(ax+b)^n$

$$= \frac{1}{2}(4x-2)^{\frac{1}{2}} + C$$ بالتبسيط

$$= \frac{1}{2}\sqrt{4x-2} + C$$ الصورة الجذرية

أتحقَّق من فهمي

أجد كُلًّا من التكاملين الآتيين:

a) $\int (x-4)^6\, dx$ **b)** $\int \sqrt{x+1}\, dx$

الشرط الأولي

مــن المهم في بعض التطبيقات إيجاد قيمة ثابت التكامــل C، مثل إيجاد قاعدة اقتران عُلِمت مشــتقته، لكنَّ ذلــك يتطلَّب إيجاد نقطة تُحقِّــق الاقتران الأصلي، ويُمكِــن بتعويضها إيجاد قيمة C، وتُسمّى هذه النقطة **الشرط الأولي** (initial condition).

مثال 6

أجد قاعدة الاقتران $f(x)$ إذا كان: $f'(x) = 2x + 3$، ومرَّ منحناه بالنقطة $(1, -2)$.

الخطوة 1: أجد تكامل الاقتران $f'(x)$.

$$f(x) = \int (2x+3)\, dx$$ $f(x) = \int f'(x)\, dx$

$$f(x) = x^2 + 3x + C$$ تكامل اقتران القوَّة المضروب في ثابت، وتكامل الثابت

الخطوة 2: أجد قيمة ثابت التكامل C.

لإيجــاد قيمة ثابت التكامل C، أســتعمل الشــرط الأولي المعطى في المســألة، وهو النقطة $(1, -2)$ التــي يمــرُّ منحنى الاقتــران بها، وتُحقِّق قاعــدة الاقتران. ولهــذا أُعوِّض $x = 1$ و $f(1) = -2$ في قاعدة $f(x)$، ثم أحُلُّ المعادلة الناتجة لإيجاد قيمة C:

$f(x) = x^2 + 3x + C$ قاعدة الاقتران

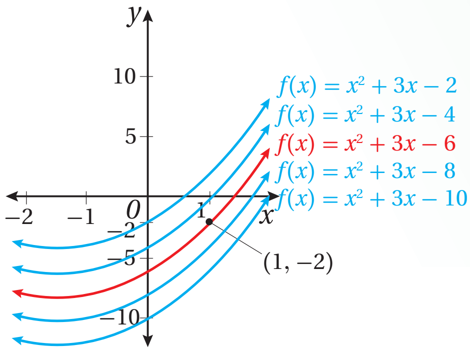
$-2 = (1)^2 + 3(1) + C$ بتعويض $x = 1, f(1) = -2$

$C = -6$ بحلِّ المعادلة

إذن، قاعدة الاقتران هي: $f(x) = x^2 + 3x - 6$.

الدعم البياني

أُلاحِظ من التمثيل البياني المجاور أنَّ الاقتران الأصلي الوحيد الذي يُحقِّق الشرط الأولي في المسألة هو: $f(x) = x^2 + 3x - 6$.



أتحقَّق من فهمي

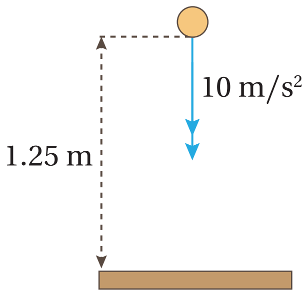
أجد قاعدة الاقتران $f(x)$ إذا كان: $f'(x) = 4x-2$، ومرَّ منحناه بالنقطة $(0, 3)$.

تطبيقات التكامل: معادلات الحركة

توجد تطبيقات حياتية وعلمية عديدة للاقتران الأصلي. فمثلًا، تعلَّمْتُ سابقًا أنَّ السرعة اللحظية هي مشتقة اقتران المسافة عند لحظة ما، وأنَّ التسارع اللحظي يساوي مشتقة اقتران السرعة عند لحظة ما، وهذا يعني أنَّ المسافة هي الاقتران الأصلي لاقتران السرعة، وأنَّ السرعة هي الاقتران الأصلي لاقتران التسارع.

مثال 7 : من الحياة

معادلات الحركة: سقطت كرة من وضعية السكون عموديًّا إلى الأسفل من ارتفاع **1.25 m** على قطعة خشبية. إذا كان تسارع الكرة **10 m/s^2**، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:



لغة الرياضيات

التسارع:

acceleration ($a(t)$).

السرعة:

velocity ($v(t)$).

1 سرعة الكرة بعد t ثانية.

أفترض أنَّ $a(t)$ اقتران التسارع، وأنَّ $v(t)$ اقتران السرعة.

وبذلك، فإنَّ:

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = 10$$

الخطوة 1: أجد اقتران السرعة.

بما أنَّ اقتران السرعة هو الاقتران الأصلي لاقتران التسارع، فإنَّه يُمكِن إيجاد سرعة الكرة بعد t ثانية عن طريق التكامل.

$$v(t) = \int a(t)\ dt \qquad \text{بإيجاد تكامل التسارع}$$

$$= \int 10\ dt \qquad \text{بتعويض } a(t) = 10$$

$$= 10\,t + C_1 \qquad \text{قاعدة تكامل الثابت}$$

الخطوة 2: أجد قيمة ثابت التكامل C_1.

بما أنَّ الكرة تحرَّكت من وضعية السكون، فهذا يعني أنَّ: $v(0) = 0$ m/s، وهو يُعَدُّ شرطًا أوليًّا لإيجاد قيمة ثابت التكامل C_1:

$$v(t) = 10t + C_1 \qquad \text{اقتران السرعة}$$

$$0 = 10(0) + C_1 \qquad \text{بتعويض } t = 0, v(0) = 0$$

$$C_1 = 0 \qquad \text{بحلِّ المعادلة}$$

إذن، اقتران السرعة بعد t ثانية هو: $v(t) = 10t$.

2 **المسافة المقطوعة بعد t ثانية.**

أفترض أنَّ $s(t)$ اقتران المسافة. وبذلك، فإنَّ:

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = 10t$$

الخطوة 1: أجد اقتران المسافة.

بما أنَّ اقتران المسافة هو الاقتران الأصلي لاقتران السرعة، فإنَّه يُمكِن إيجاد المسافة التي تقطعها الكرة بعد t ثانية عن طريق التكامل:

$$s(t) = \int v(t)\ dt \qquad \text{بإيجاد تكامل السرعة}$$

$$= \int 10t\ dt \qquad \text{بتعويض } v(t) = 10t$$

$$= 5\,t^2 + C_2 \qquad \text{قاعدة تكامل اقتران القوَّة المضروب في ثابت}$$

أتعلَّم

أُلاحِظ أنَّ مُتغيِّر التكامل هو t؛ لأنَّ السرعة والتسارع والمسافة اقترانات تتغيَّر بالنسبة إلى الزمن (t).

الخطوة 2: أجد قيمة ثابت التكامل C_2.

بما أنَّ الكرة تحرَّكت من وضعية السكون، فهذا يعني أنَّ: $s(0) = 0$ m، وهو يُعَدُّ شرطًا أوليًّا لإيجاد قيمة ثابت التكامل C_2:

اقتران المسافة	$s(t) = 5t^2 + C_2$
بتعويض $t = 0, s(0) = 0$	$0 = 5t(0)^2 + C_2$
بحلِّ المعادلة	$C_2 = 0$

إذن، اقتران المسافة بعد t ثانية هو: $s(t) = 5t^2$.

3 **سرعة الكرة لحظة اصطدامها بالقطعة الخشبية.**

عند اصطدام الكرة بالقطعة الخشبية، فإنَّها تكون قد قطعت مسافة 1.25 m

الخطوة 1: أجد الزمن اللازم لاصطدام الكرة بالقطعة الخشبية.

اقتران المسافة	$s(t) = 5t^2$
بتعويض $s(t) = 1.25$	$1.25 = 5t^2$
بالقسمة على 5	$\frac{1.25}{5} = t^2$
بأخذ الجذر التربيعي الموجب	$t = 0.5$

إذن، اصطدمت الكرة بالقطعة الخشبية بعد 0.5 ثانية.

أتذكَّر

يُختار الجذر التربيعي الموجب؛ لأنَّ الزمن لا يُمكِن أنْ يكون سالبًا.

الخطوة 2: أجد سرعة الكرة لحظة اصطدامها بالقطعة الخشبية.

اقتران السرعة	$v(t) = 10t$
بتعويض $t = 0.5$	$v(0.5) = 10\,(0.5)$
بالتبسيط	$= 5$

إذن، سرعة الكرة لحظة اصطدامها بالقطعة الخشبية هي: 5 m/s .

أتحقَّق من فهمي

بدأ جسيمٌ الحركةَ في خط مستقيم من نقطة الأصل، بسرعة ابتدائية مقدارها 5 m/s، وبتسارع مقداره $(4t-4)$ m/s^2:

a) أجد سرعة الجسيم بعد t ثانية.

b) أجد المسافة التي يقطعها الجسيم بعد t ثانية.

c) أجد سرعة الجسيم وتسارعه عندما $t = 1$.

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

أجد الاقتران الأصلي لكلٍّ من الاقترانات الآتية:

1) $f(x) = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}}$

2) $f(x) = -x^{-2}$

3) $f(x) = -5$

4) $f(x) = 6x^5$

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

5) $\int 6x \, dx$

6) $\int (4x+2) \, dx$

7) $\int 2x^4 \, dx$

8) $\int \frac{5}{x^3} \, dx$

9) $\int \sqrt{x} \, dx$

10) $\int 2x^{\frac{3}{2}} \, dx$

11) $\int \frac{10}{\sqrt{x}} \, dx$

12) $\int (6x^2 - 4x) \, dx$

13) $\int (2x^4 - 5x + 10) \, dx$

14) $\int x^2 (x-8) \, dx$

15) $\int \left(x^2 - \frac{3}{2}\sqrt{x} + x^{-\frac{4}{3}}\right) dx$

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

16) $\int \frac{4x^3 - 2}{x^3} \, dx$

17) $\int \frac{2x+8}{\sqrt{x}} \, dx$

18) $\int \frac{x^2 - 1}{x - 1} \, dx$

19) $\int \left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)^2 dx$

20) $\int x\sqrt{x} \, dx$

21) $\int \left(\frac{x^2+2x}{x}\right)^3 dx$

22) $\int \frac{x^2 - 1}{\sqrt[3]{x}} \, dx$

23) $\int (x-1)(x-3)(x+1) \, dx$

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

24) $\int (x+7)^4 \, dx$

25) $\int \frac{3}{(10x+1)^2} \, dx$

26) $\int 3\sqrt{4x-2} \, dx$

27) $\int \frac{1}{\sqrt{10x+5}} \, dx$

إذا كان: $y = \sqrt[3]{2x+5}$، فأحُلُّ السؤالين الآتيين تباعًا:

28) أجد $\int y^2 \, dx$.

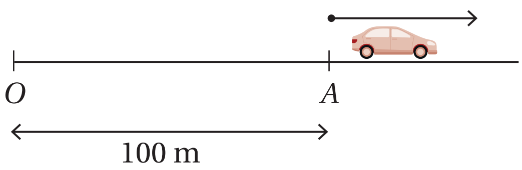
29) أُثبِت أنَّ $\int y \, dx = \frac{3}{8} y^4 + C$.

30) أجد قاعدة الاقتران $f(x)$ إذا كان: $f'(x) = \sqrt{x}$، ومرَّ منحناه بالنقطة $(9, 25)$.

31) إذا كان ميل المماس لمنحنى العلاقة y هو $\frac{2}{x^2}$، فأجد قاعدة العلاقة y، علمًا بأنَّ منحناها يمرُّ بالنقطة $(2, 4)$.

32) أجد قاعدة الاقتران $f(x)$ إذا كان: $f'(x) = \frac{x^2+10}{x^2}$، ومرَّ منحناه بالنقطة $(5, 2)$.

طريق مستقيم يمرُّ بالنقطتين: O و A، حيث: $OA = 100\text{ m}$. بدأت سيّارةٌ الحركةَ من وضعية



السكون، بدءًا بالنقطة A على طول الطريق مُبتعِدةً عن النقطة O، إذا كانت المسافة بين السيّارة والنقطة O بعد t ثانية هي y مترًا، وسرعة السيّارة بعد t ثانية تعطى بالعلاقة الآتية: $\frac{dy}{dt} = 0.03\, t^2\,(t-10)^2$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

33 قاعدة العلاقة y بدلالة t .

34 المسافة بين السيّارة والنقطة A بعد 10 ثوانٍ من بدء حركتها.

35 يُمثِّل الاقتران: $a(t) = 6t$ تسارع جسيم بدأ الحركة من نقطة تبعد 4 أمتار عن نقطة الأصل، حيث t الزمن بالثواني. إذا كانت سرعة الجسيم بعد ثانية واحدة هي 1 m/s، فأجد المسافة التي يقطعها الجسيم بعد ثانيتين من بدء الحركة.

بالون: عند نفخ بالون كروي الشكل يصبح نصف قُطْره y سنتيمترًا بعد t ثانية. إذا كان: $\frac{dy}{dt} = 4t^{-\frac{2}{3}}$، وكان نصف قُطْر البالون بعد 8 ثوانٍ من بدء نفخه 30 cm، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

36 قاعدة العلاقة y بدلالة t.

37 نصف قُطْر البالون بعد 20 ثانية من بدء نفخه.

تعطى مشتقة الاقتران $f(x)$ بالقاعدة: $f'(x) = ax^2 + bx$، حيث a و b ثابتان. إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران عند النقطة $(2, 4)$ هو -0.8، وميل المماس لمنحنى الاقتران عند النقطة $(5, 5.2)$ هو 2.5، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

38 قيمة كلٍّ من الثابتين: a و b.

39 قاعدة الاقتران $f(x)$.

40 **اختيار من مُتعدِّد:** $\int \frac{x^3-1}{x^2}\, dx$ يساوي:

a) $\frac{x^2}{2} - \frac{1}{x} + C$ b) $\frac{x^2}{2} + \frac{1}{x} + C$ c) $x^2 - \frac{1}{x} + C$ d) $x^2 + \frac{1}{x} + C$

مهارات التفكير العليا

41 **أكتشف الخطأ:** أوجد عامر ناتج التكامل: $\int (2x+1)(x-1)dx$، وكان حلُّه على النحو الآتي:

$$\int (2x+1)(x-1)\, dx = \int (2x+1)\, dx \times \int (x-1)\, dx$$
$$= (x^2+x)\left(\frac{1}{2}x^2 - x\right) + c$$

أكتشف الخطأ في حلِّ عامر، ثم أُصحِّحه.

42 **تحدٍّ:** أجد ناتج التكامل: $\int x(x+2)^5\, dx$.

إرشاد: أُعيد كتابة المقدار: $x(x+2)^5$ باستعمال المقدارين: $(x+2)^5$ و $(x+2)^6$.

43 **تحدٍّ:** أجد ناتج التكامل: $\int \frac{x}{(x+1)^3}\, dx$.

إرشاد: أُجزِّئ $\frac{x}{(x+1)^3}$ إلى كسور جزئية.

44 **تبرير:** إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ هو $\left(4 - \frac{100}{x^2}\right)$، وكان للاقتران نقطة حرجة عند النقطة $(a, 10)$، حيث $a > 0$، فأجد قاعدة هذا الاقتران، مُبرِّرًا إجابتي.

45 **تبرير:** إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ عند النقطة $(-2, 8)$ هو 7، وقطع منحنى الاقتران المحور y عند النقطة $(0, 18)$، فأجد قاعدة هذا الاقتران، علمًا بأنَّ منحنى مشتقة الاقتران يُمثِّل خطًّا مستقيمًا، ثم أُبرِّر إجابتي.

الدرس 2

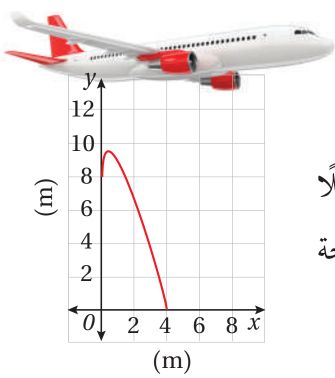
التكامل المحدود
Definite Integral

فكرة الدرس

- إيجاد التكامل المحدود لاقترانات مختلفة.
- إيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران والمحور x.
- إيجاد حجوم المُجسَّمات الدورانية.

المصطلحات التكامل المحدود، الحدُّ السفلي، الحدُّ العلوي، المُجسَّم الدوراني.

مسألة اليوم يُبيِّن التمثيل البياني المجاور شكل السطح العلوي لجناح طائرة مُمثَّلًا بالمعادلة: $y = 8 + 8\sqrt{x} - 6x$، حيث: $0 \leq x \leq 4$، أجد مساحة سطح الجناح.



التكامل المحدود

تعلَّمْتُ في الدرس السابق أنَّ التكامل $\int f(x)\,dx$ يُسمّى التكامل غير المحدود للاقتران $f(x)$، وتعلَّمْتُ أيضًا إيجاد التكامل غير المحدود للاقتران الثابت واقتران القوَّة.

يُسمّى $\int_a^b f(x)\,dx$ **التكامل المحدود** (definite integral) للاقتران $f(x)$، حيث a الحدُّ السفلي للتكامل، و b الحدُّ العلوي للتكامل. ويُمكِن إيجاد قيمة $\int_a^b f(x)\,dx$ على النحو الآتي:

حدود التكامل من a إلى b

أستعمل هذا الرمز بعد الانتهاء من عملية التكامل

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b$$

$$= F(b) - F(a)$$

أجد قيمة الاقتران الأصلي عند الحدِّ العلوي

أجد قيمة الاقتران الأصلي عند الحدِّ السفلي

أتذكَّر

$F(x)$ هو الاقتران الأصلي للاقتران $f(x)$.

عند إيجاد التكامل المحدود لأيِّ اقتران أصلي للاقتران $f(x)$ في صورة: $F(x) + C$

$$\int_a^b f(x)\,dx = [(F(b) + C)] - [(F(a) + C)]$$
$$= F(b) - F(a)$$

أُلاحِظ إلغاء ثابت التكامل C، وهذا يعني أنَّ الناتج هو نفسه بغَضِّ النظر عن الاقتران الأصلي المُستعمَل.

مفهوم أساسي

إذا كان الاقتران $f(x)$ متصلًا على الفترة $[a, b]$، و $F(x)$ يُمثِّل أيَّ اقتران أصلي للاقتران $f(x)$، فإنَّ التكامل المحدود للاقتران $f(x)$ من a إلى b هو:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

ويُمكِن التعبير عن الفرق $F(b)-F(a)$ باستعمال $F(x)\Big|_a^b$.

مثال 1

أجد كُلًّا من التكاملين الآتيين:

1 $\int_0^1 x^2\,dx$

تكامل اقتران القوَّة، والتكامل المحدود

$$\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_0^1$$

$a = 0, b = 1$

$$= \left(\frac{1}{3}(1)^3\right) - \left(\frac{1}{3}(0)^3\right)$$

بالتبسيط

$$= \frac{1}{3}$$

2 $\int_1^3 (x+2)\,dx$

تكامل اقتران القوَّة، والتكامل المحدود

$$\int_1^3 (x+2)\,dx = \frac{1}{2}x^2 + 2x\Big|_1^3$$

$a = 1, b = 3$

$$= \left(\frac{1}{2}(3)^2 + 2(3)\right) - \left(\frac{1}{2}(1)^2 + 2(1)\right)$$

بالتبسيط

$$= 8$$

أتحقَّق من فهمي

أجد كُلًّا من التكاملين الآتيين:

a) $\int_{-1}^1 x^4\,dx$

b) $\int_{-2}^3 (3x^2 - 4x + 1)\,dx$

أتذكَّر

لا توجد حاجة إلى إضافة ثابت التكامل عند إيجاد ناتج التكامل المحدود.

قواعد التكامل المحدود

تعلَّمْتُ سابقًا قواعد التكامل غير المحدود. وسأتعلَّم الآن بعض قواعد التكامل المحدود.

مفهوم أساسي: قواعد التكامل المحدود

إذا كان $f(x)$ و $g(x)$ اقترانين متصلين على الفترة $[a, b]$، وكان k ثابتًا، فإنَّ:

1. تكامل الاقتران المضروب في ثابت: $\int_a^b k\, f(x)\, dx = k \int_a^b f(x)\, dx$
2. تكامل المجموع أو الفرق: $\int_a^b (f(x) \pm g(x))\, dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$
3. التكامل عند نقطة: $\int_a^a f(x)\, dx = 0$
4. عكس حدود التكامل: $\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx$
5. تجزئة التكامل: $\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$

مثال 2

إذا كان: $\int_3^5 f(x)\, dx = 7, \int_{-2}^5 g(x)\, dx = -4, \int_{-2}^5 f(x)\, dx = 3$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

1) $\int_{-2}^5 (2f(x) - 3g(x))\, dx$

قاعدة تكامل الفرق:
$$\int_{-2}^5 (2f(x)-3g(x))\, dx = \int_{-2}^5 2f(x)dx - \int_{-2}^5 3g(x)dx$$

قاعدة تكامل الاقتران المضروب في ثابت:
$$= 2\int_{-2}^5 f(x)dx - 3\int_{-2}^5 g(x)dx$$

بالتعويض:
$$= 2(3) - 3(-4)$$

بالتبسيط:
$$= 18$$

2 $\int_{-2}^{3} f(x)\, dx$

$$\int_{-2}^{3} f(x)\, dx = \int_{-2}^{5} f(x)\, dx + \int_{5}^{3} f(x)\, dx$$ قاعدة تجزئة التكامل

$$= \int_{-2}^{5} f(x)\, dx - \int_{3}^{5} f(x)\, dx$$ قاعدة عكس حدود التكامل

$$= 3 - 7$$ بالتعويض

$$= -4$$ بالتبسيط

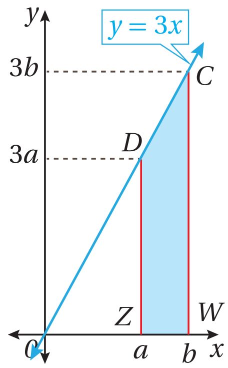
أتحقَّق من فهمي

إذا كان: $\int_{-1}^{1} h(x)\, dx = 7$ ، $\int_{4}^{1} f(x)\, dx = 2,$ ، $\int_{-1}^{1} f(x)\, dx = 5,$ ، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

a) $\int_{-1}^{1} (f(x) + 3h(x))\, dx$

b) $\int_{-1}^{4} f(x)\, dx$

تطبيقات التكامل: المساحة



إذا أردْتُ إيجاد مســاحة المنطقة بين كلٍّ من المستقيم $y = 3x$، والمحــور x، والمســتقيمين: $x = a$ و $x = b$، فيجــب إيجاد المســاحة المُظلَّلة $ZWCD$ المُبيَّنة في الشكل المجاور، وذلك بطرح مساحة ΔOZD من مساحة ΔOWC كما يأتي:

$$\frac{1}{2}(3b^2) - \frac{1}{2}(3a^2)$$

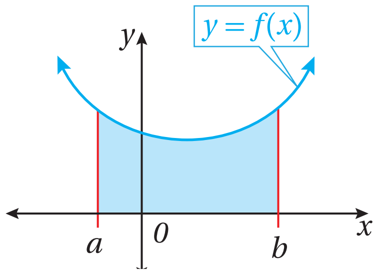
أُلاحِظ أنَّه يُمكِن التعبير عن الصيغة الســابقة بالمقدار $\frac{1}{2}(3x^2)\Big|_a^b$، ومن ثَمَّ يُمكِن التعبير عن المساحة بين المستقيم $y = 3x$، والمحور x، والمستقيمين: $x = a$ و $x = b$ بالتكامل الآتي:

$$\int_a^b 3x\, dx = \frac{1}{2}(3x^2)\Big|_a^b$$

أستنتج ممّا سبق أنَّه يُمكِن إيجاد المساحة باستعمال التكامل.

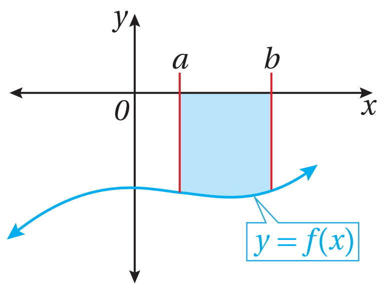
والآن سأتعلَّم حالة من حالات إيجاد المساحة، هي: مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران والمحور x.

مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران والمحور x



- يُمكِن إيجاد المساحة فوق المحور x المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x)$، والمحور x، والمستقيمين: $x = a$ و $x = b$ عن طريق التكامل الآتي:

$$A = \int_a^b f(x)\, dx$$



- يُمكِن إيجاد المساحة أسفل المحور x المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x)$، والمحور x، والمستقيمين: $x = a$ و $x = b$ عن طريق التكامل الآتي:

$$A = -\int_a^b f(x)\, dx$$

أتعلَّم

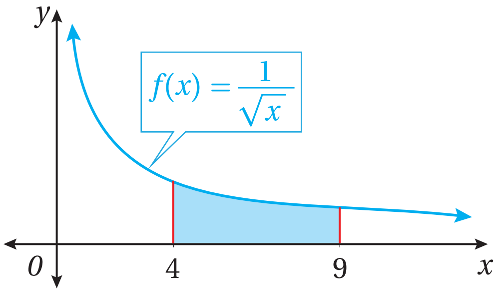
يُمكِن أيضًا التعبير عن $\int_a^b f(x)\, dx$ بأنَّه المساحة أسفل منحنى الاقتران $f(x)$، بين المستقيمين: $x = a$ و $x = b$.

أتعلَّم

بما أنَّ المنطقة المطلوب إيجاد مساحتها تقع أسفل المحور x، فإنَّ قيمة التكامل الناتج ستكون عددًا سالبًا؛ لذا يُختار معكوس ناتج التكامل؛ إذ لا يُمكِن للمساحة أنْ تكون سالبة.

مثال 3

1 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$، والمحور x، والمستقيمين: $x = 4$ و $x = 9$.



الخطوة 1: أُمثِّل منحنى الاقتران بيانيًّا، ثم أُظلِّل المنطقة المطلوب إيجاد مساحتها.

أتذكَّر

لتمثيل الاقتران: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$، أجد خطَّي التقارب الأفقي والرأسي للاقتران.

الخطوة 2: أجد المساحة عن طريق التكامل.

أُلاحِظ أنَّ المساحة المطلوبة هي فوق المحور x؛ لذا أجد المساحة باستعمال القاعدة الآتية:

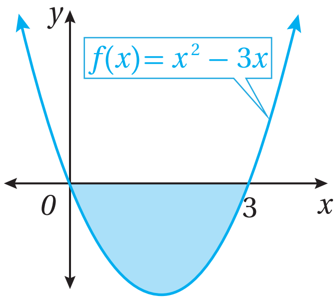
$$A = \int_a^b f(x)dx$$

قانون المساحة أسفل منحنى الاقتران، وأعلى المحور x	$A = \int_a^b f(x)\,dx$
بالتعويض $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\,, a = 4, b = 9$	$= \int_4^9 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$
بكتابة المُكامَل في صورة أُسِّية	$= \int_4^9 \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\,dx$
تعريف الأُسِّ السالب	$= \int_4^9 x^{-\frac{1}{2}}\,dx$
قاعدة تكامل اقتران القوَّة	$= 2x^{\frac{1}{2}}\Big\vert_4^9$
بالتعويض	$= \left(2(9)^{\frac{1}{2}}\right) - \left(2(4)^{\frac{1}{2}}\right)$
بالتبسيط	$= (2 \times 3) - (2 \times 2) = 2$

إذن، المساحة هي وحدتان مربعتان.

2 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = x^2 - 3x$، والمحور x.

الخطوة 1: أُمثِّل منحنى الاقتران بيانيًّا، ثم أُظلِّل المنطقة المطلوب إيجاد مساحتها.



الخطوة 2: أجد المساحة عن طريق التكامل.

أُلاحِظ أنَّ المساحة المطلوبة هي أسفل المحور x؛ لذا أجد المساحة باستعمال القاعدة الآتية: $A = -\int_a^b f(x)\,dx$

قانون المساحة أعلى منحنى الاقتران، وأسفل المحور x	$A = -\int_a^b f(x)\,dx$
بالتعويض $f(x) = x^2 - 3x, a = 0, b = 3$	$= -\int_0^3 (x^2 - 3x)\,dx$
قاعدتا تكامل اقتران القوَّة المضروب في ثابت، والفرق	$= -\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 \Big\vert_0^3\right)$

أتذكَّر

لتمثيل منحنى القطع المُكافِئ: $f(x) = x^2 - 3x$، أجد نقاط تقاطع منحنى الاقتران مع المحور x، وذلك بحل المعادلة $f(x) = 0$، ونقطة رأس القطع المُكافِئ، واتجاه القطع.

بالتعويض $= -\left(\left(\frac{1}{3}(3)^3 - \frac{3}{2}(3)^2\right) - \left(\frac{1}{3}(0)^3 - \frac{3}{2}(0)^2\right)\right)$

بالتبسيط $= -\left(\left(9 - \frac{27}{2}\right) - (0)\right) = 4\frac{1}{2}$

إذن، المساحة هي $4\frac{1}{2}$ وحدة مربعة.

أتعلَّم

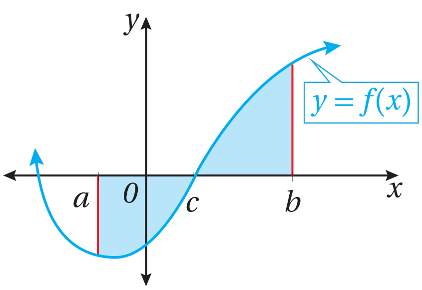
بما أنَّ منحنى الاقتران $f(x)$ يقطع المحور x عندما $x = 0$ و $x = 3$، ولا توجد مستقيمات تُحدِّد المنطقة، فإنَّه يتعيَّن إيجاد التكامل المحدود من 0 إلى 3

أتحقَّق من فهمي

a) أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = 2\sqrt{x}$، والمحور x، والمستقيمين: $x = 1$ و $x = 4$.

b) أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = x^2 - 4$، والمحور x.

قد يقع جزء من المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران والمحور x أسفل المحور x، ويقع جزء آخر فوق المحور x كما في الشكل المجاور. وفي هذه الحالة، يُمكِن إيجاد المساحة بين المحور x ومنحنى الاقتران بتحديد المقطع x للاقتران، ثم إيجاد المساحة باستعمال القاعدة الآتية:



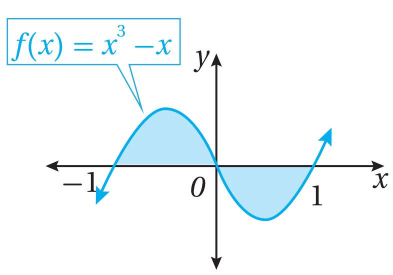
$$A = \int_c^b f(x)\,dx + \left(-\int_a^c f(x)\,dx\right)$$

أتذكَّر

قيمة $\int_a^c f(x)\,dx$ سالبة؛ لذا يُختار معكوسها لتنتج قيمة موجبة تساوي مساحة المنطقة الواقعة تحت المحور x.

مثال 4

أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = x^3 - x$، والمحور x.



الخطوة 1: أُمثِّل منحنى الاقتران بيانيًّا، ثم أُظلِّل المنطقة المطلوب إيجاد مساحتها.

الخطوة 2: أجد المساحة عن طريق التكامل.

أُلاحِظ أنَّ جزءًا من المساحة المطلوبة يقع فوق المحور x، وأنَّ الجزء الآخر أسفله.

أتذكَّر

يُمكِنني تمثيل منحنى الاقتران: $f(x) = x^3 - x$ بيانيًّا باستعمال المشتقة كما تعلَّمْتُ سابقًا، وتحديد نقاط تقاطع الاقتران مع المحور x.

يظهـــر من التمثيل البياني أنَّ المقطع x الذي يُمكِن تجزئة المســـاحة عن طريقه هو 0؛ لذا أجد المساحة على النحو الآتي:

بتجزئة المساحة إلى مجموع مساحتين فوق المحور x وتحته

$$A = \int_{-1}^{0} (x^3 - x)\, dx + \left(-\int_{0}^{1} (x^3 - x)\, dx\right)$$

قاعدتا تكامل اقتران القوَّة، والفرق

$$= \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 \Big|_{-1}^{0}\right) - \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 \Big|_{0}^{1}\right)$$

بالتعويض

$$= \left((0) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right)\right) - \left(\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) - (0)\right)$$

بالتبسيط

$$= \left(\frac{1}{4}\right) - \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

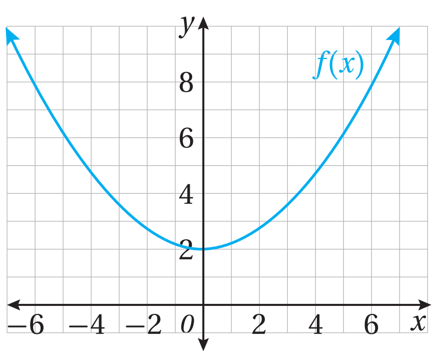
إذن، المساحة هي $\frac{1}{2}$ وحدة مربعة.

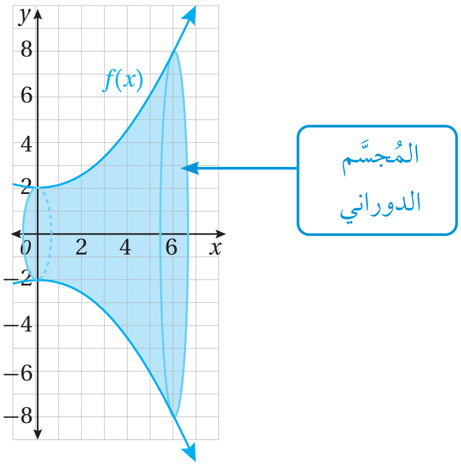
أتحقَّق من فهمي

أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = x^3 - 9x$، والمحور x.

تطبيقات التكامل: الحجوم الدورانية

يُبيِّن الشـــكل الآتي منحنى الاقتـــران: $f(x) = \frac{1}{6}x^2 + 2$. إذا دار جزء من المنحنى محصور بين $x = 0$ و $x = 6$ دورة كاملة حول المحور x، فإنَّ الشـــكل الناتج يُسمّى **المُجسَّم الدوراني** (solid of revolution)، ويُمكِن إيجاد حجم هذا المُجسَّم عن طريق التكامل.





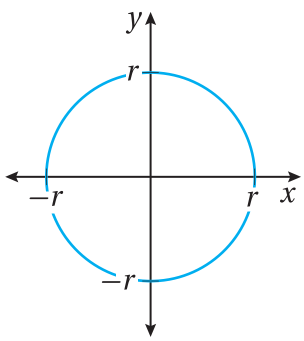
حجوم المُجسَّمات الدورانية

مفهوم أساسي

حجم المُجسَّــم الناتج من دوران جزءٍ من منحنى الاقتران: $y = f(x)$ ، واقعٍ بين $x = a$ و $x = b$ حول المحور x ، هو:

$$V = \int_a^b \pi y^2 \, dx \qquad or \qquad V = \int_a^b \pi \, (f(x))^2 \, dx$$

مثال 5



1 أجــد حجم الكــرة الناتجــة مــن دوران دائرة طول نصف قُطْرها r حــول المحور x إذا كانت معادلتها:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

لإيجــاد حجم الكــرة الناتجــة مــن دوران الدائرة: $x^2 + y^2 = r^2$ حول المحور x، أســتعمل القاعدة الآتية: $V = \int_a^b \pi y^2 \, dx$، لكنّي أُعيد أولًا ترتيب معادلة الدائرة في الصورة الآتية: $y^2 = r^2 - x^2$.

$$V = \int_a^b \pi y^2 \, dx$$ قاعدة حجم المُجسَّم الناتج من الدوران حول المحور x

$$= \int_{-r}^{r} \pi \, (r^2 - x^2) \, dx$$ بتعويض $y^2 = r^2 - x^2 , a = -r , b = r$

$$= \pi (r^2 x - \tfrac{1}{3} x^3) \Big|_{-r}^{r}$$ قاعدتا تكامل اقتران القوَّة المضروب في ثابت، والفرق

$$= \left(\pi(r^2 (r) - \tfrac{1}{3} (r)^3)\right) - \left(\pi(r^2 (-r) - \tfrac{1}{3} (-r)^3)\right)$$ بالتعويض

$$= \frac{2}{3} \pi r^3 + \frac{2}{3} \pi r^3 = \frac{4}{3} \pi r^3$$ بالتبسيط

إذن، حجم الكرة الناتجة هو $\frac{4}{3} \pi r^3$ وحدة مكعبة.

أتعلَّم

تُتــرَك الإجابــة عــادة بدلالــة π.

أتحقَّق من فهمي

أجد حجم المُجسَّـــم الناتج من دوران المنطقة المحصـــورة بين المحور x ومنحنى الاقتران: $y = x^2 - 1$ حول المحور x.

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1) $\int_{-1}^{3} 3x^2\, dx$

2) $\int_{1}^{5} 10x^{-2}\, dx$

3) $\int_{0}^{2} (3x^2 + 4x + 3)\, dx$

4) $\int_{2}^{5} 3x(x + 2)\, dx$

5) $\int_{1}^{8} 8\sqrt[3]{x}\, dx$

6) $\int_{1}^{9} \left(\sqrt{x} - \frac{4}{\sqrt{x}}\right) dx$

7) $\int_{1}^{2} (2x - 4)^4\, dx$

8) $\int_{0}^{4} \frac{1}{\sqrt{6x+1}}\, dx$

9) $\int_{1}^{3} (x - 2)(x + 2)\, dx$

إذا كان: $\int_{1}^{2} f(x)\, dx = -4$، و $\int_{1}^{5} f(x)\, dx = 6$، و $\int_{1}^{5} g(x)\, dx = 8$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

10) $\int_{2}^{2} g(x)\, dx$

11) $\int_{5}^{1} g(x)\, dx$

12) $\int_{1}^{2} 3f(x)\, dx$

13) $\int_{2}^{5} f(x)\, dx$

14) $\int_{1}^{5} (f(x) - g(x))\, dx$

15) $\int_{1}^{5} (4f(x) + g(x))\, dx$

أحُلُّ الأسئلة الثلاثة الآتية تباعًا:

16) أجد $\int_{0}^{1} x^n\, dx$، حيث $n > 0$.

17) أُثبِت أنَّ $\int_{0}^{1} x^n (1 - x)\, dx = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$.

18) أجد $\int_{0}^{1} x^n (1 - x^2)\, dx$، ثم أكتب الإجابة في أبسط صورة مُمكِنة.

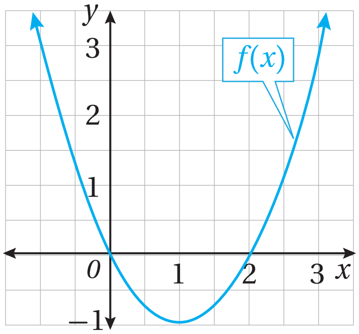
يُمثِّل الاقتران: $v(t) = t^2\,(6-t)$ سـرعة سـيّارة بالمتر لـكل ثانية بعد t ثانية من بدء حركتهـا، حيث: $0 \leq t \leq 6$. إذا تحرَّكت السيّارة مدَّة 6 ثوانٍ، فأُجيب عن الأسئلة الآتية:

19 أجد أقصى سرعة للسيّارة.

20 أُمثِّل منحنى الاقتران $v(t)$ بيانيًّا.

21 أجد المسافة التي قطعتها السيّارة.

يُبيِّن الشكل المجاور منحنى الاقتران: $f(x) = x^2 - 2x$:



22 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران، والمحور x .

23 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران، والمحور x، والمستقيم $x = 3$.

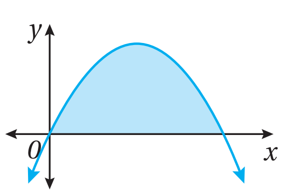
24 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران، والمحور x، والمستقيم $x = -1$.

25 أجـد مسـاحة المنطقـة المحصـورة بيـن منحنـى الاقتـران: $f(x) = 3x^2 - 2x + 2$، والمحـور x، والمستقيمين: $x = 0$ و $x = 2$.

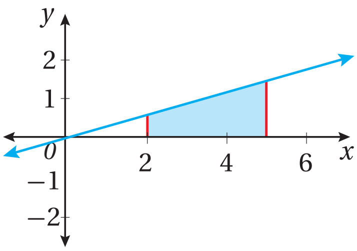
26 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = a^2 - x^2$، والمحور x بدلالة الثابت a.

27 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى العلاقة: $y = (2x + 16)^{\frac{3}{4}}$، والمحورين الإحداثيين.

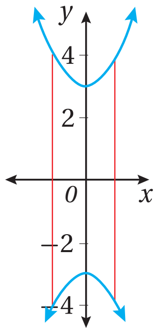
28 يُبيِّن الشكل المجاور منحنى الاقتران: $y = kx\,(4-x)$. إذا كانت مساحة المنطقة بين منحنى الاقتران والمحـور x هي 32 وحدة مربعة، فأجد قيمة الثابت k.

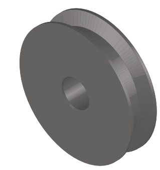


29 أجـد حجم المُجسَّـم الناتج من دوران جـزء من منحنى الاقتـران: $y = 0.3x$، يقـع بيـن $x = 2$ و $x = 5$ حول المحور x.

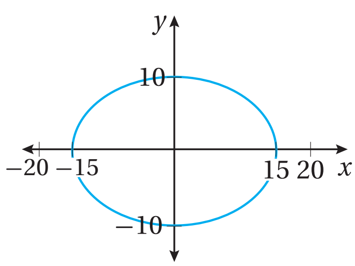


30 **هندسة صناعية:** صمَّم مهندس صناعي عجلة بكرة عن طريق تدوير جـزء من منحنى الاقتران: $y = x^2 + 3$، يقـع بين $x = -1$ و $x = 1$ حول المحور x. أجد حجم عجلة البكرة.



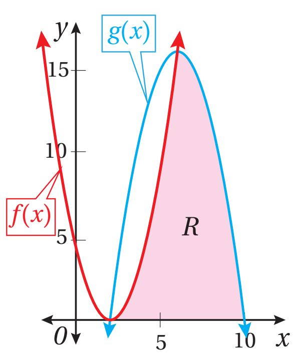


31 **كرة قـدم أمريكيـة:** إذا دار منحنـى المعادلة: $\frac{x^2}{15^2} + \frac{y^2}{10^2} = 1$ حـول المحور x، فإنَّ الشـكل الناتج يُشـبِه كرة القدم الأمريكيـة. أجد حجم الكرة الناتجة من دوران منحنى المعادلة السابقة حول محور x بالسـنتيمترات المكعبـة، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقرب 3 منازل عشرية.

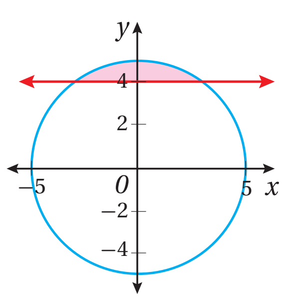


مهارات التفكير العليا

32 **تحـدٍّ:** يُبيِّـن الشـكل المجـاور منحنيـي الاقترانيـن: $f(x) = (x-2)^2$، و $g(x) = (x-10)(2-x)$. أجد مسـاحة المنطقـة المُظلَّلة R المحدودة بمنحنيي الاقترانين والمحور x.



33 **تبرير:** يُبيِّن الشـكل المجـاور دائرة معادلتهـا: $x^2 + y^2 = 25$. إذا دار الجزء المُظلَّـل المحصور بين الدائرة والمسـتقيم $y = 4$ حول المحور x لتشـكيل مُجسَّم، فأَصِف شكل المُجسَّم الناتج، ثم أجد حجمه، مُبرِّرًا إجابتي.



34 **تحـدٍّ:** إذا كان ميل العمودي على المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ عند النقطـة (x, y) هو: $\frac{3}{x^2 - 6}$، ومرَّ المنحنى بنقطـة الأصل، فأجد مسـاحة المنطقـة المحصورة بين منحنـى الاقتـران $f(x)$، والمحور x، والمسـتقيمين: $x = 1$ و $x = 2$.

معمل برمجية جيوجبرا

تطبيقات التكامل: المساحة

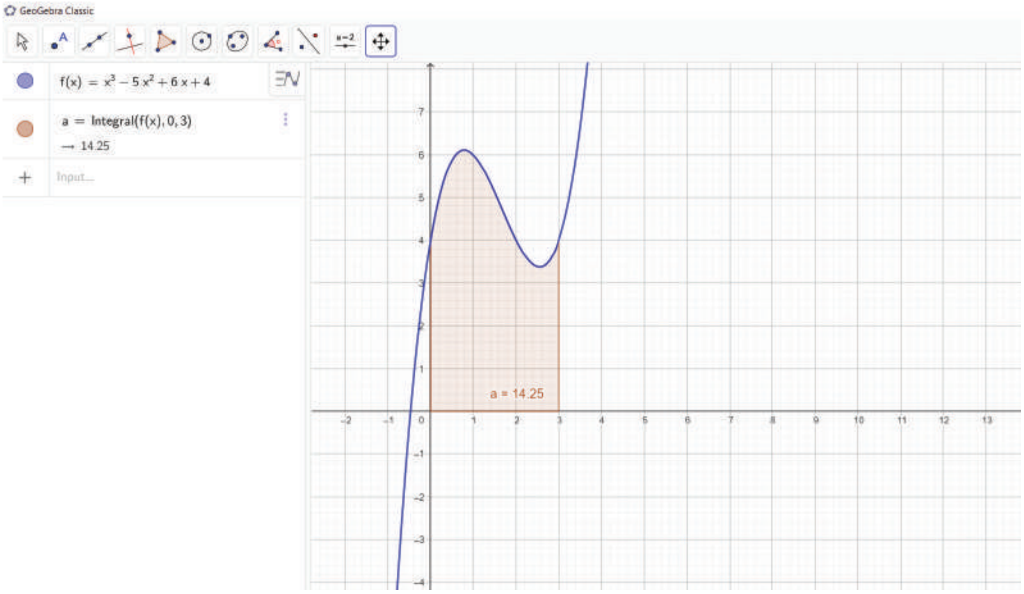
Applications of integration: Area

أستعمل برمجية جيوجبرا لإيجاد قيمة التكامل المحدود، ثم إيجاد المساحة بين منحنى الاقتران والمحور x، مراعيًا تحويل إشارة الناتج عندما تكون المنطقة كلها تحت المحور x، ويجب تقسيم هذه المنطقة إلى جزأين إذا كان جزء منها فوق المحور x، وجزء آخر تحته، ثم حساب مساحة كل جزء على حِدَة، ثم جمع المساحتين معًا.

مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران والمحور x

نشاط

أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x + 4$، والمحور x، والمستقيمين: $x = 0$ و $x = 3$.



1 أكتب الاقتران: $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x + 4$ في شريط الإدخال، ثم أضغط على زرِّ الإدخال Enter.

2 لإيجاد المســاحة بين الاقتران $f(x)$، والمحور x، والمستقيمين: $x = 0$ و $x = 3$، أكتب في شريط الإدخال الصيغة الآتية: Integral (f(x), 0, 3) ، ثم أضغط على زرِّ الإدخال Enter.

3 أُلاحِظ تظليل المنطقة المطلوبة، وظهور قيمة التكامل على الشكل. ومنه، فإنَّ المساحة هي 14.25 وحدة مربعة.

أتدرَّب

1 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = x^2 + 4$، والمحور x، والمستقيمين: $x = -1$ و $x = 2$.

2 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = -\sqrt{x}$، والمحور x، والمستقيم $x = 9$.

أختار رمز الإجابة الصحيحة في كلٍّ ممّا يأتي:

1 قيمة $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$ هي:

a) -2 b) $-\frac{7}{16}$

c) $\frac{1}{2}$ d) 2

2 $\int x\sqrt{3x}\; dx$ يساوي:

a) $\frac{2\sqrt{3}}{5}\, x^{\frac{5}{2}} + C$ b) $\frac{5\sqrt{3}}{2}\, x^{\frac{5}{2}} + C$

c) $2\sqrt{3x} + C$ d) $\frac{5\sqrt{3}}{2}\, x^{\frac{3}{2}} + C$

3 التكامل المحدود الذي يُمكِن عن طريقه إيجاد المساحة بين منحنى الاقتران: $f(x) = 4x - x^2$، والمحور x هو:

a) $\int_4^0 (4x - x^2)\, dx$ b) $\int_0^4 (4x - x^2)\, dx$

c) $\int_1^0 (4x - x^2)\, dx$ d) $\int_0^1 (4x - x^2)\, dx$

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

4 $\int_2^4 10x^3\, dx$

5 $\int_1^4 2\sqrt{x}\; dx$

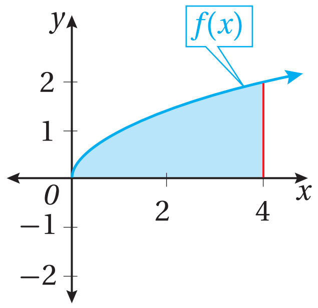
6 $\int_9^{16} \frac{20}{\sqrt{x}}\, dx$

7 $\int_3^4 (6x^2 - 4x) dx$

8 $\int_0^1 (x^3 - x)\, dx$

9 $\int_{-3}^{-1} \frac{x+1}{x^3}\, dx$

10 أجد حجم المُجسَّم الناتج من دوران جزء من منحنى الاقتران: $f(x) = \sqrt{x}$، يقع بين $x = 0$ و $x = 4$ حول المحور x.



أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

11 $\int (8x - 10x^2)\, dx$

12 $\int 3x^{-\frac{1}{2}}\, dx$

13 $\int \frac{4 + 2\sqrt{x}}{x^2}\, dx$

14 $\int \frac{4 - x^2}{2 + x}\, dx$

15 $\int (2x - 3)^5\, dx$

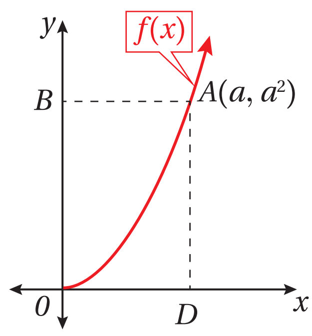
16 $\int \sqrt{x + 1}\; dx$

17 $\int \left(\frac{x^2 + 3x - 2}{\sqrt{x}}\right) dx$

18 $\int (x^3 - 2x^2) \left(\frac{1}{x - 2}\right) dx$

19 $\int \left(\sqrt{x^3} - \frac{1}{2\sqrt[3]{x}} + \sqrt{2}\,\right) dx$

20 يُبيِّن الشكل الآتي منحنى الاقتران: $f(x) = x^2$، حيث $x > 0$. إذا كانت إحداثيات النقطة $A(a, a^2)$، فأُثبِت أنَّ مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x)$ والمحور x والمستقيم $x = a$ تساوي ثلث مساحة المستطيل $ADOB$.



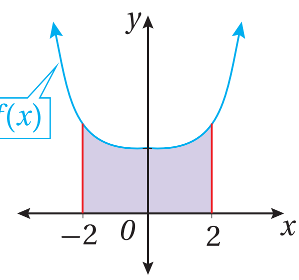
21 إذا كان: $f''(x) = (ax + b)^3$، حيث a و b ثابتان، فأجد $f(x)$.

بدأ جسيم الحركة في خطٍّ مستقيم من نقطة الأصل، وكانت سرعته في أيِّ لحظة t هي $(8 - 4t)$ m/s:

22 أجد المسافة التي يقطعها الجسيم بعد t ثانية.

23 أجد المسافة التي يقطعها الجسيم بعد ثانيتين من بدء حركته.

24 يُبيِّن الشكل الآتي منحنى الاقتران: $f(x) = 2 + 0.1x^4$. أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x)$، والمحور x، والمستقيمين: $x = 2$ و $x = -2$.



25 إذا كان: $f'(x) = 2x + 6$، وكان لمنحنى $f(x)$ نقطة قيمة صغرى محلية تقع على المحور x، فأجد قاعدة الاقتران $f(x)$.

تدريب على الاختبارات الدولية

26 $\int \frac{x^3 - 1}{x^2}\, dx$ يساوي:

a) $\frac{x^2}{2} - \frac{1}{x} + C$ b) $\frac{x^2}{2} + \frac{1}{x} + C$

c) $x^2 - \frac{1}{x} + C$ d) $x^2 - \frac{1}{x} + C$

27 إذا كان: $\int_0^2 kx\, dx = 6$، فإنَّ قيمة الثابت k هي:

a) 1 b) 2

c) 3 d) 4

28 قيمة $\int_0^3 (-x^2 + 3x)\, dx$ هي:

a) $3\frac{3}{4}$ b) $21\frac{1}{4}$

c) $4\frac{1}{2}$ d) $22\frac{1}{2}$

الوحدة 6

الاقترانات المثلثية
Trigonometric Functions

ما أهمية هذه الوحدة؟

تُعَدُّ الاقترانات المثلثية أحد أكثر فروع الرياضيات استعمالًا في العلوم المختلفة؛ إذ يُمكِن عن طريقها نمذجة كثير من الظواهر العلمية، مثل: موجات الصوت، والضوء. وكذلك إيجاد ارتفاع المَدِّ والجَزْر، وإنشاء الخرائط، فضلًا عن استعمالها في أنظمة الأقمار الصناعية.

