الصف التاسع الفرق بين مربعين وتحليله

==

نعلم أن ٢٥ – ٩ = ١٦ ، لكن هل نستطيع إيجاد الناتج بطريقة أخرى

أجب عن الأسئلة التالية :-

- الجذر التربيعي للعدد ٢٥ $(\sqrt{٢٥}) = ...$
- الجذر التربيعي للعدد ٩ $(\sqrt{٩}) = ...$
- $(\sqrt{٢٥} - \sqrt{٩}) = (... - ...) = ...$
- $(\sqrt{٢٥} + \sqrt{٩}) = (... + ...) = ...$
- $(٢٥ - ١٦) = (\sqrt{٢٥} - \sqrt{١٦})(\sqrt{٢٥} + \sqrt{١٦})$

$= (... - ...)(... + ...)$

$= (...)(...) = ...$

- ماذا تلاحظ ....

بنفس الخطوات السابقة أكمل الفراغ

- الجذر التربيعي للعدد ٨١ $(\sqrt{٨١}) = ...$
- الجذر التربيعي للعدد ٤٩ $(\sqrt{٤٩}) = ...$
- $(\sqrt{...} - \sqrt{...}) = (... - ...) = ...$
- $(\sqrt{...} + \sqrt{...}) = (... + ...) = ...$

• $(٨١-٤٩)=(\sqrt{٠٠٠}-\sqrt{٠٠٠})(\sqrt{٠٠٠}+\sqrt{٠٠٠})$

$=(٠٠٠-٠٠٠)(٠٠٠+٠٠٠)$

$=(٠٠٠)(٠٠٠)=٠٠٠$

مثال :- جد ناتج ما يلي :

(١) $١٠٠-١٤٤=$ (٢) $١٦٩-٢٢٥=$

(٣) $٦٢٥-٤٠٠=$ (٤) $س^{٢}-ص^{٢}=$

الحل :-

(١) $١٠٠-١٤٤=(\sqrt{١٠٠}-\sqrt{١٤٤})(\sqrt{١٠٠}+\sqrt{١٤٤})$

$=(١٠-١٢)(١٠+١٢)$

$=(٢)(٢٢)=٤٤$

(٢) $١٦٩-٢٢٥=(\sqrt{١٦٩}-\sqrt{٢٢٥})(\sqrt{١٦٩}+\sqrt{٢٢٥})$

$=(١٣-١٥)(١٣+١٥)$

$=(-٢)(٢٨)=-٥٦$

(٣) $٦٢٥-٤٠٠=(\sqrt{٦٢٥}-\sqrt{٤٠٠})(\sqrt{٦٢٥}+\sqrt{٤٠٠})$

$=(٢٥-٢٠)(٢٥+٢٠)$

$=(٥)(٤٥)=٢٢٥$

(٤) $س^{٢}-ص^{٢}=(\sqrt{س^{٢}}-\sqrt{ص^{٢}})(\sqrt{س^{٢}}+\sqrt{ص^{٢}})$

$=(س-ص)(س+ص)$

- مما سبق لاحظ أن الأعداد ٩ ، ١٦ ، ٤٩ ، ٠٠٠ ، ٦٢٥

مربعات كاملة وكذلك $س^{٢}$ ، $ص^{٢}$

- المقدار ٦٢٥ – ٤٠٠ يسمى فرق بين مربعين ويمكن التعبير عن الفرق بين مربعين كما يلي $س^{٢} - ص^{٢}$
- طريقة إيجاد الناتج باستخدام هذه الطريقة تسمى تحليل فرق بين مربعين
- لتحليل فرق بين مربعين نتبع الخطوات التالية :

الحد الأول – الحد الثاني =

(الجذر التربيعي للأول – الجذر التربيعي للثاني) (الجذر التربيعي للأول+ الجذر التربيعي للثاني)

ورمزاً

$$س^{٢} - ص^{٢} = \left(\sqrt{س^{٢}} - \sqrt{ص^{٢}}\right)\left(\sqrt{س^{٢}} + \sqrt{ص^{٢}}\right)$$
$$= (س - ص)(س + ص)$$

ملاحظة : بالنسبة للإشارة السالبة ليس شرطاً أن توضع في القوس الأول

مثال : حلل المقادير التالية :-

(١) $س^{٢} - ٢٥$ (٢) $أ^{٢} - ب^{٢}$ (٣) $٢س^{٢} - ١٨$

(٤) $س^{٣} - أ^{٢}س$ (٥) $ص^{٣}س - صس^{٣}$ (٦) $\frac{١}{٤}أ^{٢} - \frac{١}{٢٥}ب^{٢}$

(٧) $(س+٢)^{٢} - (ص+٣)^{٢}$ (٨) $(س-٣)^{٢} - (س+٣)^{٢}$

الحل :

١) $س^{٢} - ٢٥ = \left(\sqrt{س^{٢}} - \sqrt{٢٥}\right)\left(\sqrt{س^{٢}} + \sqrt{٢٥}\right)$

$= (س - ٥)(س + ٥)$

في باقي الأمثلة سوف نحل بشكل مباشر مع ضرورة السؤال ما هو الجذر التربيعي

٢) $أ^{٢} - ب^{٢} = (أ + ب)(أ - ب)$

٣) $٢س^{٢} - ١٨$ **لاحظ هنا أن المقدار لا يمثل فرق بين مربعين لذلك نخرج (٢) عامل مشترك**

$٢(س^{٢} - ٩) = ٢(س + ٣)(س - ٣)$

٤) $س^{٣} - أ^{٢} س$ **نخرج (س) عامل مشترك**

$س(س^{٢} - أ^{٢}) = س(س - أ)(س + أ)$

٥) $ص^{٣} س - ص س^{٣}$ **نخرج (س ص) عامل مشترك**

$س ص(ص^{٢} - س^{٢}) = س ص(ص + س)(ص - س)$

٦) $\frac{١}{٤} أ^{٢} - \frac{١}{٢٥} ب^{٢} = \left(\frac{١}{٢} أ + \frac{١}{٥} ب\right)\left(\frac{١}{٢} أ - \frac{١}{٥} ب\right)$

٧) $(س+٢)^{٢}-(ص+٣)^{٢}$

الطريقة الأولى نفرض م = س + ٢ ،، ن = ص + ٣

فيصبح المقدار على الصورة $م^{٢}-ن^{٢}$

وبتعويض قيم م ، ن $م^{٢}-ن^{٢}=(م+ن)(م-ن)$

$$=((س+٢)+(ص+٣))(س+٢-(ص+٣))$$
$$=(س+٢+ص+٣)(س+٢-ص-٣)$$
$$=(س+ص+٥)(س-ص-١)$$

الطريقة الثانية نحلل بشكل مباشر حسب القاعدة

$$(س+٢)^{٢}-(ص+٣)^{٢}=((س+٢)+(ص+٣))((س+٢)-(ص+٣))$$
$$=(س+٢+ص+٣)(س+٢-ص-٣)$$
$$=(س+ص+٥)(س-ص-١)$$

٨) $(س-٣)^{٢}-(س+٣)^{٢}$ **التحليل بشكل مباشر**

$$(س-٣)^{٢}-(س+٣)^{٢}=((س-٣)+(س+٣))((س-٣)-(س+٣))$$
$$=(س-٣+س+٣)(س-٣-س-٣)$$
$$=(٢س+٠)(٠-٦)$$
$$=(٢س)(-٦)=-١٢س$$

==========

مثال :- جد قيمة المقدار العددية لكل مما يلي :-

١) $(٧,٥)^{٢}-(٣,٢)^{٢}$ ٢) $٢,٢٥-١,٤٤$

الحل :-

$$(٣,٢-٧,٥)(٣,٢+٧,٥) = {}^{٢}(٣,٢) - {}^{٢}(٧,٥)\ ١)$$
$$= (١٠,٧)(٤,٣) = ٤٦,٠١$$

$$(\overline{١,٤٤}\% - \overline{٢,٢٥}\%)(\overline{١,٤٤}\% + \overline{٢,٢٥}\%) = ١,٤٤ - ٢,٢٥\ ٢)$$
$$= (١,٢+١,٥)(١,٢-١,٥)$$
$$= (٢,٧)(٠,٣) = ٠,٨١$$

مثال :-

عبر عن المقدار (١٥×٤٧) بصورة فرق بين مربعين ، ثم جد قيمته العددية .

الحل :- لاحظ أن $١٥ = ٤٩ + ٢$ ، $٤٧ = ٤٩ - ٢$ إذاً

$$١٥ \times ٤٧ = (٤٩+٢)(٤٩-٢)$$
$$= {}^{٢}(٤٩) - {}^{٢}(٢)$$

القيمة العددية $= ٢٤٠١ - ٤ = ٢٣٩٧$

سؤال (١) :-

مستطيل مساحته $(س^{٢} - ص^{٢})$ حيث $س \prec ص$ ، جد محيطه .

سؤال (٢) :-

متوازي أضلاع أبعاده $(س - ص)$ ، $(س + ص)$ ، ٥ ، جد

١) مساحته الكلية ٢) حجم المتوازي

ملاحظة : $س \prec ص$

مجموع مكعبين وتحليله

مراجعة :

- **مكعب العدد (أ) : هو ناتج ضرب العدد (أ) في نفسه ٣ مرات ٠**

فمثلاً : مكعب العدد ٢ هو ٨ لأن ٢×٢×٢=٨

مكعب العدد -٣ = - ٢٧ لأن -٣×-٣×-٣=-٢٧

مكعب العدد س هو $س^{٣}$ لأن $س \times س \times س = س^{٣}$

سؤال :- أكمل الفراغ

- **مكعب العدد ٥ = ...**
- **مكعب العدد ٧ = ...**
- **مكعب العدد ـ ٤ = ...**
- **مكعب العدد ك = ...**
- **مكعب العدد س ص =.....**
- **$(٧)^{٣}$ = ...**
- **$(-٢ أ)^{٣}$ = ...**

- **الجذر التكعيبي للعدد $ب^{٣}$: هو العدد الذي إذا ضرب في نفسه ٣ مرات كان الناتج $ب^{٣}$**

فمثلا : الجذر التكعيبي للعدد ٦٤ هو ٤ لأن ٤×٤×٤=٦٤

الجذر التكعيبي للعدد ـ ٢١٦ هو ـ ٦ لأن -٦×-٦×-٦=-٢١٦

الجذر التكعيبي للعدد $س^{٣}$ هو س لأن $س \times س \times س = س^{٣}$

الجذر التكعيبي للعدد $- ٨ أ^{٣} ب^{٣}$ هو $- ٢ أ ب$ لأن .....

$\sqrt[٣]{١٢٥} = ٥$ لأن .....

$\sqrt[٣]{-٧٢٩} = ٠٠٠$ لأن .....

مثال :-

ادرس المثال بشكل جيد ودون ملاحظاتك

٢٧ + ٨ = ٣٥ ، لاحظ أن العددين ٢٧ ، ٨ مكعبات كاملة

سوف نجد الناتج بطريقة جديدة

الجذر التكعيبي للعدد ٢٧ = ٣ ، الجذر التكعيبي للعدد ٨ = ٢

$٨+٢٧ = {}^{٣}(٣) + {}^{٣}(٢)$ .....

$= (٣+٢)(٣ - {}^{٢}٣ \times ٢ + {}^{٢}٢)$ .....

$= (٥)(٩-٦+٤) = ٥ \times ٧ = ٣٥$

مثال : ١٢٥ + ٦٤

الجذر التكعيبي للعدد ٦٤ = ٤ ،، الجذر التكعيبي للعدد ١٢٥ = ٥

$١٢٥+٦٤ = {}^{٣}(٥) + {}^{٣}(٤)$ .....

$= (٥+٤)(٢٥ - ٢٠ + ١٦)$ .....

$= (٩)(٢٥-٢٠+١٦) = ٩ \times ٢١ = ١٨٩$

مثال : أكمل الفراغ

٧٢٩ + ١٠٠٠

الجذر التكعيبي للعدد ٧٢٩ = ... ،،، الجذر التكعيبي للعدد ١٠٠٠ = ...

$$٧٢٩+١٠٠٠=(٠٠٠)^{٣}+(٠٠٠)^{٣}$$

$$=(٩+١٠)\left((٠٠٠)^{٢}-(٠٠٠)\times(٠٠٠)+(٠٠٠)^{٢}\right)$$

$$=(١٩)(١٠٠+٩٠-٨١)=٠٠٠\times٠٠٠=٠٠٠$$

مثال : س^{٣} + ٨

الجذر التكعيبي ل س^{٣} = ... ،، الجذر التكعيبي لـ ٨ = ...

$$س^{٣}+٨=(٠٠٠)^{٣}+(٠٠٠)^{٣}$$

$$=(٠٠٠+٠٠٠)\left((س)^{٢}-(س)\times(٣)+(٢)^{٢}\right)$$

$$=(٠٠٠+٠٠٠)(٠٠٠+٠٠٠-٠٠٠)$$

مثال : بناءً على ما سبق أكمل الفراغ

١) $١٢٥+٢١٦=(٠٠٠)^{٣}+(٠٠٠)^{٣}$

$$=(٠٠٠+٠٠٠)\left((٠٠٠)^{٢}-٠٠٠\times٠٠٠+(٠٠٠)^{٢}\right)$$

$$=(٠٠٠+٠٠٠)(٠٠٠+٠٠٠-٠٠٠)$$

٢) $١٢٥+\frac{١}{١٠٠٠}=(٠٠٠)^{٣}+(٠٠٠)^{٣}$

$$=(٠٠٠+٠٠٠)\left((٠٠٠)^{٢}-٠٠٠\times٠٠٠+(٠٠٠)^{٢}\right)=(٠٠٠+٠٠٠)(٠٠٠+٠٠٠-٠٠٠)$$

٣) $أ^{٣}+ب^{٣}=(٠٠٠)^{٣}+(٠٠٠)^{٣}$

$=(٠٠٠+٠٠٠)\left((٠٠٠)^{٢}-٠٠٠\times٠٠٠+(٠٠٠)^{٢}\right)$

$=(٠٠٠+٠٠٠)\left((٠٠٠)^{٢}-٠٠٠\times٠٠٠+(٠٠٠)^{٢}\right)$

اعتماداً علما سبق :

- **المقدار $أ^{٣}+ب^{٣}$ يسمى مجموع مكعبين**
- **القوس الأصغر $(أ+ب)$: أ الجذر التكعيبي لـ $أ^{٣}$ وتسمى الحد الأول**
  ب الجذر التكعيبي لـ $ب^{٣}$ وتسمى الحد الثاني
  فيصبح القوس على الصورة (الحد الأول + الحد الثاني)
- **القوس الأكبر $\left((أ)^{٢}-أ\times ب+(ب)^{٢}\right)$ حيث**

  $أ^{٢}$ ← مربع الحد الأول

  $أ\times ب$ ← الحد الأول × الحد الثاني (وهنا فقط نضع أمامه إشارة مغايرة للإشارة بين الحدين)

  $ب^{٢}$ ← مربع الحد الثاني
- **تسمى العملية السابقة تحليل مجموع مكعبين إلى عوامله الأولية ويعبر عنها باللفظ كما يلي :**

$$(ع_{١})^{٣}+(ع_{٢})^{٣}=(ع_{١}+ع_{٢})\left((ع_{١})^{٢}-ع_{١}\times ع_{٢}+(ع_{٢})^{٢}\right)$$

حيث $ح_{١}$ الحد الأول ،،،،، $ح_{٢}$ الحد الثاني

مثال : حلل المقادير الجبرية الآتية إلى عواملها :

