المقدّمة

انطلاقًا من إيمان المملكة الأردنية الهاشــمية الراســخ بأهمية تنمية قدرات الإنسان الأردني، وتسليحه بالعلم والمعرفة؛ ســعى المركز الوطنــي لتطوير المناهج وبالتعاون مــع وزارة التربية والتعليم، إلــى تحديث المناهج الدراســية وتطويرها، لتكون معينًا للطلبة على الارتقاء بمستواهم المعرفي، ومجاراة أقرانهم في الدول المتقدّمة. ولمّا كانت الرياضيات إحدى أهمّ الموادّ الدراسية، التي تنمّي لدى الطلبة مهارات التفكير وحلّ المشكلات، فقد أولــى المركز هذا المبحث عنايةً كبيرةً، وحرص على إعداد كتــب الرياضيات وفق أفضل الطرائق المتّبعة عالميًّا على يد خبراء أردنيين؛ لضمان انسجامها مع القيم الوطنية الراسخة، وتلبيتها لاحتياجات أبنائنا الطلبة ومعلميهم.

وقد روعي عند إعداد كتب الرياضيات تقديم المحتوى بطريقة سلســة، وضمن سياقات حياتية شائقة، تزيد من رغبة الطلبة في التعلّم. كما أبرزت الكتب خطة حلّ المسألة، وأفردت لها دروسًا مستقلّةً تتيح للطلبة التدرّب على أنواع مختلفة من هذه الخطط وتطبيقها في مسائل متنوّعة.

لقد احتوت الكتب على مشروع لكل وحدة؛ لتعزيز تعلّم الطلبة للمفاهيم والمهارات الواردة في هذه الوحدة وتوسعتها وإثرائها. وبما أن التدرّب المكثّف على حلّ المسائل يعدّ أحد أهمّ طرائق ترسيخ المفاهيم الرياضية وزيادة الطلاقة الإجرائية لدى الطلبة؛ فقد أُعــدّ كتاب التمارين ليقدّم للطلبة ورقة عمل في كل درس ليحلّوها واجبًا منزليًّا، أو داخل الغرفة الصفيــة إن توافر الوقت الكافي. ولأنّنا ندرك جيدًا حرص المعلّم الأردني على تقديم أفضل ما لديه لطلبته، فقد جاء كتاب التمارين أداةً مساعدةً توفّر عليه جهد إعداد أوراق العمل وطباعتها.

ومعلــوم أن الأرقام العربية تُســتعمل في معظم مصادر تعليــم الرياضيات العالمية لاســيّما على مواقع (الإنترنت)، التي أصبحت وبشكل متسارع أداةً تعليميةً مهمّةً؛ لما تزخر به من صفحات تقدّم محتوًى تعليميًّا تفاعليًّــا ذا فائدة كبيرة. وحرصًا منّا على ألّا يفــوت أبناءنا الطلبة أيُّ فرصة، فقد اســتعملنا في هذا الكتاب الأرقام العربية؛ لجَســر الهوّة بين طلبتنا وبين المحتوى الرقمي العلمي، الذي ينمو بتسارع في عالم يجري نحو التعليم الرقمي بسرعة كبيرة.

ونحن إذ نقدّم الطبعة الأولى (التجريبية) من هذا الكتاب، نأمل أن تنال إعجاب أبنائنا الطلبة ومعلميهم، وتجعل تعليم الرياضيات وتعلّمها أكثر متعةً وسهولةً، ونعدهم بأن نستمرَّ في تحسين هذا الكتاب في ضوء ما يصلنا من ملاحظات.

المركز الوطني لتطوير المناهج

قائمة المحتويات

قائمة المحتويات

الوحدة

1

الأسس والمعادلات

Equations and expressions

ما أهميةُ هذهِ الوحدةِ؟

تُستخدَمُ أنظمةُ المعادلاتِ غيرُ الخطِّيةِ في كثيرٍ منْ مجالاتِ الحياةِ. فخبراءُ الأرصادِ الجويةِ - مثلًا- يُعبِّرونَ عنِ العلاقةِ بينَ درجةِ الحرارةِ، وسرعةِ الرياحِ، والضغطِ الجويِّ، ومعدلِ الهطلِ، باستخدامِ نظامِ معادلاتٍ غيرِ خطِّيٍّ؛ ذلكَ أنَّ أيَّ تغيُّرٍ في أحدِ هذهِ العواملِ يؤدّي إلى تغيُّرٍ في العواملِ الأُخرى؛ ما يعني أنَّ العلاقةَ بينَها غيرُ خطِّيةٍ.