تعلَّمْتُ سابقًا:

- ✓ ماهيــة دائــرة الوحــدة، ووضــع الزاويــة القياســي.
- ✓ إيجــاد النســب المثلثيــة للزوايــا ضمــن الــدورة الواحــدة.
- ✓ تمثيــل الاقترانــات المثلثيــة فــي المســتوى الإحداثــي، واســتنتاج خصائصهــا.

سأتعلَّم في هذه الوحدة:

- رسم الزوايا في الوضع القياسي.
- التحويل من القيــاس بالدرجات إلى القياس بالراديان، والعكس.
- إيجاد قِيَم الاقترانات المثلثية لأيِّ زاوية.
- تمثيل الاقترانات المثلثية الأساســية بيانيًّا في المستوى الإحداثي.

ملحوظة: أستعمل تدريبات (أســتعد لدراسة الوحدة) في الصفحتين (10) و (11) من كتاب التمارين؛ لمراجعة هذه الموضوعات قبل البدء بدراسة الوحدة.

الدرس 1

قياس الزاوية بالراديان
Angle Measure in radian

فكرة الدرس

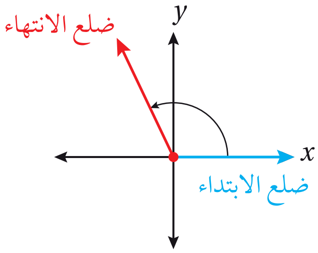
- رسم الزوايا في الوضع القياسي.
- التحويل من القياس بالدرجات إلى القياس بالراديان، والعكس.

المصطلحات الراديان، الزوايا المُشترِكة، السرعة الخطية، السرعة الزاويَّة.

مسألة اليوم إذا كان طول عقرب الدقائق في الساعة المجاورة 6 cm، فكيف أجد المسافة التي يقطعها رأس العقرب بعد مرور 15 دقيقة على حركته؟ أجد المسافة بطريقتين مختلفتين.

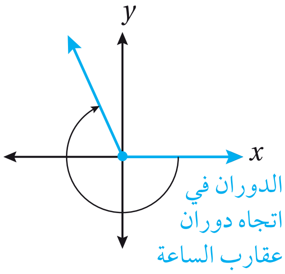
رسم الزاوية في الوضع القياسي

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّ الزاوية المرسومة في الوضع القياسي في المستوى الإحداثي هي زاوية يقع رأسها عند نقطة الأصل $(0, 0)$، وضلع ابتدائها مُنطبِق على المحور x الموجب.

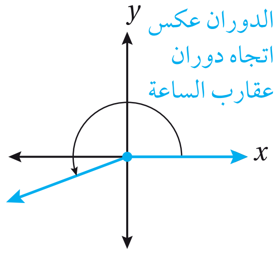


زاوية في الوضع القياسي

تعلَّمْتُ أيضًا أنَّ قياس الزاوية يصف مقدار الدوران واتجاهه اللازمينِ للانتقال من ضلع الابتداء إلى ضلع الانتهاء، وأنَّ قياس الزاوية يكون موجبًا إذا كان الدوران عكس اتجاه دوران عقارب الساعة، وسالبًا إذا كان الدوران في اتجاه دوران عقارب الساعة.



زاوية قياسها سالب

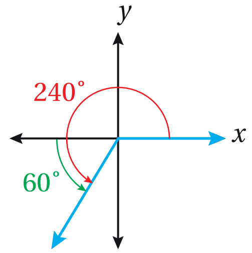


زاوية قياسها موجب

مثال 1

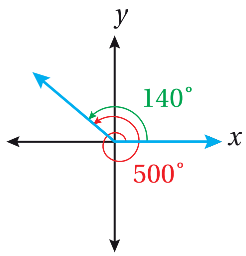
أرسم في الوضع القياسي الزاوية التي عُلِم قياسها في كلٍّ ممّا يأتي:

1 $240°$



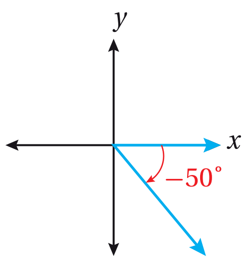
بما أنَّ الزاوية °240 تزيد على الزاوية °180 بمقدار °60، فإنَّني أرسم ضلع الانتهاء بالدوران °60 عكس اتجاه دوران عقارب الساعة، بدءًا بالجزء السالب من المحور x.

2 $500°$



بما أنَّ الزاوية °500 تزيد على الزاوية °360 بمقدار °140، فإنَّ ضلع الانتهاء أكمل دورة كاملة عكس اتجاه دوران عقارب الساعة، ثم دار أيضًا °140 عكس اتجاه دوران عقارب الساعة.

3 $-50°$



بما أنَّ °50− زاوية سالبة، فإنَّني أرسم ضلع الانتهاء بالدوران °50 في اتجاه دوران عقارب الساعة، بدءًا بالجزء الموجب من المحور x.

إرشاد

يُمكِن استعمال المنقلة لتمثيل الزوايا تمثيلًا دقيقًا. وفي حال كان الرسم تقريبيًّا فيُستعمَل التقدير لرسم الزوايا.

أتذكَّر

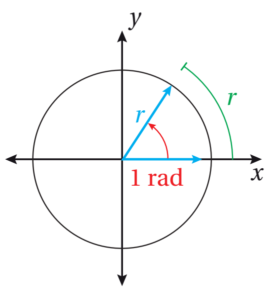
إذا دار ضلع انتهاء الزاوية في الوضع القياسي دورة كاملة عكس اتجاه دوران عقارب الساعة، فإنَّه يصنع في أثناء دورته زوايا قياسها بين °0 و °360، وإذا استمر في دورانه، فإنَّه يصنع زوايا قياسها أكبر من °360

أتحقَّق من فهمي

أرسم في الوضع القياسي الزاوية التي عُلِم قياسها في كلٍّ ممّا يأتي:

a) $170°$ b) $650°$ c) $-130°$

الراديان

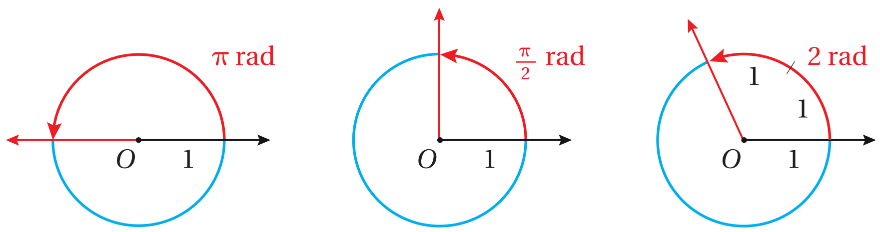


تعلَّمْتُ سابقًا أنَّه يُمكِن قياس الزوايا بالدرجات، أو بوحدةٍ تعتمد على طول قوس الدائرة. فقياس الزاوية المرسومة في الوضع القياسي، التي يُحدِّد ضلعُ انتهائها قوسًا من الدائرة، طوله مساوٍ لنصف قُطْر الدائرة، هو 1 **راديان** (radian).

وبما أنَّ محيط الدائرة هو $2\pi r$، فإنَّ قياس زاوية الدورة الكاملة هو 2π راديان. وبذلك، فإنَّ القياس بالدرجات والقياس بالراديان مُرتبِطان بالمعادلة الآتية:

$$360° = 2\pi \text{ rad} \quad \text{or} \quad 180° = \pi \text{ rad}$$

يُكتَب 1 راديان في صورة: 1 rad، وهذا يعني أنَّ قياس الزاوية المستقيمة هو π rad، وأنَّ قياس الزاوية القائمة هو $\frac{\pi}{2}$ rad، وأنَّ قياس الزاوية التي يقابلها قوس طوله وحدتان هو 2 rad.



مفهوم أساسي التحويل من القياس بالدرجات إلى القياس بالراديان، والعكس

$$180^\circ = \pi \text{ rad} \qquad 1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ \qquad 1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad}$$

1 للتحويل من القياس بالدرجات إلى القياس بالراديان، أضرب قياس الزاوية في $\frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ}$

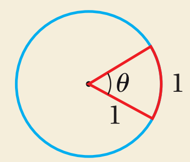
2 للتحويل من القياس بالراديان إلى القياس بالدرجات، أضرب قياس الزاوية في $\frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}}$

أتعلَّم

في الشكل الآتي:

$\theta = 1$ rad

$\theta \approx 57.3^\circ$



مثال 2

أُحوِّل قياس الزاوية المكتوبة بالدرجات إلى الراديان، وقياس الزاوية المكتوبة بالراديان إلى الدرجات في كلٍّ ممّا يأتي:

1 140°

$$140^\circ = 140^\circ \left(\frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ}\right)$$

$$= 140\cancel{^\circ} \left(\frac{\pi \text{ rad}}{180\cancel{^\circ}}\right)$$

$$= \frac{140\,\pi}{180} = \frac{7\pi}{9} \text{ rad}$$

2 $-\frac{\pi}{12}$

$$-\frac{\pi}{12} = -\frac{\cancel{\pi}}{12}\cancel{\text{rad}}\left(\frac{180^\circ}{\cancel{\pi \text{ rad}}}\right)$$

$$= -15^\circ$$

أتعلَّم

بوجه عام، تُحذَف كلمة (rad) عند التعبير عن قياسات الزوايا بالراديان. وحين يكون قياس الزاوية من دون وحدة، فهذا يعني أنَّ قياسها بوحدة راديان.

أتحقَّق من فهمي

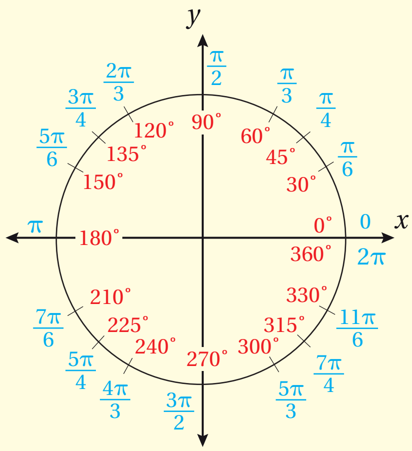
أُحوِّل قياس الزاوية المكتوبة بالدرجات إلى الراديان، وقياس الزاوية المكتوبة بالراديان إلى الدرجات في كلٍّ ممّا يأتي:

a) 165° **b)** $\frac{5\pi}{4}$ **c)** -80° **d)** -6

مفهوم أساسي

قياس الزوايا الخاصة بالدرجات والراديان

يُبيِّن الشكل المجاور القياسات المتكافئة بالدرجات والراديان للزوايا الخاصة من 0° إلى 360° (من 0 rad إلى 2π rad).

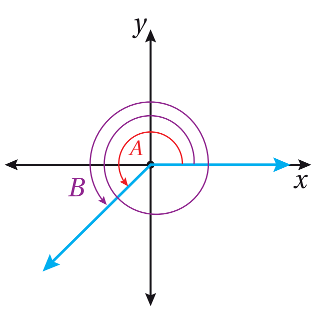


أتعلَّم

من المفيد حفظ القياسات المتكافئة بالدرجات والراديان للزوايا الخاصة في الربع الأول، وللزاوية $90^\circ = \frac{\pi}{2}$؛ فقياسات الزوايا الأُخرى ما هي إلّا مضاعفات لقياسات هذه الزوايا.

الزوايا المُشترِكة

يُطلَق على الزوايا في الوضع القياسي التي لها ضلع الانتهاء نفسه، لكنَّ قياسها مختلف، اسم **الزوايا المُشترِكة** (coterminal angles). فمثلًا، الزاويتان A و B في الشكل المجاور هما زاويتان مُشترِكتان.



مفهوم أساسي

الزوايا المُشترِكة

يُمكِن إيجاد زاوية مُشترِكة في ضلع الانتهاء مع زاوية أُخرى عن طريق الجمع أو الطرح لأحد مضاعفات الزاوية 360° أو 2π

بالدرجات

إذا كانت θ تُمثِّل القياس بالدرجات لزاوية ما، فإنَّ جميع الزوايا ذات القياس $\theta + 360^\circ n$ هي زوايا مشترِكة مع θ، حيث n عدد صحيح.

بالراديان

إذا كانت θ تُمثِّل القياس بالراديان لزاوية ما، فإنَّ جميع الزوايا ذات القياس $\theta + 2n\pi$ هي زوايا مُشترِكة مع θ، حيث n عدد صحيح.

مثال 3

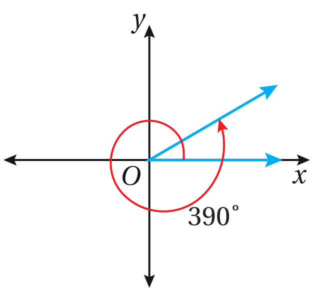
أجد زاويتين إحداهما قياسها موجب، والأُخرى قياسها سالب، وكلتاهما مُشترِكة في ضلع الانتهاء مع كل زاوية معطاة ممّا يأتي، ثم أرسمهما:

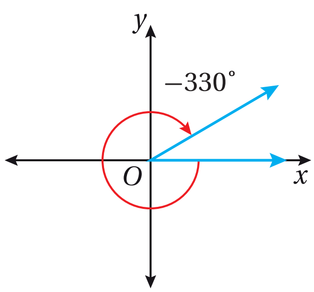
1 **30°**

$30° + 360° (1) = 390°$ بتعويض $n = 1$ لإيجاد زاوية مُشترِكة قياسها موجب

$30° + 360° (-1) = -330°$ بتعويض $n = -1$ لإيجاد زاوية مُشترِكة قياسها سالب

أمّا التمثيل البياني لكلٍّ من الزاويتين فهو:



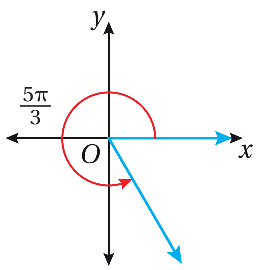


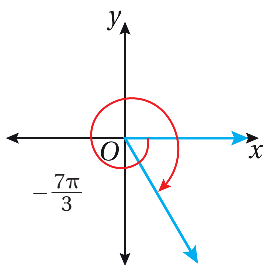
2 $-\frac{\pi}{3}$

$-\frac{\pi}{3} + 2(1)\pi = \frac{5\pi}{3}$ بتعويض $n = 1$ لإيجاد زاوية مُشترِكة قياسها موجب

$-\frac{\pi}{3} + 2(-1)\pi = -\frac{7\pi}{3}$ بتعويض $n = -1$ لإيجاد زاوية مُشترِكة قياسها سالب

أمّا التمثيل البياني لكلٍّ من الزاويتين فهو:





أتعلّم

إذا كان الفرق بين أيِّ زاويتين من مضاعفات 360° أو 2π، فإنَّهما تكونان مُشترِكتين.

أتحقَّق من فهمي

أجد زاويتين إحداهما قياسها موجب، والأُخرى قياسها سالب، وكلتاهما مُشترِكة في ضلع الانتهاء مع كل زاوية معطاة ممّا يأتي، ثم أرسمهما:

a) 88°

b) −920°

c) $\frac{2\pi}{3}$

d) $-\frac{3\pi}{4}$

أتذكَّر

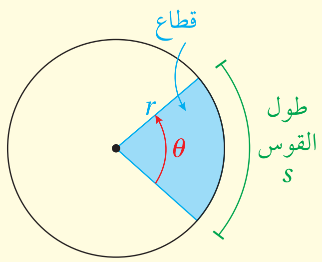
الزاويــة المركزيــة فــي الدائرة هــي الزاوية التي يقع رأســها علــى مركز الدائرة، وضلاعاها نصفا قطرين في الدائرة.

تطبيقات: طول القوس ومساحة القطاع

تعلَّمْتُ ســابقًا أنَّ القوس جزء من الدائرة مُحدَّد بنقطتين عليهــا، وأنَّ القطاع جزء من الدائرة محصور بين قوس منها ونصفي القُطْرين اللذين يمرّان بطرفي القوس. وســأتعلَّم الآن إيجاد طول القوس ومساحة القطاع عندما يكون قياس الزاوية المركزية بالراديان.

مفهوم أساسي — طول القوس ومساحة القطاع

طول القوس



بالكلمات: طول القوس مــن الدائرة s المقابل لزاوية مركزية قياســها θ بالراديان يســاوي ناتج ضــرب طول نصف القُطْر r في θ.

بالرموز: $s = r\theta$

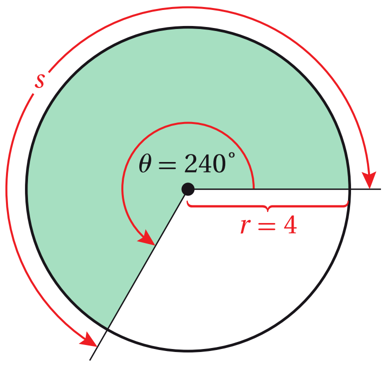
مساحة القطاع

بالكلمات: مســاحة القطاع A الذي قياس زاويته المركزيــة θ بالراديان في دائرة طول نصف قُطْرها r تســاوي نصف ناتج ضــرب مربع طول نصف القُطْر r في θ.

بالرموز: $A = \frac{1}{2} r^2 \theta$

مثال 4

يُبيِّن الشــكل المجاور قطاعًا دائريًّا زاويته المركزية $240°$ فــي دائرة طول نصف قُطْرهــا 4 cm. أجد طول القوس ومســاحة القطــاع، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقرب جزء من عشرة.



لإيجاد طــول قوس القطــاع الدائري باســتعمال الصيغــة: $s = r\theta$، أُحوِّل قياس زاويــة القطاع من الدرجات إلى الراديان.

الخطوة 1: أُحوِّل قياس الزاوية المركزية من الدرجات إلى الراديان.

$$240^\circ = 240^\circ \left(\frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ}\right)$$ بالضرب في $\left(\frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ}\right)$

$$= \frac{4\pi}{3}$$ بالتبسيط

الخطوة 2: أجد طول القوس.

$$s = r\theta$$ صيغة طول القوس

$$= 4\left(\frac{4\pi}{3}\right)$$ بتعويض $r = 4,\ \theta = \frac{4\pi}{3}$

$$\approx 16.8$$ باستعمال الآلة الحاسبة

إذن، طول القوس هو 16.8 cm تقريبًا.

الخطوة 3: أجد مساحة القطاع.

$$A = \frac{1}{2} r^2 \theta$$ صيغة مساحة القطاع

$$= \frac{1}{2}(4)^2\left(\frac{4\pi}{3}\right)$$ بتعويض $r = 4,\ \theta = \frac{4\pi}{3}$

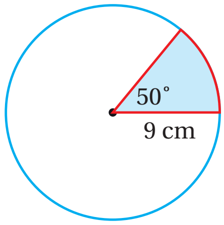
$$\approx 33.5$$ باستعمال الآلة الحاسبة

إذن، مساحة القطاع هي $33.5\ \text{cm}^2$ تقريبًا.

تنبيه

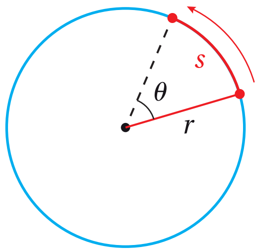
وحدة قياس طول القوس هي cm، وليس cm rad؛ لأنَّ الراديان نسبة بلا وحدة، وكذلك هو حال مساحة القطاع.

أتحقَّق من فهمي



يُبيِّن الشكل المجاور قطاعًا دائريًّا زاويته المركزية °50 في دائرة طول نصف قُطْرِها 9 cm. أجد طول القوس ومساحة القطاع، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقرب جزء من عشرة.

تطبيقات: الحركة الدائرية



إذا افترضْتُ أنَّ نقطة تتحرَّك على محيط دائرة كما في الشكل المجاور، فإنَّه يُمكِنني وصف حركتها باستعمال **السرعة الخطية** (linear speed) التي تُمثِّل المعدل الذي تتغيَّر فيه المسافة المقطوعة. فالسرعة الخطية هي المسافة المقطوعة مقسومة على المدَّة الزمنية المنقضية.

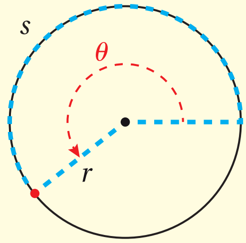
يُمكِنني أيضًا وصف حركة النقطة باستعمال **السـرعة الزاويَّة** (angular speed) التي تُمثِّل المعــدل الذي يتغيَّر فيه قياس الزاوية المركزية. فالســرعة الزاويَّة هي قيمــة التغيُّر في قياس الزاوية بالراديان مقسومة على الزمن المنقضي.

مفهوم أساسي — **السرعة الخطية والسرعة الزاويَّة**

بافتراض أنَّ نقطة تتحرَّك بسرعة ثابتة على محيط دائرة، طول نصف قُطْرها r:

- إذا كان s هو طول القوس الذي تقطعه النقطة في مدَّة زمنية مقدارها t، فإنَّ الســرعة الخطية v لهذه النقطة تعطى بالعلاقة الآتية:

$$v = \frac{s}{t}$$



- إذا كانت θ هي زاويــة الدوران (بالراديان) التي دارتها النقطة في مدَّة زمنية مقدارها t، فإنَّ السرعة الزاويَّة ω لهذه النقطة تعطى بالعلاقة الآتية:

$$\omega = \frac{\theta}{t}$$

لغة الرياضيات

الحرف اليوناني ω يُقرَأ: أوميغــا، وهو يُســتعمَل للدلالــة على الســرعة الزاويَّة.

مثال 5 : من الحياة

سيّارة: إطار ســيّارة يبلغ طول قُطْره **15 in**، ويدور **9.3** دورات في الثانية:

1 أجـد الســرعة الخطيــة للإطــار بالإنــش لــكل ثانيــة.

بمــا أنَّ قياس الــدورة الكاملة 2π، فــإنَّ 9.3 دورات تقابــل زاوية الدوران θ التي قياســها $9.3 \times 2\pi$، أو $18.6\,\pi$ راديان.

$$v = \frac{s}{t}$$ السرعة الخطية

$$= \frac{r\theta}{t}$$ بتعويض $s = r\theta$

$$= \frac{(7.5)(18.6\,\pi)\text{inch}}{1\text{ sec}}$$ بتعويض $r = 7.5,\ \theta = 18.6\,\pi,\ t = 1\text{ sec}$

$$= \frac{139.5\pi\text{ inch}}{1\text{ sec}}$$ بالتبسيط

إذن، السرعة الخطية للإطار هي $139.5\,\pi$ إنش لكل ثانية، أو 438.25 إنش لكل ثانية تقريبًا.

2 أجد السرعة الزاويّة للإطار بالراديان لكل ثانية.

السرعة الزاويّة $\omega = \frac{\theta}{t}$

بتعويض $t = 1 \text{ sec}\,,\ \theta = 18.6\,\pi$ $= \frac{18.6\,\pi \text{ rad}}{1 \text{ sec}}$

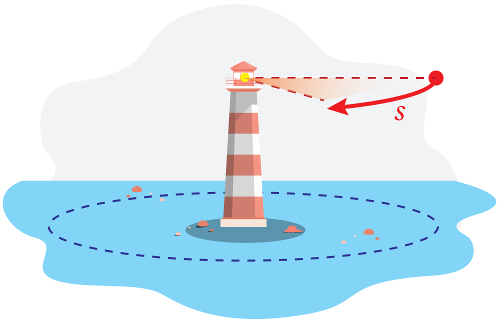
إذن، السرعة الزاويّة للإطار هي $18.6\,\pi$ راديان لكل ثانية، أو 58.4 راديان لكل ثانية تقريبًا.

أتعلَّم

عندما يتحرَّك جسم حركة دائرية، فإنَّ سرعته تقاس بالسرعة الخطية، في حين تقاس سرعة تغيُّر الزاوية بالسرعة الزاويَّة.

أتحقَّق من فهمي

منارة: تتوسَّط منارة قناة ماء، ويتحرَّك ضوؤها حركة دائرية بسرعة ثابتة. إذا أكمل ضوء المنارة دورة كاملة كل **10** ثوانٍ، فأجد السرعة الزاويَّة لضوئها في الدقيقة.



أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

أرسم في الوضع القياسي الزاوية التي عُلِم قياسها في كلٍّ ممّا يأتي:

1 $450°$ **2** $-900°$ **3** $540°$ **4** $-700°$

5 $-\frac{\pi}{6}$ **6** $\frac{21\pi}{4}$ **7** $\frac{7\pi}{6}$ **8** $\frac{\pi}{9}$

أُحوِّل قياس الزاوية المكتوبة بالدرجات إلى الراديان، والزاوية المكتوبة بالراديان إلى الدرجات في كلٍّ ممّا يأتي:

9 $-225°$ **10** $-135°$ **11** $75°$ **12** $500°$

13 $-\frac{\pi}{7}$ **14** $\frac{5\pi}{12}$ **15** 1.2 **16** 4

أجد زاويتين إحداهما قياسها موجب، والأُخرى قياسها سالب، وكلتاهما مُشترِكة في ضلع الانتهاء مع كل زاوية معطاة ممّا يأتي، ثم أرسمهما:

17) $50°$

18) $135°$

19) $1290°$

20) $-150°$

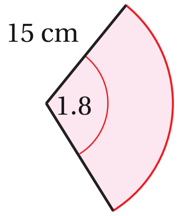
21) $\frac{11\pi}{6}$

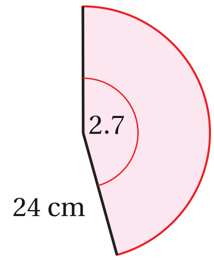
22) $-\frac{\pi}{4}$

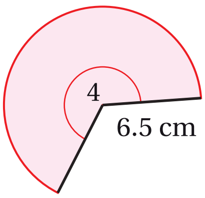
23) $-\frac{\pi}{12}$

24) $\frac{7\pi}{6}$

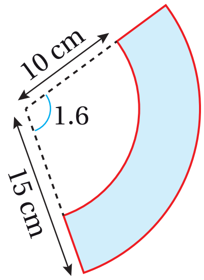
أجد طول القوس ومساحة القطاع في كلٍّ ممّا يأتي، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقرب جزء من عشرة:

25) 

26) 

27) 

يُمثِّل الشكل المُظلَّل المجاور جزءًا من قطاع دائري:

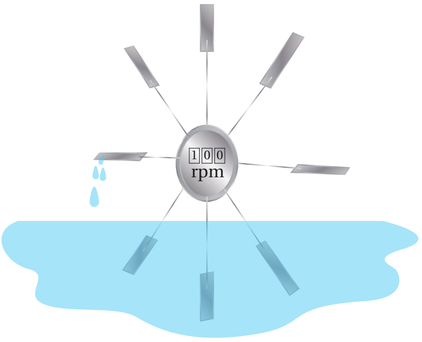


28) أجد مساحة هذا الشكل.

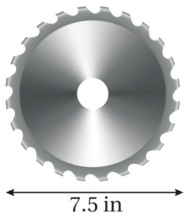
29) أجد محيط هذا الشكل.

30) قطاع دائري مساحته $500\ cm^2$، وطول قوسه $20\ cm$، أجد قياس زاويته بالراديان.

31) **تيار ماء:** استعمل العلماء عجلة مجداف لقياس سرعة التيارات المائية بناءً على معدل الدوران. أجد سرعة تيار مائي بالمتر لكل ثانية إذا دارت العجلة 100 دورة في الدقيقة، علمًا بأنَّ طول عجلة المجداف $0.20\ m$



32 يُدوِّر طفــل حجرًا مربوطًــا بطرف حبل طولــه 3 ft بمعدل 15 دورة في 10 ثوانٍ. أجد الســرعة الزاويَّة والسرعة الخطية للحجر.



قُطْر شفرة منشار دائرية الشــكل 7.5 in، وهي تدور 2400 دورة في الدقيقة:

33 أجد السرعة الزاويَّة لهذه الشفرة بالراديان لكل ثانية.

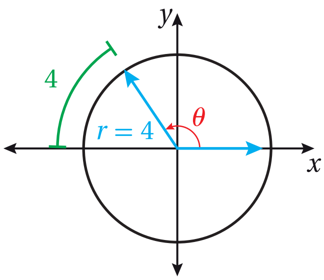
34 أجد السرعة الخطية لأسنان المنشــار عند ملامستها الخشب المراد قطعه.

مهارات التفكير العليا

تبرير: قطاع دائري طول قوسه بالسنتيمترات يساوي عدديًّا مساحته بالأمتار المربعة:

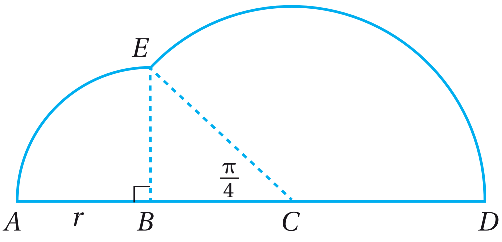
35 أجد نصف قُطْر القطاع الدائري، مُبرِّرًا إجابتي.

36 أجد قياس زاوية القطاع، مُبرِّرًا إجابتي.



37 **تبرير:** أجد قياس الزاوية θ في الشكل المجاور، مُبرِّرًا إجابتي.

تحدٍّ: في الشــكل المجاور، ACD زاوية مســتقيمة، وABE قطاع دائري مركزه B، ونصف قُطْــره r، وCED قطاع دائري مركزه C، و $\angle ABE$ قائمة، و $m\angle ACE = \frac{\pi}{4}$:



38 أُثبِت أنَّ طول $\overline{CD}$ هو $\sqrt{2}\, r$.

39 أجد قياس $\angle ECD$ بالراديان.

40 أجد محيط الشكل ومساحته، علمًا بأنَّ $r = 10$ cm.

الدرس 2

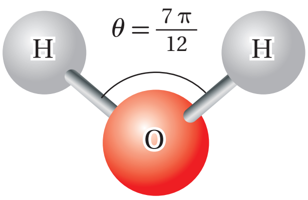
الاقترانات المثلثية

Trigonometric Functions

فكرة الدرس إيجاد قِيَم الاقترانات المثلثية لأيِّ زاوية.

المصطلحات الاقتــران المثلثي، قاطع التمــام، القاطع، ظل التمام، اقترانات المقلــوب، الزاوية الربعية، الزاوية المرجعية.

مسألة اليوم يتكوَّن جزيء الماء من ذرَّة أكسجين وذرَّتي هيدروجين، وتتوسَّط ذرَّة الأكســجين هذا الجزيء، ويكون قياس الزاوية θ بين رابطتي $O{-}H$ $\frac{7\pi}{12}$ تقريبًا. أجد $\cos\frac{7\pi}{12}$.



الاقترانات المثلثية

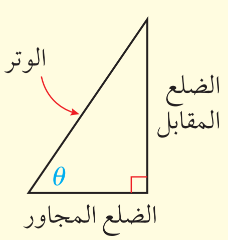
يستفاد من النســب المثلثية في المقارنة بين طولي ضلعين في المثلث القائم الزاوية. ويُعرَف **الاقتران المثلثي** (trigonometric function) بأنَّه قاعدة معطاة باستعمال النسبة المثلثية. وتُســتعمَل قياسات أطوال أضلاع المثلث القائم الزاوية وقياس زاوية حادَّة فيه لإيجاد النسب المثلثية الست التي تُحدِّد ستة اقترانات مثلثية.

لغة الرياضيات

يُستعمَل الرمز الإغريقي θ للدلالــة علــى قياس الزاوية الحادَّة في المثلث القائم الزاوية.

مفهوم أساسي — **الاقترانات المثلثية**

إذا مثَّلت θ قياس زاوية حادَّة في مثلث قائم الزاوية، فإنَّ الاقترانات المثلثية الســتة تُعــرَف بدلالة الوتر، والضلع المقابل، والضلع المجاور كما يأتي:



$\sin\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ (الجيب) $\csc\theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}}$ **قاطع التمام** (cosecant)

$\cos\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$ (جيب التمام) $\sec\theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}}$ **القاطع** (secant)

$\tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$ (الظل) $\cot\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}}$ **ظل التمام** (cotangent)

يُطلَق على اقترانات قاطع التمام، والقاطع، وظل التمام، اسم **اقترانات المقلوب** (reciprocal functions)؛ لأنَّها مقلوب نسب الجيب، وجيب التمام، والظل على الترتيب، ويُمكِن تعريفها على النحو الآتي:

$$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

أتعلَّم

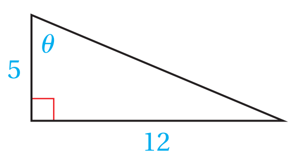
يُمكِن اشتقاق العلاقات الآتية من تعريفات اقترانات الجيب، وجيب التمام، والظل، وظل التمام:

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta},$$

$$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

مثال 1

أجد قِيَم الاقترانات المثلثية الستة للزاوية θ في المثلث المجاور.



الخطوة 1: أجد طول الوتر باستعمال نظرية فيثاغورس.

$c^2 = a^2 + b^2$	نظرية فيثاغورس
$c^2 = 5^2 + 12^2$	بتعويض $a = 5, b = 12$
$c^2 = 169$	بالتبسيط
$c = \pm\sqrt{169}$	بأخذ الجذر التربيعي لكلا الطرفين
$c = 13$	الطول لا يُمكِن أنْ يكون سالبًا

الخطوة 2: أجد الاقترانات المثلثية للزاوية θ.

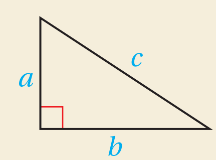
$$\sin\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{12}{13} \qquad \cos\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{5}{13} \qquad \tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{12}{5}$$

$$\csc\theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}} = \frac{13}{12} \qquad \sec\theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}} = \frac{13}{5} \qquad \cot\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}} = \frac{5}{12}$$

أتذكَّر

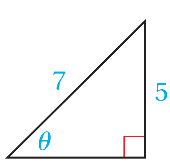
تنص نظرية فيثاغورس على أنَّ مربع طول الوتر في المثلث القائم الزاوية يساوي مجموع مربعي طولي الضلعين الآخرين؛ أيْ إنَّ:

$$c^2 = a^2 + b^2$$



أتحقَّق من فهمي

أجد قِيَم الاقترانات المثلثية الستة للزاوية θ في المثلث المجاور.



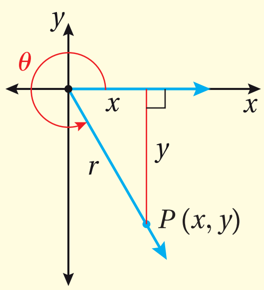
قِيَم الاقترانات المثلثية لأيِّ زاوية باستعمال نقطة معلومة

يُمكِن تعميم تعريفات الاقترانات المثلثية الخاصة بالزاوية الحادَّة (في المثلث القائم الزاوية)، لتشمل أيَّ زاوية في الوضع القياسي.

مفهوم أساسي

الاقترانات المثلثية لأيِّ زاوية

إذا كانت θ زاوية مرســومة في الوضع القياســي، والنقطة $P(x, y)$ تقع على ضلع الانتهاء للزاويــة θ، و r يُمثِّل البُعْد بين النقطة P ونقطة الأصل، حيث: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $r \neq 0$، فإنَّ الاقترانات المثلثية للزاوية θ تُعرَّف كما يأتي:



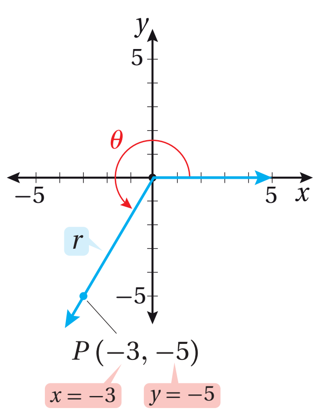
$\sin\theta = \dfrac{y}{r}$ $\qquad \cos\theta = \dfrac{x}{r}$ $\qquad \tan\theta = \dfrac{y}{x}, x \neq 0$

$\csc\theta = \dfrac{r}{y}, y \neq 0$ $\qquad \sec\theta = \dfrac{r}{x}, x \neq 0$ $\qquad \cot\theta = \dfrac{x}{y}, y \neq 0$

مثال 2

تقع النقطة $(-3, -5)$ على ضلع انتهاء الزاوية θ المرســومة في الوضع القياســي. أجد قِيَم الاقترانات المثلثية الستة للزاوية θ.

الخطوة 1: أرسم الزاوية، ثم أجد قيمة r.



$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$ نظرية فيثاغورس

$$= \sqrt{(-3)^2 + (-5)^2}$$ بتعويض $x = -3, y = -5$

$$= \sqrt{34}$$ بأخذ الجذر التربيعي الموجب

الخطوة 2: أستعمل القِيَم: $x = -3, y = -5, r = \sqrt{34}$ لكتابة الاقترانات المثلثية الستة.

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{-5}{\sqrt{34}} = -\frac{5}{\sqrt{34}} \qquad \csc\theta = \frac{r}{y} = \frac{\sqrt{34}}{-5} = -\frac{\sqrt{34}}{5}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{-3}{\sqrt{34}} = -\frac{3}{\sqrt{34}} \qquad \sec\theta = \frac{r}{x} = \frac{\sqrt{34}}{-3} = -\frac{\sqrt{34}}{3}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{-5}{-3} = \frac{5}{3} \qquad \cot\theta = \frac{x}{y} = \frac{-3}{-5} = \frac{3}{5}$$

أتحقَّق من فهمي

تقــع النقطــة $(1, -3)$ على ضلع انتهاء الزاوية θ المرســومة في الوضع القياســي. أجد قِيَم الاقترانات المثلثية الستة للزاوية θ.

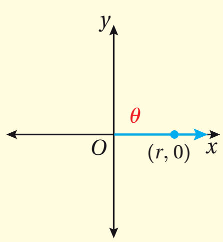
تعلَّمْتُ في الأمثلة الســابقة إيجــاد قِيَم الاقترانات المثلثية للزاوية θ من دون معرفة قياســها. وسأتعلَّم الآن طرائق إيجاد قِيَم هذه الاقترانات عندما يكون قياس الزاوية θ فقط معلومًا.

إيجاد قِيَم الاقترانات المثلثية للزوايا الربعية

إذا انطبق ضلع انتهاء الزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي على أحد المحورين الإحداثيين، فإنَّ هذه الزاوية تُسمّى **زاوية ربعية** (quadrantal angle).

مفهوم أساسي

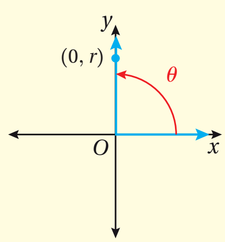
الزوايا الربعية



$\theta = 0^\circ$

أو

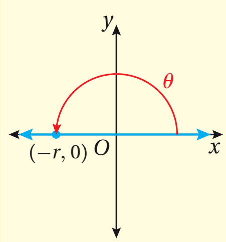
$\theta = 0\ rad$



$\theta = 90^\circ$

أو

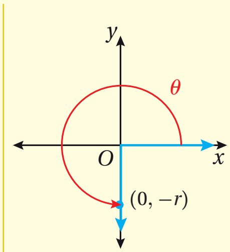
$\theta = \frac{\pi}{2}\ rad$



$\theta = 180^\circ$

أو

$\theta = \pi\ rad$



$\theta = 270^\circ$

أو

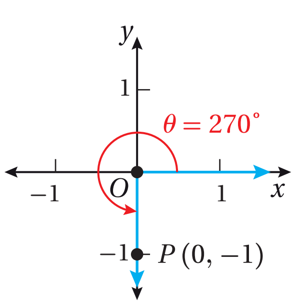
$\theta = \frac{3\pi}{2}\ rad$

يُمكِــن إيجاد قِيَم الاقترانات المثلثية للزوايا الربعية باختيار نقطة تقع على ضلع انتهاء الزاوية، ثم إيجاد الاقتران المثلثي عند تلك النقطة.

مثال 3

أجد قيمة كل اقتران مثلثي ممّا يأتي إذا كان مُعرَّفًا، وإلّا أكتب عبارة (غير مُعرَّف):

1 **cot 270°**



ينطبق ضلع انتهاء الزاوية 270° على المحور y السالب، فأختار النقطة $P(0, -1)$ على ضلع الانتهاء؛ لأنَّ $r = 1$:

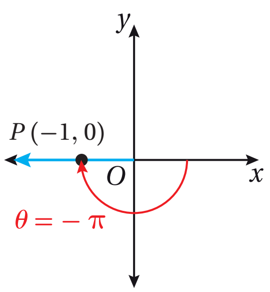
$\cot(270^\circ) = \frac{x}{y}$ اقتران ظل التمام

$= \frac{0}{-1} = 0$ بتعويض $x = 0, y = -1$

أتعلَّم

لتسهيل عملية الحساب، أختــار نقطة تكون قيمة r عندها 1

2 $\csc(-\pi)$



ينطبق ضلع انتهاء الزاوية $-\pi$ على المحور x السالب،

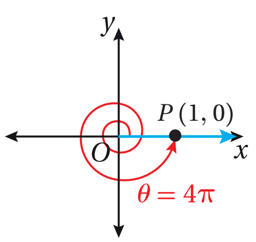
فأختار النقطة $P(-1, 0)$ على ضلع الانتهاء؛ لأنَّ $r = 1$:

$$\csc(-\pi) = \frac{r}{y}$$ اقتران قاطع التمام

$$= \frac{1}{0}$$ بتعويض $r = 1, y = 0$

غير مُعرَّف

3 $\cos 4\pi$



ينطبق ضلع انتهاء الزاوية 4π على المحور x الموجب،

فأختار النقطة $P(1, 0)$ على ضلع الانتهاء؛ لأنَّ $r = 1$:

$$\cos(4\pi) = \frac{x}{r}$$ اقتران جيب التمام

$$= \frac{1}{1} = 1$$ بتعويض $x = 1, r = 1$

أتعلّم

يوجد عدد لانهائي من الزوايا الربعية التي تشترك مع الزوايا الربعية في الدورة الكاملة، وتكون قياساتها مضاعفات $90°$ أو $\frac{\pi}{2}$

أتحقَّق من فهمي

أجد قيمة كل اقتران مثلثي ممّا يأتي إذا كان مُعرَّفًا، وإلّا أكتب عبارة (غير مُعرَّف):

a) $\sin 3\pi$

b) $\tan 90°$

c) $\sec\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$

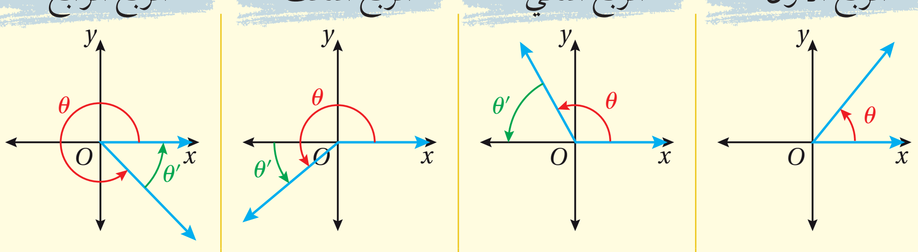
إيجاد قيَم الاقترانات المثلثية باستعمال الزوايا المرجعية

إذا كانت θ زاوية غير ربعية مرسومة في الوضع القياسي، فإنَّ **الزاوية المرجعية** (reference angle) للزاوية θ هي الزاوية الحادَّة θ' المحصورة بين ضلع انتهاء الزاوية θ والمحور x. ويُبيِّن الجدول الآتي العلاقة بين θ و θ' لأيِّ زاوية θ غير ربعية.

لغة الرياضيات

الرمز θ' يُقرَأ: ثيتا برايم.

مفهوم أساسي **الزوايا المرجعية**



الربع الأول	الربع الثاني	الربع الثالث	الربع الرابع
$\theta' = \theta$	$\theta' = 180° - \theta$	$\theta' = \theta - 180°$	$\theta' = 360° - \theta$
	$\theta' = \pi - \theta$	$\theta' = \theta - \pi$	$\theta' = 2\pi - \theta$

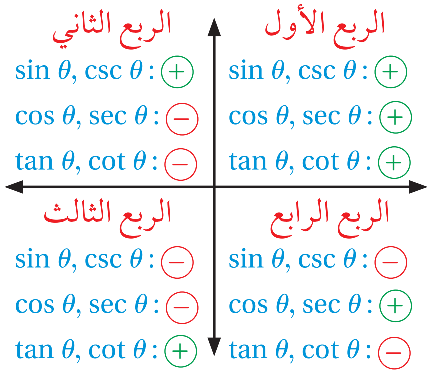
تُستعمَل الزوايا المرجعية لإيجاد قيمة الاقترانات المثلثية لأيِّ زاوية θ، وتعتمد إشارة قيمة الاقتران المثلثي على الربع الذي يقع فيه ضلع انتهاء الزاوية θ.

أَتَّبع الخطوات الآتية لإيجاد قيمة الاقترانات المثلثية لأيِّ زاوية θ:

الخطوة 1: أجد قياس الزاوية المرجعية θ'.

الخطوة 2: أجد قيمة الاقتران المثلثي للزاوية المرجعية θ'.

الخطوة 3: أستعمل الربع الذي يقع فيه ضلع انتهاء الزاوية θ، لتحديد إشارة قيمة الاقتران المثلثي للزاوية θ، مستعينًا بالمُخطَّط المجاور.



بما أنَّ القِيَم الدقيقة للاقترانات المثلثية للزوايا الخاصة: $30°, 45°, 60°$ معلومة، فإنَّه يُمكِن إيجاد قِيَم الاقترانات المثلثية لجميع الزوايا التي تُمثِّل الزوايا الخاصة مرجعًا لها. ويُبيِّن الجدول الآتي قِيَم بعض الاقترانات المثلثية للزوايا الخاصة.

θ	$30° = \frac{\pi}{6}$	$45° = \frac{\pi}{4}$	$60° = \frac{\pi}{3}$
$\sin\theta$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\theta$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$
$\tan\theta$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

مثال 4

أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:

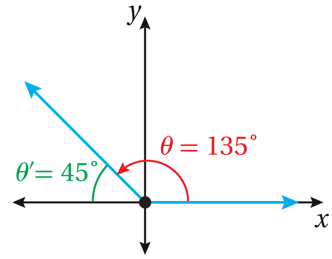
1 $\sin 135°$

يقع ضلع انتهاء الزاوية $135°$ في الربع الثاني؛ لذا أستعمل زاويتها المرجعية:

$\theta' = 180° - \theta$ بإيجاد قياس الزاوية المرجعية

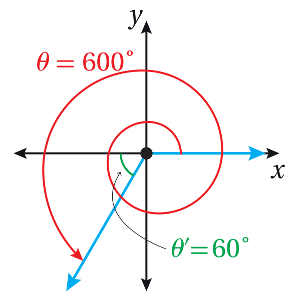
$= 180° - 135° = 45°$ $\theta = 135°$

$\sin 135° = \sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$ الجيب موجب في الربع الثاني



2 $\cos 600°$

بما أنَّ الزاوية °600 أكبر من الزاوية °360، فإنَّني أجد أولًا الزاوية المُشترِكة مع الزاوية °600، التي قياسها موجب، وأقل من °360:



بتعويض $n = -1$ لإيجاد زاوية مُشترَكة قياسها موجب

$$600° + 360°\,(-1) = 240°$$

يقع ضلع انتهاء الزاوية °240 في الربع الثالث؛ لذا أستعمل زاويتها المرجعية:

بإيجاد قياس الزاوية المرجعية

$$\theta' = \theta - 180°$$

$\theta = 240°$

$$= 240° - 180°$$

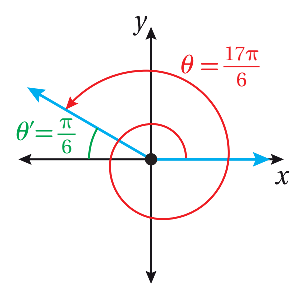
$$= 60°$$

جيب التمام سالب في الربع الثالث

$$\cos 600° = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$$

3 $\csc \frac{17\pi}{6}$

بما أنَّ الزاوية $\frac{17\pi}{6}$ أكبر من 2π، فإنَّني أجد أولًا الزاوية المُشترِكة مع الزاوية $\frac{17\pi}{6}$، التي قياسها موجب، وأقل من 2π:



بتعويض $n = -1$ لإيجاد زاوية مُشترَكة قياسها موجب

$$\frac{17\pi}{6} + 2\,(-1)\pi = \frac{5\pi}{6}$$

يقع ضلع انتهاء الزاوية $\frac{5\pi}{6}$ في الربع الثاني؛ لذا أستعمل زاويتها المرجعية:

بإيجاد قياس الزاوية المرجعية

$$\theta' = \pi - \theta$$

$\theta = \frac{5\pi}{6}$

$$= \pi - \frac{5\pi}{6}$$

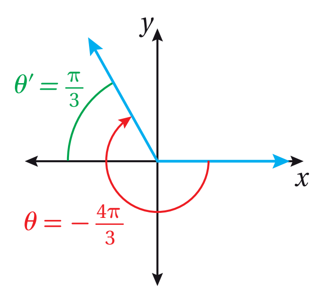
$$= \frac{\pi}{6}$$

قاطع التمام موجب في الربع الثاني

$$\csc \frac{17\pi}{6} = \csc \frac{\pi}{6} = 2$$

4 $\cot \left(-\frac{4\pi}{3}\right)$

بما أنَّ الزاوية $\left(-\frac{4\pi}{3}\right)$ سالبة، فإنَّني أجد أولًا الزاوية المُشترِكة مع الزاوية $\left(-\frac{4\pi}{3}\right)$، التي قياسها موجب، وأقل من 2π:



بتعويض $n = 1$ لإيجاد زاوية مُشترَكة قياسها موجب

$$-\frac{4\pi}{3} + 2\,(1)\pi = \frac{2\pi}{3}$$

يقع ضلع انتهاء الزاوية $\frac{2\pi}{3}$ في الربع الثاني؛ لذا أستعمل زاويتها المرجعية:

بإيجاد قياس الزاوية المرجعية $\theta' = \pi - \theta$

$\theta = \frac{2\pi}{3}$ $= \pi - \frac{2\pi}{3}$

$= \frac{\pi}{3}$

ظل التمام سالب في الربع الثاني $\cot\left(-\frac{4\pi}{3}\right) = -\cot\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

أتحقَّق من فهمي

أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:

a) $\sin 210°$

b) $\cos 510°$

c) $\sec 5\pi$

d) $\tan\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$

تعلَّمْتُ في الأمثلة السابقة إيجاد قِيَم الاقترانات المثلثية إذا عُلِمت نقطة تقع على ضلع الزاوية θ، أو إذا عُلِم قياسها. وكذلك إيجاد قِيَم الاقترانات المثلثية إذا عُلِمت قيمة اقتران مثلثي أو أكثر للزاوية θ، والربع الذي يقع فيه ضلع انتهائها.

أتعلم

يمكنني اختيار أي قيمة لـ x و y بحيث يكون حاصل القسمة مساويًا لـ -4

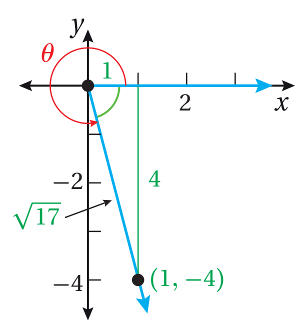
مثال 5

إذا كان $\tan\theta = -4$، حيث $\sin\theta < 0$، فأجد قيمة كلٍّ من الاقترانات المثلثية الخمسة المتبقية للزاوية θ.

أجد القِيَم الدقيقة للاقترانات الأُخرى بإيجاد إحداثيي نقطة تقع على ضلع انتهاء الزاوية θ.

بما أنَّ $\tan\theta$ سالب و $\sin\theta$ سالب، فإنَّ الزاوية θ تقع في الربع الرابع، وهذا يعني أنَّ إشارة x موجبة وإشارة y سالبة.

وبما أنَّ $\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{-4}{1}$، فأستعمل النقطة $(1, -4)$ لإيجاد قيمة r:



نظرية فيثاغورس $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

بتعويض $x = 1, y = -4$ $= \sqrt{(1)^2 + (-4)^2}$

بأخذ الجذر التربيعي الموجب $= \sqrt{17}$

أستعمل $x = 1, y = -4, r = \sqrt{17}$ لإيجاد قِيَم الاقترانات المثلثية الأُخرى:

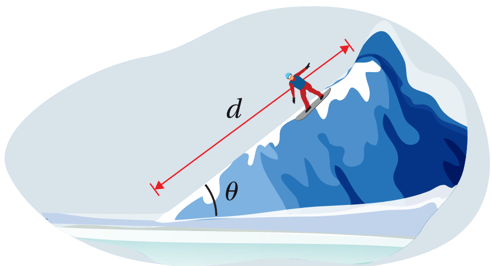
$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{-4}{\sqrt{17}} = -\frac{4}{\sqrt{17}} \qquad \csc\theta = \frac{r}{y} = \frac{\sqrt{17}}{-4} = -\frac{\sqrt{17}}{4}$$

$$\cot\theta = \frac{x}{y} = \frac{1}{-4} = -\frac{1}{4} \qquad \cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{17}} \qquad \sec\theta = \frac{r}{x} = \frac{\sqrt{17}}{1} = \sqrt{17}$$

أتحقَّق من فهمي

إذا كان $\sec\theta = 2$، حيث $\sin\theta < 0$، فأجد قيمة كلٍّ من الاقترانات المثلثية الخمسة المتبقية للزاوية θ.

مثال 6 : من الحياة



تزلُّج: يُمكِن حساب الزمن بالثواني لمزلجة تنزلق على منحدر تَلٍّ يميل عن الأفق بزاوية قياسها θ باستعمال العلاقة: $t = \frac{\sqrt{d\csc\theta}}{4}$، حيث d طول المنحدر بالأقدام. أجد الزمن الذي تستغرقه عملية الانزلاق على منحدر طوله 2000 ft، وزاوية ميله $\frac{\pi}{6}$.