١) $س^{٣}+٦٤=(س)^{٣}+(٤)^{٣}\leftarrow$ الحد الأول س ،،، الحد الثاني ٤

وبتطبيق قاعدة تحليل مجموع مكعبين

$$(ع_{١})^{٣}+(ع_{٢})^{٣}=(ع_{١}+ع_{٢})\left((ع_{١})^{٢}-ع_{١}\times ع_{٢}+(ع_{٢})^{٢}\right)$$

$$(س)^{٣}+(٤)^{٣}=(س+٤)\left((س)^{٢}-س\times ٤+(٤)^{٢}\right)$$
$$=(س+٤)\left(س^{٢}-٤س+١٦\right)$$

ملاحظة : العبارة التربيعية الناتجة من تحليل مجموع مكعبين لا يمكن تحليلها

---

٢) $٨س^{٣}+٢١٦=(٢س)^{٣}+(٦)^{٣}\leftarrow$ الحد الأول ٢س ، الحد الثاني ٦

وبتطبيق قاعدة تحليل مجموع مكعبين

$$(ع_{١})^{٣}+(ع_{٢})^{٣}=(ع_{١}+ع_{٢})\left((ع_{١})^{٢}-ع_{١}\times ع_{٢}+(ع_{٢})^{٢}\right)$$

$$(٢س)^{٣}+(٦)^{٣}=(٢س+٦)\left((٢س)^{٢}-٢س\times ٦+(٦)^{٢}\right)$$
$$=(٢س+٦)\left(٤س^{٢}-١٢س+٣٦\right)$$

---

٣) $\frac{١}{١٢٥}س^{٣}+\left(\frac{١}{٥}س\right)^{٣}+\left(\frac{١}{٣}\right)^{٣}\leftarrow$

الحد الأول $\frac{١}{٥}$ س ،،، الحد الثاني $\frac{١}{٣}$

$$\left(\frac{١}{٥}س\right)^{٣}+\left(\frac{١}{٣}\right)^{٣}=\left(\frac{١}{٥}س+\frac{١}{٣}\right)\left(\left(\frac{١}{٥}س\right)^{٢}-\frac{١}{٥}س\times\frac{١}{٣}+\left(\frac{١}{٣}\right)^{٢}\right)$$
$$=\left(\frac{١}{٥}س+\frac{١}{٣}\right)\left(\frac{١}{٢٥}س^{٢}-\frac{١}{١٥}س+\frac{١}{٩}\right)$$

٤) ١٢ أ^{٣} + ٦ أ ب^{٣} ← نخرج ٢ عامل مشترك لكي يصبح المقدار

على صورة مجموع مكعبين كما يلي : ٢ (أ^{٣} + ٨ ب^{٣})

$$٢(أ^{٣}+٨ب^{٣}) = ٢((أ)^{٣}+(٢ب)^{٣}) \leftarrow$$

الحد الأول أ ،،،،، الحد الثاني ٢ ب

$$٢((أ)^{٣}+(٢ب)^{٣}) = ٢(أ+٢ب)((أ)^{٢}-أ\times٢ب+(٢ب)^{٢})$$

$$= ٢(أ+٢ب)(أ^{٢}-٢أب+٤ب^{٢})$$

---

٥) أ^{٣} + ٠,٠٦٤

الحد الأول أ ،،، الحد الثاني ٠,٤ لأن ٠,٤ × ٠,٤ × ٠,٤ = ٠,٠٦٤

أو $٠,٠٦٤ = \frac{٦٤}{١٠٠٠} = \frac{٤}{١٠}\times\frac{٤}{١٠}\times\frac{٤}{١٠}$

$$(أ)^{٣}+(٠,٤)^{٣} = (أ+٠,٤)((أ)^{٢}-أ\times٠,٤+(٠,٤)^{٢})$$

$$= (أ+٠,٤)(أ^{٢}-٠,٤أ+٠,١٦)$$

---

٦) أ^{٣} س^{٣} + ٢٥ ب^{٣} ص^{٣}

الحد الأول أ س ،،،، الحد الثاني ٥ ب ص

$$= (أس)^{٣}+(٥بص)^{٣} = (أس+٥بص)((أس)^{٢}-أس\times٥بص+(٥بص)^{٢})$$

$$= (أس+٥بص)(أ^{٢}س^{٢}-٥أبس ص+٢٥ب^{٢}ص^{٢})$$

٧) $س^{٦} + ١٢٥$

الحد الأول $س^{٢}$ لأن $س^{٦} = س^{٢} \times س^{٢} \times س^{٢}$ ، الحد الثاني ٥

$$س^{٦} + ١٢٥ = (س^{٢})^{٣} + (٥)^{٣}$$

$$= (س^{٢} + ٥)((س^{٢})^{٢} - س^{٢} \times ٥ + (٥)^{٢})$$

$$= (س^{٢} + ٥)(س^{٤} - ٥س^{٢} + ٢٥)$$

---

٨) $\frac{س^{٤}}{١٨ أ^{٣}} + \frac{٢١٦ س}{ب^{٣}}$

نخرج س عامل مشترك فيصبح المقدار على صورة مجموع مكعبين

كما يلي : $س\left(\frac{س^{٣}}{١٨ أ^{٣}} + \frac{٢١٦}{ب^{٣}}\right)$

$$\frac{س^{٤}}{١٨ أ^{٣}} + \frac{٢١٦ س}{ب^{٣}} = س\left(\frac{س^{٣}}{١٨ أ^{٣}} + \frac{٢١٦}{ب^{٣}}\right)$$

الحد الأول $\left(\frac{س}{١٢ أ}\right)$ ،،،،،،، **الحد الثاني** $\left(\frac{٦}{ب}\right)$

$$= س\left(\frac{س^{٣}}{١٨ أ^{٣}} + \frac{٢١٦}{ب^{٣}}\right) = س\left(\left(\frac{س}{١٢ أ}\right)^{٣} + \left(\frac{٦}{ب}\right)^{٣}\right)$$

$$= س\left(\left(\frac{س}{١٢ أ}\right) + \left(\frac{٦}{ب}\right)\right)\left(\left(\frac{س}{١٢ أ}\right)^{٢} - \left(\frac{٦}{ب}\right)\left(\frac{س}{١٢ أ}\right) + \left(\frac{٦}{ب}\right)^{٢}\right)$$

$$= س\left(\left(\frac{س}{١٢ أ}\right) + \left(\frac{٦}{ب}\right)\right)\left(\frac{س^{٢}}{١٤٤ أ^{٢}} - \frac{٣ س}{١٢ أ ب} + \frac{٣٦}{ب^{٢}}\right)$$

حل تدريب (١ – ٧) ص٢٢

حلل المقادير الجبرية الآتية إلى عواملها :

أ) $جـ^{٣}+١=(جـ+١)(جـ^{٢}-جـ+١)$

ب) $\frac{٢س^{٣}}{٢٧}+٢ص^{٣}$ **نخرج ٢ عمل مشترك** $\leftarrow ٢\left(\frac{س^{٣}}{٢٧}+ص^{٣}\right)$

$$٢\left(\frac{س^{٣}}{٢٧}+ص^{٣}\right)=٢\left(\left(\frac{س}{٣}\right)^{٣}+(ص)^{٣}\right)$$

$$=٢\left(\left(\frac{س}{٣}\right)^{٣}+(ص)^{٣}\right)=٢\left(\frac{س}{٣}+ص\right)\left(\frac{س^{٢}}{٩}-\frac{س ص}{٣}+ص^{٢}\right)$$

جـ) $٠,٠٠٠١٤^{٤}+\frac{٥}{٨}١س^{٣}$ **نخرج ٥ أ عامل مشترك** $\leftarrow ١٥\left(١٨^{٣}+\frac{١}{٨}س^{٣}\right)$

$$=١٥\left(١٨^{٣}+\frac{١}{٨}س^{٣}\right)=١٥\left((١٢)^{٣}+\left(\frac{١}{٢}س\right)^{٣}\right)$$

$$=١٥\left(١٢+\frac{١}{٢}س\right)\left((١٢)^{٢}-١٢\times\frac{١}{٢}س+\left(\frac{١}{٢}س\right)^{٢}\right)$$

$$=١٥\left(١٢+\frac{١}{٢}س\right)\left(١٤^{٢}-١س+\frac{١}{٤}س^{٢}\right)$$

د) $٣٤٣س^{٣}+٠,٠٠٨=(٧س+٠,٢)(٤٩س^{٢}-٠,٢س+٠,٠٤)$

أو د) $٣٤٣س^{٣}+\frac{٨}{١٠٠٠}=\left(٧س+\frac{٢}{١٠}\right)\left(٤٩س^{٢}-\frac{٢}{١٠}س+\frac{٤}{١٠٠}\right)$

حل تدريب (١ – ٨) ص٢٢

حل المسألة الواردة في بداية الدرس

- **حجم خزان الماء متوازي المستطيلات**

= البعد الأول × البعد الثاني × البعد الثالث

$= (س + ص)(١)$ **(البعد الثالث)**

لكن حجم المكعب الأول + حجم الثاني = حجم متوازي المستطيلات

$$(س^{٣} + ص^{٣}) = (س + ص)(س^{٢} - س ص + ص^{٢}) \leftarrow$$

إذاً البعد الثالث هو $(س^{٢} - س ص + ص^{٢})$

حل تمارين ومسائل الكتاب ص٢٣

١) اكتب كلاً مما يأتي على صورة مجموع مكعبين :

أ) $١ + ٨ س^{٣} = (١)^{٣} + (٢س)^{٣}$ **لغاية هنا الجواب**

$$= (١)^{٣} + (٢س)^{٣} = (١ + ٢س)(١ - س + ٤س^{٢})$$

ب) $\left(\frac{١}{٥س}\right)^{٣} + (٠,٣)^{٣} = ٠,٠٢٧ + \frac{١}{١٢٥ س^{٣}}$

$$= \left(\frac{١}{٥س}\right)^{٣} + (٠,٣)^{٣} = \left(\frac{١}{٥س} + ٠,٣\right)\left(\frac{١}{٢٥ س^{٢}} - \frac{٠,٣}{٥س} + ٠,٠٩\right)$$

$$= \left(\frac{١}{٥س}\right)^{٣} + (٠,٣)^{٣} = \left(\frac{١}{٥س} + ٠,٣\right)\left(\frac{١}{٢٥ س^{٢}} - \frac{٣}{٥٠ س} + ٠,٠٩\right)$$

---

٢) حلل المقادير الجبرية الآتية إلى عواملها :

أ) $أ^{٣} ع^{٣} + ٢١٦ م^{٣} = (ع)^{٣} + (٦م)^{٣}$

$= (ع)^{٣} + (٦م)^{٣} = (ع + ٦م)(ع^{٢} - ٦مع + ٣٦م^{٢})$

ب) $\frac{س^{٣}}{١٢٥} + \frac{٨ص^{٣}}{٢٧} = (\frac{س}{٥})^{٣} + (\frac{٢ص}{٣})^{٣}$

$= (\frac{س}{٥} + \frac{٢ص}{٣})(\frac{س^{٢}}{٢٥} - \frac{٢سص}{١٥} + \frac{٤ص^{٢}}{٩})$

جـ) $٢٥٠ أ^{٣} + ٤ ب^{٣} ٥ = ٢(١٢٥ أ^{٣} + ٢٧ ب^{٣})$ **إخراج ٢ عامل مشترك**

$= ٢(١٢٥ أ^{٣} + ٢٧ ب^{٣}) = ٢((أ٥)^{٣} + (ب٣)^{٣})$

$= ٢((أ٥)^{٣} + (ب٣)^{٣}) = ٢(أ٥ + ب٣)(٢٥ أ^{٢} - ١٥ أب + ٩ ب^{٢})$

د) $١٦ ص^{٣} + ٢ س^{٣} = ٢(٨ص^{٣} + س^{٣})$ **إخراج ٢ عامل مشترك**

$= ٢(٨ص^{٣} + س^{٣})$ $= ٢((٢ص)^{٣} + (س)^{٣})$

$= ٢((٢ص)^{٣} + (س)^{٣}) = ٢(٢ص + س)(٤ص^{٢} - ٢صس + س^{٢})$

هـ) $(س-١)^{٣} + (ص+١)^{٣}$ **الحل بطريقتين**

الطريقة الأولى : نفرض م = س – ١ ،،، ن = ص + ١

$(س-١)^{٣} + (ص+١)^{٣} = (م)^{٣} + (ن)^{٣}$

$$= (م)^{٣} + (ن)^{٣} = (م + ن)(م^{٢} - مـن + ن^{٢})$$

نعوض بدل م ،،، ن

$$= (س - ١ + ص + ١)\left((س - ١)^{٢} - (س - ١)(ص + ١) + (ص + ١)^{٢}\right)$$

$$= (س + ص)\left((س - ١)^{٢} - (س - ١)(ص + ١) + (ص + ١)^{٢}\right)$$

ملاحظة : يمكن فك الأقواس داخل القوس الكبير

الطريقة الثانية : التحليل بشكل مباشر

$$(س - ١)^{٣} + (ص + ١)^{٣} =$$

$$= (س - ١ + ص + ١)\left((س - ١)^{٢} - (س - ١)(ص + ١) + (ص + ١)^{٢}\right)$$

$$= (س + ص)\left((س - ١)^{٢} - (س - ١)(ص + ١) + (ص + ١)^{٢}\right)$$

و) $\frac{س^{٦}}{٤} + \frac{٢٧ص^{٣}}{٥٠٠} = \frac{١}{٤}\left(س^{٦} + \frac{٢٧ص^{٣}}{١٢٥}\right)$ **إخراج** $\frac{١}{٤}$ **عامل مشترك**

لاحظ أن $س^{٦} = س^{٢} \times س^{٢} \times س^{٢}$

$$= \frac{١}{٤}\left((س^{٢})^{٣} + \left(\frac{٣ص}{٥}\right)^{٣}\right) = \frac{١}{٤}\left(س^{٢} + \frac{٣ص}{٥}\right)\left(س^{٤} - \frac{٣س^{٢}ص}{٥} + \frac{٩ص^{٤}}{٢٥}\right)$$

ز) $م^{٩}+١=(م^{٣})^{٣}+(١)^{٣}$

$=(م^{٣})^{٣}+(١)^{٣}=(م^{٣}+١)(م^{٦}-م^{٣}+١)$

لاحظ هنا في القوس الأصغر المقدار عبارة مجموع مكعبين

والقوس الأكبر يمكن التعامل معه بأكثر من طريقه لكن نكتفي بالتعامل مع الحدين م٦ + ١

القوس الأصغر $(م^{٣}+١)=(م+١)(م^{٢}-م+١)$

القوس الأكبر فقط

$(م^{٦}+١)=(م^{٢})^{٣}+١)=(م^{٢}+١)(م^{٤}-م^{٢}+١)$

إذا $م^{٩}+١=(م^{٣}+١)(م^{٦}-م^{٣}+١)$

$=(م+١)(م^{٢}-م+١)\ (م^{٢}+١)(م^{٤}-م^{٢}+١)-م^{٢})$

ع) $١٦أ^{٣}س^{٣}+٤٨س^{٣}=٦(أ^{٣}س^{٣}+٨س^{٣})$ **إخراج ٦ عامل مشترك**

$=٦(أس+٢س)(أ^{٢}س^{٢}-٢أس^{٢}+٤س^{٢})$

$=٦س^{٣}(أ+٢)(أ^{٢}-٢أ+٤)$

ط) $(٥س-١)^{٤}+(٥س-١)=(٥س-١)\left((٥س-١)^{٣}+١\right)$

إخراج (٥ س – ١) عامل مشترك

$=(٥س-١)\left((٥س-١)^{٣}+١\right)$

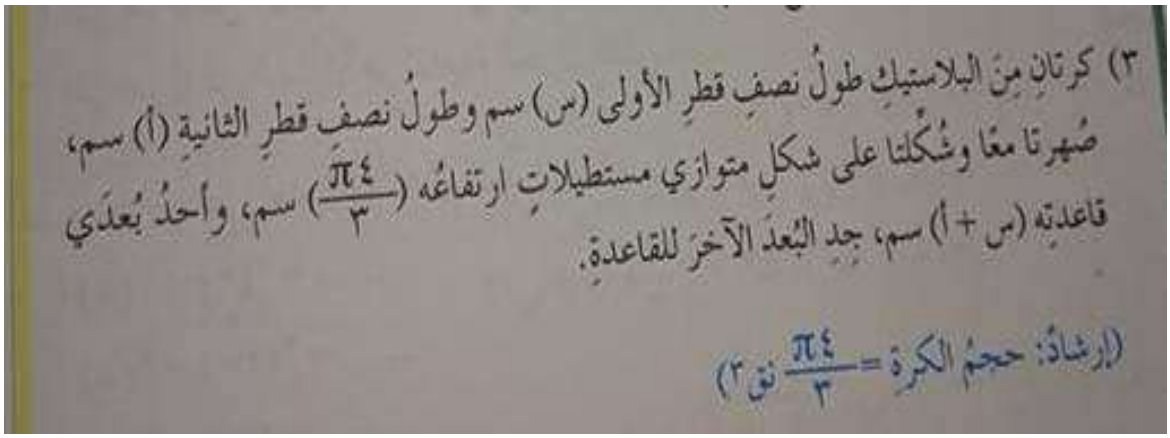
$=(٥س-١)\left((٥س-١)+١\right)\left((٥س-١)^{٢}-(٥س-١)+١\right)$

$=(٥س-١)(٥س)\left((٥س-١)^{٢}-(٥س-١)+١\right)$

ملاحظة : يمكن الاستمرار في فك الأقواس

---

٣)


٣) كرتانِ منَ البلاستيكِ طولُ نصفِ قطرِ الأولى (س) سم وطولُ نصفِ قطرِ الثانيةِ (أ) سم، صُهرتا معًا وشُكِّلتا على شكلِ متوازي مستطيلاتٍ ارتفاعُه ($\frac{\pi ٤}{٣}$) سم، وأحدُ بُعدَيْ قاعدتِه (س + أ) سم، جِدِ البُعدَ الآخرَ للقاعدةِ.