تعلَّمْتُ سابقًا:

- ✓ حَلَّ معادلاتٍ تربيعيةٍ باستعمالِ التحليلِ.
- ✓ حَلَّ معادلاتٍ تربيعيةٍ باستعمالِ القانونِ العامِّ.
- ✓ حَلَّ أنظمةِ معادلاتٍ تتضمَّنُ معادلتيْنِ خطِّيتيْنِ بمُتغيِّريْنِ.
- ✓ قواعدَ الأسسِ الصحيحةِ.

سأتعلَّمُ في هذهِ الوحدةِ:

- ◄ حَلَّ نظامٍ مُكوَّنٍ منْ معادلةٍ خطِّيةٍ، وأُخرى تربيعيةٍ.
- ◄ حَلَّ نظامٍ مُكوَّنٍ منْ معادلتيْنِ تربيعيتيْنِ.
- ◄ الأسسَ النسبيةَ، وخصائصَها.
- ◄ حَلَّ أنظمةِ معادلاتٍ أُسِّيَّةٍ.

الدرس 1

حَلُّ نظامٍ مُكوَّنٍ منْ ثلاثِ مُعادلاتٍ خطية

Solving a System of Three Linear Equations

فكرةُ الدرسِ حَلُّ نظامٍ مُكوَّنٍ منْ ثلاثِ معادلاتٍ خطِّيةٍ بثلاثةِ مُتغيِّراتٍ.

المصطلحاتُ ثلاثيٌّ مُرتَّبٌ.

مسألةُ اليومِ في إحدى السنواتِ كانَتِ الولاياتُ المتحدةُ الأمريكيةُ واليابانُ والصينُ هيَ أكثرَ الدولِ استهلاكًا للنفطِ عالميًّا؛ إذْ يُعادِلُ استهلاكُها اليوميُّ معًا ما نسبتُهُ 39.8% منَ الاستهلاكِ العالميِّ. إذا استهلكَتِ الولاياتُ المتحدةُ الأمريكيةُ 0.7% أكثرَ منْ أربعةِ أمثالِ استهلاكِ الصينِ، وَ5% أكثرَ منْ ثلاثةِ أمثالِ استهلاكِ اليابانِ، فما نسبةُ استهلاكِ كلٍّ منَ الولاياتِ المتحدةِ الأمريكيةِ واليابانِ والصينِ؟

تعلَّمْتُ سابقًا حَلَّ نظامٍ يتكوَّنُ منْ معادلتيْنِ خطِّيتيْنِ، وسأتعلَّمُ اليومَ حَلَّ نظامٍ مُكوَّنٍ منْ ثلاثِ معادلاتٍ خطِّيةٍ، مثلِ:

المعادلة 1 $y + x + z = 2$

المعادلة 2 $x + y - z = 2$

المعادلة 3 $2x + 2y + z = 4$

أتعلم

ألاحظ أن جميع معادلات النظام خطية، وأن كل منها يحتوي 3 متغيرات على الأكثر.

إنَّ حَلَّ هذا النظامِ هوَ **ثلاثيٌّ مُرتَّبٌ (ordered triple)** على الشكلِ (x, y, z) يحقق كل منَ المعادلاتِ الثلاثِ فيهِ. فمثلًا، الثلاثيُّ المُرتَّبُ $(0, 2, 0)$ هوَ حَلٌّ للنظامِ السابقِ:

$0 + 2 + 0 = 2$ ✓

$0 + 2 - 0 = 2$ ✓

$2(0) + 2(2) + 0 = 4$ ✓

يُمكِنُ حَلُّ نظامٍ مُكوَّنٍ منْ ثلاثِ معادلاتٍ خطِّيةٍ بطريقةٍ مشابهةٍ لحَلِّ نظامٍ يتكوَّنُ منْ معادلتيْنِ خطِّيتيْنِ، وذلكَ باستعمالِ طريقتَيِ الحذفِ أو التعويضِ اللتيْنِ تعلَّمْتُهُما سابقًا.