يُمكِن إيجاد الزمن اللازم لعملية الانزلاق على المنحدر بتعويض $d = 2000$، و $\theta = \frac{\pi}{6}$:

$$t = \frac{\sqrt{d\csc\theta}}{4} \quad \text{العلاقة الأصلية}$$

$$= \frac{\sqrt{2000\csc\frac{\pi}{6}}}{4} \quad \text{بتعويض } d = 2000, \theta = \frac{\pi}{6}$$

$$= \frac{\sqrt{2000\times 2}}{4} \quad \csc\frac{\pi}{6} = 2$$

$$= \frac{\sqrt{4000}}{4} \quad \text{بالتبسيط}$$

$$= \frac{20\sqrt{10}}{4} \quad \text{بتبسيط الجذر التربيعي}$$

$$= 5\sqrt{10} \quad \text{بالتبسيط}$$

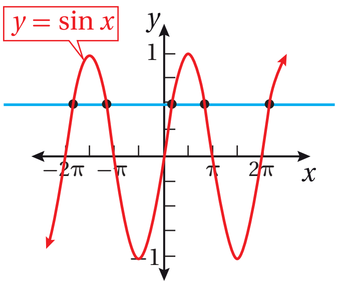
إذن، الزمن الذي تستغرقه عملية الانزلاق على المنحدر هو $5\sqrt{10}$ ثانية.

أتحقَّق من فهمي

أجد الزمن الذي تستغرقه عملية الانزلاق على منحدر طوله 3000 ft، وزاوية ميله $\frac{\pi}{4}$، مُستعمِلًا العلاقة الواردة في المثال 6.

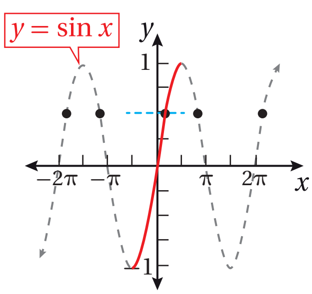
معكوس اقتران الجيب، وجيب التمام، والظل

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّه يُمكِن إيجاد الاقتران العكسي لاقترانٍ إذا وفقط إذا كان الاقتران واحدًا لواحد، وهذا يعني أنَّ كل عنصر في مداه يرتبط بعنصر واحد فقط في مجاله، ويُمكِن التحقُّق من ذلك باستعمال اختبار الخط الأفقي.

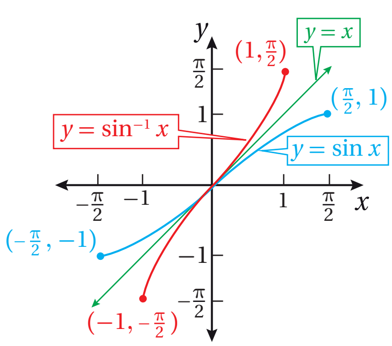


أُلاحِظ من الشكل المجاور أنَّ اقتران الجيب $y = \sin x$ فشل في اختبار الخط الأفقي؛ ما يعني أنَّه ليس اقتران واحد لواحد؛ لذا لا يُمكِن إيجاد اقتران عكسي له.

ولكنْ، لو اقتصر مجال اقتران الجيب على الفترة $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ كما في الشكل الآتي، فإنَّه يصبح اقتران واحد لواحد لجميع قِيَم المدى $[-1, 1]$، عندئذٍ يُمكِن إيجاد اقتران عكسي لاقتران الجيب في المجال المُحدَّد، ويُسمّى معكوس اقتران الجيب $y = \sin^{-1} x$.



أمّا التمثيل البياني للاقتران $y = \sin^{-1} x$ فيُمكِن إيجاده بعكس منحنى اقتران الجيب في المجال المُحدَّد حول المحور $y = x$ كما في الشكل الآتي.



نتيجةً لما سبق؛ يُمكِن إيجاد معكوس اقتران الجيب، وجيب التمام، والظل ضمن مجال مُحدَّد باستعمال تعريف الاقتران العكسي.

مفهوم أساسي

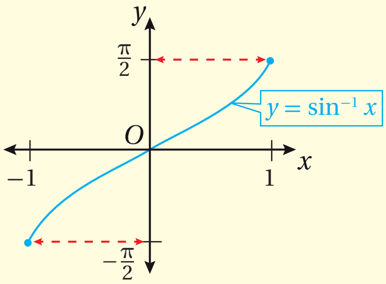
معكوس اقتران الجيب، وجيب التمام، والظل

معكوس اقتران الجيب

$y = \sin^{-1} x$ إذا وفقط إذا $\sin y = x$، حيث: $-1 \leq x \leq 1$، و $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$

المجال: $[-1, 1]$.

المدى: $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

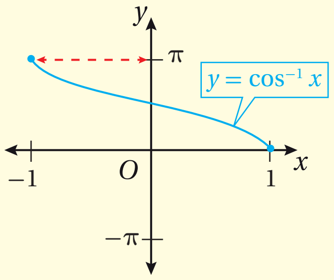


معكوس اقتران جيب التمام

$y = \cos^{-1} x$ إذا وفقط إذا $\cos y = x$، حيث: $-1 \leq x \leq 1$، و $0 \leq y \leq \pi$

المجال: $[-1, 1]$.

المدى: $[0, \pi]$.

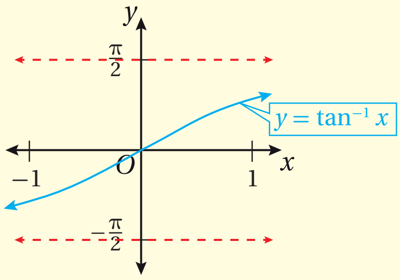


معكوس اقتران الظل

$y = \tan^{-1} x$ إذا وفقط إذا $\tan y = x$، حيث: $-\infty < x < \infty$، و $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$

المجال: $(-\infty, \infty)$.

المدى: $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.



لإيجاد قيمة اقتران عكسي عند نقطة ما، تُعكَس قاعدة الاقتران الأصلي. فمثلًا، بما أنَّ $\sin \frac{\pi}{2} = 1$، فإنَّ $\sin^{-1} 1 = \frac{\pi}{2}$.

مثال 7

أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي (إنْ وُجِدت):

1 $\sin^{-1} \frac{1}{2}$

الزاوية التي قيمة الجيب لها $\frac{1}{2}$ في الفترة $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ هي $\frac{\pi}{6}$؛ لذا، فإنَّ:

$$\sin^{-1} \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$$

2 $\cos^{-1} \frac{\sqrt{3}}{2}$

الزاوية التي قيمة جيب التمام لها $\frac{\sqrt{3}}{2}$ في الفترة $[0, \pi]$ هي $\frac{\pi}{6}$؛ لذا، فإنَّ:

$$\cos^{-1} \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$$

3 $\tan^{-1} 1$

الزاوية التي قيمة الظل لها 1 في الفترة $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ هي $\frac{\pi}{4}$؛ لذا، فإنَّ:

$$\tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{4}$$

أتحقَّق من فهمي

أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي (إنْ وُجِدت):

a) $\sin^{-1} \frac{1}{\sqrt{2}}$ b) $\cos^{-1} 0$ c) $\tan^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

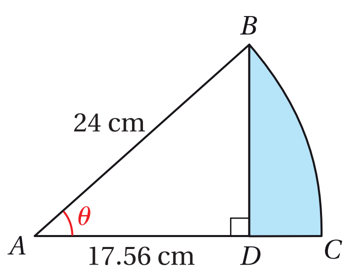
أتعلَّم

يُمكِن استعمال الآلة الحاسبة لإيجاد النسب المثلثية للزوايا بالراديان والدرجات؛ شرط ضبطها وَفق النظام المطلوب قبل البدء بعملية الحساب.

تعلَّمْتُ في الأمثلة السابقة إيجاد قِيَم الاقترانات المثلثية للزوايا الخاصة، وإيجاد الاقتران العكسي لقِيَمها. ولكنْ، إذا أردْتُ إيجاد قِيَم الاقترانات المثلثية لغير هذه الزوايا، فإنّني أستعمل الآلة الحاسبة، وكذلك الحال إذا أردْتُ إيجاد الاقتران العكسي لقِيَم غير معروفة.

مثال 8

يُمثِّل الشكل المجاور قطاعًا دائريًّا مركزه A، وقياس زاويته θ، وطول نصف قُطْره 24 cm. إذا كانت الزاوية ADB قائمة، وطول $\overline{AD}$ هو 17.56 cm، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:



1 قياس زاوية القطاع θ بالراديان.

يُمكِن إيجاد قياس الزاوية θ عن طريق إيجاد قيمة معكوس اقتران جيب التمام باستعمال الآلة الحاسبة:

$$\cos\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$$ اقتران جيب التمام

$$\cos\theta = \frac{17.56}{24}$$ بالتعويض

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{17.56}{24}\right)$$ θ هي الزاوية التي نسبة جيب التمام لها $\frac{17.56}{24}$

أضبط أولًا الآلة الحاسبة وَفق نظام راديان، ثم أجد $\cos^{-1}\left(\frac{17.56}{24}\right)$ كما يأتي:

SHIFT COS (17.56 ÷ 24) = 0.7500325712

إذن، قياس زاوية القطاع هو 0.75 تقريبًا.

أتذكَّر

عند كتابة قياس الزاوية من دون وحدة، فهذا يعني أنَّ القياس هو بوحدة راديان.

2 **مساحة القطاع.**

$A = \frac{1}{2} r^2 \theta$ قانون مساحة القطاع

$\approx \frac{1}{2}(24)^2(0.75)$ بتعويض $r = 24, \theta = 0.75$

≈ 216 بالتبسيط

إذن، مساحة القطاع هي 216 cm^2 تقريبًا.

3 **مساحة الجزء المُظلَّل.**

يُمكِن إيجاد مساحة الجزء المُظلَّل بطرح مساحة ΔABD من مساحة القطاع.

الخطوة 1: أجد مساحة ΔABD.

$A = \frac{1}{2} bc \sin\theta$ مساحة المثلث

$= \frac{1}{2}(17.56)(24) \sin 0.75$ بتعويض $c = 24, b = 17.56, \theta = 0.75$

≈ 144 باستعمال الآلة الحاسبة

إذن، مساحة ΔABD هي 144 cm^2 تقريبًا.

أتذكَّر

مساحة المثلث تساوي نصف ناتج ضرب طولي ضلعين فيه مضروبًا في جيب الزاوية المحصورة بينهما.

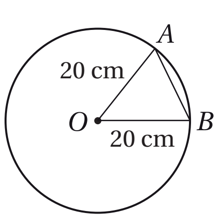
الخطوة 2: أطرح مساحة ΔABD من مساحة القطاع.

$216 - 144 = 72$

إذن، مساحة الجزء المُظلَّل هي 72 cm^2 تقريبًا.

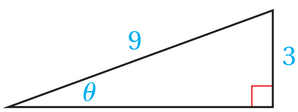
أتحقَّق من فهمي

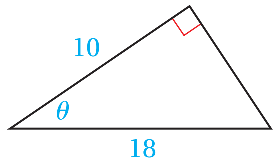
إذا كانت مساحة القطاع الدائري OAB هي 164 cm^2 في الشكل المجاور، فأجد مساحة ΔOAB.

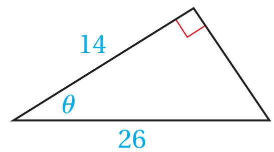


أتدرّب وأحُلُّ المسائل

أجد قِيَم الاقترانات المثلثية الستة للزاوية θ في كلٍّ ممّا يأتي:

1. 

2. 

3. 

تقع النقطة المعطاة في كلٍّ ممّا يأتي على ضلع انتهاء الزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي. أجد قِيَم الاقترانات المثلثية الستة للزاوية θ:

4. $(-12, 5)$
5. $(3, -3)$
6. $(-2, -5)$
7. $(3, 7)$

أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:

8. $\sec 135°$
9. $\tan\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$
10. $\cot\left(\frac{8\pi}{3}\right)$
11. $\cos\frac{7\pi}{4}$
12. $\sec\frac{15\pi}{4}$
13. $\csc(-630°)$
14. $\tan 7\pi$
15. $\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$

أجد قيمة كلٍّ من الاقترانات المثلثية الخمسة المتبقية للزاوية θ في كلٍّ ممّا يأتي:

16. $\cos\theta = -\frac{7}{12}, \tan\theta > 0$
17. $\sec\theta = 5, \sin\theta < 0$
18. $\cot\theta = \frac{1}{4}, \sin\theta < 0$
19. $\csc\theta = 2, \cos\theta > 0$

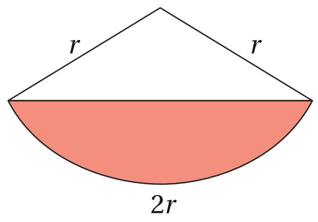
20. **بكرة:** يُمثِّل الاقتران: $y = 20 + \sin(10t)$ الارتفاع الرأسي بالسنتيمترات لسِنِّ بكرة درّاجة هوائية بعد t ثانية من بدء حركة الدرّاجة. أجد الارتفاع الرأسي لسِنِّ البكرة بعد 2.5 ثانية من بدء حركة الدرّاجة.

إذا كان $\cos\frac{\pi}{12} = 0.966$ لأقرب ثلاث منازل عشرية، فأستعمل هذه الحقيقة لإيجاد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:

21. $\cos\frac{13\pi}{12}$
22. $\cos\frac{11\pi}{12}$
23. $\cos\frac{-\pi}{12}$
24. $\cos\frac{23\pi}{12}$

أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:

25. $\left(\cos\frac{3\pi}{4}\right)^2 + \left(\sin\frac{4\pi}{3}\right)^2 + \left(\cos\frac{5\pi}{4}\right)^2$
26. $\sin\frac{\pi}{3} - \sin\frac{2\pi}{3} + \sin\pi - \sin\frac{4\pi}{3} + \sin\frac{5\pi}{3} - \sin 2\pi$



يُبيِّن الشــكل المجاور قطاعًا دائريًّا، طول نصف قُطْره r، وطول قوسه $2r$. إذا كانت مساحة الجزء المُظلَّل من القطاع $24\ cm^2$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

27 طول نصف قُطْر القطاع.

28 محيط الجزء المُظلَّل.

أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:

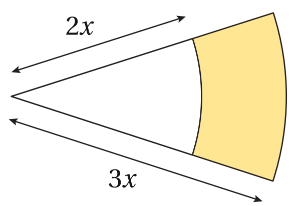
32 $\cos^{-1}(2)$

31 $\tan^{-1}(\sqrt{3})$

30 $\tan^{-1}(-1)$

29 $\sin^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

مهارات التفكير العليا

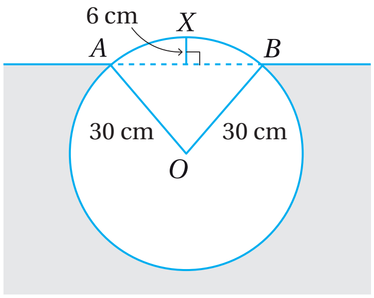


33 **تحدٍّ:** يُبيِّن الشكل المجاور قطاعين دائريين ناتجين من دائرتين متحدتين في المركز. إذا كان قياس زاوية القطاعين 0.75، ومساحة الجزء المُظلَّل $30\ cm^2$، فأجد قيمة x.

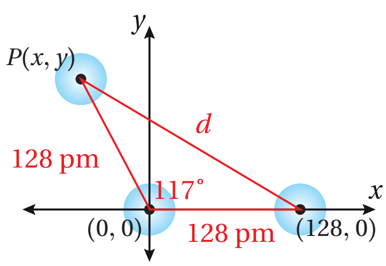
تبرير: أُثبِت كُلًّا ممّا يأتي، مُبرِّرًا إجابتي:

35 $\frac{\sin 30° + \sin 60°}{\sin 45°} = \frac{1}{2}(\sqrt{2}+\sqrt{6})$

34 $\tan 210° + \tan 240° = \frac{4\sqrt{3}}{3}$



36 **تحدٍّ:** يُبيِّن الشــكل المجاور المقطع العرضي لقطعة خشــب أسطوانية الشــكل عائمة على الماء. إذا كان نصف قُطْــر المقطع العرضي لقطعة الخشــب 30 cm، وكانت النقطتان A وB على سطح الماء، وكان ارتفاع أعلى نقطة من هذه القطعة 6 cm فوق ســطح الماء؛ فأجد النسبة المئوية للجزء من هذه القطعة الواقع تحت سطح الماء.



تبرير: يتكوَّن جزيء الأوزون من ثلاث ذرّات أكســجين مُرتبِطة كما في الشكل المجاور:

37 أجد إحداثيي مركــز ذرَّة الأكســجين $P(x, y)$ الواقع في الربع الثانــي، علمًا بــأنَّ الأبعاد على الشــكل هي بوحــدة البكتومتر $(1\ pm = 10^{-12}\ m)$، ثم أُبرِّر إجابتي.

38 أجد المسافة d بالبكتومتر بين ذرَّتي الأكسجين غير المُرتبِطتين.

الدرس 3

تمثيل الاقترانات المثلثية بيانيًّا

Graphing Trigonometric Functions

فكرة الدرس تمثيل اقتران الجيب، وجيب التمام، والظل بيانيًّا في المستوى الإحداثي.

المصطلحات السعة، الاقتران الدوري، الدورة، طول الدورة، الاقترانات الجيبية، خط الوسط، الحركة التوافقية البسيطة، التردُّد.

مسألة اليوم النجوم المُتغيِّرة هي نجوم يختلف سطوعها بشكل دوري، وأحد أكثرها شهرة هو آرلينوس، الذي يُمكِن حساب قيمة سطوعه بالاقتران: $b(t) = 7.9 - 2.1\cos(\frac{\pi}{156}t)$، حيث t الزمن بالأيام. أجد السطوع الأقصى والسطوع الأدنى لهذا النجم.

تمثيل الاقتران: $y = \sin x$، والاقتران: $y = \cos x$ بيانيًّا

تعلَّمْتُ سابقًا تمثيل الاقترانين المثلثيين: $y = \sin x$، و $y = \cos x$ عندما تكون الزوايا بالدرجات في الفترة $[0°, 360°]$، وذلك بإنشاء جدول قِيَم للمُتغيِّرين x وy، وتمثيل كل زوج بنقطة في المستوى. ويُمكِن استعمال هذه الطريقة لتمثيل الاقترانين نفسيهما عند قياس الزوايا بالراديان في الفترة $[0, 2\pi]$.

مثال 1

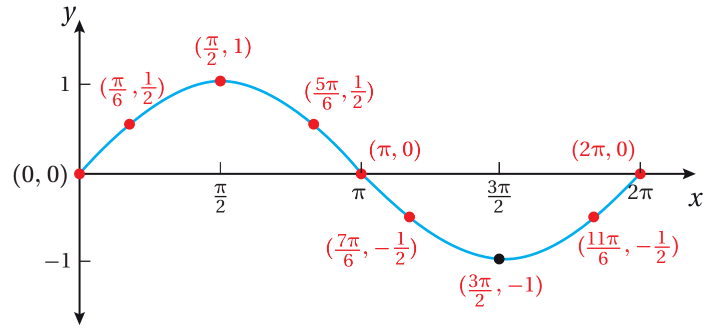
1 أُمثِّل الاقتران: $y = \sin x$ بيانيًّا في الفترة $[0, 2\pi]$.

الخطوة 1: أُنشِئ جدولًا أكتب فيه زوايا شائعة، نسبها المثلثية معروفة، مثل: الزوايا الربعية، والزوايا الخاصة.

الخطوة 2: أجد قيمة $\sin x$ لكل زاوية x، ثم أكتبها في الجدول الآتي.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$y = \sin x$	0	0.5	1	0.5	0	-0.5	-1	-0.5	0
(x, y)	$(0, 0)$	$(\frac{\pi}{6}, 0.5)$	$(\frac{\pi}{2}, 1)$	$(\frac{5\pi}{6}, 0.5)$	$(\pi, 0)$	$(\frac{7\pi}{6}, -0.5)$	$(\frac{3\pi}{2}, -1)$	$(\frac{11\pi}{6}, -0.5)$	$(2\pi, 0)$

الخطوة 3: أُعيِّن الأزواج المُرتَّبة في المستوى الإحداثي، ثم أصل بينها بمنحنى، فينتج التمثيل البياني الآتي.



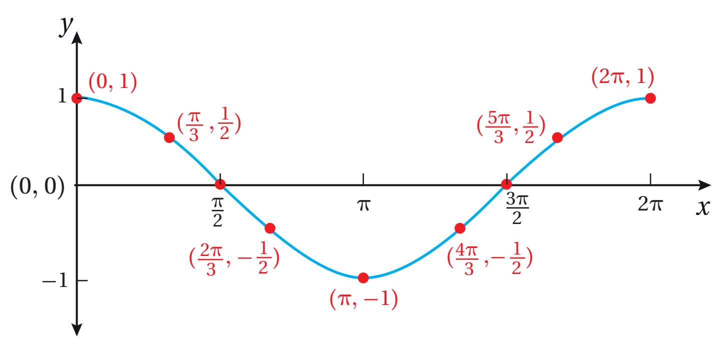
2 أُمثِّل الاقتران: $y = \cos x$ بيانيًّا في الفترة $[0, 2\pi]$.

الخطوة 1: أُنشِئ جدولًا أكتب فيه زوايا شائعة، نسبها المثلثية معروفة، مثل: الزوايا الربعية، والزوايا الخاصة.

الخطوة 2: أجد قيمة $\cos x$ لكل زاوية x، ثم أكتبها في الجدول الآتي.

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
$y = \cos x$	0	0.5	0	−0.5	−1	−0.5	0	0.5	1
(x, y)	$(0, 0)$	$(\frac{\pi}{3}, 0.5)$	$(\frac{\pi}{2}, 0)$	$(\frac{2\pi}{3}, -0.5)$	$(\pi, -1)$	$(\frac{4\pi}{3}, -0.5)$	$(\frac{3\pi}{2}, 0)$	$(\frac{5\pi}{3}, 0.5)$	$(2\pi, 1)$

الخطوة 3: أُعيِّن الأزواج المُرتَّبة في المستوى الإحداثي، ثم أصل بينها بمنحنى، فينتج التمثيل البياني الآتي.



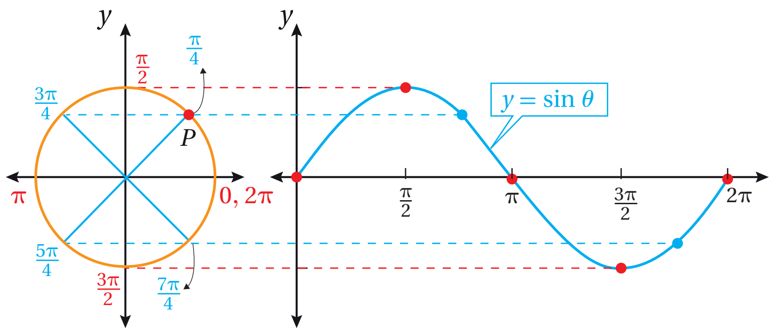
أتعلَّم
أُلاحِظ أنَّ منحنى اقتران جيب التمام هو انسحاب إلى اليسار لمنحنى اقتران الجيب بمقدار $\frac{\pi}{2}$.

أتحقَّق من فهمي

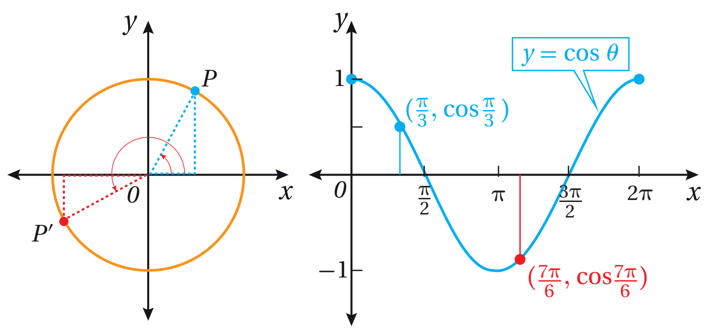
1 أُمثِّل الاقتران: $y = \sin x$ بيانيًّا في الفترة $[-2\pi, 2\pi]$.

2 أُمثِّل الاقتران: $y = \cos x$ بيانيًّا في الفترة $[-2\pi, 2\pi]$.

أُلاحِظ من المثال الســابق أنَّ التمثيل البياني لمنحنى الاقتــران: $y = \sin\theta$ يربط بين قياس الزاوية θ المرســومة في الوضع القياسي والإحداثي y للنقطة P التي يقطع عندها ضلع انتهاء الزاوية دائرة الوحدة كما في الشكل الآتي.



أمّــا التمثيل البياني للاقتــران: $y = \cos\theta$ فيربط بين قياس الزاوية θ المرســومة في الوضع القياســي والإحداثي x للنقطة P التي يقطع عندها ضلع انتهاء الزاويــة دائرة الوحدة كما في الشكل الآتي.



في ما يأتي خصائص التمثيل البياني للاقترانين: $y = \sin x$، و $y = \cos x$:

- مجال كلٍّ من الاقترانين هو مجموعة الأعداد الحقيقية.
- مــدى كلٍّ من الاقترانين هــو الفترة $[-1, 1]$؛ لذا، فإنَّ القيمــة الصغرى لكلٍّ منهما -1، والقيمة العظمى لكلٍّ منهما 1
- **ســعة** (amplitude) منحنــى الاقتران هي نصــف الفرق بين القيمــة العظمى والقيمة الصغرى، وتساوي 1 لكلٍّ من الاقترانين؛ لأنَّ:

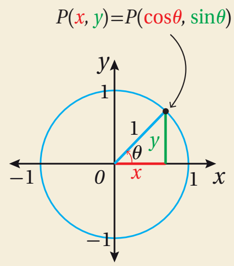
$$\frac{1}{2}(1-(-1)) = 1$$

- كلٌّ مــن الاقترانين هو **اقتــران دوري** (periodic function)، وهــذا يعني أنَّ التمثيل البياني لمنحنى كلٍّ منهما له نمط مُتكرِّر، وأنَّ أقصر جزء مُتكرِّر من التمثيل يُسمّى **الدورة** (cycle).

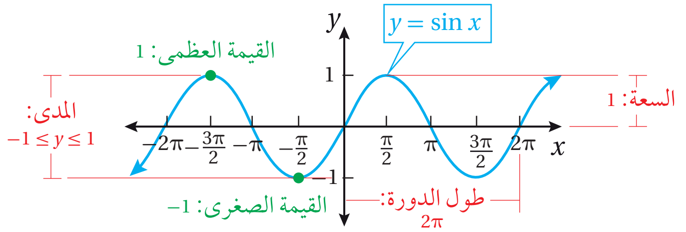
أتذكَّر

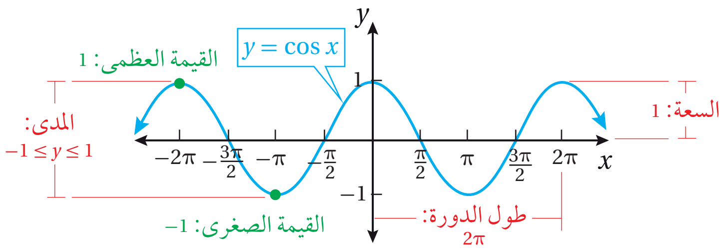
دائرة الوحــدة هي دائرة مركزهــا نقطــة الأصل، وطــول نصــف قُطْرها وحدة واحدة.

إذا رُســمت الزاوية θ في الوضــع القياســي، فــإنَّ ضلع انتهائهــا يقطع دائرة الوحدة في نقطــة وحيدة هي $P(x, y)$.



- الطول الأفقي لكل دورة يُسمّى **طول الدورة** (period)، والتمثيل البياني للاقترانين يُظهِر أنَّ طول الدورة هو 2π.





الاقترانات الجيبية

الاقترانات الجيبية (sinusoidal functions) هي اقترانات الجيب وجيب التمام الناتجة من تحويل هندسي أو أكثر لمنحنى الاقترانين الرئيسين: $y = \sin x$، و $y = \cos x$.

بوجه عام، فإنَّ الصورة العامة للاقترانات الجيبية هي:

$$y = a \sin (bx - c) + d \qquad\qquad y = a \cos (bx - c) + d$$

حيث: a, b, c, d أعداد حقيقية، و a و b لا يساويان صفرًا.

التمدُّد الرأسي للاقترانات الجيبية

إذا كان $|a| > 1$، فإنَّ المعامل a في الاقترانين: $y = a \sin x$، و $y = a \cos x$ يؤدي إلى توسيع رأسي لمنحنى الاقتران $y = \sin x$، ومنحنى الاقتران $y = \cos x$، وإذا كان $|a| < 1$، فإنَّ المعامل a يؤدي إلى تضييق رأسي للمنحنيين؛ ما يعني أنَّ قيمة a تُؤثِّر في سعة الاقترانات الجيبية.

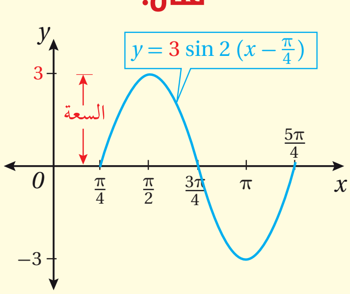
مفهوم أساسي

سعة الاقترانات الجيبية

بالكلمات: سعة منحنى الاقتران الجيبي هي نصف المسافة بين قيمتيه العظمى والصغرى، أو نصف ارتفاع الموجة.

بالرموز: سعة كلٍّ من: $y = a \sin (bx - c) + d$، و $y = a \cos (bx - c) + d$، هي $|a|$.

مثال:



لتمثيل منحنى الاقتران الجيبي $y = a \sin x$، أو الاقتران الجيبي $y = a \cos x$ بيانيًّا، أرسم نقاط تقاطع اقتران الجيب الرئيس، أو جيب التمام الرئيس مع المحور x، ثم أستعمل قيمة السعة $|a|$ لتحديد نقاط عظمى وصغرى للاقتران الجيبي، ثم أرسم الموجة التي تمرُّ بهذه النقاط.

أتعلَّم

يُطلَق علــى كلٍّ من نقاط تقاطع الاقتــران الجيبي مع المحــور x، والنقاط العظمى والصغرى، اسم النقاط المفتاحية.

مثال 2

أُمثِّل منحنى كل اقتران ممّا يأتي بيانيًّا:

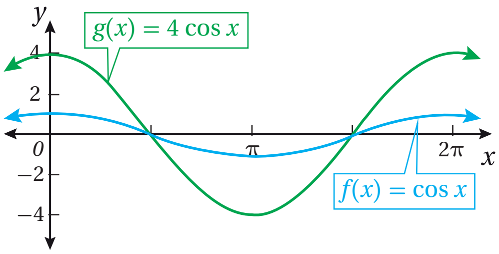
1 $g(x) = 4 \cos x$

منحنى الاقتران $g(x) = 4 \cos x$ هو توســيع رأســي لمنحنى الاقتران $f(x) = \cos x$، بمعامل مقداره 4، ولتمثيل منحنى الاقتران $g(x)$، أَتَّبع الخطوات الآتية:

الخطوة 1: أُحدِّد سعة الاقتران $g(x)$، وهي: $|4|$ ، أو 4

الخطـوة 2: أُحدِّد إحداثيات نقــاط تقاطع منحنى الاقتــران $f(x) = \cos x$ مع المحور x، والنقاط العظمى والصغرى له في الفترة $[0, 2\pi]$.

الخطـوة 3: أضرب الإحداثي y لكل نقطة عظمى أو صغرى على منحنى الاقتران $f(x)$ في ســعة الاقتران $g(x)$؛ لإيجــاد النقاط المقابلة لها على منحنى الاقتران g.



الخطوة 4: أُمثِّل منحنى الاقتران $g(x)$ اعتمادًا على النقاط الجديدة.

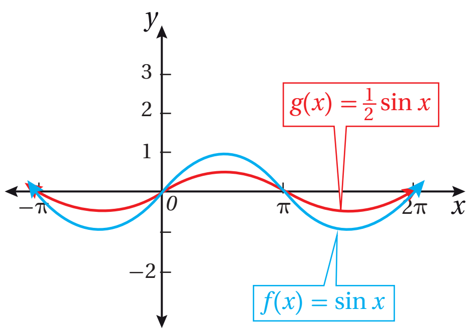
2 $g(x) = \frac{1}{2} \sin x$

منحنى الاقتران: $g(x) = \frac{1}{2} \sin x$ هو تضييق رأســي لمنحنى الاقتران: $f(x) = \sin x$، بمعامل مقداره $\frac{1}{2}$، ولتمثيل منحنى الاقتران $g(x)$، أَتَّبع الخطوات الآتية:

الخطوة 1: أُحدِّد سعة الاقتران $g(x)$، وهي: $\left|\frac{1}{2}\right|$ ، أو $\frac{1}{2}$.

الخطـوة 2: أُحدِّد إحداثيات نقاط تقاطـع الاقتران $f(x) = \sin x$ مـع المحور x، والنقاط العظمى والصغرى له في الفترة $[0, 2\pi]$.

الخطوة 3: أضرب الإحداثي y لكل نقطة عظمى أو صغرى على منحنى الاقتران $f(x)$ في سعة الاقتران $g(x)$؛ لإيجاد النقاط المقابلة لها على منحنى الاقتران $g(x)$.



الخطوة 4: أُمثِّل منحنى الاقتران $g(x)$ اعتمادًا على النقاط الجديدة.

أتحقَّق من فهمي

أُمثِّل منحنى كل اقتران ممّا يأتي بيانيًّا:

a) $g(x) = 2\sin x$

b) $g(x) = \frac{1}{4}\cos x$

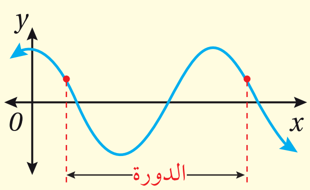
التمدُّد الأفقي للاقترانات الجيبية

إذا كان $|b| < 1$، فإنَّ المعامل b في الاقترانين: $y = \sin bx$، و $y = \cos bx$ يؤدي إلى توسيع أفقي لمنحنى كلٍّ من الاقترانين: $y = \sin x$، و $y = \cos x$، وإذا كان $|b| > 1$، فإنَّ المعامل b يؤدي إلى تضييق أفقي للمنحنيين؛ ما يعني أنَّ قيمة b تُؤثِّر في طول دورة الاقترانات الجيبية.

مفهوم أساسي

طول دورة الاقترانات الجيبية

بالكلمات: طول دورة الاقتران الجيبي هو المسافة بين مجموعتين مُتكرِّرتين من النقاط على منحنى الاقتران.



بالرموز: دورة كلٍّ من: $y = a\sin(bx - c) + d$، و $y = a\cos(bx - c) + d$، هي $\frac{2\pi}{|b|}$، حيث: $b \neq 0$.

لتمثيل منحنى الاقتران الجيبي $y = \sin bx$، أو الاقتران الجيبي $y = \cos bx$، أُحدِّد طول دورة الاقتران، ثم أجد النقاط المفتاحية لاقتران الجيب الرئيس أو اقتران جيب التمام، ثم أضرب الإحداثي x لكل نقطة مفتاحية في $\frac{1}{b}$.

أتعلَّم

عند تحديد طول دورة الاقتران الجيبي من تمثيله البياني، فإنَّها تكون أقصر مسافة تحوي قِيَم الاقتران المختلفة جميعها.

أتذكَّر

يُطلَق على كلٍّ من نقاط تقاطع الاقتران الجيبي مع المحور x، والنقاط العظمى والصغرى، اسم النقاط المفتاحية.

مثال 3

أُمثِّل منحنى كل اقتران ممّا يأتي بيانيًّا:

1 $g(x) = \sin \frac{x}{2}$

منحنى الاقتران $g(x) = \sin \frac{x}{2}$ هو توسيع أفقي لمنحنى الاقتران $f(x) = \sin x$، بمعامل مقداره 2، ولتمثيل منحنى الاقتران $g(x)$، أَتَّبع الخطوات الآتية:

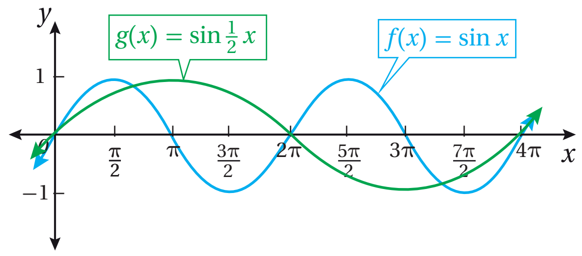
الخطوة 1: أُحدِّد طول دورة الاقتران $g(x)$، وهي:

$$\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{\left|\frac{1}{2}\right|} = 4\pi$$

الخطوة 2: أُحدِّد إحداثيات نقاط تقاطع الاقتران $f(x) = \sin x$ مع المحور x، والنقاط العظمى والصغرى له في الفترة $[0, 4\pi]$.

الخطوة 3: أضرب الإحداثي x لكل نقطة مفتاحية على منحنى الاقتران $f(x)$ في 2؛ لإيجاد النقاط المقابلة لها على منحنى الاقتران g.

الخطوة 4: أُمثِّل منحنى الاقتران $g(x)$ اعتمادًا على النقاط الجديدة.



2 $g(x) = \cos 2x$

منحنى الاقتران $g(x) = \cos 2x$ هو تضييق أفقي لمنحنى الاقتران $f(x) = \cos x$، بمعامل مقداره $\frac{1}{2}$، ولتمثيل منحنى الاقتران $g(x)$، أَتَّبع الخطوات الآتية:

الخطوة 1: أُحدِّد طول دورة الاقتران $g(x)$، وهي:

$$\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|2|} = \pi$$

أتذكَّر

الإحداثي x لكل نقطة على منحنى الاقتران $g(x) = f(bx)$ ناتج من ضرب الإحداثي x للنقطة المقابلة لها على منحنى الاقتران $f(x)$ في $\frac{1}{b}$.

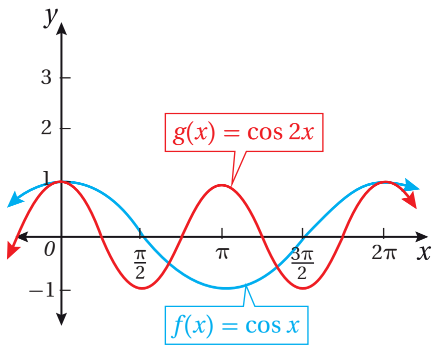
إرشاد

يُمكِن التحقُّق من التمثيل البياني للاقتران $g(x) = \sin \frac{x}{2}$ بالتحقُّق من أنَّ طول دورته 4π

الخطوة 2: أُحدِّد إحداثيات نقاط تقاطع الاقتران $f(x) = \cos x$ مع المحور x، والنقاط العظمى والصغرى له في الفترة $[0, 2\pi]$.

الخطوة 3: أضرب الإحداثي x لكل نقطة مفتاحية على منحنى الاقتران $f(x)$ في $\frac{1}{2}$ ؛ لإيجاد النقاط المقابلة لها على منحنى الاقتران g.

الخطوة 4: أُمثِّل منحنى الاقتران $g(x)$ اعتمادًا على النقاط الجديدة.



إرشاد

يُمكِن التحقُّق من التمثيل البياني للاقتران $g(x) = \cos 2x$ بالتحقُّق من أنَّ طول دورته π.

أتحقَّق من فهمي

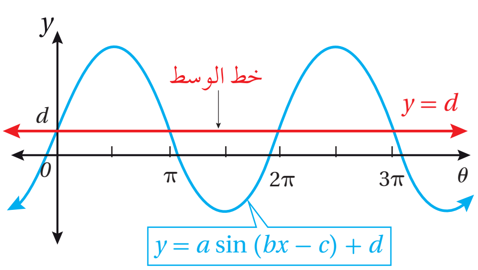
أُمثِّل منحنى كل اقتران ممّا يأتي بيانيًّا:

a) $g(x) = \sin 3x$

b) $g(x) = \cos \frac{x}{3}$

الانسحاب الرأسي للاقترانات الجيبية

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّ منحنى الاقتران $g(x) = f(x) + c, c > 0$، هو منحنى الاقتران $f(x)$، مزاحًا c وحدة إلى الأعلى، وأنَّ منحنى الاقتران $g(x) = f(x) - c$ هو منحنى الاقتران $f(x)$، مزاحًا c وحدة إلى الأسفل. وهذه القاعدة تنطبق على الاقترانات الجيبية.

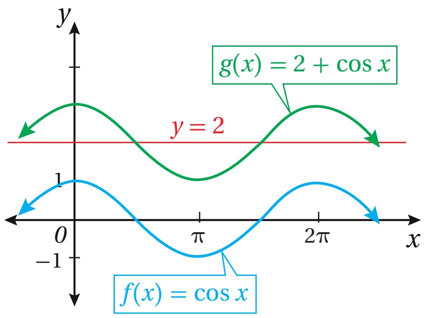


يتذبذب منحنى الاقترانين الرئيسين: $y = \sin x$، و $y = \cos x$ حول المحور x، ولكنْ عند إجراء انسحاب رأسي للاقتران الجيبي، فإنَّ منحناه يتذبذب حول محور جديد يُسمّى **خط الوسط** (midline).

بوجه عام، فإنَّ خط الوسط لمنحنى الاقتران الجيبي $y = a \sin (bx - c) + d$، أو منحنى الاقتران الجيبي $y = a \cos (bx - c) + d$، هو $y = d$

مثال 4

أُمثِّل منحنى الاقتران $g(x) = 2 + \cos x$ بيانيًّا.



منحنى الاقتران $g(x) = 2 + \cos x$ هو منحنى الاقتران $f(x) = \cos x$، مزاحًا وحدتين إلى الأعلى. ولتمثيله بيانيًّا، أُحدِّد النقاط المفتاحية لمنحنى الاقتران $f(x)$، ثم أزيد الإحداثي y بمقدار 2 لكل نقطة، ثم أُعيِّنها في المستوى الإحداثي، واصلًا بينها بمنحنى.

ألاحِظ أنَّ خط الوسط لمنحنى الاقتران $g(x) = 2 + \cos x$ هو $y = 2$، وأنَّ النقاط المفتاحية تتذبذب حوله.

أتذكَّر

يزيد الإحداثي y لكل نقطة على منحنى الاقتران g بمقدار وحدتين على الإحداثي y للنقطة المقابلة لها على منحنى الاقتران f.

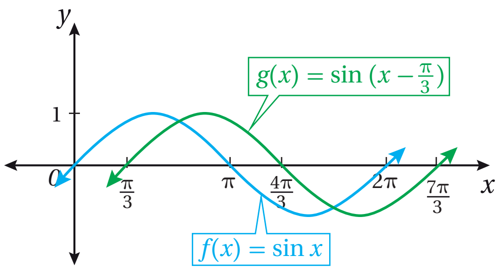
أتحقَّق من فهمي أُمثِّل منحنى الاقتران $g(x) = \sin x - 3$ بيانيًّا.

الانسحاب الأفقي للاقترانات الجيبية

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّ منحنى الاقتران $g(x) = f(x + c), c > 0$ هو منحنى الاقتران $f(x)$، مزاحًا c وحدة إلى اليسار، وأنَّ منحنى الاقتران $g(x) = f(x - c)$ هو منحنى الاقتران $f(x)$، مزاحًا c وحدة إلى اليمين. وهذه القاعدة تنطبق على الاقترانات الجيبية.

مثال 5

أُمثِّل منحنى الاقتران $g(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ بيانيًّا.



منحنى الاقتران $g(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ هو منحنى الاقتران $f(x) = \sin x$، مزاحًا $\frac{\pi}{3}$ وحدة إلى اليمين. ولتمثيله بيانيًّا، أُحدِّد النقاط المفتاحية لمنحنى الاقتران $f(x)$، ثم أُضيف $\frac{\pi}{3}$ إلى الإحداثي x لكل نقطة، ثم أُعيِّنها في المستوى الإحداثي، واصلًا بينها بمنحنى.

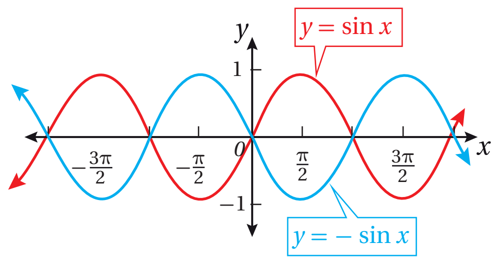
أتذكَّر

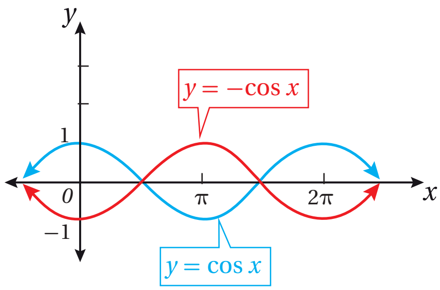
يزيد الإحداثي x لكل نقطة على منحنى الاقتران g بمقدار $\frac{\pi}{3}$ وحدة على الإحداثي x للنقطة المقابلة لها على منحنى الاقتران f.

أتحقَّق من فهمي أُمثِّل منحنى الاقتران $g(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ بيانيًّا.

انعكاس الاقترانات الجيبية

تعلَّمْتُ في الأمثلة السابقة تمثيل الاقترانات الجيبية في صورة $y = a\sin(bx - c)+d$، وصورة $y = a\cos(bx - c)+d$ إذا كانت $a > 0$. ولتحديد تأثير قيمة a عندما تكون $a < 0$، أتأمَّل التمثيل البياني لمنحنيي الاقترانين الآتيين: $y = -\sin x$، و $y = -\cos x$.





أُلاحِظ أنَّ منحنى الاقتران $y = -\sin x$ هو انعكاس لمنحنى الاقتران $y = \sin x$ حول المحور x، وأنَّ منحنى الاقتران $y = -\cos x$ هو أيضًا انعكاس لمنحنى الاقتران $y = \cos x$ حول المحور x.

بوجه عام، عندما تكون $a < 0$، فإنَّ منحنى الاقتران $y = a\sin(bx - c)+d$، ومنحنى الاقتران $y = a\cos(bx - c)+d$ يكونان انعكاسًا لمنحنى الاقتران: $y = |a|\sin(bx - c)+d$، ومنحنى الاقتران $y = |a|\cos(bx - c)+d$ على الترتيب حول خط الوسط $y = d$.

مثال 6

أجد السعة، وطول الدورة، ومعادلة خط الوسط للاقتران $f(x) = -\frac{1}{2}\cos(x - \frac{3\pi}{2}) + 1$، ثم أُمثِّله بيانيًّا.

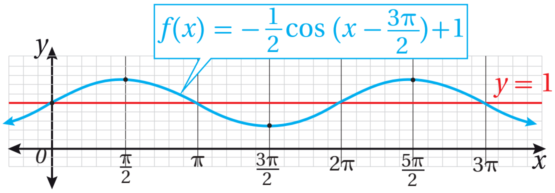
في هذا الاقتران: $a = -\frac{1}{2}, b = 1, c = \frac{3\pi}{2}, d = 1$

السعة: $|a| = \frac{1}{2}$. طول الدورة: $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|1|} = 2\pi$. معادلة خط الوسط: $y = 1$.

لتمثيل منحنى الاقتران $f(x)$، أتَّبع الخطوات الآتية:

- أُمثِّل خط الوسط $y = 1$ في المستوى الإحداثي.
- أُمثِّل منحنى الاقتران $y = \cos x$ باستعمال النقاط المفتاحية.
- أعكس النقاط المفتاحية من الخطوة السابقة حول خط الوسط $y = 1$.
- أضرب الإحداثي y للنقاط المفتاحية في $\frac{1}{2}$؛ لتضييق سعة منحنى الاقتران رأسيًّا.
- أُضيف $\frac{3\pi}{2}$ إلى الإحداثي x لكل نقطة مفتاحية؛ لإزاحة منحنى الاقتران $\frac{3\pi}{2}$ وحدة إلى اليمين.

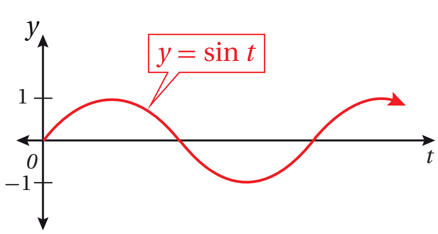
- أُضيف 1 إلى الإحداثي y؛ لإزاحة منحنى الاقتران وحدة إلى الأعلى.
- أُمثِّل منحنى الاقتران $g(x)$ اعتمادًا على النقاط الجديدة.

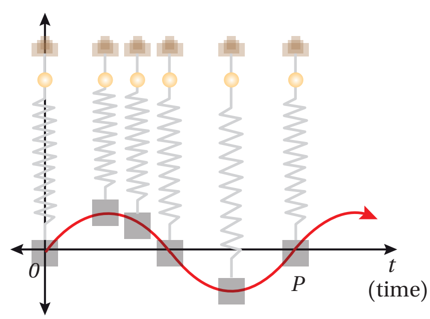


أتحقَّق من فهمي أجد السعة، وطول الدورة، ومعادلة خط الوسط للاقتران: $f(x) = -2\sin(x - \pi) - 3$، ثم أُمثِّله بيانيًّا.

الحركة التوافقية البسيطة

تُستعمَل الاقترانات الجيبية لنمذجة السلوك الدوري في كثير من المواقف الحياتية والعلمية. فمثلًا، يُمكِن نمذجة حركة اهتزاز كتلة مُعلَّقة في زنبرك نمذجة دقيقة باستعمال المعادلة $y = \sin t$. فعند افتراض أنَّ t هو الزمن المنقضي، يُلاحَظ أنَّ منحنى $y = \sin t$ يرتفع وينخفض بصورة مُتكرِّرة مع مرور الزمن، فتعود الكتلة إلى موقعها الأصلي مرَّة بعد أُخرى.





أتعلَّم

الفرق الرئيس بين المعادلتين اللتين تصفان الحركة التوافقية البسيطة هو نقطة البداية؛ فعندما $t = 0$، فإنَّ:

$y = a\sin\omega(0) = 0$

$y = a\cos\omega(0) = a$

وهذا يعني أنَّ الإزاحة عند بدء الحركة في الحالة الأولى صفر، وأنَّها في الحالة الثانية a.

مفهوم أساسي **الحركة التوافقية البسيطة**

إذا كانت المعادلة التي تصف الإزاحة y لجسم مع الزمن t هي:

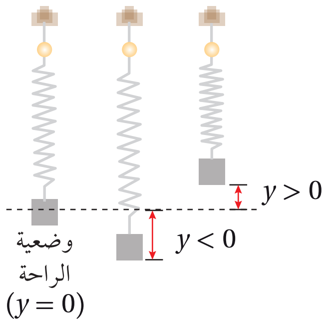
$$y = a\sin\omega t \qquad \text{or} \qquad y = a\cos\omega t$$

فإنَّ الجسم يكون في **حركة توافقية بسيطة** (simple harmonic motion)، عندئذٍ يُمكِن إيجاد ما يأتي:

- أقصى إزاحة للجسم، وهي تساوي سعة الاقتران $|a|$.
- الزمن الذي يُكمِل فيه الجسم دورة كاملة، وهو يساوي $\frac{2\pi}{\omega}$.
- **التردُّد** (frequency)، وهو عدد الدورات في وحدة الزمن، وهو يساوي $\frac{\omega}{2\pi}$.

مثال 7

يُمثِّـل الاقتـران: $y = 10 \sin 4\pi t$ إزاحـة كتلـة مُعلَّقـة فـي زنبـرك بالسـنتيمتر، حيـث t الزمـن بالثوانـي:



1 أجد أقصى إزاحة، ودورة الاقتران، والتردُّد لحركة الكتلة.

في هذا الاقتران: $a = 10, \omega = 4\pi$.

- أقصى إزاحة: $|a| = |10| = 10$.
- دورة الاقتران: $\frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2}$.

إذن، تُكمِل الكتلة دورة كاملة في $\frac{1}{2}$ ثانية.

- التردُّد: $\frac{\omega}{2\pi} = \frac{4\pi}{2\pi} = 2$.

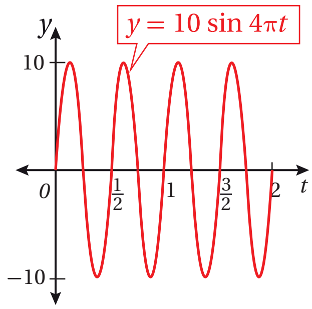
إذن، تُكمِل الكتلة دورتين كاملتين في ثانية.

أتعلَّم

يُمكِن أيضًا التعبير عن التردُّد بوحدة هيرتز (Hz).

2 أُمثِّل منحنى إزاحة الكتلة مع الزمن بيانيًّا.

يُمكِنني تمثيل منحنى إزاحة الكتلة مع الزمن كما في الشكل المجاور.



أتحقَّق من فهمي

يُمثِّـل الاقتـران: $y = 3 \cos \frac{1}{2}\pi t$ إزاحـة كتلـة مُعلَّقـة فـي زنبـرك بالسـنتيمتر، حيـث t الزمـن بالثوانـي:

a) أجد أقصى إزاحة، وطول الدورة، والتردُّد لحركة الكتلة.

b) أُمثِّل منحنى إزاحة الكتلة مع الزمن بيانيًّا.