(إرشادٌ: حجمُ الكرةِ = $\frac{\pi ٤}{٣}$ نق ٣)

الحل : نفرض البعد الأخر (الثاني) للقاعدة = ص

حجم الكرة الأولى = $\frac{\pi ٤}{٣}$ س ^{٣} ،، **حجم الكرة الثانية** = $\frac{\pi ٤}{٣}$ أ ^{٣}

حجم متوازي المستطيلات = مساحة القاعدة × الارتفاع

= البعد الأول × البعد الثاني × الارتفاع

لكن من السؤال هذا فقط

حجم المتوازي = حجم الكرة الأولى + حجم الكرة الثانية

$$(س + ا)(ص) = \left(\frac{٤\pi}{٣}\right) س^{٣} + \frac{٤\pi}{٣} ا^{٣}$$

$$(س + ا)(ص) = \left(\frac{٤\pi}{٣}\right)(س^{٣} + ا^{٣})$$

$$(س + ا)(ص) = \left(\frac{٤\pi}{٣}\right)(س + ا)(س^{٢} - اس + ا^{٢})$$

وبالاختصار بين الطرفين نجد أن

$ص = (س^{٢} - اس + ا^{٢})$ **البعد الأخر لقاعدة المتوازي ٠**

الفرق بين مكعبين وتحليله

في الدرس السابق تعرفنا على المقدار الجبري الذي يمثل مجموع مكعبين وطريقة تحليله .

في هذا الدرس سوف نتعرف على المقدار الجبري الذي يمثل الفرق بين مكعبين وطريقة تحليله .

مثال : حلل المقدار $س^{٣} + أ^{٣}$ إلى عوامله الأولية :

الحل : $س^{٣} + أ^{٣} = (س)^{٣} + (أ)^{٣}$

الحد الأول $ح_{١}$ = س ،،،، الحد الثاني $ح_{٢}$ = أ

وبتطبيق قاعدة تحليل مجموع مكعبين

$(ع_{١})^{٣} + (ع_{٢})^{٣} = (ع_{١} + ع_{٢})((ع_{١})^{٢} - ع_{١} \times ع_{٢} + (ع_{٢})^{٢})$ نحصل على

$= (س)^{٣} + (أ)^{٣} = (س + أ)(س^{٢} - أس + أ^{٢})$

مثال : حلل المقدار $س^{٣} - ١٢٥$ إلى عوامله الأولية :

الحل : نعلم أن $أ - ب = أ + (-ب)$ لذلك نكتب المقدار الجبري

$س^{٣} - ١٢٥$ على الصورة $س^{٣} + (-١٢٥)$

$س^{٣} + (-١٢٥) = (س)^{٣} + (-٥)^{٣}$

الحد الأول $ح_{١}$ = س

الحد الثاني $ح_{٢}$ = - ٥ لأن - ٥ × - ٥ × - ٥ = - ١٢٥

وبتطبيق قاعدة تحليل مجموع مكعبين

$$(ع_{١})^{٣}+(ع_{٢})^{٣}=(ع_{١}+ع_{٢})\left((ع_{١})^{٢}-ع_{١}\times ع_{٢}+(ع_{٢})^{٢}\right)$$ **نحصل على**

$$=(س)^{٣}+(-٥)^{٣}=(س+(-٥))\left(س^{٢}-س(-٥)+(-٥)^{٢}\right)$$

وبتبسيط ما داخل الأقواس نحصل على

$$=(س)^{٣}+(-٥)^{٣}=(س-٥)\left(س^{٢}+٥س+٢٥\right)$$

ومنها

$$س^{٣}-١٢٥=(س)^{٣}-(٥)^{٣}=(س-٥)\left(س^{٢}+٥س+٢٥\right)$$

أكتب ملاحظتك .....

مثال : حلل المقدار $أ^{٣}-٢١٦ب^{٣}$ إلى عوامله الأولية :

الحل : بنفس خطوات المثال السابق

$$أ^{٣}-٢١٦ب^{٣}=أ^{٣}+(-٢١٦ب^{٣})$$

$$=أ^{٣}+(-٢١٦ب^{٣})=(أ)^{٣}+(-(٦ب)^{٣})$$

الحد الأول ح١ = أ ،،،، الحد الثاني ح٢ = - ٦ ب

وبتطبيق قاعدة تحليل مجموع مكعبين

$$(ع_{١})^{٣}+(ع_{٢})^{٣}=(ع_{١}+ع_{٢})\left((ع_{١})^{٢}-ع_{١}\times ع_{٢}+(ع_{٢})^{٢}\right)$$

نحصل على

$$(أ)^{٣}+(-٦ب)^{٣}=(أ+(-٦ب))(أ^{٢}-أ(-٦ب)+(-٦ب)^{٢})$$

$$أ^{٣}-٢١٦ب^{٣}=(أ)^{٣}-(٦ب)^{٣}=(أ-٦ب)(أ^{٢}+٦أب+٣٦ب^{٢})$$

أكتب ملاحظتك .....

من المثالين السابقين نلاحظ أنه يمكن كتابة الفرق بين مكعبين على صورة مجموع مكعبين ثم تحليله باستخدام قاعدة تحليل مجموع مكعبين ، وبصورة أسرع نستخدم القاعدة التالية في تحليل الفرق بين مكعبين (تم استنتاجها من تحليل مجموع مكعبين) ٠

قاعدة تحليل الفرق بين مكعبين

$$(ع_{١})^{٣}-(ع_{٢})^{٣}=(ع_{١}-ع_{٢})((ع_{١})^{٢}+ع_{١}\times ع_{٢}+(ع_{٢})^{٢})$$

ضع القاعدتين أمامك ثم استنتج كيف تميز بينهما

مثال : حلل المقادير الجبرية الآتية إلى عواملها الأولية :

١) $١٨أ^{٣}-٣٤٣ص^{٣}$

الحل :

$$١٨أ^{٣}-٣٤٣ص^{٣}=(١٢أ)^{٣}-(٧ص)^{٣}$$

$$=(١٢أ-٧ص)(١٤٤أ^{٢}+٤١أص+٤٩ص^{٢})$$

تذكر :

العبارة التربيعية الناتجة من تحليل مجموع (الفرق بين) مكعبين لا تحلل ٠

٢) $\frac{٣}{٥١٢}$ س^{٤} − ٤ ٢س ص^{٣}

الحل : نخرج ٣ س عامل مشترك فيصبح المقدار كما يلي

$$٣س\left(\frac{١}{٥١٢}س^{٣} - ٨ص^{٣}\right) = ٣س\left(\left(\frac{١}{٨}س\right)^{٣} - (٢ص)^{٣}\right)$$

$$= ٣س\left(\frac{١}{٨}س - ٢ص\right)\left(\frac{١}{٦٤}س^{٢} + \frac{١}{٤}س ص + ٤ص^{٢}\right)$$

٣) س^{٦} − ١

الحل :

$$س^{٦} - ١ = \left(س^{٢}\right)^{٣} - (١)^{٢}$$

$$= \left(س^{٢} - ١\right)\left(س^{٤} + س^{٢} + ١\right)$$

((حلل المقدار السابق باستخدام طريقة الفرق بين مربعين)

٤) $(س - ٢)^{٣} - (س + ٢)^{٣}$

الحل : الطريقة الأولى الفرض

نفرض $(س - ٢) = م$ ،،،،،، $(س + ٢) = ن$

$$(س - ٢)^{٣} - (س + ٢)^{٣} = (م)^{٣} - (ن)^{٣}$$

$$(م)^{٣} - (ن)^{٣} = (م - ن)\left(م^{٢} + نم + ن^{٢}\right)$$

وبالتعويض $(س - ٢) = م$ ،،،،،، $(س + ٢) = ن$ ←←

$$(س-٢)^{٣}-(س+٢)^{٣}=$$
$$((س-٢)-(س+٢))\left((س-٢)^{٢}+(س-٢)(س+٢)+(س+٢)^{٢}\right)$$
$$=(س-٢-س-٢)\left((س-٢)^{٢}+(س^{٢}-٤)+(س+٢)^{٢}\right)$$
$$=(-٤)\left((س-٢)^{٢}+(س^{٢}-٤)+(س+٢)^{٢}\right)$$
$$=(-٤)(٣س^{٢}+٤)=-٢١س^{٢}-١٦$$

تذكر $(س \pm ص)^{٢} = س^{٢} \pm ٢س ص + ص^{٢}$

الطريقة الثانية التحليل المباشر

$$(س-٢)^{٣}-(س+٢)^{٣}=$$
$$((س-٢)-(س+٢))\left((س-٢)^{٢}+(س-٢)(س+٢)+(س+٢)^{٢}\right)$$
$$=(س-٢-س-٢)\left((س-٢)^{٢}+(س^{٢}-٤)+(س+٢)^{٢}\right)$$
$$=(-٤)\left((س-٢)^{٢}+(س^{٢}-٤)+(س+٢)^{٢}\right)$$
$$=(-٤)(٣س^{٢}+٤)=-٢١س^{٢}-١٦$$

---

٥) $س^{٦}-ص^{٦}$

الحل : $س^{٦}-ص^{٦}=(س^{٢})^{٣}-(ص^{٢})^{٣}$

$$=(س^{٢}-ص^{٢})(س^{٤}+س^{٢}ص^{٢}+ص^{٤})$$

ملاحظة : حل المقدار السابق بطريقة تحليل فرق بين مربعين

مثال :حلل المقدار الجبري التالي تحليلاً كاملاً :

$$س^{٣} + س^{٢} - س - ١$$

الحل :

$$(س^{٣} - ١) + (س^{٢} - س) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(س - ١)(س^{٢} + س + ١) + س(س - ١) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(س - ١)(س^{٢} + س + ١ + س) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(س - ١)(س^{٢} + ٢س + ١) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= (س - ١)(س + ١)(س + ١) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

حل تدريب ١ ــ ٩

حلل المقادير الجبرية الآتية إلى عواملها ٠

أ) $٦٤س^{٣} - ١ = (٤س)^{٣} - (١)^{٣}$

$= (٤س)^{٣} - (١)^{٣} = (٤س - ١)(س^{٢} + ٤س + ١)$

ب) $٣٢ - ٤س^{٣}ا^{٣} = ٤(٨ - س^{٣}ا^{٣})$ إخراج ٤ عامل مشترك

$= ٤(٨ - س^{٣}ا^{٣}) = ٤(٢ - سا)(٤ + ٢سا + س^{٢}ا^{٢})$

جـ) $\frac{٢١٦}{٥٤}$ س ^{٣} $-$ $\frac{\text{ص}^{٦}}{٢}$ $= \frac{١}{٢}\left(\frac{٢١٦}{٢٧}\text{ س}^{٣} - \text{ص}^{٦}\right)$

$= \frac{١}{٢}\left(\frac{٢١٦}{٢٧}\text{س}^{٣} - \text{ص}^{٦}\right) = \frac{١}{٢}\left((٢\text{س})^{٣} - (\text{ص}^{٢})^{٣}\right)$

$= \frac{١}{٢}\left((٢\text{س})^{٣} - (\text{ص}^{٢})^{٣}\right)^{٢}\left(٤\text{س}^{٢} + ٢\text{س ص}^{٢} + \text{ص}^{٤}\right)$

ملاحظة : ٢١٦ ÷ ٢٧ = ٨ ،، الجذر التكعيبي لـ ٨ = ٢

د) $١ + \text{س} - (١ + \text{س})^{٤} = (١ + \text{س})\left(١ - (١ + \text{س})^{٣}\right)$

إخراج $(١ + \text{س})$ عامل مشترك

$= (١ + \text{س})\left(١ - (١ + \text{س})^{٣}\right) =$

$= (١ + \text{س})\left(١ - (١ + \text{س})\right)\left(١ + (١ + \text{س}) + (١ + \text{س})^{٢}\right)$