تمثيل اقتران الظل

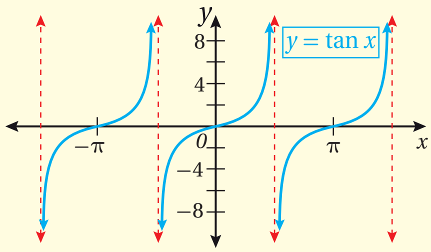
تعلَّمْتُ في الأمثلة السابقة تمثيل الاقترانات الجيبية بيانيًّا في المستوى الإحداثي، ويُمكِنني استعمال الاستراتيجيات نفسها لتمثيل اقتران الظل. وبما أنَّ $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$، فإنَّ اقتران الظل يكون غير مُعرَّف عندما $\cos x = 0$؛ ما يعني أنَّ لمنحناه خطوط تقارب رأسية عندما $\cos x = 0$.

خصائص اقتران الظل

مفهوم أساسي

يمتاز الاقتران $y = \tan x$ بالخصائص الآتية:

- طول الدورة هو π.
- المجال هو جميع الأعـداد الحقيقية، ما عدا $n\frac{\pi}{2}$، حيـث n عدد صحيح فردي.
- المدى هو جميع الأعداد الحقيقية.

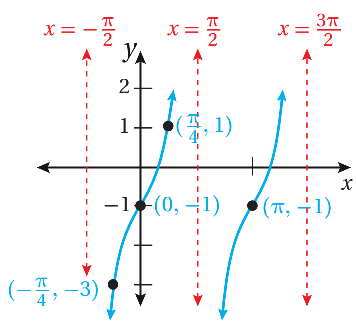


مثال 8

أُمثِّل منحنى الاقتران: $g(x) = 2\tan x - 1$ بيانيًّا، ثم أُحدِّد مجاله ومداه.

في هذا الاقتران: $a = 2, b = 1, c = 0, d = -1$.

منحنـى الاقتران $g(x) = 2\tan x - 1$ هو توسيـع رأسـي لمنحنى الاقتـران $f(x) = \tan x$، بمعامل مقداره 2، وإزاحة رأسـية إلى الأسفل مقدارها 1؛ لذا أضرب الإحداثي y لكل نقطـة على منحنى الاقتران $f(x)$ في 2، ثم أطرح منه 1



$f(x) = 2\tan x - 1$

مجـال الاقتران هو جميع الأعـداد الحقيقية، ما عدا $n\frac{\pi}{2}$، حيث n عدد صحيح فردي، ومداه جميع الأعداد الحقيقية.

أتحقَّق من فهمي

أُمثِّل منحنى الاقتران: $g(x) = \tan(\frac{\pi}{2}x)$ بيانيًّا، ثم أُحدِّد مجاله ومداه.

> **أتعلَّم**
>
> الصيغـة العامـة لاقتران الظل هي:
>
> $y = a\tan(bx - c) + d$
>
> حيـث: a, b, c, d أعداد حقيقيـة، و a و b لا يساويان صفرًا.

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

أجد الدورة والسعة لكل اقتران ممّا يأتي، ثم أُمثِّله بيانيًّا:

1. $g(x) = 3\sin x$
2. $g(x) = \cos 3x$
3. $g(x) = 2\sin(x - \frac{\pi}{3})$
4. $g(x) = 2 - \cos x$
5. $g(x) = 1 + \frac{1}{2}\cos \pi x$
6. $g(x) = 1 + \cos(2x - \frac{\pi}{3})$
7. $g(x) = 3 + 2\sin 3(x + \pi)$
8. $g(x) = \frac{1}{2}\tan x$
9. $g(x) = -1 + \tan 2x$

أكتب بجانب كل اقتران ممّا يأتي رمز التمثيل البياني المناسب له:

10 $y = -2 + \sin(2x + \pi)$

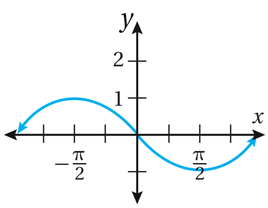
11 $y = -\sin(x + \pi)$

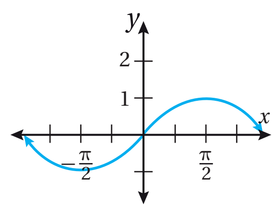
12 $y = -3 + \cos x$

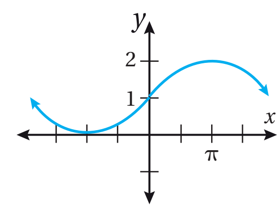
13 $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

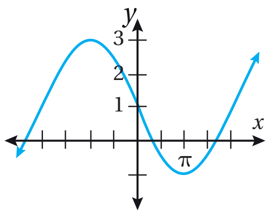
14 $y = 1 + \sin \frac{1}{2}x$

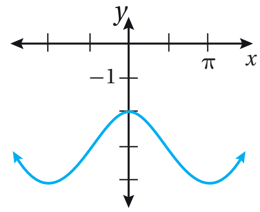
15 $y = 1 + 2\cos\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{2}\right)$

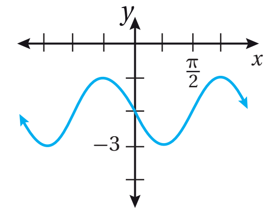
a)


b)


c)


d)


e)


f)


أَصِف التحويلات الهندسية التي طُبِّقت على منحنى الاقتران f لينتج منحنى الاقتران g في كلٍّ ممّا يأتي:

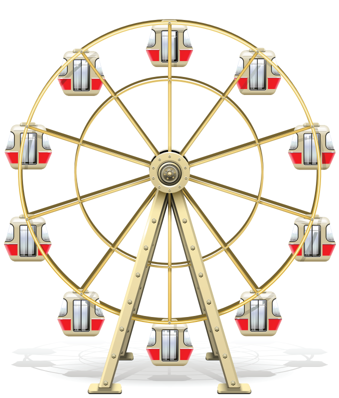
16 $f(x) = 2\cos x\,,\ g(x) = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 1$

17 $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right),\ g(x) = 3\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 2$

18 $f(x) = \sin 3x,\ g(x) = \sin 3(x + 3\pi) - 5$

19 $f(x) = \cos x + 9,\ g(x) = \cos 6(x - \pi) + 9$

عجلة دوّارة: تُمثِّل المعادلة: $h = 25 \sin \frac{\pi}{15}(t - 7.5) + 30$ الارتفاع عن سطح الأرض بالأقدام لشخص يركب في عجلة دوّارة، حيث t الزمن بالثواني:



20 أُمثِّل منحنى معادلة ارتفاع الشخص مع الزمن بيانيًّا.

21 ما أقصى ارتفاع للشخص وأدنى ارتفاع له عن سطح الأرض؟

ضغط الدم: يزداد ضغط دم الإنسان فـي كل مـرَّة ينبض فيهـا القلب، ثم ينخفـض مع راحـة القلب بين الضربات. ويُمكِن نمذجة ضغط دم أحد الأشخاص باستعمال الاقتران: $p(t) = 115 + 25 \sin(160\pi t)$، حيث: $p(t)$ ضغط الدم بوحدة $mmHg$، وt الزمن بالدقائق:

22 أجد السعة، وطول الدورة، والتردُّد للاقتران p.

23 أُمثِّل منحنى الاقتران p بيانيًّا.

24 إذا كان هـذا الشـخص يمارس الرياضة، فكيـف يُؤثِّر ذلك في طول الـدورة والتردُّد للاقتران p؟

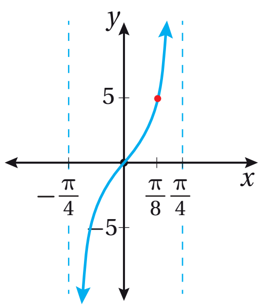
مهارات التفكير العليا

تبرير: أُميِّز الجملة الصحيحة من الجملة غير الصحيحة في ما يأتي، مُبرِّرًا إجابتي:

25 كل اقتـران جيـب فـي صـورة $y = a_1 \sin (b_1 x - c_1) + d_1$ يُكتَـب بوصفـه اقتـران جيب تمـام في صورة $y = a_2 \cos (b_2 x - c_2) + d_2$.

26 طول دورة الاقتران $f(x) = \cos 8x$ يساوي أربعة أضعاف طول دورة الاقتران $g(x) = \cos 2x$.

27 **تحدٍّ:** أسـتعمل التمثيـل البياني المجـاور لكتابة قاعدة اقتـران في صورة $y = a \tan bx$.



28 **تحدٍّ:** أملأ الفراغ بما هو مناسب في ما يأتي لتصبح المعادلة صحيحة:

$$\cos(-2x + 6\pi) = \sin 2(x + \boxed{})$$

معمل برمجية جيوجبرا

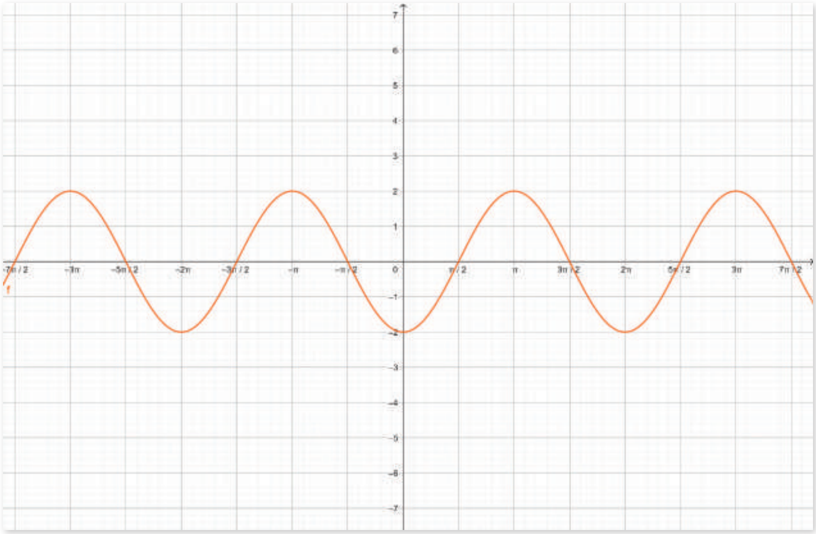
تمثيل الاقترانات المثلثية بيانيًّا

Graphing Trigonometric Functions

يُمكِنني استعمال برمجية جيوجبرا لتمثيل الاقترانات المثلثية بيانيًّا باستعمال نظام راديان.

نشاط

أُمثِّل منحنى الاقتران: $f(x) = 2\cos(x - \pi)$ باستعمال برمجية جيوجبرا.



1 أكتب الاقتران: $f(x) = 2\cos(x-\pi)$ في شريط الإدخال، ثم أضغط على زِرِّ الإدخال Enter.

2 لتغيير قياسات الزوايا إلى نظام راديان، أنقر أيقونة ، ثم أيقونة ، فتظهر قائمة في الجانب الأيمن من الشاشة.

3 أختار xAxis من القائمة، ثم أنقر المربع الصغير بجانب كلمة Distance: ؛ لتفعيل هذه الخانة.

4 بعد تفعيل خانة Distance: أستطيع اختيار التقسيم المناسب للمحور x. فمثلًا، أنقر السهم الصغير المجاور للكلمة، ثم أختار منه $\frac{\pi}{2}$: Distance: π/2

5 أُغيِّر وحدة القياس المُستعمَلة للتمثيل؛ بنقر السهم الصغير المجاور لكلمة Unit: ، ثم أختار الرمز π.

6 يُمكِنني إظهار جميع نقاط القِيَم العظمى والصغرى على منحنى الاقتران؛ بنقر من شريط الأدوات، ثم اختيار Extremum ، ثم نقر منحنى الاقتران.

أتدرَّب

أُمثِّل كُلًّا من الاقترانات المثلثية الآتية بيانيًّا باستعمال برمجية جيوجبرا:

1 $f(x) = 5\sin x$

2 $f(x) = \cos(3-x)$

3 $g(x) = 1-\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$

4 $g(x) = 2-\cos x$

5 $g(x) = \frac{1}{2}\cos \pi x$

6 $g(x) = 4 + \tan 2x$

أختار رمز الإجابة الصحيحة في كلٍّ ممّا يأتي:

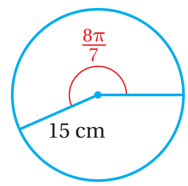
1 إذا كان $\cot\theta = 1$، فإنَّ $\tan\theta$ تساوي:

a) -1 b) 1 c) 0 d) 3

2 قياس الراديان الذي يساوي $56°$ هو:

a) $\frac{\pi}{15}$ b) $\frac{14\pi}{45}$ c) $\frac{7\pi}{45}$ d) $\frac{\pi}{3}$

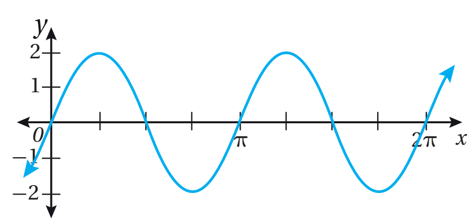
3 طول القــوس المقابل للزاوية $\frac{8\pi}{7}$ في الدائرة المجــاورة، مُقرَّبًا إلى أقرب جزء من عشرة هو:



a) 4.2 cm b) 17.1 cm

c) 53.9 cm d) 2638.9 cm

4 قاعدة الاقتران التي تُمثِّل المنحنى الآتي هي:



a) $y = \frac{1}{2}\sin 4x$ b) $y = \frac{1}{4}\sin 2x$

c) $y = 2\sin 2x$ d) $y = 4\sin\frac{1}{2}x$

5 أرســم في الوضع القياسي الزاوية التي عُلِم قياسها في ما يأتي:

a) $780°$ b) $-570°$

c) $\frac{\pi}{12}$ d) $\frac{5\pi}{2}$

6 أُحوِّل قياس الزاوية المكتوبة بالدرجات إلى الراديان، وقياس الزاوية المكتوبة بالراديان إلى الدرجات في كلٍّ ممّا يأتي:

a) $-720°$ b) $315°$

c) $\frac{13\pi}{8}$ d) 3.5π

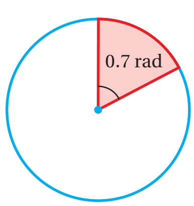
7 أجــد زاويتين إحداهما قياســها موجــب، والأُخرى قياسها ســالب، وكلتاهما مُشترِكة في ضلع الانتهاء مع كل زاوية معطاة ممّا يأتي، ثم أرسمهما:

a) $-115°$ b) $780°$

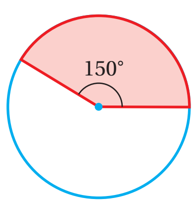
c) $-\frac{7\pi}{3}$ d) $\frac{\pi}{9}$

أجد نصف قُطْر كل قطاع ممّا يأتي، علمًا بأنَّ مســاحة القطاع 12 وحدة مربعة:

8



9



أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:

10 $\sec 300°$

11 $\tan 240°$

12 $\cos\frac{14\pi}{3}$

13 $\sec(-3\pi)$

أجــد قيمة كلٍّ مــن الاقترانــات المثلثية الخمســة المتبقية للزاوية θ في كلٍّ ممّا يأتي:

14 $\cos\theta = \frac{3}{5}, \tan\theta < 0$

15 $\sec\theta = 2, \sin\theta < 0$

أجد الدورة والسعة لكل اقتران ممّا يأتي، ثم أُمثِّله بيانيًّا:

16 $g(x) = 3\cos \pi(x + \frac{1}{2})$

17 $g(x) = 2\sin(\frac{2}{3}x - \frac{\pi}{6})$

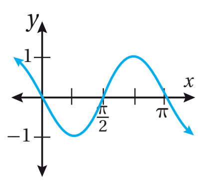
18 $g(x) = 4\tan(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})$

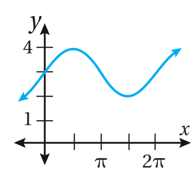
19 $g(x) = -5\sin(x - \frac{\pi}{2}) + 3$

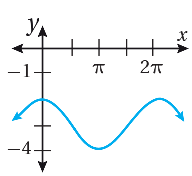
أكتب بجانب كل اقتران ممّا يأتي رمز التمثيل المناسب له:

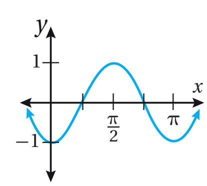
20 $y = 3 + \sin x$ **21** $y = -3 + \cos x$

22 $y = \sin 2(x - \frac{\pi}{2})$ **23** $y = \cos 2(x - \frac{\pi}{2})$

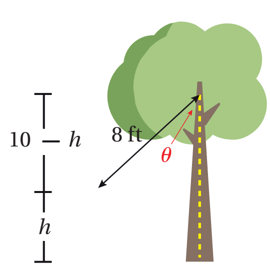
a) 

b) 

c) 

d) 

أرجوحة: يُمكِن تمثيل الارتفاع بالأقدام للأرجوحة فوق سطح الأرض بالاقتران: $h = -8\cos\theta + 10$، حيث يرتفع مربط الأرجوحة 10 أقدام فوق سطح الأرض، ويبلغ طول حبل الأرجوحة 8 أقدام، وتُمثِّل θ الزاوية التي يصنعها الحبل مع المحور الرأسي:



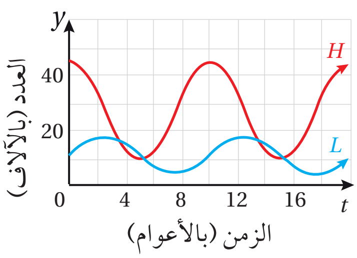
24 أجد ارتفاع الأرجوحة عندما $\theta = \frac{\pi}{4}$.

25 أُمثِّل الاقتران h بيانيًّا.

غابات: إذا كان عدد حيوانات الوشق (المُفترِس) بالآلاف في إحدى الغابات يعطى بالمعادلة: $L = 11.5 + 6.5\sin\frac{\pi}{5}t$، وعدد الأرانب (الفريسة) بالآلاف يعطى بالمعادلة: $H = 27.5 + 17.5\cos\frac{\pi}{5}t$، حيث t الزمن بالأعوام، فأُجيب عمّا يأتي:

26 أجد نسبة عدد الأرانب إلى عدد الوشق بعد 5 أعوام.

27 أستعمل التمثيل البياني الآتي لتوضيح كيف تبدو التغيُّرات مُترابِطة في أعداد مجموعتي الحيوانات.



تدريب على الاختبارات الدولية

28 النقطة التي تُمثِّل القيمة العظمى للاقتران: $y = -4\cos(x - \frac{\pi}{2})$ هي:

a) $(-\frac{\pi}{2}, 4)$ b) $(\frac{\pi}{2}, 4)$

c) $(0, 4)$ d) $(\pi, 4)$

29 أحد الآتية يُعَدُّ خط تقارب رأسيًّا لمنحنى الاقتران: $y = 3\tan 4x$:

a) $x = \frac{\pi}{8}$ b) $x = \frac{\pi}{4}$

c) $x = 0$ d) $x = -\frac{\pi}{6}$

الوحدة 7

المتطابقات والمعادلات المثلثية

Trigonometric Identities and Equations

ما أهمية هذه الوحدة؟

يُعَدُّ حساب أطوال الأضلاع وقياسات الزوايا من أهم تطبيقات الاقترانات المثلثية ومعادلاتها. ويُستعمَل هذا التطبيق على نطاق واسع في العلوم المختلفة، مثل: علم المساحة، وعلم الملاحة. وهو يُستعمَل أيضًا في تفسير بعض الظواهر الفيزيائية، مثل ظاهرة انكسار الضوء الأبيض؛ أيِ انحراف الضوء عن مساره عند انتقاله من وسط شفّاف إلى وسط شفّاف آخر.

تعلَّمْتُ سابقًا:

- ماهية دائرة الوحدة، ووضع الزاوية القياسي.
- إيجاد الاقترانات المثلثية لأيِّ زاوية.
- حلَّ معـــادلات مثلثية، بحيث تكون مجموعة الحلِّ ضمن الدورة الواحدة.
- اســـتعمال العلاقة الآتية لحلِّ المثلث القائم الزاوية: $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

سأتعلَّم في هذه الوحدة:

- اســـتعمال المتطابقات المثلثيـــة لإيجاد قِيَم الاقترانات المثلثية.
- استعمال المتطابقات المثلثية لتبسيط المقادير المثلثيـــة، وإثبـــات صحة متطابقـــات مثلثية أُخرى.
- حلَّ المعادلات المثلثية.

ملحوظة: أستعمل تدريبات (أســـتعد لدراسة الوحدة) في الصفحتين (15) و (16) من كتاب التمارين؛ لمراجعة هذه الموضوعات قبل البدء بدراسة الوحدة.

الدرس 1

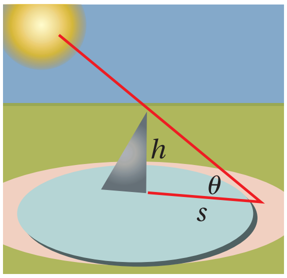
المتطابقات المثلثية 1
Trigonometric Identities 1

فكرة الدرس

- استعمال المتطابقات المثلثية لإيجاد قِيَم الاقترانات المثلثية.
- استعمال المتطابقات المثلثية لتبسيط المقادير المثلثية، وإثبات صحة متطابقات مثلثية.
- إيجاد قِيَم الاقترانات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما.
- إثبات صحة المتطابقات المثلثية باستعمال متطابقات المجموع والفرق.

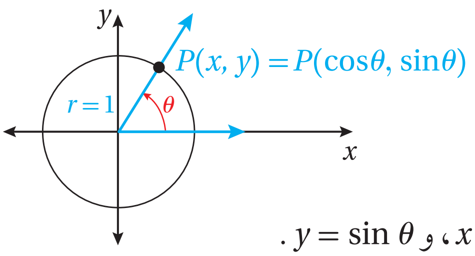
المصطلحات متطابقة مثلثية.

مسألة اليوم تُعَدُّ المِزْولة الشمسية أول ساعة اخترعها الإنسان، وقد استعملها المسلمون لتحديد أوقات الصلاة. يُبيِّن الشكل المجاور مِزْولة شمسية ارتفاعها h، وتُمثِّل المعادلة: $s = \dfrac{h \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}{\sin \theta}$ طول ظلِّ المِزْولة عندما يكون قياس زاوية سقوط أشعة الشمس θ. هل يُمكِن كتابة معادلة طول الظلِّ بصورة أبسط؟



المتطابقات المثلثية الأساسية

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّه إذا رُسِمت الزاوية θ في الوضع القياسي، فإنَّ ضلع انتهائها يقطع دائرة الوحدة في نقطة وحيدة هي $P(x, y)$ كما يظهر في الشكل المجاور. ومنه، فإنَّ: $x = \cos \theta$، و $y = \sin \theta$.



أُلاحِظ أنَّ النقطة $P(x, y)$ تقع على دائرة مركزها نقطة الأصل، ونصف قُطْرها وحدة واحدة؛ لذا تنتج المعادلتان الآتيتان:

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 \quad \text{،و} \quad x^2 + y^2 = 1$$

أُلاحِظ أيضًا أنَّ المعادلة: $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ صحيحة لجميع قِيَم θ؛ لذا تُسمّى **متطابقة مثلثية** (trigonometric identity).

في ما يأتي المتطابقات المثلثية الأساسية الناتجة بصورة مباشرة من تعريف الاقترانات المثلثية الستة التي درسْتُها سابقًا.

رموز رياضية

$\sin^2 \theta$ تعني $(\sin \theta)^2$.

$\cos^2 \theta$ تعني $(\cos \theta)^2$.

مفهوم أساسي

المتطابقات المثلثية الأساسية

- متطابقات المقلوب:

$$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

- المتطابقات النسبية:

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

- متطابقات فيثاغورس:

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \qquad 1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta \qquad 1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$$

- متطابقات الزاويتين المتتامتين:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta \qquad \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot\theta \qquad \sec\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \csc\theta$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta \qquad \cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \tan\theta \qquad \csc\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sec\theta$$

- متطابقات الزاوية السالبة:

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta \qquad \cos(-\theta) = \cos\theta \qquad \tan(-\theta) = -\tan\theta$$

أتعلّم

يُمكِن أيضًا كتابة متطابقات الزاويتين المتتامتين بالدرجات، مثل:

$\sin(90° - \theta) = \cos\theta$

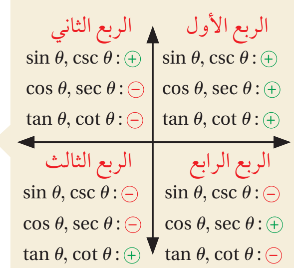
يُمكِن استعمال المتطابقات الأساسية لإيجاد قِيَم الاقترانات المثلثية.

مثال 1

أجد قيمة $\sec\theta$ إذا كان $\sin\theta = \frac{3}{5}$، $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$.

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$	متطابقات فيثاغورس
$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2\theta = 1$	بتعويض $\sin\theta = \frac{3}{5}$
$\cos^2\theta = \frac{16}{25}$	بالتبسيط
$\cos\theta = \pm\frac{4}{5}$	بأخذ الجذر التربيعي لكلا الطرفين
$\cos\theta = -\frac{4}{5}$	جيب التمام سالب في الربع الثاني
$\frac{1}{\cos\theta} = -\frac{5}{4}$	بأخذ المقلوب لكلا الطرفين
$\sec\theta = -\frac{5}{4}$	متطابقات المقلوب

أتذكّر



أتحقَّق من فهمي

أجد قيمة $\tan\theta$ إذا كان $\sec\theta = -\frac{3}{2}$ ، $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$.

تبسيط المقادير المثلثية وإعادة كتابتها

تبســيط المقادير المثلثية هو كتابة المقادير بدلالة اقتران مثلثي واحد فقط (إنْ أمكن)، ويُمكِن ذلك باستعمال المتطابقات المثلثية.

مثال 2

أُبسِّط كُلًّا من المقادير المثلثية الآتية:

1 $\sin x \cos^2 x - \sin x$

$\sin x \cos^2 x - \sin x = \sin x(\cos^2 x - 1)$ بإخراج العامل المشترك

$= -\sin x(1 - \cos^2 x)$ باستعمال خاصية التوزيع

$= -\sin x \sin^2 x$ متطابقات فيثاغورس

$= -\sin^3 x$ بالضرب

2 $\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{1+\sin x}$

$\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{1+\sin x} = \frac{\sin x(1+\sin x) + \cos^2 x}{\cos x(1+\sin x)}$ بتوحيد المقامات

$= \frac{\sin x + \sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x(1+\sin x)}$ باستعمال خاصية التوزيع

$= \frac{\sin x + 1}{\cos x(1+\sin x)}$ متطابقات فيثاغورس

$= \frac{1}{\cos x} = \sec x$ بالتبسيط، واستعمال متطابقات المقلوب

3 $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cot x$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cot x = \sin x \cot x$ متطابقات الزاويتين المتتامتين

$= \sin x\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)$ المتطابقات النسبية

$= \cos x$ بالتبسيط

أتحقَّق من فهمي

أُبسِّط كُلًّا من المقادير المثلثية الآتية:

a) $\sin x\,(\csc x - \sin x)$

b) $1 + \dfrac{\sin x}{\cos x} + \dfrac{\cos x}{1 + \sin x}$

c) $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)\sec x$

أحتاج في بعض المسائل إلى إعادة كتابة المقادير المثلثية بحيث لا تحوي كسرًا، ويُمكِن عمل ذلك أحيانًا باستعمال الضرب في المُرافِق. فمثلًا، عندما يكون المقام في صورة $1 \pm u$، أو صورة $u \pm 1$، فإنَّني أضرب البسط والمقام في مُرافِق المقام، ثم أُطبِّق متطابقات فيثاغورس.

مثال 3

أُعيد كتابة $\dfrac{1}{1 + \sin x}$ بحيث لا يحوي كسرًا.

$$\frac{1}{1+\sin x} = \frac{1}{1+\sin x} \times \frac{1-\sin x}{1-\sin x}$$
بضرب البسط والمقام في مُرافِق $1+\sin x$، وهو $1-\sin x$

$$= \frac{1-\sin x}{1-\sin^2 x}$$
بالضرب

$$= \frac{1-\sin x}{\cos^2 x}$$
متطابقات فيثاغورس

$$= \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\sin x}{\cos^2 x}$$
بكتابة الكسر في صورة فرق بين كسرين

$$= \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\sin x}{\cos x} \times \frac{1}{\cos x}$$
بالتحليل

$$= \sec^2 x - \tan x \sec x$$
متطابقات المقلوب، والمتطابقات النسبية

أتحقَّق من فهمي

أُعيد كتابة $\dfrac{1}{1+\cos x}$ بحيث لا يحوي كسرًا.

رموز رياضية

يُعَدُّ كلٌّ من العاملين: $a-b$، و $a+b$ مُرافِقًا للآخر، وينتج من ضربهما الفرق بين المربعين: $a^2 - b^2$

إثبات صحة متطابقة مثلثية

يُمكِن استعمال المتطابقات المثلثية الأساسية، إضافةً إلى تعريف الاقترانات المثلثية، لإثبات صحة متطابقات مثلثية أُخرى، عن طريق تحويل أحد طرفي المتطابقة المثلثية المراد إثبات صحتها إلى الطرف الآخر باتِّباع سلسلة من الخطوات، كلٌّ منها تُعَدُّ متطابقة.

في ما يأتي بعض المبادئ العامة التي تساعدني على إثبات صحة المتطابقات المثلثية:

- **البدء بأحد طرفي المتطابقة**: أختار أحد طرفي المتطابقة، الذي يكون أكثر تعقيدًا فيها غالبًا.
- **استعمال المتطابقات المثلثية المعروفة**: يُمكِنني استعمال المتطابقات المثلثية التي أعرفها، إضافةً إلى بعض المهارات الجبرية، لتحويل الطرف الذي اخترته بدايةً.
- **التحويل إلى اقتران الجيب أو جيب التمام**: من المفيد أحيانًا إعادة كتابة جميع الاقترانات بدلالة اقتران الجيب وجيب التمام.

مثال 4

أُثبِت صحة كل متطابقة ممّا يأتي:

1 $\sin x \tan x = \sec x - \cos x$

أُلاحِظ أنَّ طرف المتطابقة الأيسر أكثر تعقيدًا؛ لذا أبدأ بالمقدار المثلثي الموجود فيه:

$$\sin x \tan x = \sin x \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)$$ المتطابقات النسبية

$$= \frac{\sin^2 x}{\cos x}$$ بالضرب

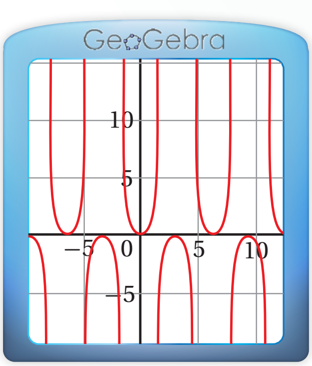
$$= \frac{1-\cos^2 x}{\cos x}$$ متطابقات فيثاغورس

$$= \frac{1}{\cos x} - \cos x$$ بكتابة الكسر في صورة فرق بين كسرين

$$= \sec x - \cos x \quad ✓$$ متطابقات المقلوب

الدعم البياني:

يُمكِنني أيضًا إثبات صحة متطابقة بيانيًّا عن طريق تمثيل كل طرف منها بيانيًّا باستعمال برمجية جيوجبرا، والتحقُّق من تطابق التمثيلين البيانيين. أُلاحِظ تطابق التمثيل البياني للمعادلتين: $y = \sin x \tan x$، و $y = \sec x - \cos x$ ؛ ما يعني أنَّ المتطابقة صحيحة.



أتعلَّم

ليس شرطًا البدء دائمًا بالطرف الأكثر تعقيدًا في المسألة. فمثلًا، في الفرع 1 من المثال، يُمكِنني إثبات صحة المتطابقة بدءًا بالطرف الأيمن.

2 $\sec x + \tan x = \dfrac{\cos x}{1 - \sin x}$

أُلاحِظ أنَّ طرف المتطابقة الأيمن أكثر تعقيدًا؛ لذا أبدأ بالمقدار المثلثي الموجود فيه:

$$\frac{\cos x}{1-\sin x} = \frac{\cos x}{1-\sin x} \times \frac{1+\sin x}{1+\sin x}$$ بضرب البسط والمقام في مُرافِق $1-\sin x$، وهو $1+\sin x$

$$= \frac{\cos x\,(1+\sin x)}{1-\sin^2 x}$$ بالضرب

$$= \frac{\cos x\,(1+\sin x)}{\cos^2 x}$$ متطابقات فيثاغورس

$$= \frac{1+\sin x}{\cos x}$$ بالقسمة على العامل المشترك $\cos x$

$$= \frac{1}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos x}$$ بكتابة الكسر في صورة مجموع كسرين

$$= \sec x + \tan x \quad ✓$$ متطابقات المقلوب، والمتطابقات النسبية

3 $\dfrac{\sin x}{1+\cos x} + \dfrac{1+\cos x}{\sin x} = 2\csc x$

أُلاحِظ أنَّ طرف المتطابقة الأيسر أكثر تعقيدًا؛ لذا أبدأ بالمقدار المثلثي الموجود فيه:

$$\frac{\sin x}{1+\cos x} + \frac{1+\cos x}{\sin x} = \frac{\sin^2 x + (1+\cos x)^2}{(1+\cos x)\sin x}$$ بتوحيد المقامات

$$= \frac{\sin^2 x + 1 + 2\cos x + \cos^2 x}{(1+\cos x)\sin x}$$ مربع مجموع حدَّين

$$= \frac{\sin^2 x + \cos^2 x + 1 + 2\cos x}{(1+\cos x)\sin x}$$ خاصية التجميع

$$= \frac{2 + 2\cos x}{(1+\cos x)\sin x}$$ متطابقات فيثاغورس

$$= \frac{2\,(1+\cos x)}{(1+\cos x)\sin x}$$ بإخراج العامل المشترك من البسط

$$= \frac{2}{\sin x}$$ باختصار العامل المشترك: $1+\cos x$

$$= 2\csc x \quad ✓$$ متطابقات المقلوب

توسُّع

هل تُمثِّل المعادلة: $\dfrac{\sin x}{1+\cos x} + \dfrac{1-\cos x}{\sin x} = 2\csc x$ متطابقة؟ أتحقَّق من ذلك بطريقة بيانية وأُخرى جبرية.

أتحقَّق من فهمي

أُثبِت صحة كلٍّ من المتطابقات الآتية:

a) $\cot x \cos x = \csc x - \sin x$

b) $\frac{1-\cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1+\cos x}$

c) $\frac{1}{1-\cos x} + \frac{1}{1+\cos x} = 2\csc^2 x$

يُفضَّل أحيانًا تحويل كل طرف من المتطابقة المثلثية المـراد إثبات صحتها إلى مقدار مثلثي وسيط.

مثال 5

أُثبِت صحة المتطابقة: $\frac{\tan^2 x}{\sec x - 1} = \frac{1+\cos x}{\cos x}$.

أُلاحِظ أنَّ طرفي المتطابقة مُعقَّدان؛ لذا أُحوِّل كلا الطرفين إلى مقدار مثلثي وسيط، بدءًا بالطرف الأيسر:

$$\frac{1+\cos x}{\cos x} = \frac{1}{\cos x} + \frac{\cos x}{\cos x}$$ بكتابة الكسر في صورة مجموع كسرين

$$= \sec x + 1$$ بالاختصار، واستعمال متطابقات المقلوب

الآن، أُحوِّل الطرف الأيمن إلى المقدار المثلثي الوسيط: $\sec x + 1$:

$$\frac{\tan^2 x}{\sec x - 1} = \frac{\sec^2 x - 1}{\sec x - 1}$$ متطابقات فيثاغورس

$$= \frac{(\sec x - 1)(\sec x + 1)}{\sec x - 1}$$ بتحليل الفرق بين مربعين

$$= \sec x + 1 \quad ✓$$ باختصار العامل المشترك: $\sec x - 1$

بما أنَّ الطرفين يساويان المقدار المثلثي نفسه، إذن المتطابقة صحيحة.

أتحقَّق من فهمي

أُثبِت صحة المتطابقة: $(\tan x + \cot x)^2 = \sec^2 x + \csc^2 x$.

متطابقات المجموع والفرق

تعلَّمْتُ في الأمثلة السابقة كيفية استعمال المتطابقات المثلثية لإيجاد قِيَم اقترانات مثلثية، وتبسيط عبارات مثلثية، وإثبات صحة متطابقات أُخرى. وسأتعلَّم الآن كيفية استعمال مجموعة من المتطابقات لإيجاد قيمة اقتران مثلثي لمجموع زاويتين أو الفرق بينهما.

مفهوم أساسي — **متطابقات المجموع والفرق**

متطابقات المجموع:

- $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$
- $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
- $\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$

متطابقات الفرق:

- $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$
- $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
- $\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$

مثال 6

أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي من دون استعمال الآلة الحاسبة:

1 $\sin 15°$

$\sin 15° = \sin(60° - 45°)$ $15° = 60° - 45°$

$= \sin 60° \cos 45° - \cos 60° \sin 45°$ متطابقة جيب الفرق بين زاويتين

$= \dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ بالتعويض

$= \dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$ بالتبسيط

أتعلَّم

يُمكِنني التحقُّق من صحة إجابتي باستعمال الآلة الحاسبة. فمثلًا، في الفرع 1 من المثال، فإنَّ: $\sin 15° \approx 0.2588$، و $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \approx 0.2588$

2 $\tan \frac{5\pi}{12}$

$$\tan \frac{5\pi}{12} = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right)$$ $\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}$

$$= \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\tan\frac{\pi}{4} + \tan\frac{\pi}{6}}{1 - \tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{\pi}{6}}$$ متطابقة الظلّ لمجموع زاويتين

$$= \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - 1\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}$$ بالتعويض

$$= \frac{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}}$$ بتوحيد المقامات

$$= \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$$ بالتبسيط

3 $\cos 20° \cos 40° - \sin 20° \sin 40°$

$$\cos 20° \cos 40° - \sin 20° \sin 40° = \cos(40° + 20°)$$ متطابقة جيب التمام لمجموع زاويتين

$$= \cos(60°) = \frac{1}{2}$$ بالتبسيط

أتحقَّق من فهمي أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي من دون استعمال الآلة الحاسبة:

a) $\cos 75°$ b) $\tan \frac{\pi}{12}$ c) $\sin 80° \cos 20° - \cos 80° \sin 20°$

يُمكِنني أيضًا استعمال متطابقات المجموع والفرق لإثبات صحة متطابقات مثلثية أُخرى.

مثال 7 أُثبِت صحة كل متطابقة ممّا يأتي:

1 $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$

أُلاحِظ أنَّ طرف المتطابقة الأيسر أكثر تعقيدًا؛ لذا أبدأ بالمقدار المثلثي الموجود فيه:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cos x + \sin\frac{\pi}{2}\sin x$$ متطابقة جيب تمام الفرق بين زاويتين

$$= (0)\cos x + (1)\sin x$$ بالتعويض

$$= \sin x$$ بالتبسيط

أُفكِّر

كيف يُمكِن إثبات صحة المتطابقة: $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ بتطبيق التحويلات الهندسية على الاقتران الرئيس $f(x) = \cos x$؟

2 $\dfrac{1+\tan x}{1-\tan x} = \tan\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)$

أُلاحِظ أنَّ طرف المتطابقة الأيمن أكثر تعقيدًا؛ لذا أبدأ بالمقدار المثلثي الموجود فيه:

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right) = \frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan x}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan x}$$ متطابقة الظلّ لمجموع زاويتين

$$= \frac{1+\tan x}{1-\tan x}$$ بالتبسيط

أتحقَّق من فهمي أُثبِت صحة كل متطابقة ممّا يأتي:

a) $\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right) = \cot x$

b) $\dfrac{\tan x - 1}{\tan x + 1} = \tan\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

أجد قيمة كلٍّ من النسب المثلثية الآتية ضمن الفترة المعطاة:

1) $\cot\theta, \sin\theta = \dfrac{1}{3}, 0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$

2) $\sec\theta, \tan\theta = -\dfrac{3}{7}, \dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$

3) $\tan\theta, \csc\theta = -\dfrac{5}{3}, \pi<\theta<\dfrac{3\pi}{2}$

4) $\sin\theta, \sec\theta = \dfrac{9}{4}, \dfrac{3\pi}{2}<\theta<2\pi$

أُبسِّط كُلًّا من العبارات المثلثية الآتية:

5) $\cos x \tan x$

6) $\dfrac{\sec x - \cos x}{\sin x}$

7) $\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\csc x} + \cos^2 x$

8) $\dfrac{\sin x - \cos x}{\cos x} + \dfrac{\cos x - \sin x}{\sin x}$

9) $\dfrac{(\sin x + \cos x)^2 - 1}{\sin x \cos x}$

10) $\dfrac{\sec x - \cos x}{\tan x}$

أُثبِت صحة كلٍّ من المتطابقات الآتية:

11) $\cot(-x)\cos(-x) + \sin(-x) = -\csc x$

12) $(\sin x + \cos x)^2 = 1+2\sin x\cos x$

13) $\dfrac{(\sin x + \cos x)^2}{\sin^2 x - \cos^2 x} = \dfrac{\sin^2 x - \cos^2 x}{(\sin x - \cos x)^2}$

14) $\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x} = (\sec x - \tan x)^2$

15) $\sin^4 x - \cos^4 x = \sin^2 x - \cos^2 x$

16) $\dfrac{1}{1-\sin x} - \dfrac{1}{1+\sin x} = 2\sec x\tan x$

17) $\ln|\tan\theta| = \ln|\sin\theta| - \ln|\cos\theta|$

18) $\ln|\sec\theta + \tan\theta| + \ln|\sec\theta - \tan\theta| = 0$

أجد قيمة كلٍّ من النسب المثلثية الآتية من دون استعمال الآلة الحاسبة:

19) $\sin 165°$

20) $\tan 195°$

21) $\sec\left(-\frac{\pi}{12}\right)$

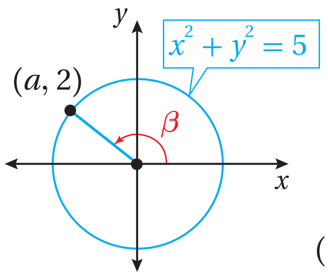
22) $\sin \frac{17\pi}{12}$

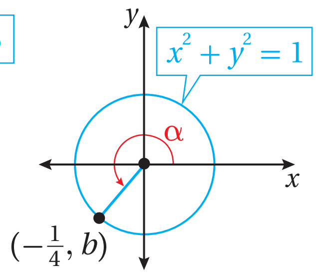
23) $\sin \frac{\pi}{18} \cos \frac{5\pi}{18} + \cos \frac{\pi}{18} \sin \frac{5\pi}{18}$

24) $\frac{\tan 40° - \tan 10°}{1 + \tan 40° \tan 10°}$

أستعمل الشكل المجاور لإيجاد قيمة كلٍّ من الاقترانات الآتية، علمًا بأنَّ:

: $f(x) = \sin x,\ g(x) = \cos x,\ h(x) = \tan x$



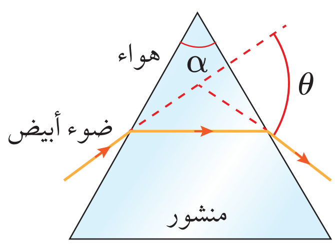


25) $f(\alpha + \beta)$

26) $g(\alpha - \beta)$

27) $h(\alpha + \beta)$

28) **منشــور:** يُمكِن قياس معامل انكسار الضوء الأبيض في المنشور باستعمال المعادلة الآتية:



$$n = \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\alpha}{2}\right)}{\sin \frac{\theta}{2}}$$

إذا كانت $\alpha = 60°$، فأُثبِت أنَّ معادلة معامل الانكسار تُكتَب في صورة:

$.n = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cot \frac{\theta}{2}$

29) إذا كان $g(x) = \cos x$، فأُثبِت أنَّ:

$$\frac{g(x+h) - g(x)}{h} = -\cos x \left(\frac{1 - \cos h}{h}\right) - \sin x \left(\frac{\sin h}{h}\right)$$

30) إذا كان $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = a \sin x + b \cos x$ ، فأجد قيمة كلٍّ من: a، وb.

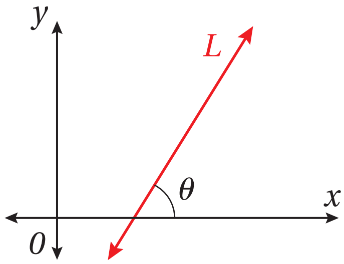
أُثبِت صحة كلٍّ من المتطابقات الآتية:

31) $\sin(A+B) + \sin(A-B) = 2 \sin A \cos B$

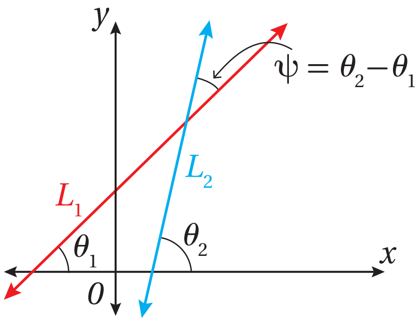
32) $\sin A + \cos A = \sqrt{2} \sin\left(A + \frac{\pi}{4}\right)$

33) $\frac{\sin(A-B)}{\cos A \cos B} + \frac{\sin(B-C)}{\cos B \cos C} + \frac{\sin(C-A)}{\cos C \cos A} = 0$

34) $\cos(x+y) \cos(x-y) = \cos^2 x - \sin^2 y$



35 جبر: إذا كان L مستقيمًا في المستوى الإحداثي، و θ الزاوية التي يصنعها المستقيم مع المحور x، فأُثبِت أنَّ ميل المستقيم m يعطى بالمعادلة: $m = \tan\theta$، حيث: $0 < \theta < 2\pi$.

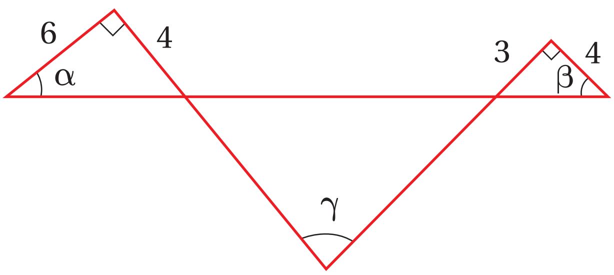


36 إذا كان L_1 و L_2 مستقيمين غير متوازيين في المستوى الإحداثي، وميل كلٍّ منهما m_1 و m_2 على الترتيب، وكانت ψ هي الزاوية الناتجة من تقاطع المستقيمين كما في الشكل المجاور، فأستعمل النتيجة من الفرع السابق لإثبات أنَّ:

$$\tan\psi = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

مهارات التفكير العليا

37 تحدٍّ: اعتمادًا على الشكل الآتي، أُثبِت أنَّ: $\gamma = \alpha + \beta$، ثم أجد $\tan\gamma$.



38 تبرير: إذا كان $\tan\alpha = x + 1$، و $\tan\beta = x - 1$، فأُثبِت أنَّ: $2\cot(\alpha - \beta) = x^2$، مُبرِّرًا إجابتي.

39 تبرير: أجد قيمة $\sin\left(\cos^{-1}\frac{1}{2} + \sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$، مُبرِّرًا إجابتي.

40 أكتشف الخطأ: أكتشف الخطأ في المسألة الآتية، ثم أُصحِّحه:

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4}\cos x - \cos\frac{\pi}{4}\sin x$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x - \sin x)$$

الدرس 2

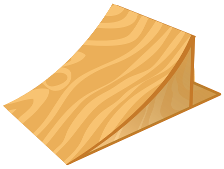
المتطابقات المثلثية 2
Trigonometric Identities 2

فكرة الدرس

- إيجاد قِيَم الاقترانات المثلثية باستعمال المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها.
- إعادة كتابة المقادير المثلثية من صورة الضرب إلى صورة الجمع، والعكس.

مسألة اليوم

يختلف ميل منحدرات التزلُّج المُصمَّمة للمنافسة باختلاف مستوى مهارة المتسابقين؛ فميل المنحدر للمتسابقين المحترفين $\tan \theta = \frac{5}{3}$، حيث θ الزاوية التي يصنعها المنحدر مع سطح الأرض. أمّا المتسابقون المبتدئون فتميل منحدراتهم بزاوية قياسها نصف قياس الزاوية θ. ما ميل منحدر المبتدئين؟



المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية

تُستعمَل متطابقات ضعف الزاوية لإيجاد قيمة اقتران مثلثي عند الزاوية 2θ باستعمال قيمة الاقتران عند الزاوية θ.

مفهوم أساسي — **المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية**

صيغة الجيب	صيغ جيب التمام	صيغة الظلّ
$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$	$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$ $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2 \theta$ $\cos 2\theta = 2\cos^2 \theta - 1$	$\tan 2\theta = \dfrac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$

مثال 1

إذا كان $\sin \theta = \frac{3}{5}$، حيث: $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$، فأجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:

1 $\sin 2\theta$

بما أنَّ $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$، وقيمة $\sin \theta$ معلومة، إذن أجد قيمة $\cos \theta$ أولًا.

الخطوة 1: أجد قيمة $\cos \theta$.

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$ متطابقات فيثاغورس

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2 \theta = 1$$ بتعويض $\sin \theta = \frac{3}{5}$

بالتبسيط $\cos^2\theta = \frac{16}{25}$

بأخذ الجذر التربيعي لكلا الطرفين $\cos\theta = \pm\frac{4}{5}$

بما أنَّ جيب التمام في الربع الثاني سالب، إذن: $\cos\theta = -\frac{4}{5}$.

الخطوة 2: أجد قيمة $\sin 2\theta$.

متطابقة ضعف الزاوية $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

بتعويض $\cos\theta = -\frac{4}{5}$, $\sin\theta = \frac{3}{5}$ $= 2\left(\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{4}{5}\right)$

بالضرب $= -\frac{24}{25}$

2 $\cos 2\theta$

متطابقة ضعف الزاوية $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$

بتعويض $\cos\theta = -\frac{4}{5}$ $= 2\left(-\frac{4}{5}\right)^2 - 1$

بالتبسيط $= \frac{7}{25}$

3 $\tan 2\theta$

الخطوة 1: أجد قيمة $\tan\theta$.

المتطابقات النسبية $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

بتعويض $\cos\theta = -\frac{4}{5}$, $\sin\theta = \frac{3}{5}$ $= \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}}$

بالتبسيط $= -\frac{3}{4}$

الخطوة 2: أجد قيمة $\tan 2\theta$.

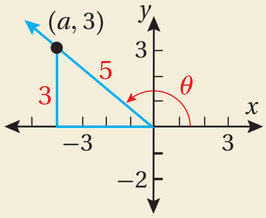
متطابقة ضعف الزاوية $\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

بتعويض $\tan\theta = -\frac{3}{4}$ $= \frac{2\left(-\frac{3}{4}\right)}{1-\left(-\frac{3}{4}\right)^2}$

بالتبسيط $= -\frac{24}{7}$

أتذكَّر

يُمكِن إيجاد قيمة $\cos\theta$ بإيجاد إحداثيي نقطة تقع على ضلع انتهاء الزاوية θ.



أُفكِّر

هل يُمكِن إيجاد $\tan 2\theta$ بطريقة أُخرى؟

أتحقَّق من فهمي

إذا كان $\cos\theta = -\frac{2}{3}$، حيث: $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$، فأجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:

a) $\sin 2\theta$ b) $\cos 2\theta$ c) $\tan 2\theta$

يُمكِنني استعمال متطابقات ضعف الزاوية ومتطابقات مجموع زاويتين لإيجاد قيمة اقتران مثلثي عند 3θ باستعمال قيمة الاقتران عند θ.

مثال 2

أكتب $\cos 3\theta$ بدلالة $\cos\theta$.

$\cos 3\theta = \cos(2\theta+\theta)$	$3\theta = 2\theta + \theta$
$= \cos 2\theta \cos\theta - \sin 2\theta \sin\theta$	متطابقة جيب التمام لمجموع زاويتين
$= (2\cos^2\theta - 1)\cos\theta - (2\sin\theta\cos\theta)\sin\theta$	متطابقات ضعف الزاوية
$= 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2\sin^2\theta\cos\theta$	باستعمال خاصية التوزيع
$= 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2\cos\theta(1-\cos^2\theta)$	متطابقة فيثاغورس
$= 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2\cos\theta + 2\cos^3\theta$	باستعمال خاصية التوزيع
$= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$	بالتبسيط

أتحقَّق من فهمي

أكتب $\sin 3\theta$ بدلالة $\sin\theta$ و $\cos\theta$.

المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية

يُمكِن استعمال المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية في إيجاد متطابقات أقل قوَّة، ثم كتابة المقادير المثلثية التي تتضمَّن قوى للجيب وجيب والتمام بدلالة القوَّة الأولى لجيب التمام فقط.

مفهوم أساسي

المتطابقات المثلثية لتقليص القوّة

$$\sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2} \qquad \cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2} \qquad \tan^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{1+\cos 2\theta}$$

أتعلَّم

تنتج المتطابقات المثلثية لنصف الزاويــة من هذه المتطابقات.

مثال 3

أُعيد كتابة $\sin^2 x \cos^2 x$ بدلالة القوَّة الأولى لجيب التمام.

$$\sin^2 x \cos^2 x = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)$$ متطابقات تقليص القوَّة

$$= \frac{1-\cos^2 2x}{4}$$ باستعمال خاصية التوزيع

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos^2 2x$$ بكتابة الكسر في صورة فرق بين كسرين

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(\frac{1+\cos 4x}{2}\right)$$ متطابقة تقليص القوَّة

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{\cos 4x}{8}$$ باستعمال خاصية التوزيع

$$= \frac{1}{8} - \frac{\cos 4x}{8}$$ بالتبسيط

$$= \frac{1}{8}(1 - \cos 4x)$$ بإخراج العامل المشترك

أتعلَّم

يُمكِن حلُّ المثال السابق باستعمال متطابقة جيب ضعف الزاوية على النحو الآتي:

$$\sin^2 x \cos^2 x = \frac{1}{4}\sin^2 2x$$
$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1-\cos 4x}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{8}(1-\cos 4x)$$

أتحقَّق من فهمي

أُعيد كتابة $\sin^4 x \cos^2 x$ بدلالة القوَّة الأولى لجيب التمام.

تُعَدُّ المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية نتيجة مباشرة لمتطابقات تقليص القوَّة، وذلك بأخذ الجذر التربيعي لطرفي كل متطابقة، واستعمال الزاوية $\frac{\theta}{2}$ بدلًا من الزاوية θ.

مفهوم أساسي

المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية

$$\sin \frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$$

$$\cos \frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$$

$$\tan \frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$$

أتعلَّم

تتضمَّن كل متطابقة الرمز $\pm$، وتُختار الإشارة المناسبة للمتطابقة بحسب الربع الذي يقع فيه ضلع انتهاء الزاوية $\frac{\theta}{2}$.

مثال 4 أجد قيمة $\sin 22.5^\circ$.

بما أنَّ 22.5° هي نصف 45°، فإنَّه يُمكِنني استعمال متطابقة جيب ضعف الزاوية، حيث $x = 45^\circ$، وبما أنَّ ضلع انتهاء الزاوية 22.5° يقع في الربع الأول، إذن أختار الإشارة الموجبة للمتطابقة:

$$\sin \frac{45^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos 45^\circ}{2}}$$ متطابقة نصف الزاوية

$$= \sqrt{\frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{2}}$$ $\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$= \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}$$ بالتبسيط

$$= \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}$$ بإنطاق المقام

$$= \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$$ بالتبسيط

أتحقَّق من فهمي أجد قيمة $\cos 112.5^\circ$.

مثال 5

إذا كان $\cos x = -\frac{3}{5}$، حيث: $\frac{3\pi}{2} > x > \pi$، فأجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:

1 $\sin \frac{x}{2}$

بما أنَّ $\frac{3\pi}{2} > x > \pi$، فإنَّ $\frac{3\pi}{4} > \frac{x}{2} > \frac{\pi}{2}$، وهذا يعني أنَّ ضلع انتهاء الزاوية $\frac{x}{2}$ يقع في الربع الثاني:

$$\sin \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$$ متطابقة نصف الزاوية

$$= \sqrt{\frac{1-(-\frac{3}{5})}{2}}$$ $\cos x = -\frac{3}{5}$

$$= \sqrt{\frac{\frac{8}{5}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$ بالتبسيط

$$= \frac{2\sqrt{5}}{5}$$ بإنطاق المقام

أتذكَّر

بما أنَّ الزاوية $\frac{x}{2}$ تقع في الربع الثاني، إذن أختار الإشارة الموجبة لمتطابقة جيب نصف الزاوية.

2 $\cos\frac{x}{2}$

$$\cos\frac{x}{2} = -\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$$ متطابقة نصف الزاوية

$$= -\sqrt{\frac{1+\left(-\frac{3}{5}\right)}{2}}$$ $\cos x = -\frac{3}{5}$

$$= -\sqrt{\frac{\frac{2}{5}}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$ بالتبسيط

$$= -\frac{\sqrt{5}}{5}$$ بإنطاق المقام

أتذكَّر

بما أنَّ الزاوية $\frac{x}{2}$ تقع في الربع الثاني، إذن أختار الإشارة السالبة لمتطابقة جيب تمام نصف الزاوية.

3 $\tan\frac{x}{2}$

$$\tan\frac{x}{2} = -\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$$ متطابقة نصف الزاوية

$$= -\sqrt{\frac{1-\left(-\frac{3}{5}\right)}{1+\left(-\frac{3}{5}\right)}}$$ $\cos x = -\frac{3}{5}$

$$= -\sqrt{\frac{\frac{8}{5}}{\frac{2}{5}}} = -\sqrt{\frac{8}{2}}$$ بالتبسيط

$$= -\sqrt{4} = -2$$ بإيجاد الجذر التربيعي

أتذكَّر

بما أنَّ الزاوية $\frac{x}{2}$ تقع في الربع الثاني، إذن أختار الإشارة السالبة لمتطابقة ظلِّ نصف الزاوية.

أتحقَّق من فهمي

إذا كان $\sin x = \frac{2}{5}$، حيث: $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ ، فأجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:

a) $\sin\frac{x}{2}$ b) $\cos\frac{x}{2}$ c) $\tan\frac{x}{2}$

متطابقات تحويل الضرب إلى مجموع أو فرق

يُمكِن كتابة مقدار ضرب، مثل $\sin u \cos v$، في صورة حاصل جمع اقترانات مثلثية أو طرحها، وذلك باستعمال متطابقات تحويل الضرب إلى جمع.

مفهوم أساسي **متطابقات تحويل الضرب إلى مجموع أو فرق**

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)]$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)]$$

$$\cos\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta) - \sin(\alpha+\beta)]$$

مثال 6

أُعيد كتابة $\sin 3x \sin 5x$ في صورة مجموع أو فرق.

$$\sin 3x\sin 5x = \frac{1}{2}[\cos(3x-5x) - \cos(3x+5x)]$$ متطابقات تحويل الضرب إلى مجموع أو فرق

$$= \frac{1}{2}[\cos(-2x) - \cos 8x]$$ بالتبسيط

$$= \frac{1}{2}\cos(2x) - \frac{1}{2}\cos 8x$$ متطابقات الزاوية السالبة، وخاصية التوزيع

أتحقَّق من فهمي

أُعيد كتابة $\sin 7x \cos x$ في صورة مجموع أو فرق.

ترتبط كلٌّ من متطابقات تحويل الضرب إلى مجموع أو فرق بإحدى متطابقات تحويل المجموع أو الفرق إلى ضرب.

مفهوم أساسي **متطابقات المجموع أو الفرق إلى ضرب**

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

مثال 7

أُعيد كتابة $\sin 5x - \sin 3x$ في صورة ضرب.

متطابقات تحويل المجموع أو الفرق إلى ضرب

$$\sin 5x - \sin 3x = 2\cos\left(\frac{5x+3x}{2}\right)\sin\left(\frac{5x-3x}{2}\right)$$

بالتبسيط

$$= 2\cos\left(\frac{8x}{2}\right)\sin\left(\frac{2x}{2}\right) = 2\cos(4x)\sin(x)$$

أتحقَّق من فهمي

أُعيد كتابة $\cos 3x + \cos 2x$ في صورة ضرب.

يُمكِن استعمال المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية، والمتطابقات المثلثية لنصف الزاوية، ومتطابقات تحويل الضرب إلى مجموع أو فرق، في إثبات متطابقات مثلثية أُخرى.

مثال 8

أُثبِت صحة كل متطابقة ممّا يأتي:

1 $\dfrac{\sin 3x}{\sin x \cos x} = 4\cos x - \sec x$

أُلاحِظ أنَّ طرف المتطابقة الأيسر أكثر تعقيدًا؛ لذا أبدأ بالمقدار المثلثي الموجود فيه:

$3x = x + 2x$

$$\frac{\sin 3x}{\sin x \cos x} = \frac{\sin(x+2x)}{\sin x \cos x}$$

متطابقة جيب المجموع لزاويتين

$$= \frac{\sin x \cos 2x + \cos x \sin 2x}{\sin x \cos x}$$

متطابقات ضعف الزاوية

$$= \frac{\sin x\,(2\cos^2 x - 1) + \cos x\,(2\sin x \cos x)}{\sin x \cos x}$$

بكتابة الكسر في صورة مجموع كسرين

$$= \frac{\sin x\,(2\cos^2 x - 1)}{\sin x \cos x} + \frac{\cos x\,(2\sin x \cos x)}{\sin x \cos x}$$

باختصار العامل المشترك في البسط والمقام

$$= \frac{2\cos^2 x - 1}{\cos x} + 2\cos x$$

بكتابة الكسر في صورة الفرق بين كسرين

$$= 2\cos x - \frac{1}{\cos x} + 2\cos x$$

متطابقات المقلوب

$$= 4\cos x - \sec x \quad ✓$$

2 $\dfrac{\sin 3x - \sin x}{\cos 3x + \cos x} = \tan x$

أُلاحِظ أنَّ طرف المتطابقة الأيسر أكثر تعقيدًا؛ لذا أبدأ بالمقدار المثلثي الموجود فيه:

$$\frac{\sin 3x - \sin x}{\cos 3x + \cos x} = \frac{2\cos\left(\frac{3x+x}{2}\right)\sin\left(\frac{3x-x}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{3x+x}{2}\right)\cos\left(\frac{3x-x}{2}\right)}$$ متطابقات تحويل الجمع إلى ضرب

$$= \frac{2\cos 2x \sin x}{2\cos 2x \cos x}$$ بالتبسيط

$$= \frac{\sin x}{\cos x}$$ باختصار العامل المشترك

$$= \tan x \quad ✓$$ المتطابقات النسبية

أتحقَّق من فهمي

أُثبِت صحة كل متطابقة ممّا يأتي:

a) $\dfrac{2\tan x}{1+\tan^2 x} = \sin 2x$

b) $\dfrac{\sin x + \sin y}{\cos x + \cos y} = \tan\left(\dfrac{x+y}{2}\right)$

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

أجد قيمة كلٍّ من: $\cos 2\theta, \sin 2\theta, \sin\frac{\theta}{2}, \cos\frac{\theta}{2}$ للزاوية θ في الفترة المعطاة:

1 $\sin\theta = \frac{5}{13}, 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

2 $\cos\theta = -\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

3 $\tan\theta = \frac{1}{2}, \pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$

4 $\csc\theta = -\sqrt{5}, \cos\theta < 0$

5 $\cot\theta = \frac{2}{3}, \sin\theta > 0$

6 $\sec\theta = 3, \sin\theta > 0$

أستعمل المتطابقات المثلثية لتقليص القوَّة في كتابة المقادير الآتية بدلالة القوَّة الأولى لجيب التمام:

7 $\sin^4 x$

8 $\cos^4 x$

9 $\cos^4 x \sin^2 x$

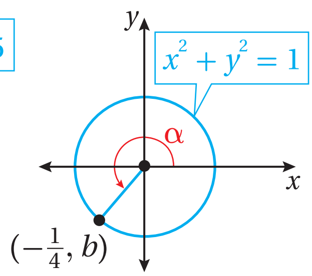
أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:

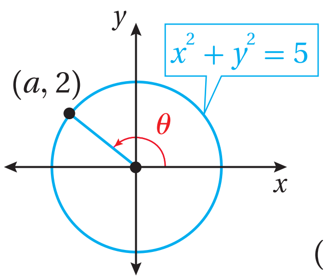
10 $\cos 22.5°$

11 $\sin 195°$

12 $\tan\frac{7\pi}{8}$

أستعمل الشكل المجاور لإيجاد قيمة كلٍّ من الاقترانات الآتية، علمًا بأنَّ:





$$f(x) = \sin x, g(x) = \cos x, h(x) = \tan x:$$

13) $g(2\theta)$

14) $g\left(\frac{\theta}{2}\right)$

15) $f(2\alpha)$

16) $h\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

أُعيد كتابة كل مقدار ممّا يأتي في صورة مجموع أو فرق:

17) $\sin 2x \cos 3x$

18) $\sin x \sin 5x$

19) $3 \cos 4x \cos 7x$

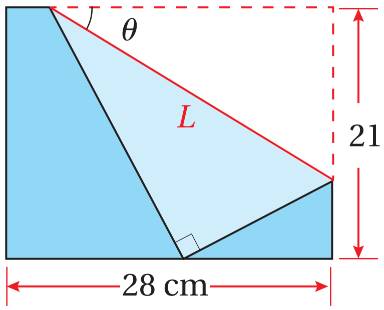
أُعيد كتابة كل مقدار ممّا يأتي في صورة ضرب:

20) $\sin x - \sin 4x$

21) $\cos 9x - \cos 2x$

22) $\sin 3x + \sin 4x$

الأوريغامي: يقوم فن الأوريغامي (فن طيِّ الورق) الياباني على طيِّ قطعة واحدة من الورق بصورة مُتكرِّرة لصنع أشكال فنية. فعند طيِّ الجزء الأيمن إلى الأسفل من ورقة مستطيلة، بُعْداها: **21.6 cm**، و**28 cm**، كما في الشكل المجاور، فإنَّ طول خط الطيِّ L يرتبط بالزاوية θ عن طريق العلاقة:



$$L = \frac{10.8}{\sin \theta \cos^2 \theta}:$$

23) أُثبِت أنَّ علاقة طول خط الطيِّ تُكافِئ العلاقة:

$$L = \frac{21.6 \sec \theta}{\sin 2\theta}.$$

24) أجد طول خط الطيِّ L إذا كانت $\theta = 30°$.

أُثبِت صحة كلٍّ من المتطابقات الآتية:

25) $\cos^2 5x - \sin^2 5x = \cos 10x$

26) $\cos x = \frac{1}{2}(\sin x \sin 2x + 2\cos^3 x)$

27) $\cos 2x + 2\cos x + 1 = 2\cos x(\cos x + 1)$

28) $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$

29) $\tan 3x = \frac{3\tan x - \tan^3 x}{1 - 3\tan^2 x}$

30) $\sin x = 4\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\sin\frac{x}{4}$

31) $\frac{\cos 2x}{\cos^2 x} + \tan^2 x = 1$

32) $\cos^2 2x = 4\cos^4 x - 4\cos^2 x + 1$

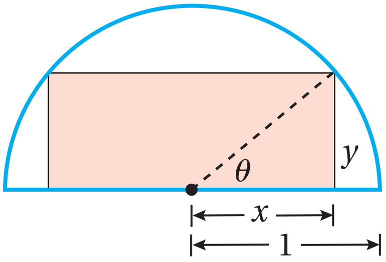
33) $\frac{2(\tan x - \cot x)}{\tan^2 x - \cot^2 x} = \sin 2x$

34) $\tan^2\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}$

35) $\cot^2 \frac{x}{2} = \frac{\sec x + 1}{\sec x - 1}$

36) $\ln|\sin x| = \frac{1}{2}(\ln|1 - \cos 2x| - \ln 2)$

مهارات التفكير العليا



تبرير: يُبيِّن الشكل المجاور مستطيلًا مرسومًا في نصف دائرة، طول نصف قُطْرِها وحدة واحدة:

37) أُعبِّر باقترانٍ بدلالة الزاوية θ عن المساحة A للمستطيل المُوضَّح في الشكل المجاور، مُبرِّرًا إجابتي.

38) أُثبِت أنَّ $A(\theta) = \sin 2\theta$، مُبرِّرًا إجابتي.

تحدٍّ: أُثبِت صحة كلٍّ ممّا يأتي:

39) $\cos 4x = 1 - 8\sin^2 x \cos^2 x$

40) $\cos^4 x = \frac{1}{8}(3 + \cos 4x + 4\cos 2x)$

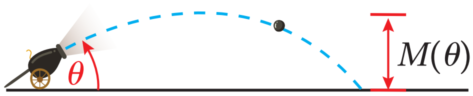
الدرس 3

حل المعادلات المثلثية
Solving Trigonometric Equations

فكرة الدرس حلُّ المعادلات المثلثية.

المصطلحات المعادلة المثلثية، المعادلة المثلثية الأساسية.

مسألة اليوم يُطلِق مِدْفع قذيفة بسرعة ابتدائية مقدارها v_0 قدمًا لكل ثانية، وزاوية مقدارها θ. ويُستعمَل الاقتران: $M(\theta) = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{64}$ لإيجاد أقصى ارتفاع تبلغه القذيفة بالأقدام. إذا افترضْتُ أنَّ $v_0 = 400$ ft/s، فأجد قياس الزاوية θ، علمًا بأنَّ أقصى ارتفاع للقذيفة هو 625 ft



يُطلَق على المعادلة التي تحوي اقترانات مثلثية اسم **المعادلة المثلثية** (trigonometric equation). وتُعَدُّ المتطابقات المثلثية التي تعرَّفْتُها سابقًا حالة خاصة من المعادلات المثلثية؛ لأنَّها صحيحة لجميع قِيَم المُتغيِّرات المُعرَّف عندها طرفا المعادلة، ولكنَّ بعض هذه المعادلات تكون صحيحة فقط عند قِيَم مُحدَّدة للمُتغيِّر. سأتعلَّم في هذا الدرس كيفية إيجاد حلٍّ لهذا النوع من المعادلات.

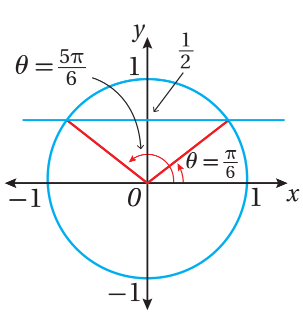
حلُّ المعادلات المثلثية الأساسية

المعادلة المثلثية الأساسية (basic trigonometric equation) هي معادلة في صورة $T(\theta) = c$، حيث: $T(\theta)$ اقتران مثلثي، وc ثابت. لحلِّ أيِّ معادلة مثلثية، يجب تبسيطها بحيث تصبح معادلة مثلثية أساسية؛ لذا من المهم أولًا إتقان حلِّ المعادلات المثلثية الأساسية.

مثال 1

أحُلُّ كل معادلة ممّا يأتي:

1 $\sin x = \frac{1}{2}$



الخطوة 1: أجد الحلَّ ضمن دورة واحدة.

بما أنَّ طول دورة اقتران الجيب 2π، فإنَّني أبدأ أولًا بإيجاد حلِّ المعادلة ضمن الفترة $[0, 2\pi)$. وبالرجوع إلى دائرة الوحدة، أجد أنَّ $\sin x = \frac{1}{2}$ في الربعين: الأول، والثاني، حيث يكون اقتران الجيب موجبًا.

إذن، يوجد حلّان للمعادلة في الفترة $[0, 2\pi)$، هما:

$$x = \frac{\pi}{6} \quad , \quad x = \frac{5\pi}{6}$$

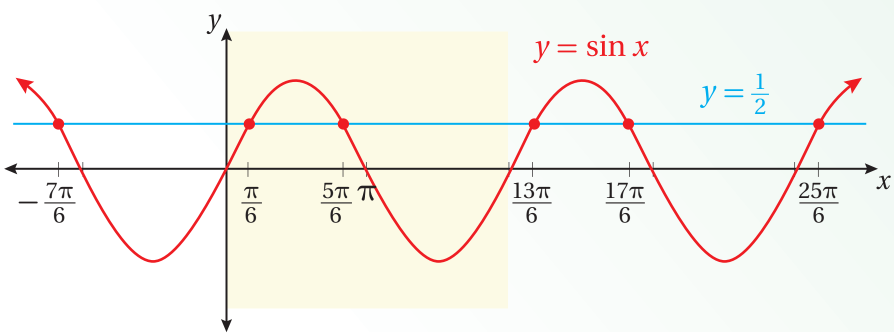
الخطوة 2: أجد جميع حلول المعادلة.

بمـــا أنَّ قِيَم اقتــران الجيب تتكرَّر كل 2π وحـــدة، فإنَّني أجد جميع حلـــول المعادلة بإضافة مضاعفات العدد 2π الصحيحة إلى كلٍّ من الحلَّيْنِ السابقيْنِ على النحو الآتي:

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad , \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$ حيث k عدد صحيح

الدعم البياني:

يُبيِّن الشكل الآتي التمثيل البياني للحلول:

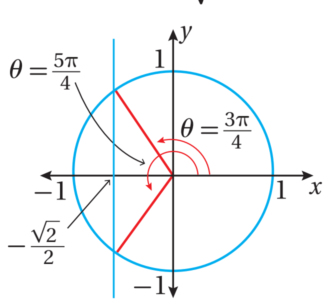


أتعلَّم

لإيجـاد الحـلِّ الواقـع في الربع الثانـي، أطرح الزاويــة المرجعيـة $\frac{\pi}{6}$ من π:

$$\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$

2 $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$



الخطوة 1: أجد الحلَّ ضمن دورة واحدة.

بما أنَّ طول دورة اقتران جيب التمـــام 2π، فإنَّني أبدأ أولًا بإيجاد حـــلِّ المعادلة ضمن الفترة $[0, 2\pi)$. وبالرجوع إلى دائرة الوحدة، أجد أنَّ $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ في الربعين: الثاني، والثالث، حيث يكون اقتران جيب التمام سالبًا.

إذن، يوجد حلّان للمعادلة في الفترة $[0, 2\pi)$، هما:

$$x = \frac{3\pi}{4} \quad , \quad x = \frac{5\pi}{4}$$

الخطوة 2: أجد جميع حلول المعادلة.

بما أنَّ قِيَم اقتران جيب التمـــام تتكرَّر كل 2π وحدة، فإنَّني أجد جميع حلول المعادلة بإضافة مضاعفات العدد 2π الصحيحة إلى كلٍّ من الحلَّيْنِ السابقيْنِ على النحو الآتي:

$$x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \quad , \quad x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$$ حيث k عدد صحيح

أتعلَّم

لإيجاد الحلِّ الواقع في الربع الثاني، أطرح الزاوية المرجعية $\frac{\pi}{4}$ من π:

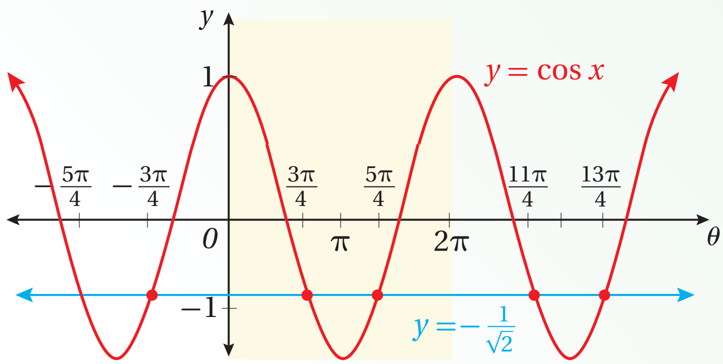
$$\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

ولإيجاد الحلِّ الواقع في الربع الثالث، أُضيف الزاوية المرجعية $\frac{\pi}{4}$ إلى π:

$$\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$$

الدعم البياني:

يُبيِّن الشكل الآتي التمثيل البياني للحلول:



أتحقَّق من فهمي

أَحُلُّ كل معادلة ممّا يأتي:

a) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\cos x = \frac{1}{2}$

تعلَّمْتُ في المثال السابق حلَّ معادلات مثلثية أساسية لنسب مثلثية ذات زوايا خاصة. ولكنْ، إذا لم تكن الزوايا معروفة، فيُمكِنني استعمال الآلة الحاسبة لإيجادها.

مثال 2

أَحُلُّ كل معادلة ممّا يأتي:

1 $\cos x = 0.65$

الخطوة 1: أجد الزاوية المرجعية باستعمال الآلة الحاسبة.

$\cos x = 0.65$ المعادلة المعطاة

$x = \cos^{-1}(0.65)$ بأخذ $\cos^{-1}$ لطرفي المعادلة

≈ 0.86 باستعمال الآلة الحاسبة

بما أنَّ طول دورة اقتران جيب التمام 2π، فإنَّني أبدأ أولًا بإيجاد حلِّ المعادلة ضمن الفترة $[0, 2\pi)$. وبالرجوع إلى دائرة الوحدة، أجد أنَّ $\cos x = 0.65$ في الربعين: الأول، والرابع.

إذن، يوجد حلّان للمعادلة في الفترة $[0, 2\pi)$، هما:

$$x \approx 0.68 \quad , \quad x \approx 5.6$$

أتذكَّر

لإيجاد قياس الزاوية، أضبط الآلة الحاسبة على نظام الراديان.

أتعلَّم

لإيجاد الحلِّ الواقع في الربع الرابع، أطرح الزاوية المرجعية 0.68 من 2π:

$2\pi - 0.68 \approx 5.6$

الخطوة 2: أجد جميع حلول المعادلة.

بما أنَّ قِيَم اقتران جيب التمــــام تتكرَّر كل 2π وحدة، فإنَّني أجد جميع حلول المعادلة بإضافة مضاعفات العدد 2π الصحيحة إلى كلٍّ من الحلَّيْنِ السابقيْنِ على النحو الآتي:

$x \approx 0.68 + 2k\pi \quad , \quad x \approx 5.6 + 2k\pi$ حيث k عدد صحيح

2 $\tan x = -2$

الخطوة 1: أجد الزاوية المرجعية باستعمال الآلة الحاسبة.

$\tan x = -2$ المعادلة المعطاة

$x = \tan^{-1}(-2)$ بأخذ $\tan^{-1}$ لطرفي المعادلة

≈ -1.11 باستعمال الآلة الحاسبة

بما أنَّ طول دورة اقتران الظلِّ π، فإنَّني أجد حلَّ المعادلة ضمن الفترة $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

للمعادلة حلٌّ وحيد ضمن هذه الفترة هو: $x \approx -1.11$.

الخطوة 2: أجد جميع حلول المعادلة.

بما أنَّ قِيَم اقتران الظلِّ تتكرَّر كل π وحدة، فإنَّني أجد جميع حلول المعادلة بإضافة مضاعفات العدد π الصحيحة إلى الحلِّ السابق على النحو الآتي:

$x \approx -1.1 + k\pi$ حيث k عدد صحيح

أتحقَّق من فهمي

أحُلُّ كل معادلة ممّا يأتي:

a) $\sin x = 0.23$

b) $\tan x = -10$

أتذكَّر

لإيجـاد قيــاس الزاوية، أضبط الآلة الحاسبة على نظام الراديان.

حلُّ معادلات مثلثية تحوي اقترانًا مثلثيًّا واحدًا

يُمكِــن حلُّ معادلات مثلثية تحوي اقترانًا مثلثيًّا واحــدًا عن طريق فصل هذا الاقتران في أحد طرفي المعادلة أولًا، ثم إيجاد حلٍّ للمعادلة.

مثال 3

أحُلُّ كل معادلة ممّا يأتي:

1 $3 \sin x - 2 = 5 \sin x - 1$

الخطوة 1: أفصل الاقتران المثلثي في أحد طرفي المعادلة.

المعادلة المعطاة	$3 \sin x - 2 = 5 \sin x - 1$
بطرح $5 \sin x$ من كلا الطرفين	$-2 \sin x - 2 = -1$
بإضافة 2 إلى كلا الطرفين	$-2 \sin x = 1$
بقسمة طرفي المعادلة على -2	$\sin x = -\frac{1}{2}$

الخطوة 2: أجد الحلَّ ضمن دورة واحدة.

بما أنَّ طول دورة اقتران الجيب 2π، فإنَّني أبدأ أولًا بإيجاد حلِّ المعادلة ضمن الفترة $[0, 2\pi)$. وبالرجوع إلى دائرة الوحدة، أجد أنَّ $\sin x = -\frac{1}{2}$ في الربعين: الثالث، والرابع.

إذن، يوجد حلّان للمعادلة في الفترة $[0, 2\pi)$، هما:

$$x = \frac{11\pi}{6} \quad , \quad x = \frac{7\pi}{6}$$

الخطوة 3: أجد جميع حلول المعادلة.

بما أنَّ قِيَم اقتران الجيب تتكرَّر كل 2π وحدة، فإنَّني أجد جميع حلول المعادلة بإضافة مضاعفات العدد 2π الصحيحة إلى كلٍّ من الحلَّيْنِ السابقيْنِ على النحو الآتي:

حيث k عدد صحيح $\quad x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \quad , \quad x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$

2 $\tan^2 x - 3 = 0$

الخطوة 1: أفصل الاقتران المثلثي في أحد طرفي المعادلة.

المعادلة المعطاة	$\tan^2 x - 3 = 0$
بإضافة 3 إلى طرفي المعادلة	$\tan^2 x = 3$
بأخذ الجذر التربيعي لكلا الطرفين	$\tan x = \pm\sqrt{3}$

الخطوة 2: أجد الحلَّ ضمن دورة واحدة.

بما أنَّ طول دورة اقتران الظلِّ π، فإنَّني أجد حلَّ المعادلة ضمن الفترة $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

أتعلَّم

لإيجاد الحلِّ الواقع في الربع الثالث، أُضيف الزاوية المرجعية $\frac{\pi}{6}$ إلى π:

$$\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$$

ولإيجاد الحلِّ الواقع في الربع الرابع، أطرح الزاوية المرجعية $\frac{\pi}{6}$ من 2π:

$$2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$$

إذن، يوجد حلّان للمعادلة ضمن هذه الفترة، هما:

$$x = \frac{\pi}{3} \quad , \quad x = -\frac{\pi}{3}$$

الخطوة 3: أجد جميع حلول المعادلة.

بما أنَّ قِيَم اقتران الظلِّ تتكرَّر كل π وحدة، فإنَّني أجد جميع حلول المعادلة بإضافة مضاعفات العدد π الصحيحة إلى كلٍّ من الحلَّيْنِ السابقَيْنِ على النحو الآتي:

$$x = \frac{\pi}{3} + k\pi \quad , \quad x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$$ حيث k عدد صحيح

أتحقَّق من فهمي

أحُلُّ كل معادلة ممّا يأتي:

a) $5 \sin x = 3 \sin x + \sqrt{3}$

b) $2 \cos^2 x - 1 = 0$

حلُّ المعادلات المثلثية بالتحليل

يُمكِن حلُّ بعض المعادلات المثلثية باستعمال التحليل، مثل المعادلات التي في صورة معادلة تربيعية، والمعادلات التي تتطلَّب إخراج عامل مشترك.

مثال 4

أحُلُّ كل معادلة ممّا يأتي في الفترة $[0, 2\pi)$:

1 $2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1 = 0$

$$2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1 = 0$$ المعادلة المعطاة

$$(2 \sin x - 1)(\sin x - 1) = 0$$ بالتحليل

$$2 \sin x - 1 = 0 \quad \text{or} \quad \sin x - 1 = 0$$ خاصية الضرب الصفري

$$\sin x = \frac{1}{2} \qquad \sin x = 1$$ بإضافة 1 إلى طرفي كل معادلة، وقسمة طرفي المعادلة الأولى على 2

$$x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \qquad x = \frac{\pi}{2}$$ بحلِّ المعادلة لـ x في الفترة $[0, 2\pi)$

إذن، حلول المعادلة في الفترة $[0, 2\pi)$ هي: $x = \frac{\pi}{6}, x = \frac{5\pi}{6}, x = \frac{\pi}{2}$

2 $\cos x \sin x = 3 \cos x$

المعادلة المعطاة	$\cos x \sin x = 3 \cos x$
بإعادة ترتيب المعادلة	$\cos x \sin x - 3 \cos x = 0$
بإخراج العامل المشترك	$\cos x (\sin x - 3) = 0$
خاصية الضرب الصفري	$\cos x = 0$ or $\sin x - 3 = 0$
بإضافة 3 إلى طرفي المعادلة الثانية	$\cos x = 0$ $\quad$ $\sin x = 3$
بحلِّ المعادلة لـ x في الفترة $[0, 2\pi)$	$x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

لا يوجد حلٌّ للمعادلة: $\sin x = 3$؛ لأنَّ القيمة العظمى لاقتران $\sin x$ هي 1

إذن، يوجد حلّان للمعادلة في الفترة $[0, 2\pi)$، هما: $x = \frac{\pi}{2}, x = \frac{3\pi}{2}$

أخطاء شائعة

مـن الأخطـاء الشـائعة عنـد حلِّ معادلـة، مثل: $\cos x \sin x = 3 \cos x$، قسـمة طرفـي المعادلة على $\cos x$، وهذا يؤدي إلى فقدان الحلَّيْنِ عندما $\cos x = 0$، وهمـا: $x = \frac{\pi}{2}, x = \frac{3\pi}{2}$

أتحقَّق من فهمي

أَحُلُّ كل معادلة ممّا يأتي في الفترة $[0, 2\pi)$:

a) $2 \sin^2 x - \sin x - 1 = 0$

b) $\sin x \cos x = 2 \sin x$

حلُّ المعادلات المثلثية باستعمال المتطابقات المثلثية

تحتوي بعـض المعادلات المثلثية اقترانًـا مثلثيًّا أو أكثر، ولكنْ يتعـذَّر فصل هذه الاقترانات بالتحليل؛ لذا يمكن حلها باستعمال المتطابقات المثلثية بالإضافة إلى بعض العمليات الجبرية.

أتعلَّم

عند استعمال المتطابقات والعمليـات الجبريـة فـي حـلِّ المعـادلات، فـإنَّ الناتج قـد لا يُحقِّق المعادلـة الأصليـة؛ لـذا يجـب التحقُّق من صحة الحـلِّ بالتعويض فـي المعادلـة الأصلية، أو تمثيل المعادلـة بيانيًّا باسـتعمال برمجيـة جيوجبرا.

مثال 5

أَحُلُّ كل معادلة ممّا يأتي في الفترة $[0, 2\pi)$:

1 $2 \cos^2 x + 3 \sin x = 0$

المعادلة المعطاة	$2 \cos^2 x + 3 \sin x = 0$
متطابقات فيثاغورس	$2 (1 - \sin^2 x) + 3 \sin x = 0$
خاصية التوزيع	$2 - 2 \sin^2 x + 3 \sin x = 0$
بضرب طرفي المعادلة في -1	$2 \sin^2 x - 3 \sin x - 2 = 0$
بالتحليل	$(2 \sin x + 1)(\sin x - 2) = 0$

خاصية الضرب الصفري	$2\sin x + 1 = 0$ or $\sin x - 2 = 0$
بحِّل كل معادلة لـ $\sin x$	$\sin x = -\frac{1}{2}$ $\sin x = 2$
بحِّل المعادلة لـ x في الفترة $[0, 2\pi)$	$x = \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$

لا يوجد حلٌّ للمعادلة: $\sin x = 2$؛ لأنَّ القيمة العظمى لاقتران $\sin x$ هي 1

أتحقَّق:

للتحقُّق، أُعوِّض قيمتي x في المعادلة الأصلية.

عندما $x = \frac{7\pi}{6}$

$$2\cos^2\left(\frac{7\pi}{6}\right) + 3\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) \stackrel{?}{=} 0$$

$$2\left(\frac{3}{4}\right) + 3\left(-\frac{1}{2}\right) \stackrel{?}{=} 0$$

$$\frac{3}{2} + -\frac{3}{2} \stackrel{?}{=} 0$$

$$0 = 0 \quad \checkmark$$

عندما $x = \frac{11\pi}{6}$

$$2\cos^2\left(\frac{11\pi}{6}\right) + 3\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right) \stackrel{?}{=} 0$$

$$2\left(\frac{3}{4}\right) + 3\left(-\frac{1}{2}\right) \stackrel{?}{=} 0$$

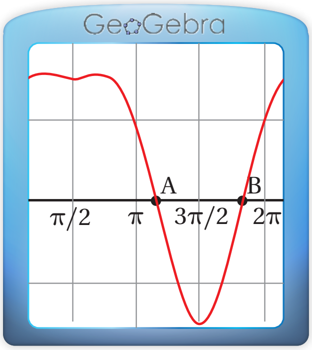
$$\frac{3}{2} + -\frac{3}{2} \stackrel{?}{=} 0$$

$$0 = 0 \quad \checkmark$$

إذن، يوجد حلّان للمعادلة في الفترة $[0, 2\pi)$، هما: $x = \frac{11\pi}{6}, x = \frac{7\pi}{6}$

الدعم البياني:

يُمكِنني التحقُّق من صحة الحلِّ بتمثيل المعادلة: $y = 2\cos^2 x + 3\sin x$، باستعمال برمجية جيوجبرا، وملاحظة نقاط تقاطع منحنى المعادلة مع المحور x في الفترة $[0, 2\pi)$.



2 $\sin 2x - \cos x = 0$

المعادلة المعطاة	$\sin 2x - \cos x = 0$
متطابقات ضعف الزاوية	$2\sin x\cos x - \cos x = 0$
بإخراج العامل المشترك	$\cos x(2\sin x - 1) = 0$
خاصية الضرب الصفري	$\cos x = 0$ or $2\sin x - 1 = 0$
بحِّل المعادلة الثانية لـ $\sin x$	$\cos x = 0$ $\sin x = \frac{1}{2}$
بحِّل كل المعادلة لـ x في الفترة $[0, 2\pi)$	$x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ $x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$

أتحقَّق:

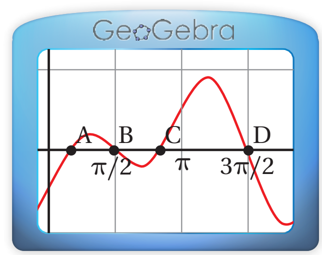
للتحقُّق، أُعوِّض قِيَم x في المعادلة الأصلية.

عندما $x=\frac{\pi}{6}$	عندما $x=\frac{5\pi}{6}$	عندما $x=\frac{\pi}{2}$	عندما $x=\frac{3\pi}{2}$
$\sin 2\left(\frac{\pi}{6}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\stackrel{?}{=}0$	$\sin 2\left(\frac{5\pi}{6}\right)-\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)\stackrel{?}{=}0$	$\sin 2\left(\frac{\pi}{2}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\stackrel{?}{=}0$	$\sin 2\left(\frac{3\pi}{2}\right)-\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)\stackrel{?}{=}0$
$\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\stackrel{?}{=}0$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}-(-\frac{\sqrt{3}}{2})\stackrel{?}{=}0$	$0-0\stackrel{?}{=}0$	$0-0\stackrel{?}{=}0$
$0=0$ ✓	$0=0$ ✓	$0=0$ ✓	$0=0$ ✓

إذن، حلول المعادلة في الفترة $[0, 2\pi)$، هي: $x=\frac{3\pi}{2}$ ، $x=\frac{\pi}{2}$ ، $x=\frac{5\pi}{6}$ ، $x=\frac{\pi}{6}$

الدعم البياني:

يُمكِنني التحقُّق من صحة الحلِّ بتمثيل المعادلة: $y=\sin 2x-\cos x$ بيانيًّا، باستعمال برمجية جيوجبرا، وملاحظة نقاط تقاطع منحنى المعادلة مع المحور x في الفترة $[0, 2\pi)$.



أتحقَّق من فهمي أَحُلُّ كل معادلة ممّا يأتي في الفترة $[0, 2\pi)$:

a) $2\sin^2 x-3\cos x=0$

b) $2\sin 2x-3\sin x=0$

يتطلَّب حلُّ بعض المعادلات المثلثية تربيع طرفي المعادلة أولًا، ثم استعمال المتطابقات. وقد لا يُحقِّق الناتج المعادلة الأصلية؛ لذا يجب التحقُّق من صحة الحلِّ.

مثال 6

أَحُلُّ المعادلة: $\cos x+1=\sin x$ في الفترة $[0, 2\pi)$.

المعادلة المعطاة	$\cos x+1=\sin x$
بتربيع الطرفين	$\cos^2 x+2\cos x+1=\sin^2 x$
متطابقات فيثاغورس	$\cos^2 x+2\cos x+1=1-\cos^2 x$
بالتبسيط	$2\cos^2 x+2\cos x=0$
بإخراج $2\cos x$	$2\cos x(\cos x+1)=0$
خاصية الضرب الصفري	$2\cos x=0$ or $\cos x+1=0$
بحلِّ كل معادلة لـ $\cos x$	$\cos x=0$ $\cos x=-1$
بحلِّ كل المعادلة لـ x في الفترة $[0, 2\pi)$	$x=\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ $x=\pi$

أتعلَّم

أُربِّع طرفي المعادلة تمهيدًا للحصول على المتطابقة:

$\cos^2 x+\sin^2 x=1$

أتحقَّق:

للتحقُّق، أُعوِّض قِيَم x في المعادلة الأصلية.

عندما $x = \frac{3\pi}{2}$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + 1 \stackrel{?}{=} \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)$$

$$0 + 1 \stackrel{?}{=} -1$$

$$1 \neq -1 \quad ✗$$

عندما $x = \frac{\pi}{2}$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + 1 \stackrel{?}{=} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$0 + 1 \stackrel{?}{=} 1$$

$$1 = 1 \quad ✓$$

عندما $x = \pi$

$$\cos(\pi) + 1 \stackrel{?}{=} \sin(\pi)$$

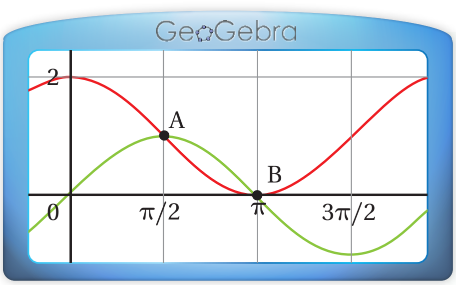
$$-1 + 1 \stackrel{?}{=} 0$$

$$0 = 0 \quad ✓$$

إذن، يوجد حلّان للمعادلة في الفترة $[0, 2\pi)$، هما: $x = \pi$, $x = \frac{\pi}{2}$

الدعم البياني:

يُمكِنني التحقُّق من صحة الحلِّ بتمثيل المعادلتين: $y = \sin x$، و $y = \cos x + 1$ بيانيًّا، باستعمال برمجية جيوجبرا، وملاحظة نقاط تقاطع منحنيي المعادلتين في الفترة $[0, 2\pi)$.



أتحقَّق من فهمي أحُلُّ المعادلة: $\cos x - \sin x = -1$ في الفترة $[0, 2\pi)$.

حلُّ معادلات مثلثية تحوي اقترانات لضعف الزاوية

يُمكِن حلُّ معادلة مثلثية تحوي اقترانًا مثلثيًّا لضعف الزاوية، بحلِّ المعادلة لإيجاد قيمة النسبة المثلثية لضعف الزاوية أولًا، ثم إجراء عملية القسمة لإيجاد قياس الزاوية.

مثال 7

أحُلُّ المعادلة: $\cos x \sin x = -\frac{1}{2}$ في الفترة $[0, 2\pi)$.

$\cos x \sin x = -\frac{1}{2}$ — المعادلة المعطاة

$2 \cos x \sin x = -1$ — بضرب طرفي المعادلة في 2

$\sin 2x = -1$ — متطابقات ضعف الزاوية

بما أنَّ طول دورة اقتران الجيب 2π ، فـإنَّ الحلَّ الوحيد للمعادلة في الفترة $(0, 2\pi]$ هو $\frac{3\pi}{2}$، وهذا يعني أنَّ $2x = \frac{3\pi}{2}$. ومنه، فإنَّ جميع حلول المعادلة: $\sin 2x = -1$ تُكتَب في صورة:

$$2x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$$ عدد صحيح k

$$x = \frac{3\pi}{4} + k\pi$$ بقسمة طرفي المعادلة على 2

يُمكِن إيجاد حلول المعادلة: $\sin 2x = -1$ في الفترة $(0, 2\pi]$ على النحو الآتي:

$$x = \frac{3\pi}{4} + (0)\pi = \frac{3\pi}{4} \quad , \quad x = \frac{3\pi}{4} + (1)\pi = \frac{7\pi}{4} \quad , \quad x = \frac{3\pi}{4} + (2)\pi = \frac{11\pi}{4}$$

إذن، يوجد حلّان للمعادلة في الفترة $(0, 2\pi]$، هما: $x = \frac{7\pi}{4}$, $x = \frac{3\pi}{4}$

أتحقَّق من فهمي

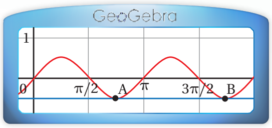
أحُلُّ المعادلة: $\mathbf{2 \cos 2x = 1}$ في الفترة $\mathbf{(0, 2\pi]}$.

أتعلَّم

أستمر في تعويض قِيَم لـ k، وأتوقَّف عندما أحصل على زاوية أكبر من 2π.

الدعم البياني:

أُلاحِظ عند تمثيل المعادلتين: $y = \cos x \sin x$، و $y = \frac{1}{2}$ بيانيًّا باستعمال برمجية جيوجبرا، تقاطع منحنيي المعادلتين عندما $x = \frac{7\pi}{4}$, $x = \frac{3\pi}{4}$ في الفترة $(0, 2\pi]$.



حلُّ معادلات مثلثية تحوي اقترانات لنصف الزاوية

يُمكِن حلُّ معادلة مثلثية تحوي اقترانًا مثلثيًّا لنصف الزاوية، بحلِّ المعادلة لإيجاد قيمة النسبة المثلثية لنصف الزاوية أولًا، ثم إجراء عملية الضرب لإيجاد قياس الزاوية.

مثال 8

أحُلُّ المعادلة: $\mathbf{2 \sin \frac{x}{2} - \sqrt{3} = 0}$ في الفترة $\mathbf{(0, 2\pi]}$.

$$2 \sin \frac{x}{2} - \sqrt{3} = 0$$ المعادلة المعطاة

$$2 \sin \frac{x}{2} = \sqrt{3}$$ بجمع $\sqrt{3}$ لطرفي المعادلة

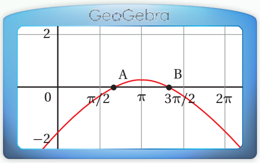
$$\sin \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$ بقسمة طرفي المعادلة على 2

بما أنَّ طول دورة اقتران الجيب 2π ، فإنَّ حلَّي المعادلة في الفترة $(0, 2\pi]$ هما:

$$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{3} \quad , \quad \frac{x}{2} = \frac{2\pi}{3}$$

الدعم البياني:

أُلاحِظ من التمثيل البياني للمعادلة: $y = 2\sin\frac{x}{2} - \sqrt{3}$، باستعمال برمجية جيوجبرا، تقاطع منحنى المعادلة مع المحور x عندما $x = \frac{2\pi}{3}, x = \frac{4\pi}{3}$ في الفترة $[0, 2\pi)$.



ومنه، فإنَّ جميع حلول المعادلة: $\sin\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ تُكتَب في صورة:

k عدد صحيح

$$\frac{x}{2} = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \qquad \frac{x}{2} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

بضرب طرفي المعادلة في 2

$$x = \frac{4\pi}{3} + 4k\pi \qquad x = \frac{2\pi}{3} + 4k\pi$$

أُلاحِظ أنَّه عند تعويض $k = 0$ في المعادلتين: $x = \frac{4\pi}{3} + 4k\pi$, $x = \frac{2\pi}{3} + 4k\pi$، فإنَّ الناتج هــو $x = \frac{4\pi}{3}, x = \frac{2\pi}{3}$ على الترتيب، ضمــن الفترة $[0, 2\pi)$. أمّا عند تعويض قِيَم أُخرى فإنَّ الناتج يكون خارج الفترة.

إذن، يوجد حلّان للمعادلة في الفترة $[0, 2\pi)$، هما: $x = \frac{4\pi}{3}, x = \frac{2\pi}{3}$

أتحقَّق من فهمي

أَحُلُّ المعادلة: $2\cos\frac{x}{2} - 1 = 0$ في الفترة $[0, 2\pi)$.

أتدرَّب وأَحُلُّ المسائل

أَحُلُّ كُلًّا من المعادلات الآتية لقِيَم x جميعها:

1. $2\sin x + 3 = 2$
2. $1 - \cos x = \frac{1}{2}$
3. $\sin x = -0.3$
4. $\cos x = 0.32$
5. $\tan x = 5$
6. $\sec^2 x - 2 = 0$
7. $\cot x + 1 = 0$
8. $\csc^2 x - 4 = 0$
9. $3\sqrt{2}\cos x + 2 = -1$

أَحُلُّ كُلًّا من المعادلات الآتية في الفترة $[0, 2\pi)$:

10. $\cos^2 x - \sin^2 x + \sin x = 0$
11. $3\sin^2 x - 7\sin x + 2 = 0$
12. $2\cos^2 x + \cos x = 0$
13. $\tan^4 x - 13\tan^2 x + 36 = 0$
14. $\sin x + 2\sin x\cos x = 0$
15. $\tan^2 x\cos x = \tan^2 x$

أَحُلُّ كُلًّا من المعادلات الآتية في الفترة $[0, 2\pi)$:

16. $2\cos^2 x + \sin x = 1$
17. $\tan^2 x - 2\sec x = 2$
18. $\csc^2 x = \cot x + 3$
19. $\sin 2x = 3\cos 2x$
20. $4\sin x\cos x + 2\sin x - 2\cos x - 1 = 0$

أطوار القمر: عندما يدور القمر حــول الأرض، فإنَّ الجانب المُواجِه للأرض يكون في الغالب مضاءً جزئيًّا بواســطة الشمس. تصف أطوار القمر مقدار الجزء الظاهر من ســطحه بسبب ســقوط ضوء الشمس عليــه، ويعطى مقياس فلكي للطور بالعلاقــة: $F=\frac{1}{2}(1-\cos\theta)$، حيث θ الزاوية بين الأرض والشمس والقمر $(0° \leq \theta \leq 360)$. أجد قياس الزاوية θ لكل طور ممّا يأتي:

21 القمر الجديد $(F=0)$.

22 الهلال $(F=0.25)$.

23 القمر المُكتمِل $(F=1)$.

24 **زنبرك:** تعطى الإزاحة لزنبرك نابض باســتعمال العلاقة: $y=4e^{-3t}\sin 2\pi t$. ما الأوقات التي يكون فيها الزنبرك في وضعية الراحة $(y=0)$؟

أحُلُّ كُلًّا من المعادلات الآتية في الفترة $[0, 2\pi)$:

25 $\sin 2x+\cos x=0$

26 $\tan\frac{x}{2}-\sin x=0$

27 $2\sin^2 x=2+\cos 2x$

28 $2\sin^2\frac{x}{2}-3\cos\frac{x}{2}=0$

29 $\sin x-\sqrt{3}\cos x=0$

30 $\cos 2x=\cos x$

مهارات التفكير العليا

تبرير: إذا كان $\tan x+\frac{k}{\tan x}=2$، حيث k ثابت، فأُجيب عمّا يأتي:

31 أُثبِت عدم وجود حلٍّ للمعادلة عندما $k>1$، مُبرِّرًا إجابتي.

32 أحُلُّ المعادلة عندما $k=-8$، حيث: $-\pi<x<\pi$، مُبرِّرًا خطوات الحلِّ.

33 **تبرير:** أجد جميع الحلول المُمكِنة للمعادلة: $\sin(\cos x)=0$، مُبرِّرًا إجابتي.

34 **تحدٍّ:** أحُلُّ المعادلة: $\tan x+\cot x=5$، حيث: $0\leq x<2\pi$.

35 **تحدٍّ:** أحُلُّ المتباينة: $|\sin x|<\frac{1}{2}$، حيث: $0\leq x<2\pi$.

أختار رمز الإجابة الصحيحة في كلٍّ ممّا يأتي:

1 إذا كان $\cot\theta = 1$، فإنَّ $\tan\theta$ تساوي:

a) -1 b) 1

c) 0 d) 3

2 إذا كان $\cos x = -0.45$، فإنَّ قيمة $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ هي:

a) -0.55 b) -0.45

c) 0.45 d) 0.55

3 المعادلة غير الصحيحة ممّا يأتي هي:

a) $\tan(-x) = -\tan x$

b) $\tan(-x) = \dfrac{1}{\cot(-x)}$

c) $\tan(-x) = \dfrac{\sin(-x)}{\cos(-x)}$

d) $\tan(-x) + 1 = \sec(-x)$

4 أحد الآتية مُكافِئ للمقدار: $\dfrac{1-\sin^2 x}{1-\cos^2 x} \times \tan x$:

a) $\tan x$ b) $\sin x$

c) $\cot x$ d) $\cos x$

5 أحد الآتية لا يُكافِئ $\cos x$، حيث: $0 < x < \frac{\pi}{2}$:

a) $\dfrac{\cos x}{\cos^2 x + \sin^2 x}$ b) $\cot x \sin x$

c) $\dfrac{1-\sin^2 x}{\cos x}$ d) $\tan x \csc x$

6 أحد الآتية يُكافِئ: $\sin x + \cot x \cos x$:

a) $2\sin x$ b) $\dfrac{1}{\sin x}$

c) $\cos^2 x$ d) $\dfrac{\sin x \cos x}{\sin^2 x}$

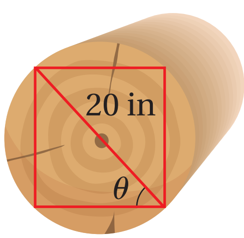
أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي من دون استعمال الآلة الحاسبة:

7 $3\cos 37.5° \sin 37.5°$

8 $\cos\frac{\pi}{12} + \cos\frac{5\pi}{12}$

9 $\cos 255° - \cos 195°$

10 **عارضة خشبية:** يراد قَصُّ عارضة خشبية من قطعة خشب على شكل أسطوانة، طول قُطْرها 20 in. أُثبِت أنَّه يُمكِن تمثيل مساحة المقطع العرضي للعارضة باستعمال العلاقة:



$$A(\theta) = 200 \sin 2\theta$$

أُثبِت صحة كلٍّ من المتطابقات الآتية:

11 $\tan y = \dfrac{\sin(x+y) - \sin(x-y)}{\cos(x+y) + \cos(x-y)}$

12 $4(\sin^6 x + \cos^6 x) = 4 - 3\sin^2 2x$

13 $\ln|\cos x| = \frac{1}{2}(\ln|1+\cos 2x| - \ln 2)$

14 $\sec 2x = \dfrac{\sec^2 x}{2 - \sec^2 x}$

15 $\tan\frac{x}{2} = \csc x - \cot x$

16 إذا كانت θ زاوية حادّة، وكان $\cos\theta = \frac{4}{5}$، فأُثبِت أنَّ:

$$\cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{10}$$

أُثبِت صحة كلٍّ من المتطابقات الآتية:

17 $\dfrac{\sec x - \cos x}{\sec x} = \sin^2 x$

18 $(\sin x + \cos x)^4 = (1 + 2\sin x \cos x)^2$

19 $\cot(x+y) = \dfrac{\cot x \cot y - 1}{\cot x + \cot y}$

20 $\dfrac{\sin x \sec x}{\tan x} = 1$

21 $\ln|\sec\theta| = -\ln|\cos\theta|$

أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي من دون استعمال الآلة الحاسبة:

22 $\tan(-15°)$

23 $\sin\dfrac{7\pi}{12}$

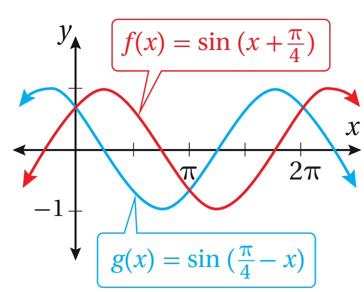
24 $\dfrac{\tan 20° + \tan 25°}{1 - \tan 20° \tan 25°}$

25 $\cos\dfrac{5\pi}{12}\cos\dfrac{7\pi}{12} - \sin\dfrac{5\pi}{12}\sin\dfrac{7\pi}{12}$

26 مستعينًا بالشكل التالي، أَحُلّ المعادلة:

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 0$$

حيث: $0 \le x \le 2\pi$.