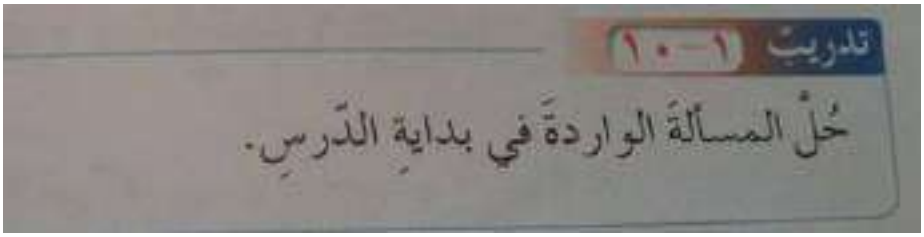
وبفك الأقواس

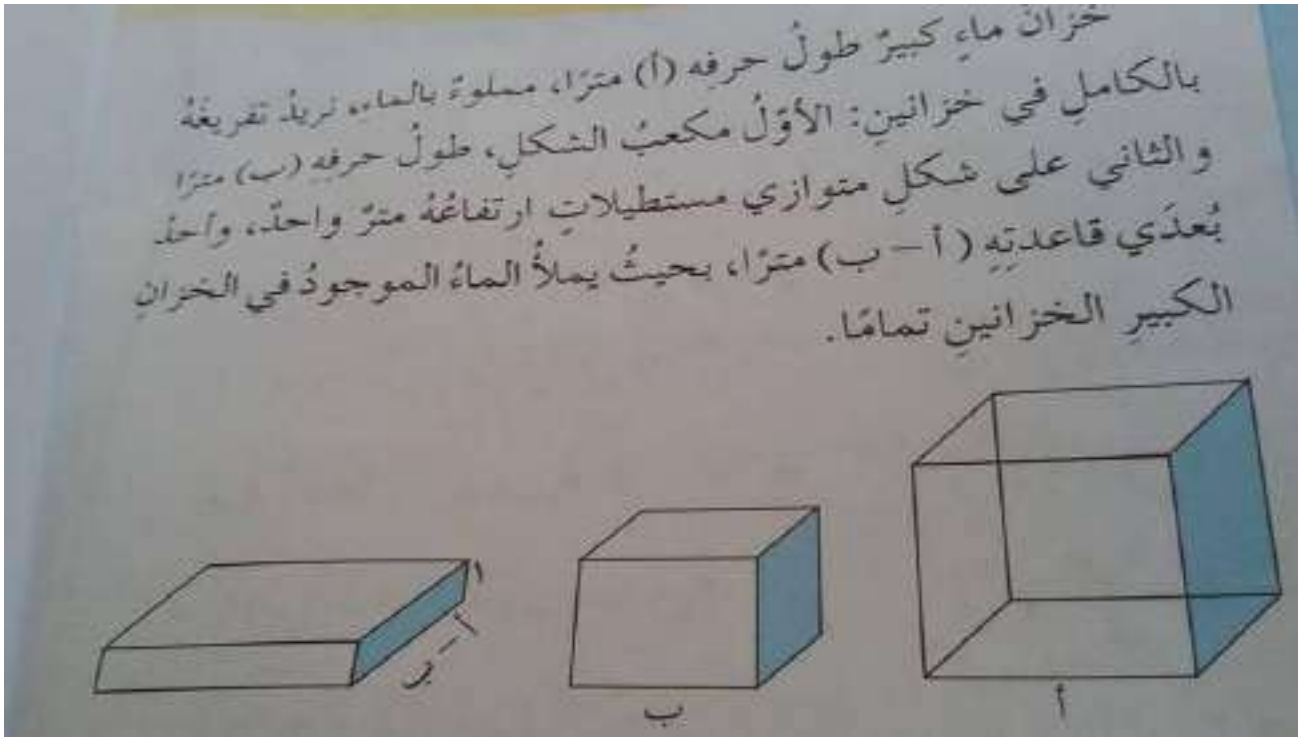
$= (١ + \text{س})(-\text{س})\left(١ + ١ + \text{س} + ١ + ٢\text{س} + \text{س}^{٢}\right)$

$= (-\text{س})(١ + \text{س})\left(\text{س}^{٢} + ٢\text{س} + ٣\right)$

ملاحظة :

يمكن الاستمرار في فك الأقواس





الحل : نفرض البعد الثاني لقاعدة الخزان متوازي المستطيلات ص

حجم الخزان الكبير = أ × أ × أ = $أ^{٣}$

حجم الخزان الأول (المكعب) = ب × ب × ب = $ب^{٣}$

حجم الخزان (متوازي المستطيلات) =

(أ – ب) (١) (ص)

حجم متوازي المستطيلات = حجم الخزان الكبير – حجم الخزان المكعب

$$(أ - ب)(ص)(١) = أ^{٣} - ب^{٣}$$

$$(أ - ب)(ص) = (أ - ب)(أ^{٢} + أب + ب^{٢})$$

بالاختصار $(ص) = (أ^{٢} + أب + ب^{٢})$ **البعد الثاني**

حل تمارين ومسائل

١) حلل المقادير الآتية إلى العوامل ٠

أ) $أ^{٣} - ١٢٥ = أ^{٣} - (٥)^{٣}$

$= (أ)^{٣} - (٥)^{٣} = (أ - ٥)(أ^{٢} + ٥أ + ٢٥)$

ب) $\frac{٧٢٩}{١٢٥}س - س^{٠٤}ص^{٣} = س(\frac{٧٢٩}{١٢٥}س^{٠٣} - ص^{٣})$

$= س(\frac{٧٢٩}{١٢٥}س^{٠٣} - ص^{٣}) = س((\frac{٩}{٥})^{٣} - (س ص)^{٣})$

$= س((\frac{٩}{٥})^{٣} - (س ص)^{٣})$

$= س(\frac{٩}{٥} - س ص)(\frac{٨١}{٢٥} + \frac{٩}{٥}س ص + س^{٢}ص^{٢})$

جـ) $٨٠٠٠,٠س^{٣} - ٨ص^{٣} = (٢٠,٠س)^{٣} - (٢ص)^{٣}$

$= (٢٠,٠س)^{٣} - (٢ص)^{٣}$

$= (٢٠,٠س - ٢ص)(٤٠٠,٠س^{٢} + ٤٠,٠س ص + ٤ص^{٢})$

ملاحظة : يمكن إخراج ٨ عامل مشترك من البداية

د) $٥ - ٥(س+٢)^{٣} = ٥(١ - (س+٢)^{٣})$ إخراج ٥ عامل مشترك

$= ٥(١ - (س+٢))(١ + (س+٢) + (س+٢)^{٢})$

ونستمر في فك الأقواس

هـ) $٢ص - \frac{٠٫٥٢ص^{٤}}{ب^{٣}}$ ، $ب \neq ٠$

نخرج ٢ ص عمل مشترك $٢ص\left(١ - \frac{٠٫٥١٢٥ص^{٣}}{ب^{٣}}\right)$

$$٢ص\left(١ - \frac{٠٫٥١٢٥ص^{٣}}{ب^{٣}}\right) = ٢ص\left(١ - \frac{٠٫٥ص}{ب}\right)\left(١ + \frac{٠٫٥ص}{ب} + \frac{٠٫٥٢ص^{٢}}{ب^{٢}}\right)$$

==========

و) $٥(٣س-٢)^{٤} - ١٥س + ١٠ = ٥(٣س-٢)^{٤} - ٥(٣س-٢)$

$= ٥(٣س-٢)^{٤} - ٥(٣س-٢) = ٥(٣س-٢)\left((٣س-٢)^{٣} - ١\right)$

$= ٥(٣س-٢)\left((٣س-٢)^{٣} - ١\right)$

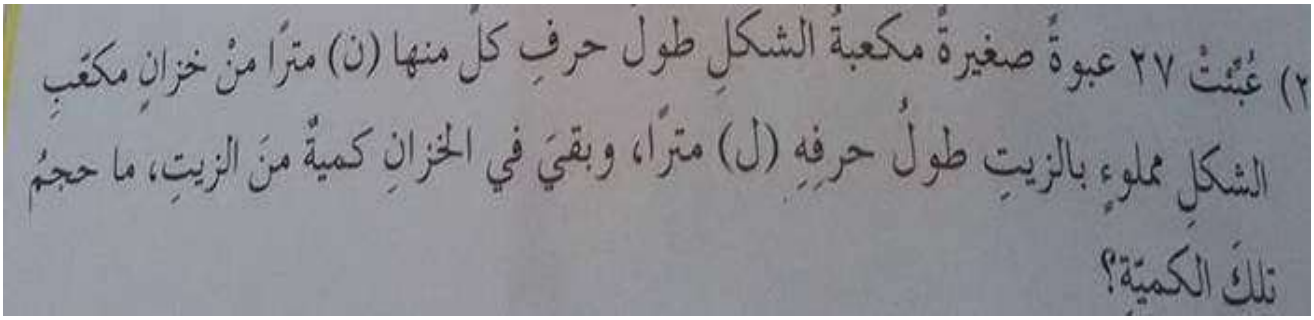
$= ٥(٣س-٢)(٣س-٢-١)\left((٣س-٢)^{٢} + (٣س-٢) + ١\right)$

$٥(٣س-٢)(٣س-٣)\left((٣س-٢)^{٢} + (٣س-٢) + ١\right)$

ونسمر في فك الأقواس

ز) $٢١٥١٢ص^{٣} - ٠٫١٢٥$

$= (٨ص - ٠٫٥)(٦٤ص^{٢} + ٤ص + ٠٫٢٥)$


٢) عُبِّئَتْ ٢٧ عبوةً صغيرةً مكعبةَ الشكلِ طولُ حرفِ كلٍّ منها (ن) مترًا منْ خزانٍ مكعّبِ الشكلِ مملوءٍ بالزيتِ طولُ حرفِهِ (ل) مترًا، وبقيَ في الخزانِ كميةٌ منَ الزيتِ، ما حجمُ تلكَ الكميةِ؟

الحل : حجم العبوة الصغيرة = ن × ن × ن = ن^{٣}

مجموع حجوم العبوات الصغيرة = ٢٧ ن^{٣}

حجم خزان الزيت (مكعب) = ل × ل × ل = ل٣

حجم الكمية المتبقية = حجم الخزان – مجموع حجوم العبوات الصغيرة

= ل^{٣} - ٢٧ ن^{٣}

العامل المشترك الأكبر (ع . م . أ)

مراجعة :

الأعداد ١ ، ٢ ، ٣ ، ٦ تسمى عوامل (قواسم) العدد ٦ ، لأن العدد ٦ يقبل القسمة على كلٍ منها دون باق

سؤال : أكتب عوامل كلاً من الأعداد الآتية :

١٥ ، ٢٤ ، ٤٠ ، ٦٠ ، ٨١ ، ١٢٠

مثال (١) :

عوامل العدد ١٢ هي .....

عوامل العدد ٣٠ هي .....

العوامل المشتركة بين العددين ١٢ ، ٣٠ هي

.....

أكبر عامل مشترك بين العددين ١٢ ، ٣٠ هو .....

يسمى العدد ..... العامل المشترك الأكبر بين العددين ١٢ ، ٣٠

سؤال (١) :

جد العامل المشترك الأكبر بين

١) ٨ ، ٢٠ **٣) ٣٢ ، ٤٨**

٢) ٩ ، ١٦ **٤) ١٢ ، ١٨ ، ٣٠**

ومن الطرق الأخرى التي تعلمتها سابقا في إيجاد العامل المشترك الأكبر بين عددين أو أكثر

١) كتابة كل عدد على صورة حاصل ضرب عوامله الأولية ثم نأخذ العوامل المشتركة فقط ثم نجد حاصل ضربها ليكون الناتج هو العامل المشترك الأكبر

مثال (٢) : جد العامل المشترك الأكبر بين العددين ١٢ ، ٣٠

الحل : $١٢ = ٢ \times ٢ \times \underline{٣}$

$٣٠ = ٢ \times \underline{٣} \times ٥$

العوامل المشتركة : ٢ ، ٣ إذا ع . م . أ = ٢ × ٣ = ٦

سؤال (٢) :

جد العامل المشترك الأكبر بين

١) ٨ ، ٣٠ **٣) ٣٠ ، ٦٠**

٢) ٩ ، ٢٧ **٤) ١٢ ، ١٨ ، ٣٠**

---

٢) كتابة كل عدد على صورة حاصل ضرب عوامله الأولية بالصورة الآسية ثم نأخذ العوامل المشتركة ذات الأس الأصغر فقط ثم نجد حاصل ضربها ليكون الناتج هو العامل المشترك الأكبر

مثال (٣) : جد العامل المشترك الأكبر بين العددين ١٢ ، ٣٠

الحل : $١٢ = ٣ \times ٢ \times ٢ = {}^{١}\underline{٣} \times {}^{٢}\underline{٢}$

$٣٠ = ٢ \times ٣ \times ٥ = {}^{١}\underline{٢} \times {}^{١}\underline{٣} \times {}^{١}٥$

العوامل المشتركة :

$٢^{١}$ ، $٣^{١}$ ← ← (ع.م.أ) = $٢ \times ٣ = ٦$

سؤال (٣) :

جد العامل المشترك الأكبر بين

١) ٨ ، ٣٠ **٣)** ٣٠ ، ٦٠

٢) ٩ ، ٢٧ **٤)** ١٢ ، ١٨ ، ٣٠

لإيجاد العامل المشترك الأكبر بين مقدارين جبريين أو أكثر نتبع الطرق السابقة ، حيث نقوم بتحليل المقدار الجبري بإحدى طرق التحليل التي درسناها سابقا (فرق بين مربعين ، عبارة تربيعية ، مجموع مكعبين ، الفرق بين مكعبين ، إخراج عامل مشترك)

والأمثلة التالية توضح طريقة إيجاد العامل المشترك الأكبر بين مقدارين جبريين أو أكثر

مثال (٤) :

جد العامل المشترك الأكبر (ع . م . أ) للمقادير التالية

١) $س^{٢}+س$ ، $س^{٢}-س-٢$

الحل : نحلل كل مقدار حسب طريقة تحليله

$س^{٢}+س = س(س+١)$ **إخراج س عامل مشترك**

$س^{٢}-س-٢ = (س+١)(س-٢)$ **عبارة تربيعية**

العوامل المشتركة بين المقدارين فقط (س + ١)

إذاً ع . م . أ = (س + ١)

==========

٢) $س^{٤} - ١٢٥س$ ، $س^{٣} - ١٠س^{٢} + ٢٥س$

الحل :

● $س^{٤} - ١٢٥س = س(س^{٣} - ١٢٥)$ **إخراج س عامل مشترك**

$س(س^{٣} - ١٢٥) = س\underline{\quad}(س - ٥)(س^{٢} + ٥س + ٢٥)$

● $س^{٣} - ١٠س^{٢} + ٢٥س = س(س^{٢} - ١٠س + ٢٥)$ **س (ع . م)**

$س(س^{٢} - ١٠س + ٢٥) = س\underline{\quad}(س - ٥)(س - ٥)$

العوامل المشتركة بين المقدارين هي س ، (س – ٥)

إذاً ع . م . أ = س (س – ٥) = $س^{٢}$ – ٥س

==========

٣) $٨س^{٣}(س + ١)$ ، $١٢س^{٢}(س + ١)^{٢}$

الحل : ● $٨س^{٣}(س + ١) = ٢^{٣} \times س^{٣}\underline{\quad}(س + ١)$

● $١٢س^{٢}(س + ١)^{٢} = ٢^{٢} \times ٣^{١} \times س^{٢}\underline{\quad}(س + ١)^{٢}$

العوامل المشتركة هي $٢^{٢}$ ، $س^{٢}$ ، (س+١)

إذا ع . م . أ = $٢^{٢} \times س^{٢} \times (س + ١) = ٤س^{٢}(س + ١)$

٤) $(٢س+١)(س-١)^{٢}$ ، $٢س^{٢}-س-١$

$(س^{٢}-١)(٨س^{٣}+١)$

الحل :

- $(٢س+١)(س-١)^{٢} = (٢س+١)(س-١)(س-١)(س-١)$

- $٢س^{٢}-س-١ = (٢س+١)(س-١)$

- $(س^{٢}-١)(٨س^{٣}+١) = (س+١)(س-١)(٢س+١)(٤س^{٢}-٢س+١)$

العوامل المشتركة بين المقادير هي $(س-١)$ ، $(٢س+١)$

إذاً ع . م . أ = $(س-١)(٢س+١) = ٢س^{٢}-س-١$

==========

٥) $(١-س^{٢})$ ، $(س^{٣}-١)$ ، $(٢-٢س)$

الحل :

- $(١-س^{٢}) = (١-س)(١+س)$

- $(س^{٣}-١) = (س-١)(س^{٢}+س+١)$

$= -(١-س)(س^{٢}+س+١)$

- $(٢-٢س) = ٢(١-س)$

العوامل المشتركة بين المقادير فقط (س – ١)

إذاً ع . م . أ = (س – ١)

حل تدريب (١ – ١١) ص٣٠

جد ع . م . أ للمقادير التالية :

١) $(س^{٢}+٢س-١٥)$ ، $(س^{٢}-٥س+٦)$ ، $(٢س^{٢}-٦س)$

الحل :

- $(س^{٢}+٢س-١٥) = (س+٥)$ $\underline{(س-٣)}$
- $(س^{٢}-٥س+٦) = (س-٢)$ $\underline{(س-٣)}$
- $(٢س^{٢}-٦س) = ٢س \times$ $\underline{(س-٣)}$

العوامل المشتركة فقط (س – ٣) .

إذاً ع . م . أ = (س – ٣) .