أُبسِّط كُلًّا من المقادير الآتية، مُستعمِلًا المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية، أو المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية:

27 $\cos^2 5x - \sin^2 5x$

28 $2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}$

29 $\sqrt{\dfrac{1 - \cos 8x}{2}}$

أَحُلّ كُلًّا من المعادلات الآتية في الفترة $[0, 2\pi)$:

30 $4\sin x - 3 = 0$

31 $\dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x} = 3$

32 $\cos x \sin x - \sin x = 0$

33 $\sin x - 2\sin^2 x = 0$

34 $\sin x - \cos x - \tan x = -1$

35 $\sin x - \cos x = \dfrac{1}{2}$

36 $\tan 3x + 1 = \sec 3x$

تدريب على الاختبارات الدولية

37 أحد الآتية لا يُعَدُّ حلًّا للمعادلة:

$\sin x + \cos x \tan^2 x = 0$:

a) $\dfrac{3\pi}{4}$ b) $\dfrac{7\pi}{4}$

c) 2π d) $\dfrac{5\pi}{2}$

38 أحد الآتية يُعَدُّ حلًّا للمعادلة: $2\cos x = 1$:

a) $\dfrac{8\pi}{3}$ b) $\dfrac{13\pi}{3}$

c) $\dfrac{10\pi}{3}$ d) $\dfrac{15\pi}{3}$

39 أحد الآتية مُكافِئ للمقدار: $\dfrac{\cos x(\cot^2 x + 1)}{\csc x}$:

a) $\tan x$ b) $\cot x$

c) $\sec x$ d) $\csc x$

40 أحد المقادير الآتية يُمكِن استعماله لتكوين متطابقة مع المقدار: $\dfrac{\sec x + \csc x}{1 + \tan x}$، حيث: $\tan x \ne -1$:

a) $\sin x$ b) $\cos x$

c) $\tan x$ d) $\csc x$

الوحدة

8

الاحتمالات

Probability

ما أهمية هذه الوحدة؟

يستفاد من علم الاحتمالات في عديد من المجالات المهمة، مثل: الطب، والزراعة، والاقتصاد، والأرصاد الجوية. فالطبيب الذي يبحث في انتشار مرض مُعْدٍ يعكف على دراسة احتمال انتقال المرض من شخص إلى آخر، وموظفو قطاع التأمين يَلزمهم حساب نسبة المخاطر، وإمكانية تعرُّض شركات التأمين التي يعملون فيها للخسائر، أو تحقيق هذه الشركات الربح. وكذلك الحال بالنسبة إلى كثير من شؤون الحياة اليومية؛ إذ تتطلَّب استعمال مبادئ عِدَّة إلى جانب الاحتمالات.

سأتعلَّم في هذه الوحدة:

- استعمال مبدأ العَدِّ والتباديل والتوافيق لإيجاد عدد طرائق إجراء عملية، أو تجربة عشوائية.
- تعرُّف المُتغيِّرات العشوائية، وإيجاد قِيَمها.
- إنشاء التوزيع الاحتمالي لمُتغيِّرات عشوائية.
- حساب توقُّع المُتغيِّر العشوائي، وتباينه.

تعلَّمْتُ سابقًا:

- ✓ استعمال مُخطَّط الشجرة وجداول الاحتمال لتحديد نواتج تجارب عشوائية.
- ✓ حساب احتمالات حوادث بسيطة.
- ✓ حساب احتمالات حوادث مُركَّبة مستقلة، وغير مستقلة.
- ✓ حساب احتمالات حوادث متنافية، وغير متنافية.

ملحوظة: أستعمل تدريبات (أستعد لدراسة الوحدة) في الصفحتين (20) و (21) من كتاب التمارين؛ لمراجعة هذه الموضوعات قبل البدء بدراسة الوحدة.

الدرس 1

التوافيق والتباديل
Permutations and Combinations

فكرة الدرس

- تعرُّف مبدأ العَدِّ الأساسي، واستعماله في حلِّ المسائل.
- تعرُّف التباديل، واستعمالها في حلِّ مسائل حياتية.
- تعرُّف التوافيق، واستعمالها في حلِّ مسائل حياتية.

المصطلحات مبدأ العَدِّ الأساسي، التباديل، المضروب، التوافيق.

مسألة اليوم يتألَّف فريق للسباحة من 8 سبّاحينَ. إذا أراد مُدرِّب الفريق اختيار سبّاحينِ اثنين للسباحة في الجولة الأولى من إحدى المنافسات، فبكم طريقةً يُمكِنه الاختيار من بين هؤلاء السبّاحينَ؟

مبدأ العَدِّ الأساسي

من السهل إيجاد عدد الطرائق اللازمة لترتيب مجموعة صغيرة. فمثلًا، توجد طريقتان فقط لترتيب عناصر المجموعة $\{a, b\}$، هما: (a, b)، و (b, a)؛ إذ يُختار الحرف الأول بطريقتين، ثم يُختار الحرف الثاني بعد اختيار الحرف الأول بطريقة واحدة. وقد تعلَّمْتُ سابقًا طرائق تحديد عناصر الفضاء العيني لتجربة عشوائية، مثل: مُخطَّط الشجرة، ومُخطَّط الاحتمال.

ولكنْ، إذا كان عدد عناصر المجموعة كبيرًا، فإنَّ حصر جميع الطرائق المُمكِنة وعَدَّها يصبح أمرًا صعبًا. وفي كثير من الحالات، يقتصر الاهتمام على معرفة عدد الطرائق التي يُمكِن بها إجراء تجربة عشوائية مُكوَّنة من مراحل عِدَّة، من دون اهتمام بمعرفة النواتج نفسها، فيُستعمَل **مبدأ العَدِّ الأساسي** (fundamental counting principle) لإيجاد عدد الطرائق المُمكِنة لإجراء التجربة؛ بضرب عدد الطرائق المُمكِنة في كل مرحلة من المراحل بعضها في بعض.

أتذكَّر

يُطلَق على الخيارات المُحتمَلة لتجربة عشوائية ما اسم النواتج، ويُطلَق على جميع النواتج المُمكِنة لها اسم الفضاء العيني، ويرمز له بالرمز (Ω).

مفهوم أساسي **مبدأ العَدِّ الأساسي**

للتجربة العشوائية التي يُمكِن إجراؤها في n مرحلة، إذا كان عدد الطرائق المُمكِنة لإجراء المرحلة الأولى هو K_1، وعدد الطرائق المُمكِنة لإجراء المرحلة الثانية هو K_2، ...، وعدد الطرائق المُمكِنة لإجراء المرحلة n هو K_n، فإنَّ العدد الكلي للطرائق المُمكِنة لإجراء التجربة هو:

$$K_1 \times K_2 \times \ldots \times K_n$$

مثال 1

عدد زوجي يتألَّف من 3 أرقام مختلفة. بكم طريقةً يُمكِن تكوين هذا العدد باستعمال الأرقام: 1, 2, 4, 6, 7, 9؟

للرقم الأول في منزلة الآحاد (المرحلة الأولى) 3 خيارات مُمكِنة (الأرقام: 6 ,4 ,2)، وللرقم الثاني في منزلة العشرات (المرحلة الثانية) 5 خيارات مُمكِنة (5 أرقام)؛ لأنَّ أرقام العدد مختلفة، ولا يُمكِن تكرارها. أمّا الرقم في منزلة المئات (المرحلة الثالثة) فله 4 خيارات مُمكِنة (4 أرقام).

باستعمال مبدأ العَدِّ الأساسي:

عدد طرائق اختيار الرقم في منزلة المئات		عدد طرائق اختيار الرقم في منزلة العشرات		عدد طرائق اختيار الرقم في منزلة الآحاد
4	×	5	×	3

$$60 = 4 \times 5 \times 3$$

إذن، يُمكِن تكوين هذا العدد بـ 60 طريقة.

أتحقَّق من فهمي

عدد فردي يتألَّف من 4 أرقام مختلفة. بكم طريقةً يُمكِن تكوين هذا العدد باستعمال الأرقام: 1, 2, 3, 4, 5؟

التباديل

التباديل (permutations) هي عدد الطرائق المُمكِنة لاختيار مجموعة أشياء، بما في ذلك ترتيب اختيار هذه الأشياء. فمثلًا، توجد 6 تباديل مُمكِنة لترتيب الأحرف: A، وB، وC:

ABC ACB BAC BCA CAB CBA

مثال 2

1 **كم كلمةً (ليس شرطًا أنْ يكون لها معنى) يُمكِن تكوينها من جميع أحرف كلمة (JORDAN) من دون تكرار أيِّ حرف فيها؟**

باستعمال مبدأ العَدِّ الأساسي:

عدد طرائق اختيار الحرف السادس		عدد طرائق اختيار الحرف الخامس		عدد طرائق اختيار الحرف الرابع		عدد طرائق اختيار الحرف الثالث		عدد طرائق اختيار الحرف الثاني		عدد طرائق اختيار الحرف الأول
1	×	2	×	3	×	4	×	5	×	6

$$720 = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6$$

إذن، يُمكِن تكوين 720 كلمةً من أحرف كلمة (JORDAN)، من دون تكرار أيِّ حرف فيها.

2 **كم كلمةً تتألَّف من 3 أحرف (ليس شرطًا أنْ يكون لها معنى) يُمكِن تكوينها من جميع أحرف كلمة (JORDAN) من دون تكرار أيِّ حرف فيها؟**

باستعمال مبدأ العَدِّ الأساسي:

عدد طرائق اختيار الحرف الأول		عدد طرائق اختيار الحرف الثاني		عدد طرائق اختيار الحرف الثالث		
6	×	5	×	4	=	120

إذن، يُمكِن تكوين 120 كلمةً تتألف من 3 أحرف من أحرف كلمة (JORDAN)، من دون تكرارأيِّ حرف فيها

أتحقَّق من فهمي

a) كم كلمةً (ليس شرطًا أنْ يكون لها معنى) يُمكِن تكوينها من جميع أحرف كلمة (HOUSE) من دون تكرار أيِّ حرف فيها؟

b) كم كلمةً تتألَّف من 3 أحرف (ليس شرطًا أنْ يكون لها معنى) يُمكِن تكوينها من جميع أحرف كلمة (HOUSE) من دون تكرار أيِّ حرف فيها؟

في الفرع الأول من المثال السابق، استُعمِل التعبير: $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6$ لحساب عدد تباديل 6 أحرف مختلفة، أُخِذ منها 6 أحرف كل مرَّة، وهو تعبير يُكتَب في صورة (6!)، ويُقرَأ: **مضروب** (factorial) العدد 6

بوجه عام، يُكتَب مضروب العدد الصحيح الموجب n في صورة ($n!$)، ويساوي حاصل ضرب جميع الأعداد الصحيحة الموجبة من 1 إلى n كالآتي:

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times \ldots \times 1$$

أمّا الفرع الثاني من المثال نفسه فقد تضمَّن إيجاد عدد تباديل 6 أحرف، أُخِذ منها 3 أحرف كل مرَّة؛ لذا لا يُمكِن استعمال المضروب في هذه الحالة.

أتعلَّم

أستعمل الآلة الحاسبة لإيجاد مضروب العدد. فمثلًا، أجد مضروب العدد 6 بالضغط على الأزرار الآتية:

6 ! =

أتعلَّم

من الحالات الخاصة للمضروب:

$0! = 1$

بوجه عام، يُمكِن استعمال إحدى الصيغتين الآتيتين لإيجاد عدد التباديل:

رموز رياضية

يُمكِن استعمال أيٍّ من الرمزين الآتيين للتعبير عن تباديل n من العناصر التي أُخِذ منها r كل مرَّة:

$$nPr\,,\ P(n, r)$$

مفهوم أساسي **التباديل**

- **عدد تباديل n من العناصر المختلفة، أُخِذ منها n كل مرَّة:**

بالكلمات: عدد تباديل n من العناصر المختلفة، أُخِذ منها n كل مرَّة، هو:

$$_nP_n = n!$$

حيث n عدد صحيح موجب.

مثال: عدد تباديل 5 عناصر مختلفة، أُخِذ منها 5 كل مرَّة، هو:

$$_5P_5 = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

- **عدد تباديل n من العناصر المختلفة، أُخِذ منها r كل مرَّة:**

بالكلمات: عدد تباديل n من العناصر المختلفة، أُخِذ منها r كل مرَّة، هو:

$$_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

حيث: n, r عددان صحيحان موجبان، و $r \le n$.

مثال: عدد تباديل 5 عناصر مختلفة، أُخِذ منها 3 كل مرَّة، هو:

$$_5P_3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times \cancel{2!}}{\cancel{2!}} = 60$$

مثال 3 : من الحياة

1 وظائف: **أعلن مطعم عن حاجته إلى عامل في صالته الرئيسة، وعامل آخر في المطبخ. إذا تقدَّم للوظيفتين 4 أشخاص (أحمد، رامي، جمانة، عبير)، فبكم طريقةً يُمكِن اختيار اثنين منهم لهاتين الوظيفتين؟**

أُلاحِظ أنَّ الترتيب مهم في هذه المسألة؛ فاختيار أحمد للعمل في الصالة، وجمانة للعمل في المطبخ، يختلف عن اختيار جمانة للعمل في الصالة، وأحمد للعمل في المطبخ. وكذلك لا يُمكِن اختيار الشخص نفسه لكلتا الوظيفتين؛ لذا أستعمل التباديل لإيجاد عدد طرائق اختيار عنصرين من بين 4 عناصر، مراعيًا الترتيب:

صيغة التباديل $${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

بتعويض $n = 4$، و $r = 2$ $${}_4P_2 = \frac{4!}{(4-2)!}$$

باستعمال تعريف المضروب، والاختصار $$= \frac{4 \times 3 \times \cancel{2!}}{\cancel{2!}}$$

بالتبسيط $$= 12$$

إذن، يُمكِن اختيار شخصين لهاتين الوظيفتين بـ 12 طريقة.

أتعلَّم

أستعمل الآلة الحاسبة لإيجاد التباديل. فمثلًا، أجد ناتج ${}_4P_2$ بالضغط على الأزرار الآتية:

4 ${}_nP_r$ 2 =

2 صلة رحم: **يرغب حسن في زيارة بيت جدَّته، وبيت عمَّته، وبيت خالته أول أيام عيد الفطر المبارك. بكم طريقةً يُمكِنه ترتيب مواعيد الزيارة؟**

أُلاحِظ أنَّ الترتيب مهم في هذه المسألة من دون تكرار البدائل؛ لذا أستعمل عدد طرائق اختيار 3 عناصر من بين 3 عناصر، مراعيًا الترتيب:

صيغة التباديل $${}_nP_n = n!$$

بتعويض $n = 3$ $${}_3P_3 = 3!$$

باستعمال تعريف المضروب، وإيجاد الناتج $$= 3 \times 2 \times 1 = 6$$

إذن، يُمكِن لحسن ترتيب مواعيد الزيارة بـ 6 طرائق.

أتحقَّق من فهمي

a) اشتركت 10 خيول في منافسة لسباق للخيل. بكم طريقةً يُمكِن للخيول إنهاء السباق في المراكز الثلاثة الأولى؟

b) تمكَّن 4 طلبة من بلوغ المرحلة قبل النهائية لمسابقة الرياضيات الذهنية. بكم طريقةً يُمكِن لهؤلاء الطلبة الوقوف لالتقاط صورة معًا؟

تتكرَّر أحيانًا بعض عناصر المجموعة التي يراد الاختيار منها، ويُمكِن إيجاد عدد التباديل المختلفة في هذه الحالة باستعمال الصيغة الآتية:

مفهوم أساسي — **التباديل مع التكرار**

عدد التباديل المختلفة لعناصر عددها n عندما يتكرَّر عنصر r_1 من المرّات، وآخر r_2 من المرّات، وهكذا، ...، هو:

$$\frac{n!}{r_1! \times r_2! \times \ldots \times r_k!}$$

مثال 4

أجد عدد الطرائق المُمكِنة لترتيب أحرف كل كلمة ممّا يأتي:

1 MOHAMMAD

أُلاحِظ أنَّ كلمة (MOHAMMAD) تتألَّف من 8 أحرف، وأنَّ الحرف (M) تكرَّر ثلاث مرّات، وأنَّ الحرف (A) تكرَّر مرَّتين. وبذلك، فإنَّ عدد التباديل المختلفة لهذه الأحرف هو:

$$\frac{8!}{3! \times 2!}$$ صيغة التباديل مع التكرار

$$= \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times \cancel{3!}}{\cancel{3!} \times 2}$$ باستعمال تعريف المضروب، والاختصار

$$= 3360$$ بإيجاد الناتج

إذن، يُمكِن ترتيب أحرف كلمة (MOHAMMAD) بـ 3360 طريقة.

2 AJLOUN

أُلاحِظ أنَّ كلمة (AJLOUN) تتألَّف من 6 أحرف مختلفة من دون تكرار. وبذلك، فإنَّ عدد التباديل المختلفة لهذه الأحرف هو:

$${}_nP_n = n!$$ صيغة التباديل

$${}_6P_6 = 6!$$ بتعويض $n = 6$

$$= 6\times5\times4\times3\times2\times1 = 720$$ باستعمال تعريف المضروب، وإيجاد الناتج

إذن، يُمكِن ترتيب أحرف كلمة (AJLOUN) بـ 720 طريقة.

أتحقَّق من فهمي

أجد عدد الطرائق المُمكِنة لترتيب أحرف كل كلمة ممّا يأتي:

a) PALESTINE

b) PETRA

التوافيق

التوافيق (combination) هي عدد الطرائق المُمكِنة لاختيار مجموعة أشياء من دون اهتمام بالترتيب. فمثلًا، عند اختيار حرفين عشـــوائيًّا من الأحـــرف: A, B, C, D، يُمكِن كتابة جميع التباديـــل المُمكِنة لاختيار حرفين مـــن هذه الأحرف، ثم حـــذف الأزواج التي تكرَّرت (لأنَّ الترتيب في التوافيق غير مهم) كالآتي:

(A, B) (A, C) (A, D) ~~(B, A)~~ (B, C) (B, D)

~~(C, A)~~ ~~(C, B)~~ (C, D) ~~(D, A)~~ ~~(D, B)~~ ~~(D, C)~~

(B, D) و (D, B) هما الزوج نفسه؛ لأنَّ الترتيب غير مهم.

إذن، توجد 6 توافيق مُمكِنة لاختيار حرفين من الأحرف: A, B, C, D.

مفهوم أساسي — التوافيق

بالكلمات: عدد توافيق n من العناصر المختلفة، أُخِذ منها r كل مرَّة، هو:

$${}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

حيث: n و r عددان صحيحان موجبان، و $r \leq n$.

مثال: عدد توافيق 10 عناصر مختلفة، أُخِذ منها 7 كل مرَّة، هو:

$${}_{10}C_7 = \frac{10!}{7!(10-7)!} = 120$$

رموز رياضية

يُمكِن اســـتعمال أيٍّ من الرمـــوز الآتية للتعبير عن توافيق n من العناصر التي أُخِذ منها r كل مرَّة:

$nCr, C(n, r), \binom{n}{r}$

مثال 5 : من الحياة

برلمان طلابي: **أجد عدد الطرائق التي يُمكِن بها اختيار 3 طالبات من بين 6 طالبات مُترشِّحات (سهى، مرام، أسماء، سُـــمَيَّة، لانا، نداء) لتمثيل المدرســـة في مؤتمر البرلمان الطلابي الذي تُنظِّمه مديرية التربية التي تَتْبَع لها المدرسة.**

نظرًا إلى عدم أهمية الترتيب في هذه المسألة، وعدم وجود فرق في الاختيار بين الطالبات: سهى، ومرام، وأسماء، والطالبات: مرام، وأسماء، وسهى؛ فإنَّني أستعمل التوافيق لإيجاد عدد طرائق اختيار 3 طالبات من بين الطالبات الست المُترشِّحات على النحو الآتي:

$${}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$ صيغة التوافيق

$${}_6C_3 = \frac{6!}{3!(6-3)!}$$ بتعويض $n = 6$، و $r = 3$

$$= \frac{6 \times 5 \times 4 \times \cancel{3!}}{\cancel{3!} \times 3 \times 2}$$ باستعمال تعريف المضروب، والاختصار

$$= 20$$ بالتبسيط

أتحقَّق من فهمي

ألعاب: بكم طريقةً يُمكِن اختيار فريق كرة سلَّة يضمُّ 5 لاعبين من بين 8 لاعبين؟

معلومة

للبرلمان الطلابي دور رئيس في صقل شخصية الطالب القيادية، وتمثُّل معاني الديمقراطية، والإخلاص، والانتماء الحقيقي إلى الوطن؛ ما يُمكِّنه من الإسهام بفاعلية في رفعة الوطن وازدهاره.

أتعلَّم

أستعمل الآلة الحاسبة لإيجاد التوافيق. فمثلًا، أجد ناتج ${}_6C_3$ بالضغط على الأزرار الآتية:

6 $_nC_r$ 3 =

الاحتمال باستعمال التباديل والتوافيق

تعلَّمْتُ سابقًا كيفية إيجاد عدد الطرائق المُمكِنة لإجراء تجربة عشوائية باستعمال مبدأ العَدِّ الأساسي، والتوافيق، والتباديل. والآن سأُوظِّف ذلك كله في حساب احتمال وقوع حادث مُعيَّن ضمن التجربة العشوائية.

مثال 6

1 رُتِّبت البطاقات الآتية عشوائيًّا في صف واحد. ما احتمال أنْ يكون الحرف الأول والحرف الأخير في الترتيب المختار من أحرف العِلَّة؟

ن	و	ا	ع	ي	ر

الخطوة 1: أفترض أنَّ الحادث (A) يعني أنَّ الحرف الأول والحرف الأخير في الترتيب المختار هما من أحرف العِلَّة.

الخطوة 2 : أجد عدد عناصر Ω .

أجد $n(\Omega)$، وهو عدد طرائق ترتيب 6 عناصر (بطاقات) في صف واحد:

صيغة التباديل
$$n(\Omega) = {}_6P_6 = 6!$$

باستعمال تعريف المضروب، وإيجاد الناتج
$$= 6\times5\times4\times3\times2\times1 = 720$$

الخطوة 3 : أجد عدد عناصر الحادث (A).

أجد $n(A)$، وهو عدد الطرائق التي يكون فيها الحرف الأول والحرف الأخير من أحرف العِلَّة؛ إذ يُحدَّد الحـرف الأول بثلاث طرائق؛ نظرًا إلى وجود 3 أحرف عِلَّـة، هي: الواو، والألف، والياء. في حين يُحدَّد الحرف الأخير بطريقتين (يبقى حرفان بعد أخذ الحرف الأول). أمّا عدد طرائق ترتيب الأحرف الأربعة الباقية بين الحرفين الأول والأخير فهو ${}_4P_4$؛ لذا، فإنَّ:

مبدأ العَدِّ الأساسي
$$n(A) = 3\times2\times {}_4P_4$$

باستعمال تعريف المضروب
$$= 3\times2\times4! = 3\times2\times4\times3\times2\times1$$

بإيجاد الناتج
$$= 144$$

الخطوة 4 : أجد الاحتمال.

بالتعويض في صيغة الاحتمال
$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{144}{720}$$

بإيجاد الناتج
$$= 0.2$$

إذن، احتمال أنْ يكون الحرف الأول والحرف الأخير من أحرف العِلَّة هو 0.2

2 **كُتِبت الأعداد من 1 إلى 20 على 20 بطاقة صغيرة مُتماثِلة، وُضِعت جميعها في صندوق، ثم اختيرت اثنتان منها معًا بصورة عشوائية. ما احتمال أنْ يكون العددان المُدوَّنان على البطاقتين فرديين؟**

الخطوة 1 : أفترض أنَّ الحادث (A) يعني اختيار بطاقتين معًا عشوائيًّا، وأنَّهما تحملان عددين فرديين (الترتيب غير مهم).

الخطوة 2 : أجد عدد عناصر Ω.

أجد $n(\Omega)$، وهو عدد طرائق اختيار بطاقتين معًا من الصندوق بصورة عشوائية.

بما أنَّ الترتيب غير مهم، فإنَّني أستعمل التوافيق:

عدد طرائق اختيار عنصرين من بين 20 عنصرًا
$$n(\Omega) = {}_{20}C_2$$

بالتعويض في صيغة التوافيق
$$= \frac{20!}{2!(20-2)!}$$

باستعمال تعريف المضروب، والاختصار
$$= \frac{20 \times 19 \times \cancel{18!}}{2 \times \cancel{18!}}$$

بالتبسيط
$$= 190$$

الخطوة 3: أجد عدد عناصر الحادث (A).

عدد البطاقات التي تحمل أعدادًا فرديةً هو 10 بطاقات؛ لذا فإنَّ $n(A)$ يُمثِّل عدد طرائق اختيار بطاقتين معًا بصورة عشوائية، بحيث تحملان أعدادًا فرديةً من بين 10 بطاقات.

بما أنَّ الترتيب غير مهم، فإنَّني أستعمل التوافيق:

عدد طرائق اختيار عنصرين من بين 10عناصر
$$n(A) = {}_{10}C_2$$

بالتعويض في صيغة التوافيق
$$= \frac{10!}{2!(10-2)!}$$

باستعمال تعريف المضروب، والاختصار
$$= \frac{10 \times 9 \times \cancel{8!}}{2 \times \cancel{8!}}$$

بالتبسيط
$$= 45$$

الخطوة 4: أجد الاحتمال.

بالتعويض في صيغة الاحتمال
$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{45}{190}$$

بالتبسيط
$$= \frac{9}{38}$$

إذن، احتمال أنْ يكون العددان المُدوَّنان على البطاقتين فرديين هو $\frac{9}{38}$

أتحقَّق من فهمي

a) رُتِّبت البطاقات الآتية عشوائيًّا في صف واحد. ما احتمال اختيار ترتيب يبدأ بحرف صحيح، وينتهي بحرف عِلَّة؟

م	س	ا	ف	ر	و	ن

b) صندوق فيه 16 كرة مُتماثِلة، كلٌّ منها تحمل رقمًا من بين الأعداد 1 إلى 16، إذا سُحِبت كرتان معًا بصورة عشوائية، فما احتمال أنْ تحمل الكرات المسحوبة أعدادًا زوجيةً؟

في بعض المواقف، يُختار r عنصرًا بصورة عشوائية من بين n_1 من العناصر، ويُختار m عنصرًا مــن بين n_2 من العناصر، فيكون عدد العناصر الكلــي $n_1 + n_2$، وقد يُختار r و m مع مراعاة الترتيب (تباديل)، أو من دون مراعاة لذلك (توافيق)، تبعًا لِما يقتضي الموقف.

مثال 7 : من الحياة

لجنة اجتماعية: يعمل في أحد المصانع 35 عاملًا، و20 عاملةً. أراد صاحب المصنع تشــكيل لجنة اجتماعية للعاملين والعاملات تضمُّ 5 أعضاء يُختارون بصورة عشوائية:

1 ما احتمال أنْ تتألَّف اللجنة من عاملتين وثلاثة عمّال؟

الخطوة 1 : أفترض أنَّ الحادث (A) يعني اختيار عاملتين وثلاثة عمّال لهذه اللجنة.

الخطوة 2 : أجد عدد عناصر Ω.

أجد $n(\Omega)$، وهو عدد طرائق اختيار 5 أعضاء عشــوائيًّا من بين جميــع العاملين والعاملات وعددهم 55 عاملًا وعاملةً. الترتيب هنا غير مهم؛ لذا أستعمل التوافيق:

$$n(\Omega) = {}_{55}C_5$$ عدد طرائق اختيار 5 عناصر من بين 55 عنصرًا

$$= 3478761$$ باستعمال الآلة الحاسبة

الخطوة 3 : أجد عدد عناصر الحادث (A).

أجد $n(A)$، وهو عدد طرائق اختيار عاملتين من بين 20 عاملةً، مضروبًا في عدد طرائق اختيار 3 عمّال من بين 35 عاملًا، علمًا بأنَّ الترتيب غير مهم في كلتا الحالتين.

بحسب مبدأ العَدِّ الأساسي، فإنَّ:

$$n(A) = {}_{20}C_2 \times {}_{35}C_3$$ مبدأ العَدِّ الأساسي

$$= 1243550$$ باستعمال الآلة الحاسبة

الخطوة 4 : أجد الاحتمال.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{1243550}{3478761}$$ بالتعويض في صيغة الاحتمال

$$\approx 0.357$$ باستعمال الآلة الحاسبة

إذن، احتمال أنْ تتألَّف اللجنة من عاملتين وثلاثة عمّال هو 0.357 تقريبًا.

2 **ما احتمال أنْ يكون رئيس اللجنة وأمين الصندوق من العمّال، ويكون الأعضاء الآخرون من العاملات؟**

الخطوة 1: أفترض أنَّ الحادث (B) يعني أنَّ رئيس اللجنة وأمين الصندوق هما من العمّال، وأنَّ الأعضاء الآخرين هم من العاملات.

الخطوة 2: أجد عدد عناصر Ω.

أجد $n(\Omega)$، وهو 3478761 كما في الفرع الأول من السؤال.

الخطوة 3: أجد عدد عناصر الحادث (B).

أجد $n(B)$، وهو عدد طرائق اختيار رئيس اللجنة وأمين الصندوق من بين 35 عاملًا (الترتيب مهم)، مضروبًا في عدد طرائق اختيار 3 عاملات من بين 20 عاملةً (الترتيب غير مهم):

$$n(B) = {}_{35}P_2 \times {}_{20}C_3$$ مبدأ العَدِّ الأساسي

$$= 1356600$$ باستعمال الآلة الحاسبة

الخطوة 4: أجد الاحتمال.

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{1356600}{3478761}$$ بالتعويض في صيغة الاحتمال

$$\approx 0.39$$ باستعمال الآلة الحاسبة

إذن، احتمال أنْ يكون رئيس اللجنة وأمين الصندوق من العمّال، ويكون الأعضاء الآخرون من العاملات هو 0.39 تقريبًا.

أتحقَّق من فهمي

يراد تشكيل فريق مُكوَّن من 7 لاعبي تنس يُختارون عشوائيًّا من بين 9 لاعبي تنس و5 لاعبات تنس:

a) ما احتمال أنْ يتألَّف الفريق من 4 لاعبين و3 لاعبات؟

b) ما احتمال أنْ يكون رئيس الفريق من اللاعبات؟

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:

1 $8!$

2 $9! - 2 \times 7!$

3 $\frac{6!}{2! \times 3!}$

4 $\frac{{}_6P_3 + {}_7P_4}{{}_5P_3}$

5 ${}_8C_3 \times {}_{11}C_6$

6 $\frac{{}_{12}C_4 + {}_{10}C_6}{{}_6C_2}$

كم عددًا مُؤلَّفًا من 4 أرقام يُمكِن تكوينه باستعمال الأرقام: 5 ,3 ,2 ,1:

7 إذا سُمِح بالتكرار؟

8 إذا لم يُسمَح بالتكرار؟

أجد عدد الطرائق المُمكِنة لترتيب أحرف كل كلمة ممّا يأتي:

9 TAFILA

10 IRBID

11 AMMAN

12 كم عددًا يحوي 6 أرقام مختلفة، ويقبل القسمة على 5، يُمكِن تكوينه باستعمال الأرقام: 5 ,4 ,3 ,2 ,1 ,0؟

13 كم عددًا زوجيًّا أقل من 900 يُمكِن تكوينه باستعمال الأرقام: 9 ,8 ,7 ,6 ,5؛ شرط عدم استعمال الرقم أكثر من مرَّة واحدة في أيِّ عدد؟

14 طعام: بكم طريقة مختلفةً يُمكِن لشخص اختيار وجبة غداء تحوي طبقًا رئيسًا واحدًا، وطبق حساء، وطبق سَلطة، من قائمة الطعام المجاورة في أحد المطاعم؟

قائمة الطعام

أنواع السَّلطة: سَلطة عادية. سَلطة ذُرَة. سَلطة حارَّة. سَلطة شمندر.

أنواع الحساء: عدس. خضراوات مُتنوِّعة. فُطْر.

الطبق الرئيس: منسف. مقلوبة. كبسة.

هدايا: لدى هيثم 6 أقراص مُدمَجة تحوي موضوعات تعليمية مُتنوِّعة، و4 أقراص أُخرى تحوي مقاطع رياضية مُتعدِّدة. يرغب هيثم في إهداء 4 من هذه الأقراص إلى صديقه علاء:

15 ما عدد طرائق اختيار الهدية؟

16 ما عدد طرائق اختيار الهدية إذا ضمَّنها هيثم قرصًا واحدًا على الأقل من كل نوع؟

أجد قيمة n في كلٍّ ممّا يأتي:

17 $n! = 720$

18 ${}_nP_2 = 42$

19 ${}_nP_3 = 10 \times {}_nP_2$

20 ${}_nC_3 = 26n$

21 ${}_nC_5 = {}_nC_7$

22 ${}_nC_3 - {}_{(n-2)}C_3 = 64$

23 **مستشفيات:** دخل في أحد المستشفيات 5 مرضى في الوقت نفسه، وقد قرَّر طبيب الطوارئ توزيعهم على 5 غرف فردية. بكم طريقةً يُمكِن للطبيب توزيع هؤلاء المرضى؟

24 **رياضة:** يدير أحد الاتحادات الرياضية مجلسًا مُكوَّنًا من 14 سيدة و10 رجال. قرَّر الاتحاد اختيار لجنة مُصغَّرة من المجلس تضمُّ 4 أعضاء بصورة عشوائية، ويُنتخَب منها رئيس للجنة، وأمين للسر، وأمينان للصندوق. ما احتمال أنْ تتألَّف اللجنة من 3 سيدات، تتولّى إحداهن رئاسة اللجنة، ورجل واحد هو أمين سر اللجنة؟

25 **زراعة:** يضمُّ قسم التطوير في إحدى الشركات الزراعية 7 مهندسين زراعيين، منهم رنا وأحمد. ما احتمال اختيار رنا وأحمد لحضور ندوة عن المُنتَجات المُعالَجة وراثيًّا إذا كانت عملية الاختيار عشوائية؟

عائلة تضمُّ 6 أولاد و3 بنات. أرادت الأم اختيار 4 منهم لإعداد وجبة العشاء:

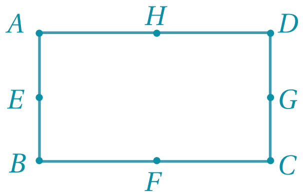
26 ما احتمال اختيار اثنين من الأولاد، واثنتين من البنات لإعداد وجبة العشاء؟

27 ما احتمال اختيار ولد لإعداد الشاي، وولد لطهي الطعام، وبنتين لتجهيز المائدة؟

28 **لوحات مَرْكبات:** تتألَّف لوحة مَرْكبة في الأردن من رمز خاص بإدارة ترخيص المَرْكبات، مُكوَّن من رقمين يُكتَبان أعلى اللوحة، ويُمثِّلان رمزًا مُشتركًا لمَرْكبات عِدَّة، ومن 5 أرقام من بين الأرقام 0 إلى 9 لكل مَرْكبة. إذا اختيرت مَرْكبة عشوائيًّا، وكان رمزها المُشترَك 24، فما احتمال أنْ يكون رقمها 45779؟

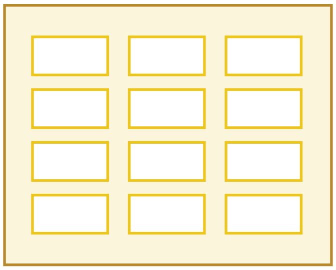
إرشاد: يجب ألّا تكون جميع خانات اللوحة أصفارًا.

29 **هندسة:** إذا اختيرت 3 نقاط عشوائيًّا من بين النقاط: A, B, C, D, E, F, G, H في الشكل المجاور، فما احتمال أنْ تكون هذه النقاط على استقامة واحدة؟



مهارات التفكير العليا

تحدٍّ: **تحوي طائرة عمودية 12 مقعدًا للرُّكّاب مُرتَّبة في 4 صفوف و3 أعمدة كما في المُخطَّط المجاور. أقلعت الطائرة من مَدْرج المطار، وكان على متنها 10 مسافرين، بينهم طلال وعبير، وبقي مقعدان فارغان قد يكونان أيًّا من مقاعد الرُّكّاب:**



30 ما احتمال أنْ يجلس طلال على مقعد في طرف أحد الصفوف، وتجلس عبير على مقعد في طرف أحد الصفوف أيضًا؟

31 ما احتمال أنْ يجلس طلال وعبير على مقعدين متجاورين في صف واحد؟

32 **تبرير:** متى يكون ${}_nC_r = {}_nP_r$؟ أُبرِّر إجابتي.

33 **تحدٍّ:** يراد اختيار 4 مندوبين من بين 8 طلاب و6 طالبات، بينهم طالب وشقيقته. بكم طريقةً يُمكِن اختيار طالبين وطالبتين، بينهما الأخ أو شقيقته، من دون اختيارهما معًا؟

34 **مسألة مفتوحة:** أكتب مسألة تتضمَّن حادثًا احتماله $\frac{1}{{}_{10}C_3}$.

35 **تحدٍّ:** قرَّرت مجموعة مُكوَّنة من m رجلًا، وn سيدةً من هواة المطالعة إنشاء نادٍ خاص بأعضاء المجموعة، وكذلك اختيار لجنة رباعية من الأعضاء بصورة عشوائية. وقد تبيَّن لهم أنَّ احتمال اختيار رجلين وسيدتين هو 0.9 احتمال اختيار رجل واحد وثلاث سيدات من أعضاء المجموعة. ما أصغر قيمة مُمكِنة لكلٍّ من m، وn؟

الدرس 2

المُتغيِّرات العشوائية
Random Variables

فكرة الدرس

- تعرُّف المُتغيِّر العشوائي، وإنشاء توزيعه الاحتمالي.
- إيجاد التوقُّع والتباين لمُتغيِّر عشوائي في تجربة عشوائية.

المصطلحات المُتغيِّر العشوائي، التوزيع الاحتمالي، التوقُّع، التباين.

مسألة اليوم أُلقِي حجرا نرد منتظمان ومتمايزان معًا مرَّة واحدة، ثم دُوِّن الفرق المُطلَق بين العددين الظاهرين على الوجهين العلويين. ما الفرق الذي احتماله أكبر؟

المُتغيِّر العشـــوائي (random variable) هو مُتغيِّر يُمكِن إيجاد قِيَمه عن طريق نواتج تجربة عشوائية.

مثال 1

في تجربة إلقاء قطعتي نقد عشوائيًّا، إذا دلَّ المُتغيِّر العشوائي X على عدد مرّات ظهور الصورة، فأجد مجموعة قِيَم X.

أفترض أنَّ H تعني صورة، وأنَّ T تعني كتابة. وبذلك، فإنَّ:

عناصر فضاء العيِّنة للتجربة: $\Omega = \{(T, T), (T, H), (H, T), (H, H)\}$

$$\begin{array}{ccccc} & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ X = & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}$$

عدد الصور المُرتبِط بكل عنصر

إذن، مجموعة قِيَم المُتغيِّر العشوائي هي: $X = \{0, 1, 2\}$.

رموز الرياضيات

يُرمَز إلى قِيَم المتغير العشوائي بالرمز x، ويُرمَز إلى المتغير العشوائي نفسه بالرمز X.

أتحقَّق من فهمي

في تجربة إلقاء ثلاث قطع نقد متمايزة عشـــوائيًّا، إذا دلَّ المُتغيِّر العشـــوائي X على عدد مرّات ظهور الكتابة، فأجد مجموعة قِيَم X.

أتعلَّم

مجال التوزيع الاحتمالي هــو مجموعــة قِيَــم المُتغيِّـر العشــوائي، ومــداه مجموعــة قِيَــم الاحتمالات المقابلة.

التوزيع الاحتمالــي (probability distribution) للتجربة العشــوائية هــو اقتران يربط قِيَم المُتغيِّر العشــوائي باحتمالات وقوعها في التجربــة، ويُرمَز إلى اقتران التوزيع الاحتمالي بالرمز $P(X)$، وقد يُكتَب في صورة $P(X = x)$.

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّه عند إلقاء قطعتي نقد متمايزتين مرَّة واحدة، فإنَّ قِيَم المُتغيِّر العشوائي X الذي يدل على عدد مرّات ظهور الصورة قد تكون 0، أو 1، أو 2، حيث إنَّ فضاء العيِّنة لهذه التجربة هو:

$$\Omega = \{(H, H), (H, T), (T, H), (T, T)\}$$

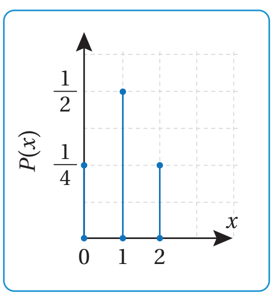
وبذلك تكون قِيَم اقتران التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر العشوائي X هي:

$$P(X = 0) = \frac{1}{4}\ , P(X = 1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}\ , P(X = 2) = \frac{1}{4}$$

يُمكِن أيضًا التعبير عن اقتران التوزيع الاحتمالي بجدول، أو تمثيل بياني:

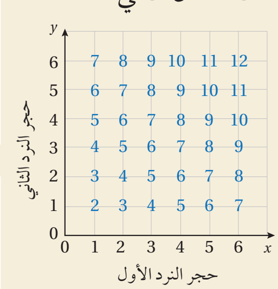
x	0	1	2
$P(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

توزيع احتمالي



أتذكَّر

عدد النواتج المُمكِنة في تجربة إلقــاء حجري نرد منتظمــين ومتمايزين معًا مرَّة واحدة هو 36 ناتجًا، ويُمكِن إيجاد قيم x وعدد النواتج باستعمال مُخطَّط الاحتمال الآتي:



مثال 2

في تجربة إلقــاء حجري نرد منتظمين ومتمايزين معًا مرَّة واحدة، إذا دلَّ المُتغيِّر العشــوائي X على مجموع العددين الظاهرين علــى الوجهين العلويين، فأجد التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر X في صورة جدول.

الخطوة 1: أجد قِيَم المُتغيِّر X.

$$X = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

الخطوة 2: أُنشِئ جدولًا من صفين أُنظِّم فيه قِيَم المتغير العشوائي، والاحتمال المقابل لكلٍّ منها.

قِيَم x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
عدد النواتج	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1
الاحتمال $P(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

أتحقَّق من فهمي

سُحِبت بطاقتان عشوائيًّا دون إرجاع من وعاء يحوي البطاقات الآتية:

3 0 3 1

إذا دلَّ المُتغيِّر العشوائي X على مجموع العددين الظاهرين على هاتين البطاقتين، فأُنشِئ جدول التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر X.

أُلاحِظ في المثال السابق أنَّ مجموع احتمالات قِيَم المُتغيِّر العشوائي يساوي 1:

$$\frac{1}{36}+\frac{2}{36}+\frac{3}{36}+\frac{4}{36}+\frac{5}{36}+\frac{6}{36}+\frac{5}{36}+\frac{4}{36}+\frac{3}{36}+\frac{2}{36}+\frac{1}{36}=1$$

وهذه الخاصية عامة لأيِّ مُتغيِّر عشوائي.

مفهوم أساسي — اقتران التوزيع الاحتمالي

بالكلمات: إذا كان X مُتغيِّرًا عشــوائيًّا، فإنَّ مجموع قِيَم اقتران التوزيع الاحتمالي $P(X=x)$ يساوي 1

بالرموز: إذا كان X مُتغيِّرًا عشوائيًّا، فإنَّ $\sum P(X=x)=1$.

تســاعد خاصية مجموع احتمالات قِيَم المُتغيِّر العشــوائي على إيجاد احتمالات مجهولة في التوزيع الاحتمالي، ثم حساب احتمالات ضمن شروط مُحدَّدة على قِيَم المُتغيِّر العشوائي.

مثال 3

في تجربة عشوائية، كان التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر العشوائي X كما في الجدول الآتي:

x	-1	0	1	2	3
$P(X=x)$	0.1	0.2	a	$2a$	0.25

1 أجد قيمة a.

$0.1+0.2+a+2a+0.25=1$ لأنَّ $\sum P(X=x)=1$

$0.55+3a=1$ بجمع الحدود المتشابهة

$3a=0.45$ بطرح 0.55 من طرفي المعادلة

$a=0.15$ بقسمة طرفي المعادلة على 3

2 أجد ناتج: $P(X \leq 0)$.

$P(X \leq 0) = P(X = 0) + P(X = -1)$ بتحديد قِيَم X ضمن الشرط المُحدَّد

$= 0.1 + 0.2$ بتعويض قِيَم الاحتمالات

$= 0.3$ بالجمع

3 أجد ناتج: $P(X \geq 0)$.

$P(X \geq 0) = 1 - P(X = -1)$ الحادث $X \geq 0$ هو مُتمِّم للحادث $X = -1$

$= 1 - 0.1$ بتعويض قيمة الاحتمال

$= 0.9$ بالطرح

4 أجد منوال التوزيع.

المنوال هو قيمة X الأعلى تكرارًا. وفي هذه المسألة، فإنَّ المنوال هو القيمة المقابلة لأعلى احتمال؛ أيْ 0.3 المقابل للقيمة 2

إذن، منوال التوزيع هو 2

أتذكَّر

لأيِّ حادث A في فضاء العيِّنة لتجربة عشوائية، فإنَّ: $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$، حيث $\overline{A}$ هو الحادث المُتمِّم للحادث A.

أُفكِّر

هل يُمكِن إيجاد ناتج $P(X \geq 0)$ بطريقة أُخرى؟

أتحقَّق من فهمي

في تجربة عشوائية، كان التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر العشوائي X كما في الجدول الآتي:

x	1	2	3	4
$P(X = x)$	0.25	g	0.35	3g

a) أجد قيمة g.

b) أجد ناتج: $P(1 \leq X < 3)$.

c) أجد ناتج: $P(X < 4)$.

d) أجد منوال التوزيع.

تعلَّمْتُ سابقًا إيجاد الوسط الحسابي $(\overline{x})$ لبيانات مُمثَّلة في جداول تكرارية؛ بقسمة مجموع حاصل ضرب القِيَم في تكراراتها $(\sum x \cdot f)$ على مجموع التكرارات $(\sum f)$ باستعمال الصيغة الآتية:

$$\overline{x} = \frac{\sum x \cdot f}{\sum f}$$

أتعلَّم

التوقُّع هو القيمة المُتوقَّعة للمُتغيِّر العشوائي عند تكرار التجربة العشوائية عددًا كبيرًا جدًّا من المرّات.

وبالمثل، يُمكِن إيجاد الوسط الحسابي لتوزيع احتمالي؛ لأنَّ احتمالات قِيَم المُتغيِّر العشوائي X تُمثِّل تكرارات لتلك القِيَم (تكرارات نسبية؛ نظرًا إلى قسمة كل تكرار على مجموع التكرارات). ولأنَّ مجموع احتمالات قِيَم المُتغيِّر العشوائي (التكرارات) هو 1، فإنَّ الوسط الحسابي هو $\sum x.P(x)$، في ما يُعرَف باسم **التوقُّع** (expectation) للمُتغيِّر العشوائي X، ويُرمَز إليه بالرمز $E(x)$.

التوقُّع

مفهوم أساسي

بالكلمات: التوقُّع للمُتغيِّر العشوائي X في توزيع احتمالي لتجربة عشوائية يساوي مجموع حواصل ضرب كل قيمة للمُتغيِّر X في احتمال تلك القيمة.

بالرموز: $E(x)= \sum x.P(x)$

مثال 4 : من الحياة

دراسة: **في دراسة إحصائية شملت 100 أُسْرة اختيرت عشوائيًّا، أُريد تعرُّف عدد أجهزة الحاسوب التي تملكها هذه الأُسَر. والجدول الآتي يُبيِّن نتائج هذه الدراسة:**

عدد أجهزة الحاسوب (x)	0	1	2	3
عدد الأُسَر (التكرار f)	17	42	31	10

بافتراض أنَّ المُتغيِّر العشوائي X يُمثِّل عدد أجهزة الحاسوب لدى كل أُسْرة:

1 **أُنشِئ جدول التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر العشوائي X.**

أجد احتمال كل قيمة من قِيَم X؛ بحساب تكرارها النسبي عن طريق قسمة التكرار المقابل لكل قيمة على مجموع التكرارات، وهو 100، فيكون جدول التوزيع الاحتمالي كما يأتي:

x	0	1	2	3
$P(X=x)$	0.17	0.42	0.31	0.10

2 **أجد توقُّع المُتغيِّر العشوائي X.**

$E(X) = \sum x.P(x)$ صيغة التوقُّع

$= (0\times0.17) + (1\times0.42) + (2\times0.31) + (3\times0.10)$ مجموع نواتج الضرب

$= 1.34$ بالتبسيط

أتحقَّق من فهمي

يجد مراد عددًا من الرسائل في بريده الإلكتروني كل يوم، فقرَّر رصد عدد الرسائل التي وصلته يوميًّا من 50 يومًا اختيرت عشوائيًّا، وكانت النتائج التي توصَّل إليها كما في الجدول الآتي:

عدد الرسائل (x)	1	2	3	4	5
عدد الأيام (التكرار f)	7	22	18	1	2

بافتراض أنَّ المُتغيِّر العشوائي X يُمثِّل عدد الرسائل اليومية التي تصل البريد الإلكتروني لمراد:

a) أُنشِئ جدول التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر العشوائي X.

b) أجد توقُّع المُتغيِّر العشوائي X.

يَلزم أحيانًا إنشاء جدول التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر العشوائي X، ثم تطبيق الصيغة الخاصة بإيجاد التوقُّع.

مثال 5

أُلقِيت قطعة نقود غير منتظمة 3 مرّات متتالية. إذا دلَّ المُتغيِّر العشوائي X على عدد مرّات ظهور الصورة (H)، فأجد $E(X)$، علمًا بأنَّ احتمال ظهور الصورة في الرمية الواحدة هو 0.3

بما أنَّ $P(H) = 0.3$، فإنَّ احتمال ظهور الكتابة (T) هو: $P(T) = 1-0.3 = 0.7$

الخطوة 1: أُحدِّد قِيَم المُتغيِّر العشوائي.

قِيَم X في هذه التجربة هي: $0, 1, 2, 3$

الخطوة 2: أجد الاحتمالات.

$P(x=0) = P(T, T, T)$ يوجد حادث واحد مُرتبِط بالقيمة: $x = 0$

$= 0.7 \times 0.7 \times 0.7$ قانون احتمال الحوادث المستقلة

$= 0.343$ بالضرب

توجد 3 حوادث مُرتبِطة بالقيمة: $x = 1$

$$P(X=1) = P(H, T, T)+P(T, H, T)+ P(T, T, H)$$

قانون احتمال الحوادث المستقلة

$$= (0.3\times0.7\times0.7)+(0.7\times0.3\times 0.7)+(0.7\times0.7\times0.3)$$

بالتبسيط

$$= 0.441$$

توجد 3 حوادث مُرتبِطة بالقيمة: $x = 2$

$$P(X=2) = P(H, H, T)+P(H, T, H)+ P(T, H, H)$$

قانون احتمال الحوادث المستقلة

$$= (0.3\times0.3\times0.7)+(0.3\times0.7\times0.3)+(0.7\times0.3\times0.3)$$

بالتبسيط

$$= 0.189$$

يوجد حادث واحد مُرتبِط بالقيمة: $x = 3$

$$P(X=3) = P(H, H, H)$$

قانون احتمال الحوادث المستقلة

$$= 0.3 \times 0.3 \times 0.3$$

بالضرب

$$= 0.027$$

الخطوة 3: أُنشِئ جدول التوزيع الاحتمالي.

x	0	1	2	3
$P(X=x)$	0.343	0.441	0.189	0.027

الخطوة 4: أجد التوقُّع $E(X)$.

صيغة التوقُّع

$$E(X) = \sum x \,.\, P(x)$$

مجموع نواتج الضرب

$$= (0\times0.343) + (1\times0.441)+ (2\times0.189) + (3\times0.027)$$

بالتبسيط

$$= 0.9$$

أتحقَّق من فهمي

يحتوي وعاء على 6 بطاقات حمراء، و4 بطاقات زرقاء، جميعها مُتماثِلة. إذا سُحِبت منها بطاقتان على التوالي من دون إرجاع، ودلَّ المُتغيِّر العشوائي X على عدد البطاقات الزرقاء المسحوبة، فأجد $E(X)$.

التباين (Variance) للمُتغيِّر العشوائي X هو مقياس لتشتُّت قِيَم المُتغيِّر عن وسطها الحسابي $E(X)$، ويُرمَز إليه بالرمز $\text{Var}(X)$، أو الرمز σ^2، ويُمكِن حسابه بالعلاقة الآتية:

$$\text{Var}(X) = \sigma^2 = E(X^2) - (E(X))^2$$

التباين

مفهوم أساسي

بالكلمات: التباين للمُتغيِّر العشـوائي X في توزيع احتمالي لتجربة عشـوائية يساوي مجموع نواتج ضرب مربعات قِيَم المُتغيِّر X في احتمال كل قيمة، مطروحًا منه مربع توقُّع المُتغيِّر X.

بالرموز : $\text{Var}(X) = \sigma^2 = \sum (x^2 \,.\, P(x)) - (E(X))^2$

مثال 6

يُبيِّن الجدول الآتي التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر العشوائي X:

x	0	1	2	3	4
$P(X=x)$	0.3	0.12	0.15	0.12	0.31

1 أجد التوقُّع $E(X)$.

$E(X) = \sum x \,.\, P(x)$ صيغة التوقُّع

$= (0\times0.3) + (1\times0.12) + (2\times0.15) + (3\times0.12) + (4\times0.31)$ مجموع نواتج الضرب

$= 2.02$ بالتبسيط

2 أجد التباين $\text{Var}(X)$.

$\text{Var}(X) = \sum \left(x^2 \,.\, P(x)\right) - (E(X))^2$ صيغة التباين للمُتغيِّر العشوائي X

$= ((0\times0.3)+(1\times0.12)+(4\times0.15)+(9\times0.12)+(16\times0.31)) - (2.02)^2$ بالتعويض

≈ 2.68 بالتبسيط

أتحقَّق من فهمي

يُبيِّن الجدول الآتي التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر العشوائي X:

x	-1	1	3	5
$P(X=x)$	0.3	0.4	0.1	0.2

a) أجد التوقُّع $E(X)$.

b) أجد التباين $\text{Var}(X)$.

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

في تجربة سحب 4 كرات على التوالي من كيس يحوي 3 كرات حمراء، وكرتين سوداوين، إذا دلَّ المُتغيِّر العشوائي X على عدد الكرات الحمراء في الكرات المسحوبة، فأجد قِيَم X في كلٍّ من الحالتين الآتيتين:

1 السحب مع الإرجاع.

2 السحب من دون إرجاع.

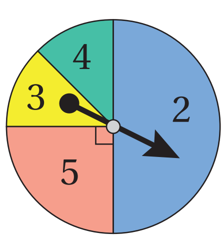
3 في تجربة إلقاء قطعة نقود 6 مرّات متتالية، إذا دلَّ المُتغيِّر العشوائي X على عدد مرّات ظهور الصورة (H)، فأجد قِيَم X.

4 في تجربة إلقاء حجري نرد معًا مرَّة واحدة، إذا دلَّ المُتغيِّر العشوائي X على ناتج ضرب العددين الظاهرين على الحجرين، فأجد قِيَم X.

يحتوي وعاء على 3 أقراص زرقاء، و6 أقراص خضراء. إذا سُحِبت من الوعاء 3 أقراص على التوالي مع الإرجاع، ودلَّ المُتغيِّر العشوائي X على عدد الأقراص الزرقاء المسحوبة، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

5 التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر العشوائي X في صورة جدول.

6 احتمال سحب قرص أزرق واحد على الأقل.



في تجربة تدوير مُؤشِّر القرص المجاور عشوائيًّا مرَّتين متتاليتين، إذا دلَّ المُتغيِّر العشوائي X على مجموع العددين اللذيْن توقَّف عندهما المُؤشِّر، وكان القطاعان الأخضر والأصفر متطابقان، فأجد:

7 التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر X في صورة جدول.

8 منوال التوزيع.

في تجربة عشوائية، كان التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر العشوائي X كما في الجدول الآتي:

x	1	2	4	5	8
$P(X=x)$	0.2	b	0.15	0.29	$2b$

9 أجد قيمة b.

10 أجد ناتج: $P(2 < X \leq 8)$.

11 أجد ناتج: $P(X \geq 2)$.

12 يتألَّف مجلس الطلبة في إحدى الجامعات من 10 طلاب و15 طالبة، وقد شكَّلوا لجنة تضمُّ ثلاثة منهم بصورة عشوائية للاجتماع مع مُمثِّلين عن رئاسة الجامعة. إذا دلَّ المُتغيِّر العشوائي X على عدد الطالبات في اللجنة المختارة، فأُنشِئ جدول التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر العشوائي X.

أجد القيمة المُتوقَّعة لكلٍّ من التوزيعات الاحتمالية الآتية:

13

x	-2	-1	0	1	2	3
$P(X=x)$	0.13	0.27	0.1	0.18	0.22	0.1

14

y	2	4	6	8
$P(Y=y)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

15 دَوَّن أحد العلماء أعمار عدد من الغزلان في الجدول الآتي:

العمر (بالسنة x)	1	2	3	4	5	6	7	8
التكرار (f)	7	30	58	135	150	70	40	10

بافتراض أنَّ المُتغيِّر العشوائي X يُمثِّل عمر الغزال، أجد التوقُّع $E(X)$.

16 يُبيِّن الجدول الآتي التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر العشوائي X:

x	-1	0	1	2
$P(X=x)$	a	$4b$	$2b$	a

إذا كان توقُّع X هو $\frac{5}{12}$ ، فأجد قيمة كلٍّ من a، وb.

17 يعمل في إحدى المؤسسات 9 موظفين و15 موظفة، وقد شكَّلوا لجنة مشتريات تضمُّ أربعة منهم بصورة عشوائية. إذا دلَّ المُتغيِّر العشوائي X على عدد الموظفات في اللجنة المختارة، فأُنشِئ جدول التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر X، ثم أجد التوقُّع $E(X)$.

18 يُبيِّن الجدول الآتي التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر العشوائي Y:

y	-2	3
$P(Y=y)$	a	$1-a$

إذا كان $E(Y) = 2$، فأجد $\text{Var}(Y)$.

19 أحُلُّ المسألة الواردة في بند (مسألة اليوم).

مهارات التفكير العليا

20 **تبرير:** في تجربة سحب بطاقتين عشوائيًّا على التوالي من صندوق يحوي 4 بطاقات مُتماثِلة، كلٌّ منها مُرقَّمة بأحد الأرقام: 2، 3، 4، 5، إذا دلَّ المُتغيِّر العشوائي X على مجموع الرقمين الظاهرين على البطاقتين المسحوبتين، وكانت قِيَمه: 5، 6، 7، 8، 9، فأُحدِّد إذا كان السحب مع الإرجاع، أو من دون إرجاع، مُبرِّرًا إجابتي.

21 **تحدٍّ:** رُقِّمت أوجه حجر نرد أحمر بالأرقام: $1, 1, 1, 2, 2, 3$، ثم رُقِّمت أوجه حجر نرد أزرق بالأرقام: $1, 2, 2, 3, 3, 3$، ثم أُلقِي الحجران معًا مرَّة واحدة. إذا دلَّ المُتغيِّر العشوائي X على مجموع الرقمين الظاهرين على الوجه العلوي لكلا الحجرين، فأُنشِئ جدول التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر العشوائي.

22 **تحدٍّ:** في تجربة عشوائية، اختيرت بطاقة من بين 3 بطاقات تحمل الأرقام: 1، 3، 5، ثم أُلقِيت قطعة نقود منتظمة عددًا من المرّات يُطابِق الرقم المكتوب على البطاقة. إذا دلَّ المُتغيِّر العشوائي H على عدد مرّات ظهور الصورة (H)، فأجد عناصر الحادث المُرتبِط بالقيمة: $H = 3$، ثم أجد ناتج: $P(H = 3)$.

23 **مسألة مفتوحة:** أُنشِئ جدول التوزيع الاحتمالي لمُتغيِّر عشوائي X، قِيَمه: $1, 3, 5$، وقيمة $E(X) = 4$.

أختار رمز الإجابة الصحيحة في كلٍّ ممّا يأتي:

1 عدد طرائق اختيار 3 طلبة عشوائيًّا من بين 10 طلبة، وترتيبهم على 3 مقاعد في صف واحد، هو:

a) ${}_{10}C_3$ b) ${}_{10}P_3$

c) ${}_{3}P_3$ d) 7!

2 أحد الآتية يُمثِّل الأعداد الفردية التي يحوي كلٌّ منها 5 منازل، ويُمكِن تكوينه بإعادة ترتيب أرقام العدد 45092:

a) 120 b) 96

c) 60 d) 36

3 عدد طرائق اختيار 5 طلاب و3 طالبات عشوائيًّا من بين 9 طلاب و7 طالبات هو:

a) ${}_{16}C_8$ b) ${}_{16}P_8$

c) ${}_{9}C_5 \times {}_{7}C_3$ d) ${}_{9}P_5 \times {}_{7}P_3$

4 عدد طرائق ترتيب أحرف كلمة (سلسبيل) التي تبدأ بحرف السين وتنتهي به هو:

a) 12 b) 24 c) 90 d) 180

5 وعاء فيه 6 بطاقات مُتماثِلة، كُتِب عليها الأرقام: 1، 2، 3، 4، 5، 6، إذا سُحِبت منه 3 بطاقات معًا بصورة عشوائية، ودلَّ المُتغيِّر العشوائي X على أصغر الأرقام الظاهرة على هذه البطاقات، فإنَّ مجموعة قِيَم X هي:

a) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ b) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

c) $\{1, 2, 3, 4\}$ d) $\{1, 2, 3\}$

6 وعاء فيه 4 كرات حمراء، وكرتان خضراوان، جميعها مُتماثِلة. إذا سُحِبت منه 3 كرات عشوائيًّا على التوالي مع الإرجاع، فإنَّ احتمال سحب كرتين خضراوين، وكرة واحدة حمراء، هو:

a) $\frac{2}{27}$ b) $\frac{2}{9}$ c) $\frac{1}{5}$ d) $\frac{3}{5}$

يوجد على أحد رفوف المكتبة 5 كتب علوم مختلفة، و4 كتب رياضيات مختلفة. أجد عدد طرائق ترتيب الكتب بعضها بجانب بعض على الرف في الحالات الآتية:

7 أنْ تكون كتب كل مبحث مُجمَّعة معًا.

8 أنْ تكون كتب الرياضيات فقط مُجمَّعة معًا.

9 ألّا يكون أيُّ كتابي رياضيات متجاورين.

يشترط أحد المواقع التعليمية في شبكة الإنترنت إنشاء المُستخدِم حسابًا محميًّا بكلمة مرور مُكوَّنة من 8 رموز مختلفة تُختار من بين الأحرف: *A, B, C, D, E, F*، والأرقام: 1, 2, 3, 4, 5, 6، أجد عدد كلمات المرور التي يُمكِن إنشاؤها في الحالات الآتية:

10 اشتمال كلمة المرور على 3 أحرف متبوعة بـ5 أرقام.

11 بدء كلمة المرور برقم، وانتهاؤها برقم.

12 اشتمال كلمة المرور على 4 أحرف بعضها بجانب بعض.

قُبَّعات مُلوَّنة: يوجد في متجر 8 قُبَّعات مُتماثِلة، منها 4 سوداء، واثنتان حمراوان، وواحدة خضراء، وواحدة بيضاء. رتَّب صاحب المتجر هذه القُبَّعات عشوائيًّا في صف واحد على أحد الرفوف:

13 ما احتمال أنْ تكون القُبَّعات السوداء متجاورة؟

14 ما احتمال أنْ تكون القُبَّعتان اللتان على طرفي الصف حمراوين؟

15 رتَّبت هالا أحرف كلمة (ياسمين) بعضها بجانب بعض في خط مستقيم. ما احتمال أنْ تكون الأحرف الصحيحة متجاورة؟

16 أرادت لمياء التقاط صورة لعائلتها، فوقف الأب والأم والابن والابنة في صف واحد أمام آلة التصوير. ما احتمال وقوف الابن والابنة بين الأبوين؟

سأل مراد عددًا من طلبة الصف الثالث عن عدد أقلام التلوين في حقائبهم، ثم دوَّن النتائج في الجدول الآتي:

عدد الأقلام في الحقيبة	3	8	10	14	15
التكرار	1	3	2	5	3

بافتراض أنَّ المُتغيِّر العشوائي X يُمثِّل عدد الأقلام في الحقيبة:

17 أُنشِئ جدول التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر العشوائي X.

18 أجد التوقُّع $E(X)$.

19 في تجربة إلقاء حجري نرد معًا مرَّة واحدة، إذا دلَّ المُتغيِّر العشوائي X على القيمة المُطلَقة للفرق بين العددين الظاهرين على الحجرين، فأجد قِيَم X.

20 في تجربة سحب بطاقتين مع الإرجاع من مجموعة بطاقات مُرقَّمة بالأرقام: 1، 2، 3، 4، إذا دلَّ المُتغيِّر العشوائي X على ناتج ضرب الرقمين الظاهرين على البطاقتين، فأجد قِيَم X.

يُبيِّن الجدول الآتي التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر العشوائي X:

x	1	2	3	4
$P(X=x)$	0.25	k	0.33	$2k$

21 أجد قيمة k.

22 أجد ناتج: $P(X \geq 2)$.

23 أجد التباين $\mathrm{Var}(X)$.

تدريب على الاختبارات الدولية

24 إذا كان: ${}_nC_4 = {}_nP_3$، فما قيمة n؟

25 إذا كان التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر العشوائي X كما في الجدول الآتي، فأجد قيمتين مُمكِنتين لكلٍّ من a، و b.

x	1	3	5	7
$P(X=x)$	a	$3b$	$2a$	b

في تجربة إلقاء حجري نرد منتظمين ومتمايزين مرَّة واحدة، إذا دلَّ المُتغيِّر العشوائي G على أكبر العددين في حال اختلافهما، أو دلَّ على أحدهما في حال تساويهما، فأُجيب عن الأسئلة الآتية:

26 أُنشِئ جدول التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر G.

27 أجد ناتج: $P(2 < G \leq 5)$.

28 أجد التوقُّع $E(G)$.

الوحدة
9

المتتاليات والمتسلسلات
Sequences and Series

ما أهمية هذه الوحدة؟

يُمكِن نمذجة كثير من المواقف الحياتية والعلمية باستعمال المتتاليات والمتسلسلات، وهي أنماط عددية؛ ما يساعد على تحليل تلك المواقف وفهمها. فمثلًا، تظهر متتالية خاصة تُسمّى نُدْفة الثلج، وتُمثِّل عدد أضلاع بلّورة الثلج في أثناء مراحلها المتتالية، بعد سلسلة من التقسيمات المتتالية.

تعلَّمْتُ سابقًا:

- إكمال نمط عددي معطى.
- تحديد المجال والمـدى لاقترانات كثيرات الحدود، والاقترانات الأُسِّية.
- إيجـاد الحـدِّ العـام لـكلٍّ مـن المتتاليـة التربيعية،والمتتالية التكعيبية.
- التعبير عـن الأنمـاط الهندسـية بمتتاليات عددية.

سأتعلَّم في هذه الوحدة:

- المتسلسلات، وعلاقتها بالمتتاليات.
- المتتاليات والمتسلسلات الحسابية المنتهية.
- المتتاليات والمتسلسلات الهندسية المنتهية.
- المتتاليات والمتسلسلات الهندسية اللانهائية.

ملحوظة: أستعمل تدريبات (أسـتعد لدراسة الوحدة) في الصفحتين (24) و (25) من كتاب التمارين؛ لمراجعة هذه الموضوعات قبل البدء بدراسة الوحدة.

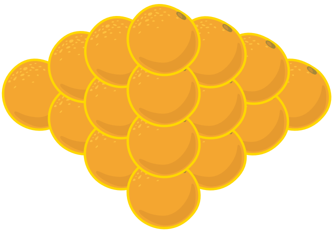
الدرس 1

المتتاليات والمتسلسلات
Sequences and Series

فكرة الدرس
- تعرُّف المتتالية المنتهية وغير المنتهية، والمتسلسلة المنتهية وغير المنتهية.
- إيجاد مجموع المتسلسلة المنتهية.

المصطلحات المتتالية المنتهية، المتتالية غير المنتهية، المتسلسلة.

مسألة اليوم يعرض محل لبيع الفاكهة البرتقال مُرتَّبًا في طبقات تُشكِّل هرمًا ثلاثيًّا كما في الشكل المجاور.



ما عدد حبّات البرتقال في الهرم؟

المتتاليات

تعلَّمْتُ سابقًا مفهوم المتتالية، وأنَّ كل عدد فيها يُسمّى حدًّا.

تكون **المتتالية منتهية** (finite sequence) إذا حوت عددًا منتهيًا من الحدود، وتكون **غير منتهية** (infinite sequence) إذا حوت عددًا لانهائيًّا من الحدود.

متتالية غير منتهية	متتالية منتهية
5, 10, 15, 20, 25 , …	5, 10, 15, 20, 25

مفهوم أساسي — المتتاليات بوصفها اقترانات

بالكلمات: المتتالية اقتران مجاله مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة، أو مجموعة جزئية منها، ومداه مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية، حيث يرتبط كل عدد صحيح في المجال بعدد حقيقي في المدى، هو أحد حدود المتتالية.

بالرموز:

المجال:	n	. . .	4	3	2	1 ترتيب الحدِّ
	↓		↓	↓	↓	↓
المدى:	a_n	. . .	a_4	a_3	a_2	a_1 حدود المتتالية

حيث: a_1: الحدُّ الأول للمتتالية، و a_2: الحدُّ الثاني للمتتالية، و a_n: الحدُّ العام للمتتالية.

أتذكَّر

الحدُّ العام هو علاقة تربط كل حدٍّ في المتتالية برتبته. ويُمكِن استعمال الحدِّ العام لإيجاد قيمة أيِّ حدٍّ في المتتالية، وذلك بتعويض رتبة ذلك الحدِّ في الحدِّ العام.

مثال 1

أجد الحدود الأربعة الأولى لكلٍّ من المتتاليات الآتية:

1 $a_n = \frac{n}{n+1}$

$a_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$ $\quad n = 1$ $\qquad a_3 = \frac{3}{3+1} = \frac{3}{4}$ $\quad n = 3$

$a_2 = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}$ $\quad n = 2$ $\qquad a_4 = \frac{4}{4+1} = \frac{4}{5}$ $\quad n = 4$

2 $a_n = 3n(-1)^n$

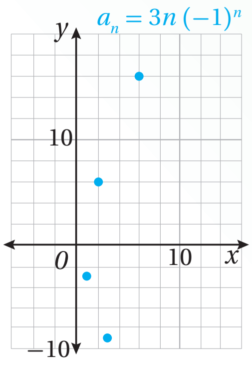
$a_1 = 3(1)(-1)^1 = -3$ $\quad n = 1$ $\qquad a_3 = 3(3)(-1)^3 = -9$ $\quad n = 3$

$a_2 = 3(2)(-1)^2 = 6$ $\quad n = 2$ $\qquad a_4 = 3(4)(-1)^4 = 12$ $\quad n = 4$

الدعم البياني:

أُلاحِظ في الفرع الثاني من المثال أنَّ لوجود $(-1)^n$ في الحدِّ العام للمتتالية أثرًا في جعل إشارة حدود المتتالية تتناوب بين الإشارة الموجبة والإشارة السالبة، ويُمكِن ملاحظة هذا الأثر بتمثيل منحنى المتتالية بيانيًّا في المستوى الإحداثي.

وبما أنَّ المتتالية اقتران مجاله الأعـداد الصحيحة الموجبة، فإنَّ تمثيلها يكون في صورة نقاط منفصلة.



أُفكِّر

ما الفرق بين الاقتران $f(x) = x^2$، والمتتالية $a_n = n^2$؟

3 $a_n = \begin{cases} n & , n \text{ عدد زوجي} \\ \frac{1}{n} & , n \text{ عدد فردي} \end{cases}$

$a_1 = \frac{1}{1} = 1$ $\quad n = 1$ $\qquad a_3 = \frac{1}{3}$ $\quad n = 3$

$a_2 = 2$ $\quad n = 2$ $\qquad a_4 = 4$ $\quad n = 4$

أتحقَّق من فهمي **أجد الحدود الأربعة الأولى لكلٍّ من المتتاليات الآتية:**

a) $a_n = \dfrac{n}{2n-1}$ b) $a_n = (-2n)^n$ c) $a_n = \begin{cases} 2n & , \text{عدد زوجي } n \\ n^2 & , \text{عدد فردي } n \end{cases}$

إذا كانت حدود المتتالية تَتْبَع نمطًا يُمكِن تعرُّفه، فإنَّه يُمكِن إيجاد الحدِّ العام للمتتالية (a_n).

مثال 2

أجد الحدَّ العام لكل متتالية ممّا يأتي:

1 $e, \dfrac{e^2}{2}, \dfrac{e^3}{3}, \dfrac{e^4}{4}, \ldots$

أُلاحِظ أنَّ بسط كل حدٍّ من حدود المتتالية هو العدد النيبيري e مرفوعًا إلى قوَّة مساوية لرتبة الحدِّ. أمّا المقام فهو مساوٍ لرتبة الحدِّ، وبذلك يصبح الحدُّ العام للمتتالية:

$$a_n = \frac{e^n}{n}$$

2 $-2, 4, -8, 16, \ldots$

أُلاحِظ أنَّ حدود المتتالية هي قوى العدد 2، وأنَّها تتناوب في الإشارة، وبذلك يصبح الحدُّ العام للمتتالية:

$$a_n = (-2)^n$$

أتحقَّق من فهمي **أجد الحدَّ العام لكل متتالية ممّا يأتي:**

a) $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}, \ldots$ b) $-3, 9, -27, 81, \ldots$

المتسلسلات

يُطلَق على مجموع حدود المتتالية اسم **المتسلسلة** (series)، ويُمكِن إيجاد هذا المجموع بوضع إشارة الجمع $(+)$ بين حدود المتتالية بدلًا من الفواصل.

وكما هو حال المتتالية، فإنَّ المتسلسلة تكون منتهية، أو غير منتهية.

متسلسلة غير منتهية	متسلسلة منتهية
$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots$	$1 + 2 + 3 + 4 + 5$

يُمكِن التعبير عن المتسلسلة بطريقة مختصرة باستعمال رمز المجموع (Σ) (يُقرَأ: سيغما) على النحو الآتي:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k$$

n ← آخر قِيَم k

$k=1$ ← أول قِيَم k

a_k ← الحدُّ العام للمتتالية

لغة الرياضيات

يُقـرَأ $\sum_{k=1}^{5} k$: مجمـوع (k) من ($k = 1$) إلى ($k = 5$).

فمثلًا، يُمكِن التعبير عن المتسلسلتين السابقتين باستعمال رمز المجموع Σ كما يأتي:

$1 + 2 + 3 + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} k$ $\qquad$ $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = \sum_{k=1}^{5} k$

مثال 3

أكتب كل متسلسلة ممّا يأتي باستعمال رمز المجموع:

1 $\sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{5} + \cdots + \sqrt{68}$

أُلاحِظ أنَّ الحدَّ الأول يساوي $\sqrt{2+1}$، وأنَّ الحدَّ الثاني يساوي $\sqrt{2+2}$، وأنَّ الحدَّ الثالث يساوي $\sqrt{2+3}$، وأنَّ الحدَّ الأخير يساوي $\sqrt{2+66}$

إذن، يُمكِن كتابة الحدِّ العام لهذه المتتالية على النحو الآتي: $a_k = \sqrt{2+k}$

بناءً على ذلك، أكتب المتسلسلة باستعمال رمز المجموع كما يأتي:

$$\sum_{k=1}^{66} \sqrt{2+k}$$

2 $5 + 10 + 15 + \ldots$

أُلاحِظ أنَّ الحدَّ الأول يساوي $5(1)$، وأنَّ الحدَّ الثاني يساوي $5(2)$، وأنَّ الحدَّ الثالث يساوي $5(3)$.

إذن، يُمكِن كتابة الحدِّ العام المتتالية على النحو الآتي: $a_k = 5k$

بناءً على ذلك، أكتب المتسلسلة باستعمال رمز المجموع كما يأتي:

$$\sum_{k=1}^{\infty} 5k$$

أتحقَّق من فهمي **أكتب كل متسلسلة ممّا يأتي باستعمال رمز المجموع:**

a) $7 + 10 + 13 + 16 + \ldots + 25$ $\qquad$ b) $1 - 2 + 3 - 4 + \ldots \ldots$

إيجاد مجموع المتسلسلة

يُمكِن إيجاد **مجموع المتسلسلة** المنتهية بجمع حدودها. فمثلًا، إذا كُتِبت المتسلسلة باستعمال رمز المجموع، فإنَّني أستعمل الحدَّ العام لإيجاد حدودها، ثم جمعها.

مثال 4

أجد مجموع كل متسلسلة ممّا يأتي:

1 $\sum_{k=1}^{4} k^2$

أُعوِّض القِيَم: $k = 1, 2, 3, 4$ في الحدِّ العام للمتسلسلة، وهو $a_k = k^2$:

$$\sum_{k=1}^{4} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 \quad \text{حدود المتسلسلة}$$

$$= 1 + 4 + 9 + 16 \quad \text{بإيجاد مربع كل عدد}$$

$$= 30 \quad \text{بالجمع}$$

2 $\sum_{k=1}^{5} k!$

أُعوِّض القِيَم: $k = 1, 2, 3, 4, 5$ في الحدِّ العام للمتسلسلة، وهو $a_k = k!$:

$$\sum_{k=1}^{5} k! = 1! + 2! + 3! + 4! + 5! \quad \text{حدود المتسلسلة}$$

$$= 1 + 2 + 6 + 24 + 120 \quad \text{بإيجاد مضروب كل عدد}$$

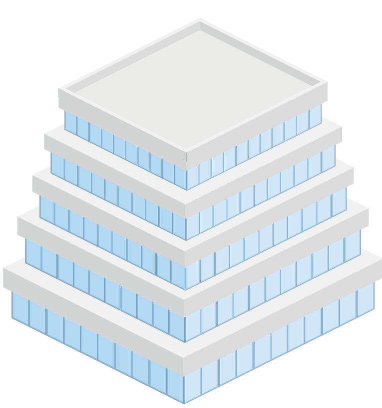
$$= 153 \quad \text{بالجمع}$$

أتحقَّق من فهمي أجد مجموع كل متسلسلة ممّا يأتي:

a) $\sum_{k=1}^{7} \frac{5k-2}{2}$

b) $\sum_{k=1}^{5} (k+1)^2$

مثال 5 : من الحياة



هندسة معمارية: صمَّم مهندس مبنى مُكوَّنًا من 5 طوابق، أرضية كلٍّ منها على شكل مربع.

إذا كان طول الضلع لأرضية الطابق الأول 30 m، ونقص طول الضلع لأرضية كل طابق 2 m عنه للطابق الذي يسبقه، فأُجيب عمّا يأتي:

1 أكتب متسلسلة تُمثِّل مجموع مساحة الأرضيات لطوابق المبنى.

الخطوة 1: أُنشِئ جدولًا أكتب فيه مساحة الأرضية لكل طابق من الطوابق الخمسة، بدءًا بالطابق الأول.

الطابق	1	2	3	4	5
مساحة أرضية الطابق (m^2)	900	784	676	576	484

الخطوة 2: أجد الحدَّ العام للمتتالية التي تُمثِّل مساحة الأرضيات للطوابق جميعها.

أُلاحِظ أنَّ الحدَّ الأول في هذه المتتالية يساوي $4\,(15)^2 = 900$، وأنَّ الحدَّ الثاني يساوي $4\,(14)^2 = 784$، وأنَّ الحدَّ الثالث يساوي $4\,(13)^2 = 676$

إذن، يُمكِن كتابة الحدِّ العام لهذه المتتالية على النحو الآتي:

$$a_k = 4\,(16-k)^2\,, \qquad k = 1, 2, 3, 4, 5$$

الخطوة 3: أستعمل رمز المجموع للتعبير عن مجموع مساحة أرضيات المبنى على شكل متسلسلة.

$$\sum_{k=1}^{5} 4\,(16-k)^2$$

2 أجد مجموع مساحة الأرضيات لطوابق المبنى.

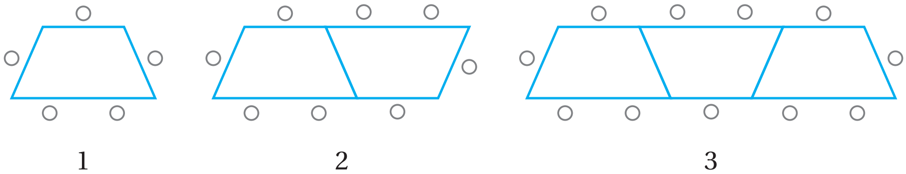
$$\sum_{k=1}^{5} 4\,(16-k)^2 = 900+784+676+576+484$$ حدود المتسلسلة

$$= 3420$$ بالجمع

إذن، مجموع مساحة الأرضيات لطوابق المبنى هو $3420\ m^2$

أتحقَّق من فهمي

مطاعم: يوجد في قاعة الطعام لأحد المطاعم طاولات على شكل شبه منحرف، وكراسي تحيط بها كما في الشكل الآتي:



أكتب باستعمال رمز المجموع متسلسلة يُمثِّل مجموعها عدد الكراسي في المطعم، ثم أجد مجموع المتسلسلة.

حالات خاصة من المتسلسلات

في ما يأتي بعض خصائص رمز المجموع.

خطأ شائع

أتجنَّب الخطأ الشائع الآتي:

$$\cancel{\sum_{k=1}^{n}(a_k \times b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k \times \sum_{k=1}^{n} b_k}$$

مفهوم أساسي — **خصائص رمز المجموع**

إذا كان a_k و b_k الحدَّين العامين لمتتاليتين، وكان c عددًا حقيقيًّا، فإنَّ:

1) $\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k \pm b_k) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \pm \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$

2) $\sum\limits_{k=1}^{n} ca_k = c\left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\right)$

إذا كان في المتسلسلة عدد كبير من الحدود، فإنَّ إيجاد مجموعها لن يكون سهلًا. ولكنْ توجد قواعد يُمكِن استعمالها لإيجاد مجموع بعض المتسلسلات الخاصة على نحوٍ سهل كما يأتي.

مفهوم أساسي — **صيغ لمجموع حالات خاصة من المتسلسلات**

1) $\sum\limits_{k=1}^{n} c = n \times c$ مجموع الحدِّ الثابت (c) إلى نفسه (n) من المرّات.

2) $\sum\limits_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ مجموع الأعداد الصحيحة المتتالية من (1) إلى (n).

3) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ مجموع مربعات الأعداد الصحيحة المتتالية من (1) إلى (n).

4) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ مجموع مكعبات الأعداد الصحيحة المتتالية من (1) إلى (n).

مثال 5

أجد مجموع كل متسلسلة ممّا يأتي:

1 $\sum\limits_{k=1}^{20} 2k$

$\sum\limits_{k=1}^{20} 2k = 2\left(\sum\limits_{k=1}^{20} k\right)$ بإخراج الثابت خارج رمز المجموع

$= 2\left(\frac{20(20+1)}{2}\right)$ مجموع الأعداد الصحيحة المتتالية من (1) إلى (20)

$= 420$ بالتبسيط

2 $\sum_{k=1}^{10} (k^3+2)$

$$\sum_{k=1}^{10} (k^3+2) = \sum_{k=1}^{10} k^3 + \sum_{k=1}^{10} 2$$ بتوزيع رمز المجموع على الجمع

$$= \left(\frac{10(10+1)}{2}\right)^2 + 2(10)$$ مجموع مكعبات الأعداد الصحيحة المتتالية من (1) إلى (10)، ومجموع الحدِّ الثابت (2) إلى نفسه (10) مرّات

$$= 3045$$ بالتبسيط

3 $\sum_{k=1}^{25} (k^2-1)$

$$\sum_{k=1}^{25} (k^2-1) = \sum_{k=1}^{25} k^2 - \sum_{k=1}^{25} 1$$ بتوزيع رمز المجموع على الطرح

$$= \left(\frac{25(25+1)(2(25)+1)}{6}\right) - 1(25)$$ مجموع مربعات الأعداد الصحيحة المتتالية من (1) إلى (25)، ومجموع الحدِّ الثابت (1) إلى نفسه (25) مرَّة

$$= 5500$$ بالتبسيط

أتحقَّق من فهمي

أجد مجموع كل متسلسلة ممّا يأتي:

a) $\sum_{k=1}^{10} 3k^2$

b) $\sum_{k=1}^{20} (7k-2)$

c) $\sum_{k=1}^{5} (-4k^3)$

أتدرّب وأحُلّ المسائل

أجد الحدود الأربعة الأولى لكلٍّ من المتتاليات الآتية:

1) $a_n = n^3 - n$

2) $a_n = 9 - 3^n$

3) $a_n = \dfrac{2^n}{3^n + 1}$

4) $a_n = \dfrac{n}{e^n}$

5) $a_n = \dfrac{n-1}{n^2 + n}$

6) $a_n = (-1)^{n-1}\left(\dfrac{n}{2n-1}\right)$

أجد الحدَّ العام لكل متتالية ممّا يأتي:

7) $-\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \cdots$

8) $3, \frac{9}{4}, \frac{27}{9}, \frac{81}{16}, \cdots$

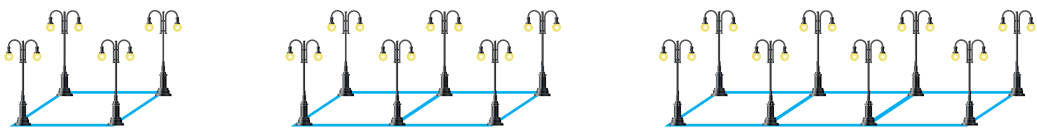
9) $1, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{4}, 5, \frac{1}{6}, \dots ..$

10) $5, -25, 125, -625, \dots$

11) $1, -1, 1, -1, 1, \dots ..$

12) $\frac{1}{10}, \frac{3}{20}, \frac{5}{30}, \frac{7}{40}, \dots .$

أعمدة إنارة: وُضِعت أعمدة إنارة في نهاية كل **100** متر على امتداد طريق سريع، كما في الشكل الآتي:



1 2 3

13) أجد الحدَّ العام للمتتالية التي تُمثِّل عدد أعمدة الإنارة على الطريق السريع.

14) أجد عدد أعمدة الإنارة على طريق طوله 8 km

أكتب كل متسلسلة ممّا يأتي باستعمال رمز المجموع:

15) $1 + 4 + 9 + \dots .. + 100$

16) $2 + 4 + 6 + \dots . + 20$

17) $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \cdots + \frac{13}{14}$

18) $-\frac{2}{3} + \frac{4}{9} - \frac{8}{27} + \cdots + \frac{64}{729}$

19) $\frac{1}{2 \ln 2} - \frac{1}{3 \ln 3} + \frac{1}{4 \ln 4} - \frac{1}{5 \ln 5} + \cdots + \frac{1}{100 \ln 100}$

أجد مجموع كل متسلسلة ممّا يأتي:

20) $\sum_{n=1}^{6} (-2)^n$

21) $\sum_{n=1}^{4} \frac{n^2 + 1}{n+1}$

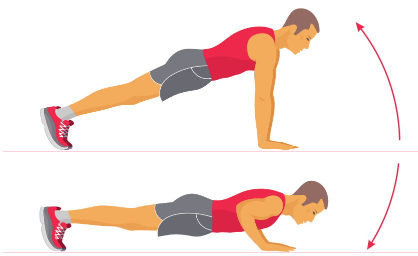
22) $\sum_{n=1}^{2} \frac{1}{3^n + 1}$

23) $\sum_{k=1}^{6} \frac{k^2}{2}$

24) $\sum_{k=1}^{9} (12k - 24)$

25) $\sum_{k=1}^{20} (k^3 - 1)$

26 يمارس هيثم تمارين الضغط بانتظام، وقد استطاع أداء 25 ضغطة بصورة مستمرة في الأسبوع الأول، ثم تمكّن من زيادة عددها أسبوعيًّا بمقدار 5 ضغطات على نحوٍ مستمر. ما عدد الضغطات التي يُمكِنه أداؤها باستمرار بعد 16 أسبوعًا؟



27 **فنون:** بنى جمال منزلًا من أوراق اللعب مُشابِهًا للمنزل المجاور. من كم صفًّا يتكوَّن منزل جمال إذا كان لديه 40 ورقة لعب؟

28 أحُلُّ المسألة الواردة في بند (مسألة اليوم).

معلومة

لا يُستعمَل الغراء والأشرطة اللاصقة والمشابك في بناء منازل أوراق اللعب. وهو فن يمتاز بقدر من الصعوبة، ويتطلَّب التحلّي بالصبر والدقَّة والتركيز.

مهارات التفكير العليا

29 **تبرير:** هل للمتسلسلتين: $9 + 7 + 5 + 3 + 1$ و $1 + 3 + 5 + 7 + 9$ المجموع نفسه؟ هل يُمكِن التعبير عنهما بالطريقة نفسها باستعمال رمز المجموع؟ أُبرِّر إجابتي.

30 **تحدٍّ:** أجد الحدَّ العام للمتتالية الآتية:

$$2, 4, 10, 28, \ldots$$

31 **تحدٍّ:** أجد الحدَّ العام للمتتالية الآتية:

$$\sqrt{2}\,,\ \sqrt{2\sqrt{2}}\,,\ \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}\,,\ \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}}\,, \ldots$$

إرشاد: أكتب كل حدٍّ في صورة قوَّة العدد 2

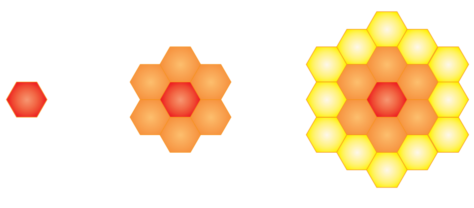
الدرس 2

المتتاليات والمتسلسلات الحسابية
Arithmetic Sequences and Series

فكرة الدرس تعرُّف المتتالية الحسابية، وإيجاد مجموع المتسلسلة الحسابية المنتهية.

المصطلحات المتتالية الحسابية، أساس المتتالية، الأوساط الحسابية، المتسلسلة الحسابية، المجموع الجزئي.

مسألة اليوم يصنع النحل قرص العسل ببناء الخلية الأولى على شكل سداسي منتظم، ثم إحاطتها بحلقات من الخلايا المُطابِقة للخلية الأولى كما في الشكل المجاور.



ما عدد الخلايا في قرص العسل بعد بناء النحل الحلقة العاشرة؟

المتتالية الحسابية

إذا كان الفرق بين كل حدَّين متتاليين في متتالية عددية يســاوي قيمــة ثابتة، فإنَّ هذه المتتالية تُسمّى **متتالية حســابية** (arithmetic sequence)، وتُســمّى القيمة الثابتة **الفرق المشترك** أو **أســاس المتتاليــة** (common difference)، ويُرمَــز إليها بالرمز d. فمثــلًا، المتتالية: $5, 10, 15, 20, \dots$ حســابية؛ لأنَّ لحدودها فرقًا مشتركًا، بحيث يزيد كل حدٍّ على الحدِّ الذي يسبقه بمقدار 5

حدود متتالية حسابية ← $5, \; 10, \; 15, \; 20, \dots$

الأساس ← $+5 \quad +5 \quad +5$

المتتاليات الحسابية

مفهوم أساسي

بالكلمات: تكون المتتالية حســابية إذا كان الفرق بين كل حــدٍّ فيها والحدِّ الذي يسبقه يساوي قيمة ثابتة.

بالرموز: تكون المتتالية: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ حسابية إذا كان:

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \cdots = a_n - a_{n-1} = d$$

مثال 1

أُحدِّد إذا كانت كل متتالية ممّا يأتي حسابية أم لا:

1 $5, 9, 13, 17, \cdots$

أطرح كل حدَّين متتالين:

بطرح الحدِّ الأول من الحدِّ الثاني	$a_2 - a_1 = 9 - 5 = 4$
بطرح الحدِّ الثاني من الحدِّ الثالث	$a_3 - a_2 = 13 - 9 = 4$
بطرح الحدِّ الثالث من الحدِّ الرابع	$a_4 - a_3 = 17 - 13 = 4$

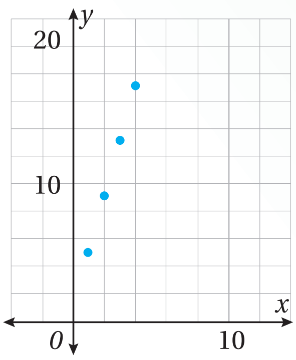
أُلاحِظ أنَّ الفرق ثابت، وأنَّه يساوي 4؛ أيْ إنَّ أساس المتتالية هو: $d = 4$.

إذن، المتتالية: $5, 9, 13, 17, \ldots$ حسابية.

الدعم البياني:

لأتحقَّق إذا كانت المتتالية حسابية أم لا، فإنَّني أُمثِّل حدودها بيانيًّا، مُلاحِظًا أنَّ النقاط التي تُمثِّل حدود المتتالية الحسابية تقع على مستقيم واحد.

أُلاحِظ من التمثيل البياني للمتتالية : $5, 9, 13, 17, \ldots$ أنَّ حدودها تقع على مستقيم واحد؛ ما يعني أنَّها متتالية حسابية.



2 $23, 15, 9, 5, \ldots.$

أطرح كل حدَّين متتالين:

بطرح الحدِّ الأول من الحدِّ الثاني	$a_2 - a_1 = 15 - 23 = -8$
بطرح الحدِّ الثاني من الحدِّ الثالث	$a_3 - a_2 = 9 - 15 = -6$
بطرح الحدِّ الثالث من الحدِّ الرابع	$a_4 - a_3 = 5 - 9 = -4$

أُلاحِظ أنَّ الفرق غير ثابت.

إذن، المتتالية: $23, 15, 9, 5, \ldots$ ليست حسابية.

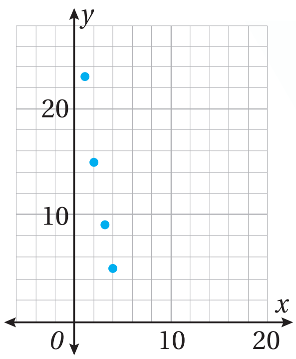
أتعلَّم

يُمكِن إيجاد الحدِّ الخامس للمتتالية في الفرع 1 بإضافة الأساس إلى الحدِّ الرابع كالآتي:

$$a_5 = a_4 + d$$
$$= 17 + 4 = 21$$

الدعم البياني:

أُلاحِظ من التمثيل البياني للمتتالية: ... ,23, 15, 9, 5 أنَّ حدودها لا تقع على مستقيم واحد؛ ما يعني أنَّها ليست متتالية حسابية.



أتحقَّق من فهمي

أُحدِّد إذا كانت كل متتالية ممّا يأتي حسابية أم لا:

a) $7, 4, 1, -2, \ldots$

b) $0, 6, 13, 19, \ldots$

الحدُّ العام للمتتالية الحسابية

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّه يُمكِن إيجاد كل حدٍّ من حدود المتتالية الحسابية بإضافة الأساس إلى الحدِّ الذي يسبقه، وأنَّه يُمكِن استعمال هذه الخاصية لإيجاد الحدِّ العام للمتتالية الحسابية باستعمال حدِّها الأول a_1، وأساسها d كالآتي:

الحدُّ بدلالة a_1 و d	رمزه	الحدُّ
a_1	a_1	الحدُّ الأول
$a_1 + d$	a_2	الحدُّ الثاني
$a_1 + 2d$	a_3	الحدُّ الثالث
$a_1 + 3d$	a_4	الحدُّ الرابع
$a_1 + 4d$	a_5	الحدُّ الخامس
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$a_1 + (n-1)d$	a_n	الحدُّ العام

مفهوم أساسي

الحدُّ العام للمتتالية الحسابية

الحدُّ العام للمتتالية الحسابية التي حدُّها الأول a_1، وأساسها d، يعطى بالصيغة الآتية:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

حيث n عدد صحيح موجب.

أُلاحِظ ممّا سبق أنَّه يُمكِن كتابة حدود المتتالية الحسابية التي حدُّها الأول a_1، وأساسها d كما يأتي:

$$a_1\,,\,a_1+d,\,a_1+2d,\,a_1+3d,\,a_1+4d,\,....$$

مثال 2

أجد الحدَّ العام لكل متتالية حسابية ممّا يأتي، ثم الحدَّ الحد العاشر منها:

1 $\mathbf{20, 13, 6, \ldots}$

الخطوة 1: أجد الحدَّ العام للمتتالية.

أُعوِّض قيمة كلٍّ من الحدِّ الأول $a_1=20$، والأساس $d=13-20=-7$ في صيغة الحدِّ العام للمتتالية:

$a_n = a_1 + (n-1)\,d$ صيغة الحدِّ العام للمتتالية الحسابية

$= 20 + (n-1)(-7)$ بتعويض قيمة $a_1=20$، وقيمة $d=-7$

$= -7n + 27$ بالتبسيط

إذن، الحدُّ العام للمتتالية الحسابية هو: $a_n=-7n+27$

الخطوة 2: أجد الحدَّ العاشر للمتتالية.

لإيجاد الحدِّ العاشر من المتتالية، أُعوِّض $n=10$ في صيغة الحدِّ العام للمتتالية:

$a_n = -7n + 27$ صيغة الحدِّ العام للمتتالية الحسابية

$a_{10} = -7(10) + 27$ بتعويض $n=10$

$= -43$ بالتبسيط

2 $\mathbf{a_7 = 39, d = 5}$

الخطوة 1: أجد الحدَّ العام للمتتالية.

أستعمل الحدَّ السابع a_7، والأساس d لإيجاد الحدِّ الأول a_1:

$a_n = a_1 + (n-1)\,d$ صيغة الحدِّ العام للمتتالية الحسابية

$a_7 = a_1 + (7-1)\,d$ بتعويض $n=7$

$39 = a_1 + (6)\,5$ بتعويض قيمة $a_7=39$، وقيمة $d=5$

$a_1 = 9$ بحلِّ المعادلة

أُعوِّض قيمة كلٍّ من a_1 و d في صيغة الحدِّ العام للمتتالية:

صيغة الحدِّ العام للمتتالية الحسابية $a_n = a_1 + (n-1)d$

بتعويض قيمة $a_1 = 9$، وقيمة $d = 5$ $a_n = 9 + (n-1)5$

بالتبسيط $a_n = 5n + 4$

إذن، الحدُّ العام للمتتالية الحسابية هو: $a_n = 5n + 4$

الخطوة 2: أجد الحدَّ العاشر للمتتالية.

لإيجاد الحدِّ العاشر من المتتالية، أُعوِّض $n = 10$ في صيغة الحدِّ العام للمتتالية:

صيغة الحدِّ العام للمتتالية الحسابية $a_n = 5n + 4$

بتعويض $n = 10$ $a_{10} = 5(10) + 4$

بالتبسيط $= 54$

أتحقَّق من فهمي

أجد الحدَّ العام لكل متتالية حسابية ممّا يأتي، ثم أجد الحدَّ الخامس عشر منها:

a) $1, -2, -5, \ldots.$

b) $a_{10} = -11, d = 2$

يُمكِن إيجاد الحدِّ العام لمتتالية حسابية إذا عُلِم حدّان منها، وذلك بإنشاء نظام مُكوَّن من معادلتين خطيتين بمُتغيِّرين، ثم حلِّه.

مثال 3

أجد الحدَّ العام للمتتالية الحسابية التي فيها $a_7 = 27$، و $a_{15} = 59$.

الخطوة 1: أستعمل صيغة الحدِّ العام: $a_n = a_1 + (n-1)d$ لكتابة نظام مُكوَّن من معادلتين خطيتين بمُتغيِّرين.

صيغة الحدِّ العام للمتتالية الحسابية $a_n = a_1 + (n-1)d$

بتعويض قيمة $a_7 = 27$، وقيمة $n = 7$ $27 = a_1 + (7-1)d$

بالتبسيط $27 = a_1 + 6d \quad \ldots\ldots(1)$

بتعويض قيمة $a_{15} = 59$، وقيمة $n = 15$ $59 = a_1 + (15-1)d$

بالتبسيط $59 = a_1 + 14d \quad \ldots\ldots(2)$

الخطوة 2: أحُلُّ المعادلة (1) والمعادلة (2) بالحذف.

بطرح المعادلة (1) من المعادلة (2)	$32 = 8d$
بقسمة طرفي المعادلة الناتجة على 8	$d = 4$
بتعويض قيمة d في المعادلة (1)	$27 = a_1 + 6\times4 \quad ......(1)$
بحلِّ المعادلة	$a_1 = 3$

الخطوة 3: أُعوِّض قيمة كلٍّ من a_1 و d في صيغة الحدِّ العام للمتتالية.

صيغة الحدِّ العام للمتتالية الحسابية	$a_n = a_1 + (n-1)d$
بتعويض قيمة $a_1 = 3$، وقيمة $d = 4$	$a_n = 3 + (n-1)(4)$
بالتبسيط	$a_n = 4n-1$

إذن، الحدُّ العام للمتتالية الحسابية هو: $a_n = 4n-1$

> **أتعلَّم**
>
> يُمكِنني التحقُّق من صحة الحلِّ بإيجاد أحد الحدود المعطاة في المسألة ضمن قاعدة الحدِّ العام للمتتالية.

أتحقَّق من فهمي

أجد الحدَّ العام للمتتالية الحسابية التي فيها $a_7 = 71$، و $a_{16} = 26$.

الأوساط الحسابية

إذا عُلِم حدّان غير متتاليين في متتالية حسابية، فإنَّه يُمكِن إيجاد جميع الحدود التي تقع بين هذين الحدَّين، وتُسمّى **الأوساط الحسابية** (arithmetic means). فمثلًا، في المتتالية الآتية، فإنَّ: 63 ,52 ,41 هي أوساط حسابية بين 30 و 74:

$$19,\ 30,\ \underbrace{41,\ 52,\ 63}_{\text{3 أوساط حسابية بين 30 و 74}},\ 74,\ 85,\ 96,\ ....$$

مثال 4

أجد 4 أوساط حسابية بين العددين 16 و 91

بما أنَّه توجد 4 حدود بين الحدِّ الأول والحدِّ الأخير، فإنَّ عدد حدود المتتالية هو 6، وبذلك تكون المتتالية كما يأتي:

$$16,\ \underline{\ ?\ },\ \underline{\ ?\ },\ \underline{\ ?\ },\ \underline{\ ?\ },\ 91$$

حيث: $a_1 = 16$، و $a_6 = 91$.

الخطوة 1: أجد أساس المتتالية.

صيغة الحدِّ العام للمتتالية الحسابية	$a_n = a_1 + (n-1)d$
بتعويض قيمة $a_1 = 16$، وقيمة $n = 6$	$a_6 = 16 + (6-1)d$
بتعويض قيمة $a_6 = 91$	$91 = 16 + 5d$
بطرح 16 من طرفي المعادلة	$75 = 5d$
بقسمة طرفي المعادلة على 5	$d = 15$

الخطوة 2: أستعمل قيمة الأساس لإيجاد الأوساط الحسابية المطلوبة.

16 31 46 61 76 91

+15 +15 +15 +15 +15

إذن، الأوساط الحسابية هي: 31, 46, 61, 76

أتحقَّق من فهمي

أجد 3 أوساط حسابية بين العددين 55 و 115

المتسلسلات الحسابية

تنتج **المتسلسلة الحسابية** (arithmetic series) من جمع حدود المتتالية الحسابية. ويُسمّى مجموع أول n حدًّا من حدود هذه المتسلسلة **مجموعًا جزئيًّا** (partial sum)، ويُرمَز إليه بالرمز S_n.

مفهوم أساسي

المجموع الجزئي للمتسلسلة الحسابية

يُمكِن إيجاد مجموع أول n حدًّا من حدود متتالية حسابية باستعمال إحدى الصيغتين الآتيتين:

1) $S_n = n\left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right)$

2) $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$

أتعلَّم

من المُلاحَظ أنَّ المجموع S_n يتكوَّن من الوسط الحسابي لكلٍّ من الحدِّ الأول والحدِّ الأخير مضروبًا في عدد الحدود التي يراد جمعها.

مثال 5

1 أجد مجموع حدود المتسلسلة الحسابية: $60 + 64 + 68 + 72 + \ldots + 120$

الخطوة 1: أجد عدد حدود المتتالية n.