==========

٢) $(٢ص+٢)$ ، $(ص^{٣}+١)$ ، $(٦ص^{٢}-٦)$

الحل :

- $(٢ص+٢) = (٢) \times$ $\underline{(ص+١)}$
- $ص^{٣}+١ = (ص+١)$ $\underline{\quad}$ $(ص^{٢}-ص+١)$
- $(٦ص^{٢}-٦) = ٦(ص^{٢}-١)$

$= ٦(ص+١)(ص-١)$ $\underline{\quad}$

العوامل المشتركة فقط (ص + ١) .

إذاً ع . م . أ = (ص + ١) .

حل تمارين ومسائل ص٣١

١) جد العامل المشترك الأكبر لكل من المقادير التالية :

أ) $٦س^{٢}$ ، $١٥س^{٣}$

الحل :-

- $٦س^{٢} = ٢ \times ٣ \times س \times س$
- $١٥س^{٣} = ٣ \times ٥ \times س \times س \times س$

العوامل المشتركة هي ٣ ، س ، س

إذاً ع . م . أ = ٣ × س × س = $٣س^{٢}$.

==========

ب) $أ^{٢} - ٩$ ، $أ^{٢} + ٦ + ٥أ$ ، $أ^{٣} + ٢٧$

الحل :-

- $أ^{٢} - ٩ = (أ - ٣)(أ + ٣)$
- $أ^{٢} + ٦ + ٥أ = (أ + ٢)(أ + ٣)$
- $أ^{٣} + ٢٧ = (أ + ٣)(أ^{٢} - ٣أ + ٩)$

العوامل المشتركة فقط هي (أ + ٣)

إذاً ع . م . أ = (أ + ٣) .

==========

جـ) ٢(س + ٣)^{٢} ، ٢س^{٢} − ١٨

الحل :-

- ٢(س + ٣)^{٢} = ٢ (س + ٣)(س + ٣)(س + ٣)

- ٢س^{٢} − ١٨ = ٢(س^{٢} − ٩)
= ٢ (س + ٣)(س − ٣)

العوامل المشتركة فقط ٢ ، (س + ٣)

إذاً ع . م . أ = ٢ (س + ٣) .

==========

د) جـ^{٣} + جـ ، جـ^{٤} − ١ ، ٥جـ^{٢} + ٥

الحل :-

- جـ^{٣} + جـ = جـ(جـ^{٢} + ١)

- جـ^{٤} − ١ = (جـ^{٢} − ١)(جـ^{٢} + ١)

- ٥جـ^{٢} + ٥ = ٥(جـ^{٢} + ١)

العوامل المشتركة فقط (جـ^{٢} + ١)

إذاً ع . م . أ = (جـ^{٢} + ١) .

==========

هـ) ٢س^{٢} – س – ١ ، ٥س^{٢} – ٥س ، س^{٢} – ٣س + ٢

الحل :-

- ٢س^{٢} – س – ١ = (٢س + ١)(س – ١)
- ٥س^{٢} – ٥س = ٥س(س – ١)
- س^{٢} – ٣س + ٢ = (س – ١)(س – ٢)

العوامل المشتركة فقط (س – ١)

إذاً ع . م . أ = (س – ١) .

==========

٢) ينتج مصنع صنفين من الزيت ، بحيث ينتج من الصنف الممتاز (س^{٢} + ٢س – ٣٥) لتراً ، وينتج (س^{٢} – ٩) لتراً من الصنف العادي ، فإذا قررت إدارة المصنع تعبئة صنفي الزيت في عبوات متساوية السعة .

فما سعة أكبر عبوة يمكن استخدامها بدلالة (س) ؟

الحل :- نجد العامل المشترك الأكبر بين الصنفين .

- **الصنف الممتاز** س^{٢} + ٢س – ٣٥ = (س + ٧)(س – ٥)
- **الصنف العادي** س^{٢} – ٤٩ = (س + ٧)(س – ٧)

العوامل المشتركة فقط (س + ٧)

إذا ع . م . أ = (س + ٧) سعة أكبر عبوة .

٣) بلغ عدد طلاب الصف التاسع في إحدى المدارس (٢ص^{٢} +٩ص – ٥) طالباً ، وعدد طلاب الصف العاشر(ص^{٣} + ١٢٥) طالباً ، قرر معلم الرياضة أن يكون أفرقة رياضية يضم كل فريق منها العدد نفسه من اللاعبين ٠

ما أكبر عدد من الطلاب يمكن أن يكون في الفريق الواحد بدلالة (ص)

الحل :-

أكبر عدد من الطلاب هو العامل المشترك الأكبر

- طلاب الصف التاسع

$$٢ص^{٢}+٩س-٥ = \underline{(ص+٥)}(٢ص-١)$$

- طلاب الصف العاشر

$$ص^{٣}+١٢٥ = \underline{(ص+٥)}(ص^{٢}-٥ص+٢٥)$$

العوامل المشتركة فقط (ص + ٥)

إذا أكبر عدد من الطلاب (ع . م . أ) = (ص + ٥) ٠

قُم للمعلم أعطِه مِنديلا : : : يبكي المعلم بكرةً وأصيلا
ما عادت الدنيا تُقر بفضله : : : وتبدلت أحواله تبديلا
لم يرفعوه كما يليق بشأنه : : : لم يحفظوه وأهملوه ذليلا
وأخو الجهالة أكرموه لماله : : : ويرون قبحًا إن أتاه جميلا
ما عاد أهلُ العلم سادةَ قومهم : : : بل سادَنا من أتقنوا التجهيلا
أنّى تكون لنا الصدارة أمتي : : : والعلم يَكتم صرخةً وعويلا ؟!

المضاعف المشترك الأصغر (م . م . أ)

مراجعة :

المضاعف المشترك الأصغر لعددين أو أكثر : هو أصغر عدد يقبل القسمة على جميع الأعداد دون باق .

فمثلاً العدد ٢٤ هو المضاعف المشترك الأصغر للأعداد ٦ ، ٨ ، ١٢ لأن العدد ٢٤ يقبل القسمة عليها دون باق ولا يوجد عدد أصغر منه يحقق هذا الشرط .

كيف نجد المضاعف المشترك الأصغر لمجموعة من الأعداد :

١) نكتب كل عدد على صورة حاصل ضرب عوامله الأولية .

٢) نأخذ العوامل المشتركة بين جميع الأعداد أولاً ، ثم العوامل غير المشتركة (إذا كان المطلوب مثلاً إيجاد م . م . أ لـ ٣ أعداد نجد العوامل المشتركة الثلاثية ثم الثنائية وأخيراً العوامل غير المشتركة وبعد ذلك حاصل ضربهما يعطي م . م . أ)

ملاحظة : يوجد طرق أخرى لإيجاد م . م . أ (نكتفي بهذه الطريقة)

مثال (١) :-

جد المضاعف المشترك الأصغر للأعداد :-

أ) ١٢ ، ١٨

الحل : $١٢ = ٢ \times ٢ \times ٣$

$$١٨ = ٢ \times ٣ \times ٣$$

العوامل المشتركة ٢ ، ٣ ،،، العوامل غير المشتركة ٢ ، ٣

إذاً م.م.أ = ٢ × ٣ × ٢ × ٣ = ٣٦

==========

ب) ١٦ ، ٢٤ ، ٣٠

الحل : ١٦ = ٢ × ٢ × ٢ × ٢

٢٤ = ٢ × ٢ × ٢ × ٣

٣٠ = ٢ × ٣ × ٥

العوامل المشتركة الثلاثية ٢ بين الأعداد الثلاثة

العوامل المشتركة الثنائية ٢ ، ٢ ، ٣ بين كل عددين

العوامل غير المشتركة ٢ ، ٥

إذاً م.م.أ = ٢ × ٢ × ٢ × ٣ × ٥ = ٢٤٠

ملاحظة : يمكن إيجاد م . م . أ باستخدام الطريقة الآسية .

==========

وبنفس الطريقة نجد المضاعف المشترك الأصغر للمقادير الجبرية .

مثال (٢) : جد (م . م . أ) للمقادير الآتية :

أ) ٦س^{٢} ، ١٥س^{٣}

الحل : ٦س^{٢} = ٢ × ٣ × س × س

١٥س^{٣} = ٣ × ٥ × س × س × س

- العوامل المشتركة الثنائية ٣ ، س ، س
- العوامل غير المشتركة ٢ ، ٥ ، س
- ق.م.أ = ٣ × س × س × ٢ × ٥ × س = ٣٠ س^{٣}

==========

ب) س^{٢} + ٣س + ٢ ، س^{٢} − ١

الحل :- • س^{٢} + ٣س + ٢ = (س + ١) (س + ٢)

• س^{٢} − ١ = (س + ١) (س − ١)

العوامل المشتركة الثنائية (س + ١)

العوامل غير المشتركة (س + ٢) ، (س − ١)

إذاً • ق.م.أ = (س + ١) (س + ٢) (س − ١)

==========

جـ) س^{٢} − ٣س − ٤ ، س^{٢} − ١٦ ، س^{٣} − ٦٤

الحل :-

• س^{٢} − ٣س − ٤ = (س − ٤) (س + ١)

• س^{٢} − ١٦ = (س − ٤) (س + ٤)

• س^{٣} − ٦٤ = (س − ٤) (س^{٢} + ٤س + ١٦)

العوامل المشتركة الثلاثية $(س - ٤)$

العوامل المشتركة الثنائية ١

العوامل غير المشتركة

$(س - ٣)$ ، $(س + ٤)$ ، $(س^{٢} + ٤س + ١٦)$

إذاً م.م.أ = $(س - ٤)$ $(س - ٣)$ $(س + ٤)$ $(س^{٢} + ٤س + ١٦)$

==========

حل تدريب (١ – ١٢) ص٣٤

==========

جد (م . م . أ) للمقادير الآتية :

أ) $س^{٢} - ص^{٢}$ ، $س^{٣} + ص^{٣}$

الحل :-

- $س^{٢} - ص^{٢}$ = $(س + ص)$ $(س - ص)$

- $س^{٣} + ص^{٣}$ = $(س + ص)$ $(س^{٢} - س ص + ص^{٢})$

العوامل المشتركة الثنائية $(س + ص)$

العوامل غير المشتركة $(س - ص)$ ، $(س^{٢} - س ص + ص^{٢})$

إذاً • م.م.أ = $(س + ص)$ $(س - ص)$ $(س^{٢} - س ص + ص^{٢})$

==========

ب) ب^{٢} + ٤ب ، ب^{٢} + ٥ب + ٤

الحل :-

- ب^{٢} + ٤ب = (ب) (ب + ١)

- ب^{٢} + ٥ب + ٤ = (ب + ٤) (ب + ١)

العوامل المشتركة الثنائية (ب + ١)

العوامل غير المشتركة (ب) ، (ب + ٤)

إذاً ● ١٠٢٠٢ = (ب) (ب + ١) (ب + ٤)

==========

جـ) ٢س^{٢} + س − ١ ، ٧س + ٧ ، ١٤س

الحل :- ● ٢س^{٢} + س − ١ = (٢س − ١) (س + ١)

- ٧س + ٧ = (٧) (س + ١)

- ١٤س = ٢ × ٧ × س

العوامل المشتركة الثلاثية ١

العوامل المشتركة الثنائية (س + ١)، (٧)

العوامل غير المشتركة (٢) ، (س) ، (٢س − ١)

إذا ع.م.أ = (س + ١) (٧) (٢) (س) (٢س − ١)

د) $(س - ٢ص)^{٢}$ ، $(س^{٢} - ٤ص^{٢})$ ، $٢س^{٣} - ٦١ص^{٣}$

الحل :-

- $(س - ٢ص)^{٢} = \underline{(س - ٢ص)} \quad (س - ٢ص)$

- $(س^{٢} - ٤ص^{٢}) = \underline{(س - ٢ص)} \quad (س + ٢ص)$

- $٢س^{٣} - ٦١ص^{٣} = ٢(س^{٣} - ٨ص^{٣})$

$= ٢\underline{(س - ٢ص)}(س^{٢} + ٢سص + ٤ص^{٢})$

العوامل المشتركة الثلاثية $\underline{(س - ٢ص)}$

العوامل المشتركة الثنائية ١

العوامل غير المشتركة $٢، (س - ٢ص)، (س + ٢ص)، (س^{٢} + ٢سص + ٤ص^{٢})$

إذاً (م.م.أ) $٢\underline{(س - ٢ص)}(س - ٢ص)(س + ٢ص)(س^{٢} + ٢سص + ٤ص^{٢})$

==========

معلومة مهمة جداً :

لإيجاد العامل المشترك الأكبر و المضاعف المشترك الأصغر لمقادير جبرية ، نحلل المقادير الجبرية كما تعلمنا ، العوامل المشتركة بين كل المقادير الجبرية تمثل العامل المشترك الأكبر بينما العوامل المشتركة وغير المشتركة تمثل المضاعف المشترك الأصغر .

سليمان دلدوم أبو هبه

حل تمارين ومسائل ص٣٥

١) جد (م . م . أ) لكل من المقادير الآتية :

أ) $١٥س^{٢}+١٨س$ ، $١٢س$

الحل :- $١٥س^{٢}+١٨س = ٣س \times (٥س+٦)$

$١٢س = ٢ \times ٢ \times ٣س$

العوامل المشتركة ٣ ، $س$

العوامل غير المشتركة ٢ ، ٢ ، $(٥س+٦)$

$م.م.أ = ٣ \times س \times ٢ \times ٢(٥س+٦) = ١٢س(٥س+٦)$

==========

ب) $٣س^{٢}-١٢$ ، $س^{٣}-٨$ ، $س^{٢}-٢س$

الحل : $٣س^{٢}-١٢ = ٣(س^{٢}-٤) = ٣(س-٢)(س+٢)$

$س^{٣}-٨ = (س-٢)(س^{٢}+٢س+٤)$

$س^{٢}-٢س = س(س-٢)$ ،

العوامل المشتركة الثلاثية $(س-٢)$

العوامل المشتركة الثنائية ١

العوامل غير المشتركة ٣ ، $(س+٢)$ ، $(س^{٢}+٢س+٤)$ ، س

$م.م.أ = ٣س(س-٢)(س+٢)(س^{٢}+٢س+٤)$

جـ) $ع^{٢}+٤$ ، $ع^{٢}-٤$ ، $ع-٤$

الحل :- • $ع^{٢}+٤$ ← ← ← ← **لا تحلل (مجموع مربعين)**

• $ع^{٢}-٤ = (ع-٢)(ع+٢)$

• $ع-٤ = (ع-٤)$ ← ←

العوامل المشتركة الثلاثية ١

العوامل المشتركة الثنائية ١

العوامل غير المشتركة $ع^{٢}+٤$ ، $(ع-٢)(ع+٢)$ ، $ع-٤$

$١٠م٢ = (ع^{٢}+٤) \times (ع-٢)(ع+٢) \times (ع-٤)$

==========

د) $٢٧م^{٣}-١$ ، $٣م^{٢}+١٤م-٥$ ، $٢م+١٠$

الحل :- • $٢٧م^{٣}-١ = \underline{(٣م-١)}(٩م^{٢}+٣م+١)$

• $٣م^{٢}+١٤م-٥ = \underline{(٣م-١)}\underline{(م+٥)}$

• $٢م+١٠ = (٢)\underline{(م+٥)}$

العوامل المشتركة الثلاثية ١

العوامل المشتركة الثنائية $\underline{(٣م-١)}$ ، $\underline{(م+٥)}$

العوامل غير المشتركة (٢) ، $(٩م^{٢}+٣م+١)$

$١٠م٢ = (٢)(٣م-١)\underline{(م+٥)}(٩م^{٢}+٣م+١)$

هـ) س ص – س ٢ ، ٣س ٢ – ٣ ، س ٢ – س

الحل :- ● س ص – س ٢ = س (ص – س)

● ٣س ٢ – ٣ = ٣(س ٢ – ١) = ٣(س – ١)(س + ١)

● س ٢ – س = س (س – ١)

العوامل المشتركة الثلاثية ١

العوامل المشتركة الثنائية س ، (س – ١)

العوامل غير المشتركة (٣) ، (ص – س) ، (س + ١)

م.م.أ = ٣ س (س – ١) (ص – س) (س + ١)

==========

٢) حافلتان تسيران بالسرعة نفسها على الخط نفسه ، الأولى تتوقف كل (٢س ٢ – ٥س) كم ، والثانية تتوقف كل (٢س ٢ – ٣س – ٥) كم ، إذا إنطلقتا من المكان نفسه وفي الوقت نفسه ، على أي بعد من نقطة إنطلاقهما تلتقيان أول لقاء ؟

الحل :- أول نقطة لقاء هو المضاعف المشترك الأصغر بين نقطتي توقفهما

● (٢س ٢ – ٥س) = ٥(٢س – ٥)

● (٢س ٢ – ٣س – ٥) = (س + ١)(٢س – ٥)

م.م.أ = س (س + ١)(٢س – ٥) كم مقدار البعد الذي تلتقيان فيه أول لقاء

٣) قامت إحدى البلديات بزراعة أشجار على أحد جانبي الطرق ووضع إشارات تحذيرية عل الجانب الأخر إبتداءً من بداية الطريق بحيث تزرع على الجانب الأيمن من الطريق شجرة كل $(ك^{٣}+٨)$ متر وعلى الجانب الأيسر منه توضع إشارة تحذيرية كل $(٥ك+١٠)$ متر :

أ) على أي بعد من الطريق تزرع شجرة مقابل إشارة تحذيرية للمرة الأولى ؟

ب) على أي بعد من الطريق تزرع شجرة مقابل إشارة تحذيرية للمرة الرابعة ؟

الحل :- أ) البعد لأول مرة هو المضاعف المشترك الأصغر

- $(ك^{٣}+٨)=(ك+٢)(ك^{٢}-٢ك+٤)$
- $(٥ك+١٠)=٥(ك+٢)$
- $٥(ك+٢)(ك^{٢}-٢ك+٤)=١٠٢٠٢$ متر أول مرة

ب) للمرة الرابعة = ٤ (م . م . أ)

$=٢٠(ك+٢)(ك^{٢}-٢ك+٤)$ متر

الحمد لله ، الحمد لله ، الحمد لله ، الحمد لله ، الحمد لله

الدرس السابع : المقادير الكسرية

- تسمى المقادير • $\frac{س-١}{س^{٢}-١}$ • $\frac{س^{٣}+١}{س^{٢}-س+١}$ • $\frac{جـ+١}{جـ^{٢}+٢جـ+١}$ بالمقادير الكسرية
- يبسط المقدار الكسري باتباع الخطوات التالية :
  - نحلل البسط والمقام إلى العوامل الأولية (إن أمكن) .
  - نختصر العوامل المشتركة الناتجة في البسط والمقام (إن وجدت)

ملاحظة : كتابة المقدار الكسري بأبسط صورة تعني أن يكون العامل المشترك الأكبر بين البسط والمقام يساوي ١ .

مثال : اكتب المقادير الكسرية الآتية بأبسط صورة :

١) $\frac{س^{٢}-١}{س-١}$: $س \neq ١$

٢) $\frac{س^{٣}+٨}{س^{٢}+٢س+١}$: $س \neq -١$

٣) $\frac{س^{٢}+٤س+٣}{س^{٢}-٣س-١٠}$: $س \neq ٥، س \neq -٢$

الحل :

١) $\frac{س^{٢}-١}{س-١} = \frac{(س+١)(س-١)}{س-١}$ تحليل البسط والمقام إلى العوامل الأولية : $س \neq ١$

$= \frac{(س+١)\cancel{(س-١)}}{\cancel{(س-١)}}$ اختصار العوامل المشتركة بين البسط والمقام

$= \frac{(س+١)}{١} = (س+١)$ المقدار الكسري في أبسط صورة .

٢) $\frac{س^{٣}+٨}{س^{٢}+٢س+١} = \frac{(س+٢)(س^{٢}-٢س+٤)}{(س+١)(س+١)}$

$= \frac{\cancel{(س+٢)}(س^{٢}-٢س+٤)}{(س+١)\cancel{(س+١)}} = \frac{(س^{٢}-٢س+٤)}{(س+١)}$ المقدار الكسري في أبسط صورة .

٣) $\frac{س^{٢}+٤س+٣}{س^{٢}-٣س-١٠} = \frac{(س+١)(س+٣)}{(س+٢)(س-٥)}$ المقدار الكسري في أبسط صورة .

ملاحظات على المثال السابق :

- لاحظ المكتوب على اليسار ، في الفرع الأول كان الشرط $س \neq ١$ والسبب :
حين تعويض ١ في المقام يكون الناتج صفر وهذا لا يجوز (لا يجوز القسمة على صفر)
وكذلك في الفرعين ٢ ، ٣ .
- في الفرع الثالث لاحظ أننا لم نختصر لأن العامل المشرك الأكبر بين البسط والمقام = ١
(لا يوجد عوامل مشتركة بين البسط والمقام)

حل تدريب ١ ــ ١٣ ص٣٨

١) $\frac{جـ^{٣}-١٢٥}{جـ^{٢}-٢٥}$ ، $جـ \neq ٥ ، جـ \neq -٥$

٢) $\frac{س^{٢}-١٠س+٢٥}{٢س^{٢}-١٥س+٢٥}$ ، $س \neq ٥ ، س \neq \frac{٥}{٢}$

٣) $\frac{أ^{٣}+٨ب^{٣}}{أ^{٢}-٣أب-١٠ب^{٢}}$ ، $أ \neq ٥ب ، أ \neq -٢ب$

الحل :

١) $\frac{جـ^{٣}-١٢٥}{جـ^{٢}-٢٥} = \frac{(جـ-٥)(جـ^{٢}+٥جـ+٢٥)}{(٥+جـ)(٥-جـ)}$

$= \frac{(٥-جـ)(جـ^{٢}+٥جـ+٢٥)}{(٥+جـ)(٥-جـ)} = \frac{(جـ^{٢}+٥جـ+٢٥)}{(٥+جـ)}$. أبسط صورة

٢) $\frac{س^{٢}-١٠س+٢٥}{٢س^{٢}-١٥س+٢٥} = \frac{(س-٥)(س-٥)}{(٢س-٥)(س-٥)}$

$= \frac{(س-٥)(س-٥)}{(٢س-٥)(س-٥)}$. أبسط صورة $\frac{(س-٥)}{(٥-س)}$

٣) $\frac{أ^{٣}+٨ب^{٣}}{أ^{٢}-٣أب-١٠ب^{٢}} = \frac{(أ+٢ب)(أ^{٢}-٢أب+٤ب^{٢})}{(أ+٢ب)(أ-٥ب)}$

$= \frac{\cancel{(أ+٢ب)}(أ^{٢}-٢أب+٤ب^{٢})}{(أ-٥ب)\cancel{(أ+٢ب)}}$. أبسط صورة $\frac{(أ^{٢}-٢أب+٤ب^{٢})}{(أ-٥ب)}$

حل تدريب ٢ ــ ١٣ ص٣٨

ملعب كرة قدم مستطيل الشكل مساحته $(٦ص^{٢}+٥ص-٦)$ متراً مربعاً ، طوله $(٢ص+٣)$ متراً ، ما عرض الملعب ؟

الحل :

مساحة المستطيل = الطول × العرض ← العرض = مساحة المستطيل ÷ الطول

العرض = $(٦ص^{٢}+٥ص-٦)$ ÷ $(٢ص+٣)$

$= \frac{(٦ص^{٢}+٥ص-٦)}{(٢ص+٣)} = \frac{\cancel{(٢ص+٣)}(٣ص-٢)}{\cancel{(٢ص+٣)}} = (٣ص-٢)$ **متراً**

حل تمارين ومسائل ص ٣٩

١) اكتب المقادير الكسرية التالية بأبسط صورة :

أ) $\frac{م^{٢}-٩}{م-١٥}$ ، $م \neq ١٥$

الحل : $\frac{م^{٢}-٩}{م-١٥} = \frac{(م+٣)(م-٣)}{م-١٥}$ **أبسط صورة (لا يوجد اختصار)**

ب) $\frac{س^{٢}+٥س+٤}{س+٤}$ ، $س \neq -٤$

الحل : $\frac{س^{٢}+٥س+٤}{س+٤} = \frac{\cancel{(س+٤)}(س+١)}{\cancel{(س+٤)}} = (س+١)$

جـ) $\frac{٣س^{٢}+١٢س-١٥}{س^{٣}-١}$ ، $س \neq ١$

الحل : $\frac{٣س^{٢}+١٢س-١٥}{س^{٣}-١} = \frac{(٥+س)(٣-٣س)}{(١-س)(١+س+س^{٢})}$

$= \frac{٣(١-س)(٥+س)}{(١-س)(١+س+س^{٢})} = \frac{٣(٥+س)}{(١+س+س^{٢})}$

د) $\frac{ص^{٣}+٢٧}{ص^{٢}+٩}$

الحل : $\frac{ص^{٣}+٢٧}{ص^{٢}+٩} = \frac{(٣+ص)(ص^{٢}-٣ص+٩)}{ص^{٢}+٩}$ **المقام لا يحلل (مجموع مربعين)**

هـ) $\frac{س^{٤}-٨١}{س^{٣}-٢٧}$ ، $س \neq ٣$

الحل : $\frac{س^{٤}-٨١}{س^{٣}-٢٧} = \frac{(س^{٢}-٩)(س^{٢}+٩)}{(س-٣)(س^{٢}+٣س+٩)}$

$= \frac{(س-٣)(س+٣)(س^{٢}+٩)}{(س-٣)(س^{٢}+٣س+٩)} = \frac{(س+٣)(س^{٢}+٩)}{(س^{٢}+٣س+٩)}$

و) $\frac{(٢س+١)^{٢}-١٦}{٢س^{٢}-س-١٥}$ ، $س \neq ٣$ ، $س \neq \frac{-٥}{٢}$

الحل : $\frac{(٢س+١)^{٢}-١٦}{٢س^{٢}-س-١٥} = \frac{((٢س+١)+٤)((٢س+١)+٤)}{(س-٣)(٢س+٥)}$

$= \frac{(٢س+١+٤)(٢س+١-٤)}{(س-٣)(٢س+٥)} = \frac{(٢س-٣)(٢س+٥)}{(س-٣)(٢س+٥)}$

$= \frac{(٢س-٣)}{(س-٣)}$

ز) $\frac{(ص-٢)^{٢}-(ص+٢)^{٢}}{٨ص}$ ، ص ≠ ٠

الحل : $\frac{(ص-٢)^{٢}-(ص+٢)^{٢}}{٨ص} = \frac{((ص-٢)-(ص+٢))((ص-٢)+(ص+٢))}{٨ص}$

$= \frac{(ص-٢-ص-٢)(ص-٢+ص+٢)}{٨ص}$

$= \frac{(-٤)(٢ص)}{٨ص}$

$= \frac{-٨ص}{٨ص} = -١$

ح) $\frac{س^{٣}-٨}{٥س-١٠}$ ، س ≠ ٢

الحل : $\frac{س^{٣}-٨}{٥س-١٠} = \frac{(س-٢)(س^{٢}+٢س+٤)}{٥(س-٢)} = \frac{(س^{٢}+٢س+٤)}{٥}$

---

٢) ناتج ضرب مقدارين جبريين $(س^{٢}-٥س-١٤)$ **، إذا كان أحدهما** $(س-٧)$ **، فما المقدار الآخر ؟ (حيث** س ≠ ٧ **)** ٠

الحل : المقدار الثاني = حاصل الضرب ÷ المقدار الأول

$= (س^{٢}-٥س-١٤) \div (س-٧)$

$= \frac{(س^{٢}-٥س-١٤)}{(س-٧)} = \frac{(س-٧)(س+٢)}{(س-٧)} = (س+٢)$

---

٣) أراد عبد الرحمن أن يوزع مبلغ $(٠١ص^{٢}-٣١ص-٣)$ ديناراً بين أبنائه بالتساوي ، فإذا كان نصيب كل واحد منهم $(٢ص-٣)$ ديناراً (حيث $ص \neq \frac{٣}{٢}$) فما عدد أبنائه ؟

الحل : عدد الأبناء = المبلغ الكلي ÷ نصيب كل ابن

$$= (٠١ص^{٢}-٣١ص-٣) \div (٢ص-٣)$$

$$= \frac{(٠١ص^{٢}-٣١ص-٣)}{(٢ص-٣)} = \frac{(٣-٢ص)(١+٥ص)}{(٣-٢ص)} = (١+٥ص)$$

الدرس الثامن : المعادلة الكسرية

مراجعة :

- **المعادلة : جملة مفتوحة تظهر فيها إشارة المساواة .**
- **خصائص المساواة :**

إذا كان س = ا فإن :

١) س + جـ = ا + جـ ، جـ ∈ ح ، إضافة عدد حقيقي لطرفي المعادلة .

٢) س × جـ = ا × جـ ، جـ ≠ ٠ ، جـ ∈ ح ، ضرب طرفي المعادلة في عدد حقيقي ≠ ٠

- **حل المعادلة : إيجاد قيم المتغير التي تجعلها عبارة صحيحة .**

مثال (١) :

حل كل معادلة من المعادلات الآتية :

١) س + ٢ = ٥ ٢) ٢س − ٤ = −٣ ٣) $\frac{١}{٣}$س + ٦ = ١٢

الحل :

١) س + ٢ = ٥

س + ٢ − ٢ = ٥ − ٢ **طرح ٢ من طرفي المعادلة**

س = ٣

مجموعة الحل = {٣}

٢) ٢س − ٤ = −٣

٢س − ٤ + ٤ = −٣ + ٤ **إضافة ٤ لطرفي المعادلة (النظير الجمعي)**

٢س = ١

$\frac{١}{٢}$ × ٢س = ١ × $\frac{١}{٢}$ **ضرب طرفي المعادلة في $\frac{١}{٢}$ (النظير الضربي)**

س = $\frac{١}{٢}$ **مجموعة الحل** = $\{\frac{١}{٢}\}$

٣) $\frac{١}{٣}$ س + ٦ = ١٢

$\frac{١}{٣}$ س + ٦ − ٦ = ١٢ − ٦ طرح ٦ من طرفي المعادلة (النظير الجمعي)

$\frac{١}{٣}$ س = ٦

٣ × $\frac{١}{٣}$ س = ٣ × ٦ ضرب طرفي المعادلة في ٣ (النظير الضربي)

س = ١٨ مجموعة الحل = {١٨}

خطوات حل المعادلة الكسرية :

١) تحليل البسط والمقام إلى العوامل الأولية .

٢) نختصر العوامل المشتركة بين البسط والمقام .

٣) استخدام خصائص المساواة في حل المعادلة الناتجة .