أُعوِّض قيمة كلٍّ من الحدِّ الأول $a_1 = 60$، والأساس $d = 64-60 = 4$، والحدِّ الأخير $a_n = 120$ في صيغة الحدِّ العام:

$$a_n = a_1 + (n-1)\,d$$ صيغة الحدِّ العام للمتتالية الحسابية

$$120 = 60 + (n-1)(4)$$ بتعويض قيمة $a_n = 120$، وقيمة $a_1 = 60$، وقيمة $d = 4$

$$60 = 4\,(n-1)$$ بطرح 60 من طرفي المعادلة

$$15 = n-1$$ بقسمة طرفي المعادلة على 4

$$n = 16$$ بجمع 1 إلى طرفي المعادلة

الخطوة 2: أستعمل إحدى صيغتي المجموع الجزئي للمتسلسلة الحسابية لإيجاد S_n.

$$S_n = n\left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right)$$ صيغة المجموع الجزئي

$$S_{16} = (16)\left(\frac{60 + 120}{2}\right)$$ بتعويض قيمة $a_1 = 60$، وقيمة $a_{16} = 120$، وقيمة $n = 16$

$$= 1440$$ بالتبسيط

إذن، مجموع حدود هذه المتسلسلة الحسابية هو 1440

2 أجد مجموع الحدود الخمسة عشر الأولى من المتسلسلة الحسابية: $7 + 12 + 17 + 22 + \ldots$

أُعوِّض قيمة كلٍّ من الحدِّ الأول $a_1 = 7$، والأساس $d = 12-7 = 5$ في الصيغة الثانية للمجموع الجزئي للمتسلسلة الحسابية لإيجاد S_n:

$$S_n = \frac{n}{2}\,(2a_1 + (n-1)d)$$ صيغة المجموع الجزئي

$$S_{15} = \frac{15}{2}\,(2(7) + (15-1)(5))$$ بتعويض قيمة $a_1 = 7$، وقيمة $d = 5$، وقيمة $n = 15$

$$S_{15} = 630$$ بالتبسيط

إذن، مجموع الحدود الخمسة عشر الأولى من هذه المتسلسلة الحسابية هو 630

أُفكِّر

لماذا يُفضَّل استعمال الصيغة الثانية من مجموع المتسلسلة الحسابية في الفرع 2 من المثال؟

أتحقَّق من فهمي

a) أجد مجموع حدود المتسلسلة الحسابية: $7 + 15 + 23 + \ldots + 159$

b) أجد مجموع الحدود السبعة عشر الأولى من المتسلسلة الحسابية: $8 + 5 + 2 + \ldots$

يُمكِن استعمال مجموع المتسلسلة الحسابية في كثير من التطبيقات الحياتية والعملية.

مثال 6 : من الحياة

هندسة برمجيات: في مسابقة عالمية للغات البرمجة، تُمنَح جائزة نقدية لأول 50 مركزًا، ويُمنَح الفائز بالمركز الأول جائزة نقدية قيمتها JD 50000، وتقل قيمة الجائزة بمقدار JD 1000 لكل مركز بعد ذلك عن المركز الذي يسبقه:

1 أُبيِّن أنَّ قِيَم الجوائز النقدية في المسابقة تُمثِّل متتالية حسابية.

قِيَم الجوائز النقدية المتتالية هي: $50000, 49000, 48000, \ldots$

أُلاحِظ أنَّ الفرق بين كل حدَّين متتاليين في هذا النمط يساوي -1000

إذن، تُمثِّل قِيَم الجوائز النقدية في هذه المسابقة متتالية حسابية أساسها: $d = -1000$

2 أجد الحدَّ العام للمتتالية الحسابية.

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$ صيغة الحدِّ العام للمتتالية الحسابية

$$= 50000 + (n-1)(-1000)$$ بتعويض قيمة $a_1 = 50000$، وقيمة $d = -1000$

$$= -1000\,n + 51000$$ بالتبسيط

إذن، الحدُّ العام للمتتالية الحسابية هو: $a_n = -1000\,n + 51000$

3 ما قيمة الجائزة التي ستُمنَح للفائز بالمركز الأخير في هذه المسابقة؟

قيمة الجائزة التي ستُمنَح للفائز بالمركز الأخير في هذه المسابقة هي الحدُّ الخمسون (a_{50}):

$$a_n = -1000\,n + 51000$$ صيغة الحدِّ العام للمتتالية الحسابية

$$a_{50} = -1000\,(50) + 51000$$ بتعويض قيمة $n = 50$

$$= 1000$$ بالتبسيط

إذن، قيمة الجائزة التي ستُمنَح للفائز بالمركز الأخير في هذه المسابقة هي JD 1000.

4 **ما مجموع قِيَم الجوائز النقدية التي ستُمنَح للفائزين في هذه المسابقة؟**

لإيجـاد مجموع قِيَم الجوائز النقدية التي سـتُمنَح للفائزين في هذه المسـابقة، أُعوِّض قيمة $a_1 = 50000$، وقيمة $a_{50} = 1000$، وقيمة $n = 50$ في صيغة مجموع المتسلسلة الحسابية:

$$S_n = n\left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right)$$ صيغة مجموع المتسلسلة الحسابية المنتهية

$$S_{50} = (50)\left(\frac{50000 + 1000}{2}\right)$$ بتعويض قيمة $a_1 = 50000$، وقيمة $a_{50} = 1000$، وقيمة $n = 50$

$$= 1275000$$ بالتبسيط

إذن، مجموع قِيَم الجوائز النقدية التي ستُمنَح للفائزين في هذه المسابقة هو JD 1275000.

أتحقَّق من فهمي

بيئـة: **ضمن خطة إحـدى المؤسسـات الخيرية لزيادة المسـاحة الخضراء في المدينة، أنفقت المؤسسـة JD 300 في السنة الأولى على حملات التوعية، وأخذت تُخطِّط لزيادة إنفاقها السـنوي على هذه الحملات بنحو JD 400 سنويًّا على مدار 10 أعوام:**

a) أُبيِّن أنَّ إنفاق الجمعية السنوي يُمثِّل متتالية حسابية.

b) أجد الحدَّ العام للمتتالية الحسابية.

c) ما قيمة المبلغ الذي سوف تُنفِقه المؤسسة في آخر عام من الخطة؟

d) أجد مجموع ما سوف تُنفِقه المؤسسة في 10 أعوام.

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

أُحدِّد إذا كانت كل متتالية ممّا يأتي حسابية أم لا:

1) $10, 11, 14, 15, 18, 19, \ldots$

2) $12, 6, 0, -6, -12, \ldots.$

3) $3, 5, 9, 15, 23, \ldots$

أجد الحدَّ العام لكل متتالية حسابية ممّا يأتي، ثم أجد الحدَّ الثلاثين منها:

4) $25, 58, 91, 124, \ldots$

5) $48.7, 55.1, 61.5, 67.9, \ldots$

6) $45, 57, 69, 81, \ldots.$

7) $-1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1, \ldots.$

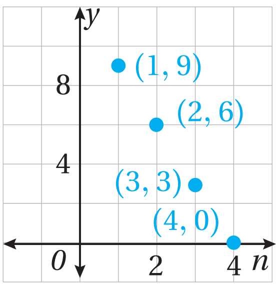
8) $a_5 = 27.6, a_{10} = 24.1$

9) $a_{17} = -5, d = -\frac{1}{2}$

10 أجد 3 أوساط حسابية بين العددين 9 و 37

11 أجد 4 أوساط حسابية بين العددين 3 و 88

12 أجد 5 أوساط حسابية بين العددين -62 و -8



13 أكتب قاعدة المتتالية الحسابية التي مُثِّلت بعض حدودها بيانيًّا في المستوى الإحداثي المجاور.

أجد مجموع المتسلسلات الحسابية الآتية:

14 $1 + 5 + 9 + \cdots + 401$

15 $0.7 + 2.7 + 4.7 + \cdots + 56.7$

16 $\sum_{n=1}^{80} (2n - 2)$

أجد المجاميع الجزئية لكلٍّ من المتسلسلات الحسابية الآتية:

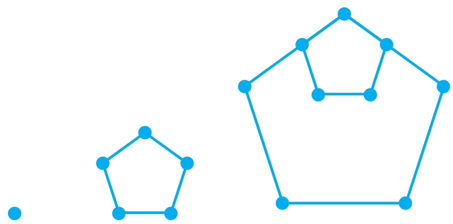
17 الحدود العشرة الأولى من المتسلسلة: $20 + 25 + 30 + 35 + \cdots$

18 الحدود الخمسة عشر الأولى من المتسلسلة: $9 + 11.5 + 14 + 16.5 + \cdots$

19 الحدود العشرة الأولى من مضاعفات العدد 6

20 أول 100 عدد فردي من مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة.

يُبيِّن الشكل المجاور نمطًا هندسيًّا يُمثِّل عدد النقاط في نماذجه متتالية:



21 أُبيِّن أنَّ عدد النقاط في النماذج يُمثِّل متتالية حسابية.

22 أجد الحدَّ العام للمتتالية الحسابية.

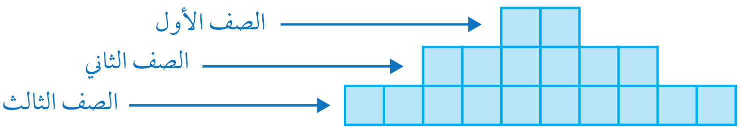
23 هل يوجد نموذج يحوي 397 نقطة؟ أُبرِّر إجابتي.

متسلسلة حسابية حدُّها الثالث 51، وحدُّها الحادي عشر 187:

24 أُثبِت أنَّ المتسلسلة تُمثِّل مضاعفات العدد 17

25 أجد مجموع مضاعفات العدد 17 التي تقع بين 0 و1000

26 يُبيِّن الشكل المجاور الصفوف الثلاثة الأولى من نمط هندسي مُكوَّن من مربعات. أجد عدد المربعات الكلي في 20 صفًّا.



27 متسلسلة حسابية منتهية، حدُّها الأول 10، وأساسها 4، ومجموع حدودها 792، ما عدد حدود هذه المتسلسلة؟

28 إذا كان مجموع أول n حدًّا من حدود متسلسلة حسابية هو $n^2 + 4n$، فأجد حدَّها المئة.

أخذت حنين تقرأ صفحات من كتاب يوميًّا مدَّة 7 أيام، بدءًا بيوم الأحد الذي قرأت فيه 15 صفحة، ثم قرأت في اليوم التالي 21 صفحة، ثم قرأت في اليوم الذي يليه 27 صفحة:

29 أُبيِّن أنَّ ما تقرأه حنين يوميًّا من صفحات يُمثِّل متتالية حسابية.

30 كم صفحةً قرأت حنين يوم الجمعة؟

31 أجد المجموع الكلي لعدد الصفحات التي قرأتها حنين في الأيام السبعة.

متسلسلة حسابية، حدُّها الأول a، وأساسها d، ومجموع حدودها الثلاثين الأولى يساوي ضعف مجموع حدودها العشرين الأولى:

32 أُثبِت أنَّ $a = \frac{11d}{2}$.

33 إذا كان مجموع الحدود الثلاثين الأولى هو 400، فأجد قيمتي a و d.

مهارات التفكير العليا

34 **تبرير:** متتالية حسابية، حدُّها العاشر ضعف حدِّها الرابع، وحدُّها الثامن عشر 50، أجد الحدَّ الأول من المتتالية، مُبرِّرًا إجابتي.

35 **تحدٍّ:** إذا كان مجموع أول n حدًّا من حدود متسلسلة هو $6n^2 + 8n$، فأُثبِت أنَّ هذه المتسلسلة حسابية.

36 **تحدٍّ:** إذا كانت $3,\ a - b,\ 3a - 4b,\ 2a + 2b$ تُمثِّل الحدود الأربعة الأولى من متسلسلة حسابية، حيث a و b ثابتان، فأجد مجموع أول 25 حدًّا من المتسلسلة.

تبرير: متتالية حسابية، فيها الحدّان المتتاليان x و y:

37 أجد الحدَّ التالي للحدِّ y بدلالة x و y.

38 إذا كان x يُمثِّل الحدَّ الثامن من المتتالية، فأجد الحدَّ الأول بدلالة x و y.

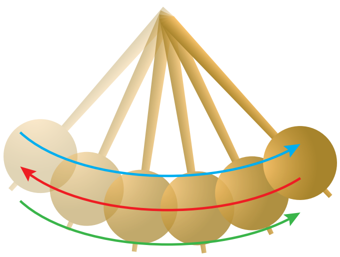
الدرس 3

المتتاليات والمتسلسلات الهندسية
Geometric Sequences and Series

فكرة الدرس
- تعرُّف المتتالية الهندسية، وإيجاد مجموع المتسلسلة الهندسية المنتهية.
- إيجاد مجموع المتسلسلة الهندسية اللانهائية المتقاربة.

المصطلحات
المتتالية الهندسية، أساس المتتالية، الأوساط الهندسية، المتسلسلة الهندسية، المتسلسلة الهندسية اللانهائية، المتسلسلة المتقاربة، المتسلسلة المتباعدة.

مسألة اليوم
تُـرِك بنـدول ليتحـرَّك بصـورة حُرَّة، فقطـع مسـافة 45 cm بين أقصـى نقطتيـن وصلهمـا فـي المـرَّة الأولـى، ثم قطـع في كل مـرَّة تاليـة 77% مـن المسـافة التـي قطعها فـي المرَّة السـابقة. أجـد مجمـوع المسـافات التـي قطعهـا البنـدول فـي أثنـاء تأرجحـه حتـى توقَّـف عـن ذلك.



المتتالية الهندسية

إذا كانـت النسـبة ثابتـة بيـن كل حدَّين متتالييـن في متتاليـة، فإنَّها تُسـمّى **متتالية هندسـية** (geometric sequence)، وتُسـمّى النسـبة الثابتة النسـبة المشـتركة أو **أسـاس المتتالية** (common ratio)، ويُرمَز إليها بالرمز r. فمثلًا، المتتالية: $120, 60, 30, 15, \dots$ هندسـية؛ لأنَّ النسبة بين كل حدٍّ والحدِّ الذي يسبقه مباشرة هي نسبة ثابتة.

حدود متتالية هندسية ← 120 60 30 15

الأساس $\frac{1}{2}$ ← $\frac{60}{120}=\frac{1}{2}$ $\quad \frac{30}{60}=\frac{1}{2}$ $\quad \frac{15}{30}=\frac{1}{2}$

مفهوم أساسي **المتتالية الهندسية**

بالكلمات: تكون المتتالية هندسية إذا كانت النسـبة ثابتة بين كل حدٍّ فيها والحدِّ الذي يسبقه.

بالرموز: تكون المتتالية: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ هندسية إذا كان:

$$\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_2}=\cdots=\frac{a_n}{a_{n-1}}=r$$

مثال 1

أُحدِّد إذا كانت كل متتالية ممّا يأتي هندسية أم لا:

1 $2, 4, 8, 16, \ldots$

أقسم كل حدٍّ في المتتالية على الحدِّ السابق له:

نسبة الحدِّ الثاني إلى الحدِّ الأول $\frac{a_2}{a_1} = \frac{4}{2} = 2$

نسبة الحدِّ الثالث إلى الحدِّ الثاني $\frac{a_3}{a_2} = \frac{8}{4} = 2$

نسبة الحدِّ الرابع إلى الحدِّ الثالث $\frac{a_4}{a_3} = \frac{16}{8} = 2$

أُلاحِظ أنَّ النسبة ثابتة، وأنَّها تساوي 2؛ أيْ إنَّ أساس المتتالية هو: $r = 2$

إذن، المتتالية: $\ldots ,2, 4, 8, 16$ هندسية.

أتعلَّم

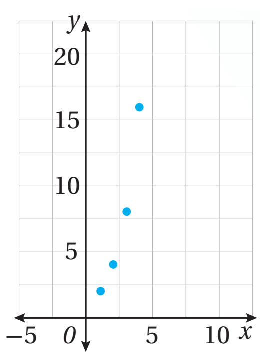
يُمكِن إيجاد الحدِّ الخامس للمتتالية في الفرع 1 بضرب الأساس في الحدِّ الرابع كما يأتي:

$$a_5 = a_4 \times r$$
$$= 16 \times 2 = 32$$

الدعم البياني:

يُمكِن أيضًا التحقُّق إذا كانت المتتالية هندسية أم لا بتمثيل حدودها بيانيًّا، وملاحظة أنَّ النقاط تقع على منحنى أُسِّي؛ لأنَّ الحدود المتتالية تتغيَّر بمعامل ثابت.

أُلاحِظ من التمثيل البياني للمتتالية: $\ldots ,2, 4, 8, 16$ أنَّ حدودها تقع على منحنى أُسِّي. إذن، فهي متتالية هندسية.



2 $6, 12, 20, 30, \ldots$

أقسم كل حدٍّ في المتتالية على الحدِّ السابق له:

نسبة الحدِّ الثاني إلى الحدِّ الأول $\frac{a_2}{a_1} = \frac{12}{6} = 2$

نسبة الحدِّ الثالث إلى الحدِّ الثاني $\frac{a_3}{a_2} = \frac{20}{12} = \frac{5}{3}$

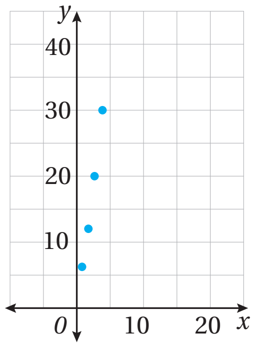
نسبة الحدِّ الرابع إلى الحدِّ الثالث $\frac{a_4}{a_3} = \frac{30}{20} = \frac{3}{2}$

أُلاحِظ أنَّ النسبة غير ثابتة.

إذن، المتتالية: $\ldots ,6, 12, 20, 30$ ليست هندسية.

الدعم البياني:

أُلاحِظ من التمثيل البياني للمتتالية: $6, 12, 20, 30, \dots$ أنَّ حدودها لا تقع على منحنى أُسِّي. إذن، فهي ليست متتالية هندسية.



أتحقَّق من فهمي

أُحدِّد إذا كانت كل متتالية ممّا يأتي هندسية أم لا:

a) $3, 12, 48, 192, \dots$

b) $-10, 10, -10, 10, \dots$

الحدُّ العام للمتتالية الهندسية

يُلاحَظ ممّا سبق أنَّه يُمكِن إيجاد كل حدٍّ من حدود المتتالية الهندسية بضرب الأساس في الحدِّ الذي يسبقه، وأنَّه يُمكِن استعمال هذه الخاصية لإيجاد الحدِّ العام للمتتالية الهندسية باستعمال حدِّها الأول a_1، وأساسها r كما يأتي:

الحدُّ بدلالة a_1 و r	رمزه	الحدُّ
a_1	a_1	الحدُّ الأول
$a_1 r$	a_2	الحدُّ الثاني
$a_1 r^2$	a_3	الحدُّ الثالث
$a_1 r^3$	a_4	الحدُّ الرابع
$a_1 r^4$	a_5	الحدُّ الخامس
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$a_1 r^{n-1}$	a_n	الحدُّ العام

مفهوم أساسي

الحدُّ العام للمتتالية الهندسية

الحدُّ العام للمتتالية الهندسية التي حدُّها الأول a_1 وأساسها r، يعطى بالصيغة الآتية:

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

حيث n عدد صحيح موجب.

أُلاحِظ ممّا سبق أنَّه يُمكِن كتابة حدود المتتالية الهندسية التي حدُّها الأول a_1، وأساسها r كما يأتي:

$$a_1,\ a_1 r,\ a_1 r^2,\ a_1 r^3,\ a_1 r^4,\ \dots$$

مثال 2

أجد الحدَّ العام لكل متتالية هندسية ممّا يأتي، ثم أجد الحدَّ العاشر منها:

1 $128, 64, 32, 16, \dots$

الخطوة 1: أجد الحدَّ العام للمتتالية.

أُعوِّض قيمة كلٍّ من الحدِّ الأول $a_1 = 128$، والأساس $r = \frac{64}{128} = \frac{1}{2}$ في صيغة الحدِّ العام للمتتالية:

$$a_n = a_1 r^{n-1} \quad \text{صيغة الحدِّ العام للمتتالية الهندسية}$$

$$a_n = (128)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad \text{بتعويض قيمة } a_1 = 128\text{، وقيمة } r = \frac{1}{2}$$

إذن، الحدُّ العام للمتتالية الهندسية هو: $a_n = (128)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

الخطوة 2: أجد الحدَّ العاشر للمتتالية.

لإيجاد الحدِّ العاشر من المتتالية، أُعوِّض $n = 10$ في صيغة الحدِّ العام للمتتالية:

$$a_n = (128)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad \text{صيغة الحدِّ العام للمتتالية الهندسية}$$

$$a_{10} = (128)\left(\frac{1}{2}\right)^{10-1} \quad \text{بتعويض } n = 10$$

$$= (128)\left(\frac{1}{2}\right)^{9} = \frac{1}{4} \quad \text{بالتبسيط}$$

2 $4, 20, 100, 500, \dots$

الخطوة 1: أجد الحدَّ العام للمتتالية.

أُعوِّض قيمة كلٍّ من الحدِّ الأول $a_1 = 4$، والأساس $r = \frac{20}{4} = 5$ في صيغة الحدِّ العام للمتتالية:

$$a_n = a_1 r^{n-1} \quad \text{صيغة الحدِّ العام للمتتالية الهندسية}$$

$$a_n = (4)(5)^{n-1} \quad \text{بتعويض قيمة } a_1 = 4\text{، وقيمة } r = 5$$

إذن، الحدُّ العام للمتتالية الهندسية هو: $a_n = (4)(5)^{n-1}$

أُفكِّر

هل يُمكِن أنْ يكون أحد حدود المتتالية الهندسية صفرًا؟

الخطوة 2: أجد الحدَّ العاشر للمتتالية.

لإيجاد الحدِّ العاشر من المتتالية، أُعوِّض $n = 10$ في صيغة الحدِّ العام للمتتالية:

$a_n = (4)\,(5)^{n-1}$ صيغة الحدِّ العام للمتتالية الهندسية

$a_{10} = (4)\,(5)^{10-1}$ بتعويض $n = 10$

$= (4)\,(5)^{9} = 7812500$ بالتبسيط

أتحقَّق من فهمي

أجد الحدَّ العام لكل متتالية هندسية ممّا يأتي، ثم أجد الحدَّ العاشر منها:

a) $5, 15, 45, \cdots$

b) $a_1 = 3;\ r = -2$

يُمكِن أيضًا إيجاد الحدِّ العام لمتتالية هندسية إذا عُلِم حدّان منها.

مثال 3

أجد الحدَّ العام للمتتالية الهندسية التي فيها $a_2 = 12$، و $a_5 = -768$.

الخطوة 1: أستعمل صيغة الحدِّ العام: $a_n = a_1\, r^{n-1}$ لكتابة نظام مُكوَّن من معادلتين بمُتغيِّرين.

$a_n = a_1\, r^{n-1}$ صيغة الحدِّ العام للمتتالية الهندسية

$12 = a_1\, r^{2-1}$ بتعويض قيمة $a_2 = 12$، وقيمة $n = 2$

$12 = a_1\, r \quad \ldots\ldots(1)$ بالتبسيط

$-768 = a_1\, r^{5-1}$ بتعويض قيمة $a_5 = -768$، وقيمة $n = 5$

$-768 = a_1\, r^{4} \quad \ldots\ldots(2)$ بالتبسيط

الخطوة 2: أحُلُّ المعادلة (1) والمعادلة (2) بالتعويض.

$a_1 = \frac{12}{r}$ بكتابة المعادلة (1) بدلالة a_1

$-768 = \left(\frac{12}{r}\right) r^{4}$ بتعويض a_1 في المعادلة (2)

$-64 = r^{3}$ بالتبسيط

$r = -4$ بأخذ الجذر التكعيبي لطرفي المعادلة

$12 = a_1\,(-4)$ بتعويض قيمة r في المعادلة 1

$a_1 = -3$ بقسمة طرفي المعادلة على -4

الخطوة 3: أُعوِّض قيمة كلٍّ من a_1 و r في صيغة الحدِّ العام للمتتالية.

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$ صيغة الحدِّ العام للمتتالية الهندسية

$$= (-3)(-4)^{n-1}$$ بتعويض قيمة $a_1 = -3$، وقيمة $r = -4$

إذن، الحدُّ العام لهذه المتتالية الهندسية هو: $a_n = (-3)\,(-4)^{n-1}$

أتحقَّق من فهمي

أجد الحدَّ العام للمتتالية الهندسية التي فيها $a_2 = 12$، و $a_4 = 3$.

الأوساط الهندسية

إذا عُلِم حدّان غير متتاليين في متتالية هندسية، فإنَّه يُمكِن إيجاد جميع الحدود التي تقع بين هذين الحدَّين، وتُسمّى **الأوساط الهندسية** (geometric means). فمثلًا، في المتتالية الآتية، فإنَّ: 6, 18, 54 هي أوساط هندسية بين 2 و 162:

$$2,\ \underbrace{6,\ 18,\ 54}_{\text{3 أوساط هندسية بين 2 و 162}},\ 162$$

مثال 4

أجد 3 أوساط هندسية بين العددين 2.25 و 576

بما أنَّه توجد 3 حدود بين الحدِّ الأول والحدِّ الأخير، فإنَّ عدد حدود المتتالية هو 5، وبذلك تكون المتتالية كما يأتي:

$$2.25,\ \underline{\ ?\ },\ \underline{\ ?\ },\ \underline{\ ?\ },\ 576$$

حيث: $a_1 = 2.25$، و $a_5 = 576$.

الخطوة 1: أجد أساس المتتالية.

$$a_n = a_1\, r^{n-1}$$ صيغة الحدِّ العام للمتتالية الهندسية

$$a_5 = (2.25)\, r^{5-1}$$ بتعويض قيمة $n = 5$، وقيمة $a_1 = 2.25$

$$576 = (2.25)\, r^4$$ بتعويض قيمة $a_5 = 576$

$$256 = r^4$$ بقسمة طرفي المعادلة على 2.25

$$r = \pm 4$$ بأخذ الجذر الرابع لطرفي المعادلة

الخطوة 2: أستعمل قيمة الأساس لإيجاد الأوساط الهندسية المطلوبة.

أُلاحِظ وجود قيمتين للأساس، وهذا يعني وجود مجموعتين محتملتين للأوساط الهندسية:

عندما $r = 4$

$$2.25 \xrightarrow{\times 4} 9 \xrightarrow{\times 4} 36 \xrightarrow{\times 4} 144 \xrightarrow{\times 4} 576$$

عندما $r = -4$

$$2.25 \xrightarrow{\times -4} -9 \xrightarrow{\times -4} 36 \xrightarrow{\times -4} -144 \xrightarrow{\times -4} 576$$

إذن، الأوساط الهندسية هي: $9, 36, 144$، أو $-9, 36, -144$

أتحقَّق من فهمي

أجد 4 أوساط هندسية بين العددين 9 و 288

المتسلسلات الهندسية

تنتج **المتسلسلة الهندسية** (geometric series) من جمع حدود المتتالية الهندسية. ويُسمّى مجموع أول n حدًّا من حدود هذه المتسلسلة مجموعًا جزئيًّا، ويُرمَز إليه بالرمز S_n.

مفهوم أساسي **المجموع الجزئي للمتسلسلة الهندسية**

يُمكِن إيجاد مجموع أول n حدًّا من حدود متتالية هندسية باستعمال الصيغة الآتية:

$$S_n = \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r}, r \neq 1$$

مثال 5

1 أجد مجموع الحدود العشرة الأولى من المتسلسلة الهندسية: $-2 + 4 + -8 + 16 + \cdots$

أُعوِّض قيمة كلٍّ من الحدِّ الأول $a_1 = -2$، والأســاس $r = \frac{4}{-2} = -2$ في صيغة المجموع الجزئي للمتسلسلة الهندسية لإيجاد S_{10}:

$$S_n = \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r}$$ صيغة المجموع الجزئي

$$S_{10} = \frac{(-2)(1 - (-2)^{10})}{1 - (-2)}$$ بتعويض قيمة $a_1 = -2$، وقيمة $r = -2$، وقيمة $n = 10$

$$= 682$$ بالتبسيط

إذن، مجموع الحدود العشرة الأولى من هذه المتسلسلة الهندسية هو 682

2 أجد مجموع المتسلسلة الهندسية: $\sum_{k=1}^{5}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$.

الخطوة 1: أجد الحدَّ الأول والأساس.

الحدُّ العام للمتتالية الهندسية $a_k = \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$

تعويض $k = 1$ لإيجاد الحدِّ الأول $a_1 = \left(\frac{1}{3}\right)^{1-1}$

بالتبسيط، حيث: $\left(\frac{1}{3}\right)^0 = 1$ $= \left(\frac{1}{3}\right)^0 = 1$

أُقارِن صيغة الحدِّ رقم k بصيغة الحدِّ العام للمتسلسلة الهندسية، فأستنتج أنَّ $r = \frac{1}{3}$

الخطوة 2: أستعمل صيغة المجموع الجزئي للمتسلسلة الهندسية لإيجاد S_5.

أُعوِّض قيمة كلٍّ من الحدِّ الأول $a_1 = 1$، والأساس $r = \frac{1}{3}$ في صيغة المجموع الجزئي للمتسلسلة الهندسية لإيجاد S_5:

صيغة المجموع الجزئي $S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$

بتعويض قيمة $a_1 = 1$، وقيمة $r = \frac{1}{3}$، وقيمة $n = 5$ $S_5 = \frac{(1)\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^5\right)}{1-\left(\frac{1}{3}\right)}$

بالتبسيط $= \frac{121}{81}$

أتحقَّق من فهمي

a) أجد مجموع الحدود السبعة الأولى من المتسلسلة الهندسية: $3 - 6 + 12 - 24 + \ldots$

b) أجد مجموع المتسلسلة الهندسية: $\sum_{k=1}^{8} 5(2)^{k-1}$.

أُفكِّر

هل يُمكِن إيجاد مجموع أول n حدًّا لمتسلسلة هندسية حدُّها ثابت، مثل:

$2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+\ldots$

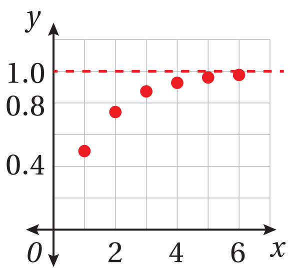
باستعمال صيغة المجموع الجزئي للمتسلسلة الهندسية؟

المتسلسلات الهندسية اللانهائية

المتسلسلة الهندسية اللانهائية (infinite geometric series) هي متسلسلة هندسية تحوي عددًا لانهائيًّا من الحدود، ويُسمّى مجموع أول n حدًّا من حدود هذه المتسلسلة مجموعًا جزئيًّا، ويُرمَز إليه بالرمز (S_n)، وقد يقترب هذا المجموع من قيمة مُحدَّدة.

يُبيِّن الشكل الآتي التمثيل البياني للمجموع الجزئي للمتسلسلة: $S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \cdots$، حيث الإحداثي x هو عدد الحدود (n)، والإحداثي y هو مجموع الحدود:

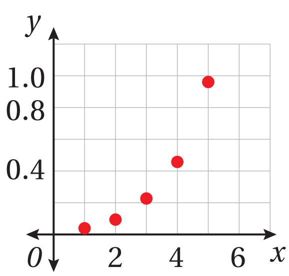
المجموع الجزئي					
$x = n$	1	2	3	4	5
$y = S_n$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{15}{16}$	$\frac{31}{32}$



أُلاحِظ أنَّ أساس المتسلسلة الهندسية S_n هو $\frac{1}{2}$، وأنَّ المجاميع الجزئية تقترب أكثر فأكثر من 1 عندما تزيد قيمة n؛ لذا فإنَّ هذه المتسلسلة تُسمّى **متسلسلة متقاربة** (convergent series)، ويُمكِن إيجاد مجموع عدد لانهائي من حدودها.

يُبيِّن الشكل الآتي التمثيل البياني للمجموع الجزئي للمتسلسلة: $R_n = \frac{1}{32} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \cdots$، حيث الإحداثي x هو عدد الحدود (n)، والإحداثي y هو مجموع الحدود:

المجموع الجزئي					
$x = n$	1	2	3	4	5
$y = R_n$	$\frac{1}{32}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{7}{32}$	$\frac{15}{32}$	$\frac{31}{32}$



أُلاحِظ أنَّ أساس المتسلسلة الهندسية R_n هو 2، وأنَّ المجاميع الجزئية تزداد إلى ما لانهاية عند زيادة قِيَم n، من دون أنْ تقترب من أيِّ قيمة مُحدَّدة؛ لذا فإنَّ هذه المتسلسلة تُسمّى **متسلسلة متباعدة** (divergent series)، ولا يُمكِن إيجاد مجموع عدد لانهائي من حدودها.

مفهوم أساسي

مجموع المتسلسلة الهندسية اللانهائية

إذا كانت $|r| < 1$، فإنَّ المتسلسلة الهندسية اللانهائية تكون متقاربة، ويُمكِن إيجاد مجموع حدودها باستعمال الصيغة الآتية:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - r}$$

أمّا إذا كانت $|r| \geq 1$، فإنَّ المتسلسلة الهندسية اللانهائية تكون متباعدة، ولا يُمكِن إيجاد مجموع حدودها.

مثال 6

أجد مجموع المتسلسلات الهندسية اللانهائية الآتية (إنْ أمكن):

1 $16 + 4 + 1 + \cdots$

أجد قيمة أساس المتسلسلة:

بقسمة الحدِّ الثاني على الحدِّ الأول $r = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$

بما أنَّ $\left|\frac{1}{4}\right| = \frac{1}{4} < 1$، فإنَّ المتسلسلة متقاربة، ويُمكِن إيجاد مجموعها على النحو الآتي:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-r}$$ صيغة مجموع متسلسلة هندسية لانهائية

$$= \frac{16}{1-\frac{1}{4}}$$ بتعويض $a_1 = 16$، و $r = \frac{1}{4}$

$$= \frac{64}{3}$$ بالتبسيط

إذن، مجموع هذه المتسلسلة هو $\frac{64}{3}$.

2 $1 + 3 + 9 + 27 + \ldots$

أجد قيمة أساس المتسلسلة:

بقسمة الحدِّ الثاني على الحدِّ الأول $r = \frac{3}{1} = 3$

بما أنَّ $|3| = 3 > 1$، فإنَّ المتسلسلة متباعدة، ولا يُمكِن إيجاد مجموع حدودها.

3 $\sum_{n=1}^{\infty} 3(-0.7)^{n-1}$

أجد قيمة أساس المتسلسلة:

أُقارِن صيغة الحدِّ رقم n بصيغة الحدِّ العام للمتسلسلة الهندسية، فأستنتج أنَّ $r = -0.7$

بما أنَّ $|-0.7| = 0.7 < 1$، فإنَّ المتسلسلة متقاربة، ويُمكِن إيجاد مجموعها على النحو الآتي:

أجد قيمة a_1:

بتعويض $n = 1$ $a_1 = 3(-0.7)^{1-1} = 3$

أُفكِّر

هل يُمكِن استعمال الصيغة: $S_\infty = \frac{a_1}{1-r}$ لإيجاد مجموع الحدود العشرة الأولى من المتسلسلة في الفرع 2 من المثال؟

أستعمل قيمة كلٍّ من a_1 و r لإيجاد مجموع المتسلسلة اللانهائية:

صيغة مجموع متسلسلة هندسية لانهائية
$$S_\infty = \frac{a_1}{1-r}$$

بتعويض $a_1 = 3$، و $r = -0.7$
$$= \frac{3}{1-(-0.7)}$$

بالتبسيط
$$= \frac{30}{17}$$

أتحقَّق من فهمي

أجد مجموع المتسلسلات الهندسية اللانهائية الآتية (إنْ أمكن):

a) $10 + 0.1 + 0.01 + \cdots$

b) $1 - 2 + 4 - 8 + \ldots$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} 9(0.2)^{n-1}$

يُمكِن استعمال صيغة مجموع المتسلسلة الهندسية اللانهائية لكتابة العدد العشري الدوري في صورة كسر عادي.

أتذكَّر

العدد العشري الدوري هو عدد نسبي؛ لذا يُمكِن كتابته في صورة كسر عادي $\frac{a}{b}$، حيث a, b عددان صحيحان، و $a, b \neq 0$.

مثال 7

أكتب العدد العشري الدوري $0.\overline{23}$ في صورة كسر عادي.

يُمكِن كتابة الكسر العشري الدوري على النحو الآتي:

$$0.\overline{23} = 0.232323\ldots$$

أيْ إنَّ:

مجموع الأجزاء العشرية المُتكرِّرة
$$0.\overline{23} = 0.23 + 0.0023 + 0.000023 + \cdots$$

بإعادة كتابة الأجزاء العشرية المُتكرِّرة بوصفها كسورًا عاديةً
$$0.\overline{23} = \frac{23}{100} + \frac{23}{10000} + \frac{23}{1000000} + \cdots$$

وهذا يُمثِّل متسلسلة لانهائية، حدُّها الأول $a_1 = \frac{23}{100}$، ويُمكِن إيجاد أساسها كما يأتي:

بقسمة الحدِّ الثاني على الحدِّ الأول
$$\frac{23}{10000} \div \frac{23}{100} = \frac{1}{100}$$

أيْ إنَّ أساس هذه المتسلسلة الهندسية اللانهائية هو: $r = \frac{1}{100} = 0.01$

بما أنَّ $|0.01| = 0.01 < 1$، فإنَّ هذه المتسلسلة متقاربة، ويُمكِن إيجاد مجموعها على النحو الآتي:

صيغة مجموع المتسلسلة الهندسية اللانهائية
$$S_\infty = \frac{a_1}{1-r}$$

بتعويض $a_1 = 0.23$، و $r = 0.01$
$$= \frac{0.23}{1-0.01}$$

بالتبسيط
$$= \frac{23}{99}$$

أيْ إنَّ:

$$0.\overline{23} = 0.232323\ldots = \frac{23}{99}$$

أتحقَّق من فهمي

أكتب العدد العشري الدوري $0.\overline{57}$ في صورة كسر عادي.

تُستعمَل المتتاليات الهندسية اللانهائية في كثير من التطبيقات الحياتية.

مثال 8 : من الحياة

رياضة: مارس لاعب رياضة القفز بالحبال من أحد المرتفعات، فقفز 100 m رأسيًّا إلى الأسفل قبل أنْ يرتدَّ إلى الأعلى من جديد بواسطة حبله المطّاطي. إذا ارتدَّ هذا اللاعب مسافةً تُمثِّل ما نسبته 85% من المسافة السابقة بعد كل سقوط، فأجد مجموع المسافات التي قطعها اللاعب في أثناء التأرجح حتى توقُّفه عن ذلك.

أُلاحِظ أنَّ مجموع المسافات التي قطعها اللاعب هي:

$$d = \underbrace{100}_{\text{إلى الأسفل}} + \underbrace{100(0.85)}_{\text{إلى الأعلى}} + \underbrace{100(0.85)}_{\text{إلى الأسفل}} + \underbrace{100(0.85)^2}_{\text{إلى الأعلى}} + \underbrace{100(0.85)^2}_{\text{إلى الأسفل}} + \underbrace{100(0.85)^3}_{\text{إلى الأعلى}} + \underbrace{100(0.85)^3}_{\text{إلى الأسفل}} + \cdots$$

$$= 100 + 2(100(0.85)) + 2(100(0.85)^2) + 2(100(0.85)^3) + \cdots$$

$$= 100 + 200(0.85) + 200(0.85)^2 + 200(0.85)^3 + \cdots$$

باســتثناء الحدِّ الأول (100)، أُلاحِظ أنَّ $\cdots + 200(0.85)+200(0.85)^2+200(0.85)^3$

يُمثِّل مجموع متسلسـلة هندسـية لانهائيـة، حدُّهـا الأول $a_1 = 200(0.85)$، وأساسـها

$$r = \frac{200(0.85)^2}{200(0.85)} = 0.85$$

بما أنَّ $|0.85| = 0.85 < 1$، فإنَّ هذه المتسلسلة متقاربة، ويُمكِن إيجاد مجموعها:

$$d = 100 + \frac{200(0.85)}{1 - 0.85}$$
باستعمال مجموع متسلسلة هندسية لانهائية، وبتعويض $a_1 = 200(0.85)$، و $r = 0.85$

$$\approx 100 + 1133.3$$
باستعمال الآلة الحاسبة

$$\approx 1233.3$$
بالتبسيط

إذن، قطع اللاعب مسافة 1233.33 m تقريبًا قبل أنْ يتوقَّف.

أتحقَّق من فهمي

كرة: أُسقِطت كرة سلَّة من ارتفاع 20 m رأسيًّا في اتجاه أرض أفقيـة، وقد ارتدَّت كل مرَّة مسـافةً تُعادِل ما نسـبته 70% من المسـافة السابقة. بافتراض أنَّ الكرة سـقطت رأسيًّا ثم ارتدَّت رأسـيًّا عددًا لانهائيًّا من المرّات، أجد المسافة التي قطعتها هذه الكرة حتى توقَّفت.

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

أُحدِّد إذا كانت كل متتالية ممّا يأتي هندسية أم لا:

1) $96, 48, 24, 12, 6, \ldots$

2) $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{18}, \frac{1}{54}, \frac{1}{162}, \ldots$

3) $0.3, -1.5, 7.5, -37.5, 187.5, \ldots$

أجد الحدَّ العام لكل متتالية هندسية ممّا يأتي، ثم أجد الحدَّ الثامن منها:

4) $0.04, 0.2, 1, \ldots$

5) $20, 24, 28.8$

6) $0.005, 0.01, 0.02, \ldots$

7) $3, -6, 12, -24, \ldots$

8) $e^2, e^4, e^6, e^8, \ldots$

9) $1, \sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}, \ldots$

أجد الحدَّ العام لكلٍّ من المتتاليات الهندسية الآتية التي أُعطِي حدّان من حدودها:

10 $a_2 = 12, a_5 = -768$

11 $a_2 = 7, a_4 = 1575$

12 $a_3 = \frac{1}{3}, a_6 = \frac{1}{81}$

13 أجد 3 أوساط هندسية بين العددين 7 و 189

14 أجد 4 أوساط هندسية بين العددين 32 و 1

15 أجد مجموع الحدود الاثني عشر الأولى من المتسلسلة الهندسية: $4 - 8 + 16 - 32 + \ldots$

16 أجد مجموع الحدود العشرين الأولى من المتسلسلة الهندسية: $20 + 22 + 24.2 + 26.62 + \ldots$

أجد مجموع المتسلسلات الهندسية الآتية:

17 $\sum_{k=1}^{5} \left(\frac{2}{3}\right)^k$

18 $\sum_{k=0}^{10} 3\left(\frac{1}{2}\right)^k$

19 $1 + 3 + 9 + \ldots + 2187$

أجد مجموع المتسلسلات الهندسية اللانهائية الآتية:

20 $2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{27} + \cdots$

21 $6 - 4 + \frac{8}{3} - \frac{16}{9} + \cdots$

22 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2}\left(3^{k-1}\right)$

أكتب كُلًّا من الأعداد العشرية الدورية الآتية في صورة كسر عادي بأبسط صورة:

23 $0.\overline{25}$

24 $0.\overline{625}$

25 $32.\overline{32}$

طاقة مُتجدِّدة: يزداد عدد المنازل التي تعتمد على الطاقة الشمسية في توليد الكهرباء بإحدى المدن عامًا تلو الآخر كما في الجدول الآتي:

العام	1	2	3	4	5
عدد المنازل	7000	9800	13720		

26 أجد الحدَّ العام للمتتالية التي تُمثِّل عدد المنازل.

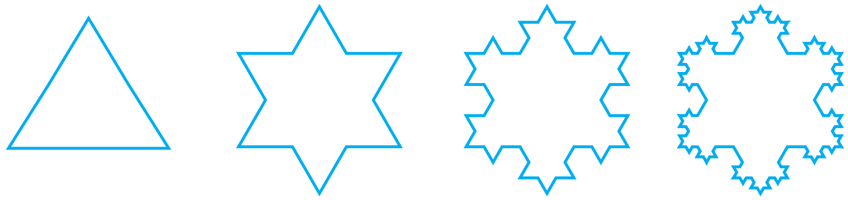
27 أجد عدد المنازل التي تعتمد على الطاقة الشمسية في توليد الكهرباء في العام الرابع والعام الخامس.

ادَّخرت مريم مبلغًا من المال في أحد البنوك، وقد بلغ مجموع ما ادَّخرته في السـنة الأولى JD 2000، ثم ادَّخرت في كل سنة لاحقة ما نسبته 25% أكثر من المبلغ الذي ادَّخرته في السنة السابقة:

28 ما المبلغ الذي ستدَّخره مريم في السنة الثالثة؟

29 بعد كم سنةً سيكون مجموع مُدَّخرات مريم أكثر من JD 50000 ؟

نُدْفة الثلج: يُمثِّل النمط المجاور عدد أضلاع نُدْفة ثلج في مراحلها المتتالية:



3 12 48 192

30 أكتب الحدَّ العام لهذه المتتالية.

31 أجد عدد أضلاع نُدْفة الثلج في المرحلة السابعة.

32 متسلسلة هندسـية لانهائية متقاربة، حدُّها الأول 80، ومجموعها 200، أجد عدد الحدود الأولى التي يَلزم جمعها معًا ليكون المجموع أكثر من 199

تُمثِّل $3p+3, 4p+4, 6p+2$ الحدود الثلاثة الأولى من متتالية هندسية، حيث $p \neq 0$:

33 أجد قيمة الثابت p.

34 أُثبِت أنَّ المتسلسلة لانهائية متقاربة، ثم أجد مجموعها.

متتالية هندسية أساسها موجب، ومجموع حدودها الأربعة الأولى 105، ومجموع حدودها الثمانية الأولى 1785:

35 أجد الحدَّ الأول من هذه المتتالية، وأساسها.

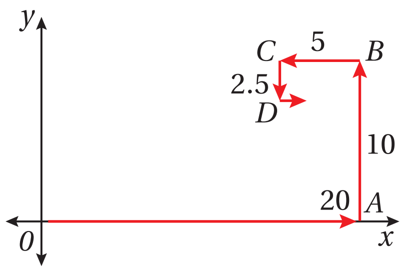
36 ما عدد حدود المتتالية التي تقل عن 1000؟

مهارات التفكير العليا

37 **تحدٍّ:** أجد الصيغة العامة لمجموع حدود المتسلسلة: $1\frac{1}{2} + 2\frac{1}{4} + 3\frac{1}{8} + 4\frac{1}{16} + \cdots$

38 **مسألة مفتوحة:** أجد متتالية هندسية لانهائية متقاربة، مجموعها 1.5

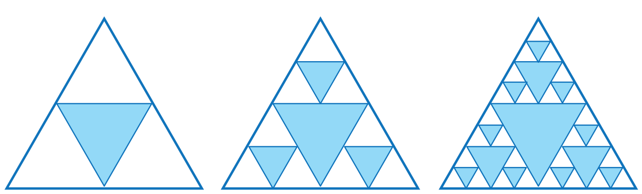
تبرير: يُبيِّن الشكل المجاور نمطًا حلزونيًّا مُكوَّنًا من قطع مستقيمة في المستوى الإحداثي. إذا علمْتُ أنَّ القطعة المستقيمة الأولى $\overline{OA}$ طولها 20 cm، وأنَّ القطعة المستقيمة الثانية $\overline{AB}$ طولها 10 cm، وهي موازية للمحور y، وأنَّ القطعة المستقيمة الثالثة $\overline{BC}$ طولها 5 cm، وهي موازية للمحور x، وأنَّ هذا النمط استمر إلى ما لانهاية، فأجد:



39 مجموع أطوال القطع المستقيمة المُكوِّنة للنمط.

40 إحداثيي نقطة نهاية النمط الحلزوني.

تبرير: يُبيِّن الشكل المجاور نمطًا هندسيًّا يُمثِّل عدد المثلثات في نماذجه متتالية:


الشكل (3). الشكل (2). الشكل (1).

41 أملأ الفراغ في الجدول المجاور اعتمادًا على النمط.

رقم الشكل	1	2	3	4
عدد المثلثات البيضاء	3	9		
عدد المثلثات الزرقاء	1	4		

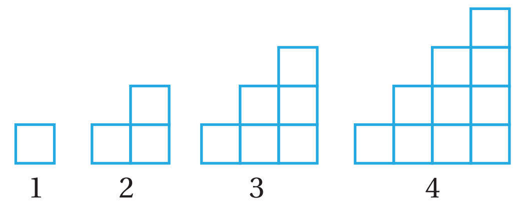
42 أكتب الحدَّ العام لمتتاليةِ عدد المثلثات البيضاء في كل شكل.

43 أكتب الحدَّ العام لمتتاليةِ عدد المثلثات الزرقاء.

إرشاد: أجد العلاقة بين عدد المثلثات الزرقاء وعدد المثلثات البيضاء في كل شكل.

أختار رمز الإجابة الصحيحة في كلٍّ ممّا يأتي:

1 الحدُّ العام للمتتالية التي تُمثِّل عدد المربعات في كل شكل من النمط الآتي هو:



a) $a_n = 3n - 3$ b) $a_n = 4n - 5$

c) $a_n = n$ d) $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$

2 مجموع المتسلسلة: $\sum_{k=1}^{6} k^2$ هو:

a) 36 b) 55

c) 91 d) 273

3 إحدى صيغ المجموع الآتية تُعبِّر عن المتسلسلة:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8}:$$

a) $\sum_{k=1}^{4} \frac{k}{2}$ b) $\sum_{k=1}^{4} \frac{1}{2^k}$

c) $\sum_{k=1}^{4} \frac{1}{2k}$ d) $\sum_{k=1}^{4} \frac{1}{k+2}$

4 الحدُّ العام لمتتالية حسابية، حدُّها الثامن -13، وأساسها -8، هو:

a) $a_n = 51 + 8n$ b) $a_n = 35 + 8n$

c) $a_n = 51 - 8n$ d) $a_n = 35 - 8n$

أجد مجموع كل متسلسلة ممّا يأتي:

5 $\sum_{k=1}^{6} (k^2 + 1)$

6 $\sum_{k=1}^{4} \left(\frac{3}{2}\right)^k$

7 $\sum_{k=1}^{4} \frac{1}{k^2 + 1}$

8 $\sum_{k=1}^{100} (3k + 4)$

أجد الحدَّ العام لكل متتالية حسابية ممّا يأتي، ثم أجد الحدَّ العشرين منها:

9 $200, 191, 182, 173, \ldots$

10 $215, 192, 169, 146, \ldots$

11 $a_5 = 41, a_{10} = 96$

12 $a_{10} = 7, d = -2$

أجد مجموع المتسلسلات الحسابية الآتية:

13 $7 + 1 - 5 - 11 - \ldots -299$

14 $-10 - 9.9 - 9.8 - \ldots -0.1$

15 $\sum_{k=1}^{20} (88 - 3k)$

16 أجد مجموع الحدود الاثني عشر الأولى من المتسلسلة:

$$120 + 111 + 102 + 93 + \ldots$$

17 متتالية حسابية، حدُّها الأول 20، وحدُّها الثاني 24، ومجموع أول k حدًّا من حدودها 504، أجد قيمة k.

18 متسلسلة هندسية لانهائية متقاربة، حدُّها الأول a، وحدُّها الرابع 4، أجد مجموعها بدلالة الثابت a.

19 أراد أحمد توفير جزء من راتبه، فوفَّر في الشهر الأول 50 دينارًا، ووفَّر في الشهر الثاني 55 دينارًا، ووفَّر في الشهر الثالث 60 دينارًا. ما مجموع المبالغ التي سيُوفِّرها أحمد إذا استمر على هذا النمط مدَّة عامين؟

أجد الحدَّ العام لكل متتالية هندسية ممّا يأتي، ثم أجد الحدَّ الثامن منها:

20 $144, -12, 1, -\frac{1}{12}, \ldots.$

21 $-8, -2, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{8}, \ldots$

22 $0.3, -0.09, 0.027, -0.0081, \ldots$

23 أجد وسطين هندسيين بين 5 و27

24 أجد مجموع الحدود العشرة الأولى من المتسلسلة الهندسية:

$$2 + 6 + 18 + 54 + \ldots$$

25 أجد مجموع الحدود الثمانية الأولى من المتسلسلة الهندسية:

$$100 + 90 + 81 + \ldots$$

26 أجد الحدَّ العام للمتتالية الهندسية التي فيها $a_6 = 243$، و $r = -3$.

27 وصلت رسالة فيها فيروس من بريد فاطمة الإلكتروني إلى 4 من صديقاتها بصورة عشوائية، ثم أُرسِلت هذه الرسالة إلى 4 صديقات أُخريات ممَّن يصلهن البريد الإلكتروني يوميًّا، وهكذا. ما عدد صديقات فاطمة اللاتي سيصلهن الفيروس بعد 10 أيام؟

أكتب كُلًّا من الأعداد العشرية الدورية الآتية في صورة كسر عادي بأبسط صورة:

28 $0.\overline{4}$

29 $1.\overline{7}$

30 أجد مجموع الحدود الخمسة عشر الأولى من المتسلسلة الهندسية: $5 + 10 + 20 + 40 + \ldots$

31 إذا كان مجموع متسلسلة لانهائية متقاربة هو 4 أضعاف حدِّها الثاني، فأجد أساس المتسلسلة.

32 متتالية هندسية، حدُّها الرابع 40، وحدُّها السابع 320−، أجد مجموع حدودها الاثني عشر الأولى.

تدريب على الاختبارات الدولية

33 المتتالية الحسابية ممّا يأتي هي:

a) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$

b) $2, 4, 8, 16, \ldots$

c) $2.2, 4.4, 6.6, 8.8, \ldots$

d) $2, 4, 7, 11, \ldots$

34 الحدُّ العاشر من المتتالية الهندسية: $144, 72, 36, 18, \ldots$ هو:

a) 0 b) $\frac{9}{64}$ c) $\frac{9}{32}$ d) $\frac{9}{16}$

35 متتالية هندسية منتهية، حدُّها الأول 1−، وأساسها 3−، ومجموعها 182، عدد حدودها هو:

a) 6 b) 7

c) 8 d) 9