مثال (٢) :

حل المعادلة الكسرية الآتية : $\frac{س + ١٢}{س + ٣}$ = ٢ ، س ≠ −٣

الحل :

$(س + ٣) \times \frac{س + ١٢}{(س + ٣)} = ٢ \times (س + ٣)$ ضرب الطرفين في (س + ٣) ، س ≠ −٣

$س + ١٢ = ٢ \times (س + ٣)$

س + ١٢ = ٢س + ٦ قانون توزيع الضرب على الجمع

س − س + ١٢ − ٦ = ٢س − س + ٦ − ٦ طرح س ، ٦ من الطرفين (النظير الجمعي)

س = ٦ ، مجموعة الحل = {٦}

التحقق من صحة الحل : نعوض في الطرف الأيمن :

$\frac{١٢ + ٦}{(٣ + ٦)} = \frac{١٨}{٩}$ = ٢ ← الطرف الأيسر ✓

مثال (٣) : حل المعادلة الكسرية الآتية : $\frac{س^{٢}+٣س+٢}{س^{٢}-٣س-٤}=-١$ ، $س\neq ٤، س\neq -١$

الحل :

$$\frac{س^{٢}+٣س+٢}{س^{٢}-٣س-٤}=-١ \leftarrow \frac{(س+٢)\,\cancel{(س+١)}}{(س-٤)\,\cancel{(س+١)}}=-١ \leftarrow \frac{(س+٢)}{(س-٤)}=-١$$

$$\cancel{(س-٤)}\times\frac{(س+٢)}{\cancel{(س-٤)}}=-١\times(س-٤)$$ **ضرب طرفي المعادلة في** $(س-٤)$:$س\neq ٤$

$س+٢=-١\times(س-٤)$ **نستخدم قانون توزيع الضرب على الجمع للطرف الأيسر**

$س+٢=-س+٤$

$س+س+٢-٢=-س+س+٤-٢$ **(نضيف س ، نطرح ٢) من الطرفين .**

$٢س=٢ \leftarrow \frac{١}{٢}\times٢س=\frac{١}{٢}\times٢$ **ضرب الطرفين في** $\frac{١}{٢}$ **(النظير الضربي)**

$\boxed{س=١}$ ، **مجموعة الحل** $=\{١\}$

التحقق من صحة الحل : نعوض في الطرف الأيمن :

$\frac{(١)^{٢}+٣(١)+٢}{(١)^{٢}-٣(١)-٤}=\frac{١+٣+٢}{١-٣-٤}=\frac{٦}{-٦}=-١$ ✓ **الطرف الأيسر .**

حل تدريب ١ ــ ١٥ ص٤٢

حل المعادلة الكسرية الآتية : $\frac{ص^{٢}+٥ص-٢}{ص+٢}=١٤$ ، $ص\neq -٢$

الحل :

$\frac{ص^{٢}+٥ص-٢}{ص+٢}=١٤$ **التبرير**

$\frac{(٣ص-١)(ص+٢)}{ص+٢}=١٤$ ----------

$\frac{(٣ص-١)\,\cancel{(ص+٢)}}{\cancel{(ص+٢)}}=١٤$ ----------

$٣ص - ١ = ١٤$ ----------

$٣ص - ١ + ١ = ١٤ + ١$ ----------

$٣ص = ١٥ \leftarrow \frac{١}{٣} \times ٣ص = \frac{١}{٣} \times ١٥$ ----------

$\boxed{ص = ٥}$ مجموعة الحل $= \{\_\_\}$

التحقق من صحة الحل : نعوض في الطرف الأيمن :

==========

حل تمارين ومسائل ص٤٣

سوف نترك التبرير للطالب وكذلك التحقق من صحة الحل .

١) حل كل من المعادلات الكسرية الآتية :

أ) $\frac{٢س - ٦}{س - ١} = ٣$ ، $س \neq ١$

الحل : **التبرير**

$$(س - ١) \times \frac{٢س - ٦}{س - ١} = ٣ \times (س - ١)$$

$$٢س - ٦ = ٣ \times (س - ١)$$

$$٢س - ٦ = ٣س - ٣$$

$$٢س - ٣س - ٦ + ٣ = ٣س - ٢س - ٣ + ٣$$

$\boxed{س = -٣}$ مجموعة الحل مجموعة الحل $= \{-٣\}$

التحقق من صحة الحل :

ب) $\frac{س^{٢}+٣س-١٠}{٢س-٤}=٦$ ، $س \neq ٢$

الحل : **التبرير**

$$\frac{س^{٢}+٣س-١٠}{٢س-٤}=٦ \leftarrow \frac{(س+٥)(س-٢)}{٢(س-٢)}=٦$$

$$\frac{(س+٥)\ \cancel{(س-٢)}}{٢\ \cancel{(س-٢)}}=٦ \leftarrow \frac{س+٥}{٢}=٦$$

$$\frac{س+٥}{٢}\times٢=٦\times٢ \leftarrow س+٥=١٢$$

$$س+٥-٥=١٢-٥$$

$\boxed{س=٧}$ **مجموعة الحل** **مجموعة الحل** $=\{٧\}$

التحقق من صحة الحل :

ج) $\frac{س^{٣}-١}{٣س^{٢}+٣س+٣}=٥$

الحل : **التبرير**

$$\frac{س^{٣}-١}{٣س^{٢}+٣س+٣}=٥ \leftarrow \frac{(س-١)(١+س+س^{٢})}{٣(١+س+س^{٢})}=٥$$

$$\frac{(س-١)\ \cancel{(١+س+س^{٢})}}{٣\ \cancel{(١+س+س^{٢})}}=٥ \leftarrow \frac{س-١}{٣}=٥$$

$$\frac{س-١}{٣}\times٣=٥\times٣ \leftarrow س-١=١٥$$

$$س - ١ + ١ = ١٥ + ١$$

$$\boxed{س = ١٦}$$ مجموعة الحل مجموعة الحل $= \{١٦\}$

التحقق من صحة الحل :

و) $\frac{١٠ ص^{٢} - ٧ص + ١}{٢ص - ١} = -٤$ ، $ص \neq \frac{١}{٢}$

الحل : **التبرير**

$$\frac{١٠ ص^{٢} - ٧ص + ١}{٢ص - ١} = -٤ \leftarrow \frac{(٢ص - ١)(٥ص - ١)}{(٢ص - ١)} = -٤$$

$$\frac{\cancel{(٢ص - ١)}\ (٥ص - ١)}{\cancel{(٢ص - ١)}} = -٤ \leftarrow ٥ص - ١ = -٤$$

$$٥ص - ١ + ١ = -٤ + ١ \leftarrow ٥ص = -٣$$

$$\frac{١}{٥} \times ٥ص = \frac{١}{٥} \times -٣$$

$$\boxed{ص = \frac{-٣}{٥}}$$ مجموعة الحل مجموعة الحل $= \left\{\frac{-٣}{٥}\right\}$

التحقق من صحة الحل :

هـ) $\frac{س^{٢} + ٢س - ٣}{٢س^{٢} - ٣س + ١} = ١$ ، $س \neq ١ ، س \neq \frac{١}{٢}$

الحل : **التبرير**

$$\frac{س^{٢} + ٢س - ٣}{٢س^{٢} - ٣س + ١} = ١ \leftarrow \frac{(س + ٣)(س - ١)}{(٢س - ١)(س - ١)} = ١$$

$$\frac{(س + ٣)\ \cancel{(س - ١)}}{(٢س - ١)\ \cancel{(س - ١)}} = ١ \leftarrow \frac{س + ٣}{٢س - ١} = ١$$

$$(٢س-١)\times\frac{س+٣}{٢س-١}=١\times(٢س-١)\leftarrow س+٣=٢س-١$$

$$س-س+٣+١=٢س-س-١+١$$

$$\boxed{س=٤}$$ مجموعة الحل مجموعة الحل $=\{٤\}$

التحقق من صحة الحل :

و) $\frac{٣ب^{٢}-ب-٤}{ب^{٢}-١}=٢$ ، $ب\neq\pm١$

الحل : **التبرير**

$$\frac{٣ب^{٢}-ب-٤}{ب^{٢}-١}=٢\leftarrow\frac{(٣ب-٤)(ب+١)}{(ب-١)(ب+١)}=٢$$

$$\frac{(٣ب-٤)\cancel{(ب+١)}}{(ب-١)\cancel{(ب+١)}}=٢\leftarrow\frac{(٣ب-٤)}{(ب-١)}=٢$$

$$(ب-١)\times\frac{(٣ب-٤)}{(ب-١)}=٢\times(ب-١)\leftarrow ٣ب-٤=٢\times(ب-١)$$

$$٣ب-٤=٢ب-٢$$

$$٣ب-٢ب-٤+٤=٢ب-٢ب-٢+٤$$

$$\boxed{ب=٢}$$ مجموعة الحل مجموعة الحل $=\{٢\}$

التحقق من صحة الحل :

---

٢) لدي تاجر $(٦جـ^{٢}+٧جـ+٢)$ ليتراً من الزيت ، وضعها في $(٣جـ+٢)$ وعاءً لها نفس السعة نفسها ، إذا كانت سعة الوعاء الواحد (١١) لتراً :

أ) ما قيمة (جـ) ؟

ب) ما عدد الأوعية ؟

د) ما كمية الزيت الموجودة لدى التاجر ؟

الحل :

كمية الزيت بالرموز	عدد الأوعية	سعة الوعاء
$(٦جـ^{٢}+٧جـ+٢)$	$(٣جـ+٢)$	(١١)

أ) قيمة جـ

كمية الزيت ÷ عدد الأوعية = سعة الوعاء

$$(٦جـ^{٢}+٧جـ+٢) \div (٣جـ+٢) = ١١$$

$$١١=\frac{(٦جـ^{٢}+٧جـ+٢)}{٣جـ+٢} \leftarrow ١١=\frac{(٢جـ+١)\cancel{(٣جـ+٢)}}{\cancel{٣جـ+٢}}$$

$$٢جـ+١-١=١١-١ \leftarrow ٢جـ=١٠$$

$$\frac{١}{٢}\times ٢جـ=\frac{١}{٢}\times ١٠ \leftarrow \leftarrow \boxed{جـ=٥}$$ **قيمة جـ**

ب) نعوض قيمة جـ في $(٣جـ+٢)$

$$(٣)(٥)+٢=١٥+٢=١٧$$ **وعاء**

جـ) نعوض قيمة جـ في $(٦جـ^{٢}+٧جـ+٢)$

$$(٦)(٥)^{٢}+(٧)(٥)+٢=٦\times ٢٥+٣٥+٢$$
$$=١٥٠+٣٧=١٨٧$$

كمية الزيت لدى التاجر ١٨٧ ليتراً

٣) تصدق حامد بمبلغ $(٥س^{٢}-١٤س-٣)$ ديناراً ، حيث قسم المبلغ على $(س-٣)$ من الفقراء بالتساوي ، فكان نصيب الواحد منهم (٥١) ديناراً .

أ) ما قيمة (س) ؟

ب) ما المبلغ الذي تصدق به حامد ؟

الحل :

المبلغ : $(٥س^{٢}-١٤س-٣)$ ، عدد الفقراء $(س-٣)$ ، نصيب الواحد (٥١)

أ) المبلغ ÷ عدد الفقراء = نصيب الواحد

$$٥١=\frac{(٥س^{٢}-١٤س-٣)}{(س-٣)} \leftarrow ٥١=\frac{(٥س+١)\cancel{(س-٣)}}{\cancel{(س-٣)}}$$

$$٥س+١=١+١-٥١ \leftarrow ٥س+١=٥١$$

$$س=\frac{١}{٥}\times٥٠=٥س \leftarrow ٥س=٥٠ \leftarrow \boxed{س=١٠}$$ قيمة س

ب) نعوض قيمة س في $(٥س^{٢}-١٤س-٣)$

$$(٥)(١٠)^{٢}-١٤(١٠)-(٣)=٥٠٠-١٤٠-٣=٣٥٧$$ دينارا (المبلغ مع حامد)

حل أسئلة المراجعة ص٤٤ + ٤٥

١) حلل المقادير الجبرية الآتية إلى العوامل الأولية :

أ) $٣س+١٢=٣(س+٤)$

ب) $س^{٢}-١٠٠=(س+١٠)(س-١٠)$

جـ) $٢١ع^{٢}-٧٥=٣(٤ع^{٢}-٢٥)=٣(٢ع+٥)(٢ع-٥)$

د) $٢٧س^{٣}-١=(٣س-١)(٩س^{٢}+٣س+١)$

هـ) $٨١أ^{٣}+٢٤=٣(٢٧أ^{٣}+٨)=٣(٣أ+٢)(٩أ^{٢}+٦أ+٤)$

و) ص ^{٢} − ٧ص + ٦ = (ص − ١)(ص − ٦)

ز) ٣ع ^{٢} − ١٠ع − ٢٥

الحل بعدة طرق

الطريقة الأولى	الطريقة الثانية	الطريقة الثالثة
الطريقة الجبرية	**التحويل بحيث المعامل = ١**	**التجريب للوصول للحل**
٣ × − ٢٥ = − ٧٥ **ما هما العددان اللذان حاصل ضربهما = - ٧٥ ومجموعهما = - ١٠ ← - ١٥ ، ٥** − ١٥ع + ٥ع = − ١٠ع ٣ع ^{٢} − ١٥ع + ٥ع − ٢٥ (٣ع ^{٢} − ١٥ع) + (٥ع − ٢٥) ٣ع(ع − ٥) + ٥(ع − ٥) (ع − ٥) (٥ + ع٣)	**نضرب في ٣ ونقسم على ٣** $\frac{(٣ع)^{٢} - ١٠(٣ع) - ٢٥}{٣}$ **نفرض** ص = ٣ع $\frac{(ص)^{٢} - ١٠(ص) - ٧٥}{٣}$ $\frac{(ص - ١٥)(ص + ٥)}{٣}$ $\frac{(٣ع - ١٥)(٣ع + ٥)}{٣}$ $\frac{٣(ع - ٥)(٣ع + ٥)}{٣}$ (ع − ٥)(٣ع + ٥)	(ع − ٥)(٣ع + ٥)

ح) $٣س^{٤} - \frac{٣س}{٢٧} = ٣س\left(س^{٣} - \frac{١}{٢٧}\right) = ٣س\left(س - \frac{١}{٣}\right)\left(س^{٢} + \frac{١}{٣}س + \frac{١}{٩}\right)$

---

٢) اكتب المقادير الكسرية التالية بأبسط صورة :

أ) $\frac{س^{٢} + ٤س}{س + ٤}$ ، س ≠ − ٤

الحل : $\frac{س^{٢} + ٤س}{س + ٤} = \frac{س(س + ٤)}{س + ٤} = س$

ب) $\frac{س^{٢}-٢٥}{٢س-١٠}$ ، $س \neq ٥$

الحل : $\frac{س^{٢}-٢٥}{٢س-١٠} = \frac{(س+٥)\cancel{(س-٥)}}{٢\cancel{(س-٥)}} = \frac{س+٥}{٢}$

جـ) $\frac{ص^{٢}+٢ص-٣}{ص^{٢}-٩}$ ، $ص \neq \pm ٣$

الحل : $\frac{ص^{٢}+٢ص-٣}{ص^{٢}-٩} = \frac{\cancel{(ص+٣)}(ص-١)}{\cancel{(ص+٣)}(ص-٣)} = \frac{(ص-١)}{(ص-٣)}$

د) $\frac{ع^{٢}-٨ع+١٦}{ع^{٣}-٦٤}$ ، $ع \neq ٤$

الحل : $\frac{ع^{٢}-٨ع+١٦}{ع^{٣}-٦٤} = \frac{(ع-٤)\cancel{(ع-٤)}}{(ع^{٢}+٤ع+١٦)\cancel{(ع-٤)}} = \frac{(ع-٤)}{(ع^{٢}+٤ع+١٦)}$

هـ) $\frac{٢س^{٢}+٥س-٣٣}{٣س^{٣}-س^{٢}-١٢س}$ ، $س \notin \{٠، ٣، \frac{-٤}{٣}\}$

الحل :

$\frac{٢س^{٢}+٥س-٣٣}{٣س^{٣}-٥س^{٢}-١٢س} = \frac{(٢س+١١)(س-٣)}{س(٣س^{٢}-٥س-١٢)} = \frac{\cancel{(٢س+١١)}\cancel{(س-٣)}}{س(٣س+٤)\cancel{(س-٣)}} = \frac{(٢س+١١)}{س(٣س+٤)}$

و) $\frac{س^{٣}+١٢٥}{١٠-٢س}$ ، $س \neq ٥$

الحل : $\frac{س^{٣}+١٢٥}{١٠-٢س} = \frac{(س+٥)(س^{٢}-٥س+٢٥)}{-٢(س-٥)}$ **لا يوجد عامل مشترك**

---

٣) حل المعادلات الكسرية الآتية :

أ) $\frac{س^{٢}-٤س}{س-٤} = ٥$ ، $س \neq ٤$

الحل : $\frac{س^{٢}-٤س}{س-٤} = ٥ \leftarrow \frac{س\cancel{(س-٤)}}{\cancel{س-٤}} = ٥ \leftarrow \boxed{س = ٥}$

ب) $\frac{س^{٢}-٣٦}{٢س+١٢}=-٣$ ، $س \neq -٦$

$$\frac{س^{٢}-٣٦}{٢س+١٢}=-٣ \leftarrow \frac{(س-٦)\cancel{(س+٦)}}{٢\cancel{(س+٦)}}=-٣$$

الحل : $\frac{(س-٦)}{٢}=-٣ \leftarrow$ $س-٦=-٦$ **مجموعة الحل =** $\{٠\}$

$س-٦+٦=-٦+٦ \leftarrow\leftarrow\leftarrow$ $\boxed{س=٠}$

جـ) $\frac{٢ص+٣}{ص-٩}=١$ ، $ص \neq ٩$

الحل :

$$(ص-٩)\times\frac{٢ص+٣}{ص-٩}=١\times(ص-٩)$$

$٢ص+٣=ص-٩$ **مجموعة الحل =** $\{-١٢\}$

$٢ص-ص+٣-٣=ص-ص-٩-٣$

$\boxed{ص=-١٢}$

د) $\frac{٥س^{٢}-٢س-٧}{س^{٢}-س-٢}=٣$ $س \notin \{-١ ، ٢\}$

الحل :

$$\frac{٥س^{٢}-٢س-٧}{س^{٢}-س-٢}=٣ \leftarrow \frac{\cancel{(س+١)}(٥س-٧)}{\cancel{(س+١)}(س-٢)}=٣$$

$\frac{(٥س-٧)}{(س-٢)}=٣$ $\leftarrow$ $(٥س-٧)=٣(س-٢)$

$٥س-٧=٣س-٦ \leftarrow ٥س-٣س-٧+٧=٣س-٣س-٦+٧$

$٢س=١ \leftarrow$ $\frac{١}{٢}\times١=\frac{١}{٢}\times٢س$ $\leftarrow\leftarrow\leftarrow$ $\boxed{س=\frac{١}{٢}}$

مجموعة الحل = $\left\{\frac{١}{٢}\right\}$

٤) جد العامل المشترك الأكبر ، والمضاعف المشترك الأصغر للمقادير الجبرية فيما يأتي :

أ) $٢س^{٢}-٥٠$ ، $س^{٢}+٢س-١٥$

الحل : نحلل المقادير :

$$٢س^{٢}-٥٠=٢(س^{٢}-٢٥)=٢(س-٥)(س+٥)$$

$$س^{٢}+٢س-١٥=(س-٣)(س+٥)$$

العوامل المشتركة : $(س+٥)$

العوامل غير المشتركة : ٢، $(س-٥)$ ، $(س-٣)$

ع . م . أ = العوامل المشتركة فقط = $(س+٥)$

م . م . أ = العوامل المشتركة وغير المشتركة = $٢(س-٥)(س-٣)(س+٥)$

ب) $ص^{٣}-١$ ، $٣ص^{٢}-٣$ ، $ص^{٢}+٤ص-٥$

الحل :

$$ص^{٣}-١=(ص-١)(ص^{٢}+ص+١)$$

$$٣ص^{٢}-٣=٣(ص^{٢}-١)=٣(ص-١)(ص+١)$$

$$ص^{٢}+٤ص-٥=(ص+٥)(ص-١)$$

العوامل المشتركة الثلاثية : $(ص-١)$

العوامل المشتركة الثنائية : لا يوجد

العوامل غير المشتركة : $٣(ص+١)$ ، $(ص^{٢}+ص+١)$ ، $(ص+٥)$

ع . م . أ = العوامل المشتركة فقط = $(ص-١)$

م . م . أ = العوامل المشتركة وغير المشتركة =

$$٣(ص+١)\quad(ص-١)\quad(ص^{٢}+ص+١)\quad(ص+٥)$$

جـ) $٢ع^{٢}-٥ع-١٢$ ، $٣ع-١٢$

الحل :

$٢ع^{٢}-٥ع-١٢=(٢ع+٣)(ع-٤)$

$٣ع-١٢=٣(ع-٤)$

العوامل المشتركة : $(ع-٤)$

العوامل غير المشتركة : ٣ ، $(٢ع+٣)$

ع . م . أ = العوامل المشتركة فقط = $(ع-٤)$

م . م . أ = العوامل المشتركة وغير المشتركة = $٣(٢ع+٣)(ع-٤)$

د) $ب+٣$ ، $ب^{٢}-٤ب+٣$ ، $٢ب$

الحل :

$(ب+٣)=(ب+٣)$

$ب^{٢}-٤ب+٣=(ب-٣)(ب-١)$

$٢ب=٢\times ب$

العوامل المشتركة الثلاثية : ١

العوامل المشتركة الثنائية : لا يوجد

العوامل غير المشتركة : $٢\times ب$ ، $(ب-٣)(ب-١)$ ، $(ب+٣)$

ع . م . أ = العوامل المشتركة فقط = ١

م . م . أ = العوامل المشتركة وغير المشتركة = $٢\times ب(ب-٣)(ب-١)(ب+٣)$

حل الاختبار الذاتى ص٤٦ + ٤٧

١) حلل المقادير الجبرية الآتية إلى عواملها :

أ) $٥س^{٣} + ١٥س^{٢} = ٥س^{٢}(س + ٣)$

ب) $٢٥ - \frac{٤}{٩ب^{٢}} = \left(٥ - \frac{٢}{ب}\right)\left(٥ + \frac{٢}{ب}\right)$ ، ب ≠ ٠

جـ) $س^{٢} + ١٤س + ٤٩ = (س + ٧)(س + ٧) = (س + ٧)^{٢}$

د) $ع^{٣} - ٨ل^{٣} = (ع - ٢ل)(ع^{٢} + ٢عل + ٤ل^{٢})$

هـ) $٠٫٠٠١س^{٣} + ٠٫٠١س + ٠٫٢٧ = (٠٫١س + ٠٫٣)(٠٫٠١س^{٢} - ٠٫٠٣س + ٠٫٠٩)$

و) $٦س^{٢} + ٥س - ١٤ = \frac{(٦س)^{٢} + ٥(٦س) - ٨٤}{٦}$

$= \frac{(٦س + ١٢)(٦س - ٧)}{٦}$

$= (س + ٢)(٦س - ٧)$

ز) $٣ع^{٢} - ٧ع - ٤٠ = \frac{(٣ع)^{٢} - ٧(٣ع) - ١٢٠}{٣}$

$= \frac{(٣ع + ٨)(٣ع - ١٥)}{٣}$

$= (٣ع + ٨)(ع - ٥)$

ح) $٣س^{٥} + ٣س^{٢} = \frac{٣س^{٢}}{٦٤} + ٣س^{٢}\left(\frac{١}{٦٤} + س^{٣}\right) = ٣س^{٢}\left(\frac{١}{٤} + س\right)\left(\frac{١}{١٦} + \frac{١}{٤}س + س^{٢}\right)$

---

٢) اكتب المقادير التالية بأبسط صورة :

أ) $\frac{س^{٢} - ٧س}{س}$ ، س ≠ ٠

الحل :

$\frac{س^{٢} - ٧س}{س} = \frac{س(س - ٧)}{س} = س - ٧$

ب) $\frac{ص^{٢}-١٤٤}{٢ص+٢٤}$ ، ص $\neq -١٢$

الحل : $\frac{ص^{٢}-١٤٤}{٢ص+٢٤}=\frac{(ص-١٢)\cancel{(ص+١٢)}}{٢\cancel{(ص+١٢)}}=\frac{(ص-١٢)}{٢}$

جـ) $\frac{ع^{٢}-٢ع-٣٥}{ع^{٢}-٤٩}$ ، ع $\neq \pm ٧$

الحل : $\frac{ع^{٢}-٢ع-٣٥}{ع^{٢}-٤٩}=\frac{\cancel{(ع-٧)}(ع+٥)}{\cancel{(ع-٧)}(ع+٧)}=\frac{(ع+٥)}{(ع+٧)}$

د) $\frac{م^{٢}-٢١٢م+٣٦}{م^{٣}-٢١٦}$ ، م $\neq ٦$

الحل : $\frac{م^{٢}-٢١٢م+٣٦}{م^{٣}-٢١٦}=\frac{(٦-م)\cancel{(٦-م)}}{(٣٦+٦م+م^{٢})\cancel{(٦-م)}}=\frac{(٦-م)}{(٣٦+٦م+م^{٢})}$

هـ) $\frac{٤س^{٢}+٥س-٩}{٥س^{٣}-٦س^{٢}+س}$ ، س $\notin \{٠ ، ١ ، \frac{١}{٥}\}$

الحل : $\frac{٤س^{٢}+٥س-٩}{٥س^{٣}-٦س^{٢}+س}=\frac{(س-١)(٤س+٩)}{س(٥س^{٢}-٦س+١)}=\frac{\cancel{(س-١)}(٤س+٩)}{س\cancel{(س-١)}(٥س-١)}=\frac{(٤س+٩)}{س(٥س-١)}$

---

٣) حل المعادلات الكسرية الآتية :

أ) $\frac{س^{٢}+٥س}{س+٥}=-٨$ ، س $\neq -٥$

الحل :

$\frac{س^{٢}+٥س}{س+٥}=-٨ \leftarrow \frac{س\cancel{(س+٥)}}{\cancel{س+٥}}=-٨$

$\boxed{س=-٨}$

مجموعة الحل $=\{-٨\}$

ب) $\frac{س+٧}{س^{٢}-٤٩}=-٣$ ، $س \neq \pm ٧$

الحل :

$$\frac{س+٧}{س^{٢}-٤٩}=-٣ \leftarrow \frac{س+٧}{(س+٧)(س-٧)}=-٣$$

$$\frac{١}{(س-٧)}=-٣ \leftarrow \leftarrow -٣(س-٧)=١$$

$$س-٧=\frac{-١}{٣} \leftarrow س-٧+٧=٧+\frac{-١}{٣}$$

$$\boxed{س=\frac{٢٠}{٣}} \leftarrow \leftarrow \leftarrow م.ع=\left\{\frac{٢٠}{٣}\right\}$$

جـ) $\frac{٥ك+٣}{ك-١}=٣$ ، $ك \neq ١$

الحل :

$$\frac{٥ك+٣}{ك-١}=٣ \leftarrow (ك-١)\times\frac{٥ك+٣}{(ك-١)}=٣\times(ك-١)$$

$$٥ك+٣=٣\times(ك-١) \leftarrow ٥ك+٣=٣ك-٣$$

$$٥ك-٣ك+٣=٣-٣-٥$$

$$٢ك=-٦ \leftarrow \leftarrow \frac{١}{٢}\times٢ك=\frac{١}{٢}\times-٦$$

$$\boxed{ك=-٣} \leftarrow م.ع=\{-٣\}$$

د) $\frac{١-س^{٢}}{٥س^{٢}+٢س-٧}=٣$ ، $س \notin \{١، \frac{-٧}{٥}\}$

الحل :

$$\frac{١-س^{٢}}{٥س^{٢}+٢س-٧}=٣ \leftarrow \frac{-١(س-١)(س+١)}{(س-١)(٥س+٧)}=٣$$

$$\frac{-١\times(س+١)}{(٥س+٧)}=٣ \leftarrow -١\times(س+١)=٣(٥س+٧)$$

$$-١-س=١٥س+٢١ \leftarrow -١+١-س-١٥س=١٥س-١٥س+٢١+١$$

$$-١٦س=٢٢ \leftarrow س=\frac{٢٢}{-١٦} \leftarrow \boxed{س=\frac{-١١}{٨}} \leftarrow \leftarrow \leftarrow م.ع=\left\{\frac{-١١}{٨}\right\}$$

٤) جد العامل المشترك الأكبر ، والمضاعف المشترك الأصغر للمقادير الآتية :

أ) $٣س^{٢}-١٢$ ، $س^{٢}+٣س-١٠$

الحل :

$٣س^{٢}-١٢=٣(س^{٢}-٤)=٣(س+٢)(س-٢)$

$س^{٢}+٣س-١٠=(س-٢)(س+٥)$

العوامل المشتركة : $(س-٢)$

العوامل غير المشتركة : $(س+٥)$ ، ٣، $(س+٢)$

العامل المشترك الأكبر : العوامل المشتركة فقط : $(س-٢)$

العامل المشترك الأصغر : العوامل المشتركة وغير المشتركة : $٣(س+٢)(س-٢)(س+٥)$

ب) $٨ص^{٣}-١$ ، $١٢ص^{٢}-٣$ ، $٤ص^{٢}-٤ص+١$

الحل :

- $٨ص^{٣}-١=(٢ص-١)(٤ص^{٢}+٢ص+١)$
- $١٢ص^{٢}-٣=٣(٤ص^{٢}-١)=٣(٢ص-١)(٢ص+١)$
- $٤ص^{٢}-٤ص+١=(٢ص-١)(٢ص-١)$

العوامل المشتركة الثلاثية : $(٢ص-١)$

العوامل المشتركة الثنائية : **لا يوجد**

العوامل غير المشتركة : ٣ ، $(٢ص+١)$ ، $(٢ص-١)$ ، $(٤ص^{٢}+٢ص+١)$

ع . م . أ = $(٢ص-١)$

م . م . أ = $٣(٢ص-١)(٢ص+١)(٢ص-١)(٤ص^{٢}+٢ص+١)$

جـ) $٣ق^{٢}+ق٥-٨$ ، $٣+ق٣$

الحل :

- $٣ق^{٢}+ق٥-٨=(ق٣+٨)(ق-١)$
- $٣+ق٣=٣(ق+١)$

العوامل المشتركة : لا يوجد

العوامل غير المشتركة : ٣ ، $(ق+١)$ ، $(ق٣+٨)$ ، $(ق-١)$

ع . م . أ = ١

م . م . أ = ٣ $(ق+١)$ $(ق٣+٨)$ $(ق-١)$

---

٥) قطع همام مسافة $(٦ف^{٢}+١٧ف+٥)$ متراً في $(٣ف+١)$ ثانية ، إذا كانت سرعته ثابتة وتساوي (٧) أمتار في الثانية الواحدة فجد :

أ) قيمة ف

ب) المسافة التي قطعها همام بالأمتار .

الحل :

- **المسافة =** $(٦ف^{٢}+١٧ف+٥)$ **الزمن =** $(٣ف+١)$ **السرعة =** (٧)

أ)

- **المسافة ÷ الزمن = السرعة**

$$\frac{(٦ف^{٢}+١٧ف+٥)}{(٣ف+١)}=٧ \leftarrow \frac{(٢ف+٥)\ \cancel{(٣ف+١)}}{\cancel{(٣ف+١)}}=٧$$

$$٢ف+٥=٧ \leftarrow \leftarrow \leftarrow ٢ف+٥-٥=٧-٥$$

$$٢ف=٢ \leftarrow\leftarrow \frac{١}{٢}\times٢ف=\frac{١}{٢}\times٢ \leftarrow \boxed{ف=١}$$

ب) نعوض قيمة ف في $(٦ف^{٢}+١٧ف+٥)$

$(٦)(١)^{٢}+١٧(١)+٥)=٦+١٧+٥=٢٨$ **متراً .**