مثال 1

أَحُلُّ نظامَ المعادلاتِ الآتيَ، ثمَّ أَتحقَّقُ منْ صِحَّةِ الحَلِّ:

$4x + y + 3z = 8$ (1)

$-2x + 5y + z = 4$ (2)

$3x + 2y + 4z = 9$ (3)

الخطوةُ 1: حذفُ أحدِ المُتغيِّراتِ الثلاثةِ، وليكنْ x، باستعمال زوجين من معادلات النظام.

لنبدأ بالمعادلتين (1) و (2).

$4x + y + 3z = 8$ (1)

$(+)\quad -4x + 10y + 2z = 8$ (2) بضربِ المعادلةِ الثانيةِ في العددِ 2

$11y + 5z = 16$ (4) بجمعِ المعادلتيْنِ، تنتجُ المعادلةُ (4)

حصلنا على المعادلة (4) وهي معادلة خطية تحتوي متغيرين. لنجد معادلة خطية أخرى تحتوي متغيرين باستعمال زوج آخر من معادلات النظام هو (1) و (3)

$12x + 3y + 9z = 24$ (1) بضربِ المعادلةِ الأولى في العددِ 3

$(-)\quad 12x + 8y + 16z = 36$ (3) بضربِ المعادلةِ الثالثةِ في العددِ 4

$-5y - 7y = -12$ (5) بطرحِ المعادلتيْنِ، تنتجُ المعادلةُ (5)

الخطوةُ 2: أحَلُّ النظامِ الذي يحوي المعادلتيْنِ الخطِّيتيْنِ (4) و (5).

$-55y + 25z = 80$ (4) بضربِ المعادلةِ الرابعةِ في العددِ 5

$(+)\quad 55y - 77z = -132$ (5) بضربِ المعادلةِ الخامسةِ في العددِ 11

$-52z = -52$ بجمعِ المعادلتين

$z = 1$

$11y + 5(1) = 16$ بتعويضِ قيمةِ $z = 1$ في المعادلةِ الرابعةِ

$y = 1$ بالتبسيطِ

$4x + 1 + 3(1) = 8$ بتعويضِ قيمةِ $y = 1, z = 1$ في المعادلةِ الأولى

$x = 1$ بالتبسيطِ

إذنْ، الحَلُّ هوَ الثلاثيُّ المُرتَّبُ: $(x, y, z) = (1, 1, 1)$.

لِلتحقُّقِ منْ صِحَّةِ الحَلِّ، نُعوِّضُ الثلاثي المرتب في المعادلاتِ الثلاثِ:

$4(1) + 1 + 3(1) \stackrel{?}{=} 8$ المعادلة الأولى

إرشاد

العدد 12 هو المضاعف المشترك الأصغر لمعاملي المتغير x في المعادلتين.

أتعلم

يمكن تعويض قيمة z في المعادلة الخامسة فهي أيضًا تحتوي المتغيرين y و z فقط.

$$8 = 8 \checkmark$$

المعادلة الثانية

$$-2(1) + 5(1) + 1 \stackrel{?}{=} 4$$

$$4 = 4 \checkmark$$

المعادلة الثالثة

$$3(1) + 2(1) + 4(1) \stackrel{?}{=} 9$$

$$9 = 9 \checkmark$$

أتحقق من فهمي

أَحُلُّ نظامَ المعادلاتِ الآتيَ، ثمَّ أَتحقَّقُ منْ صِحَّةِ الحَلِّ:

$$x - y + z = 3$$

$$-3x + y + 2z = -2$$

$$2x + 2y - 5z = -5$$

تَبيَّنَ لنا في المثالِ السابقِ وجودُ حَلٍّ واحدٍ فقطْ لنظامِ المعادلاتِ، ولكنْ قدْ يوجدُ نظام له أكثرُ منْ حَلٍّ، وقدْ يوجدُ نظام ليس لهُ أيُّ حَلٍّ كما في المثالِ الآتي.

مثال 2

أَحُلُّ كل نظام معادلاتٍ فيما يلي:

1

$$5x - 10y + 7.5z = 2.5 \quad (1)$$

$$2x - 4y + 3z = 1 \quad (2)$$

$$10x - 20y + 15z = 5 \quad (3)$$

لنحذف أحد المتغيرات الثلاثة، وليكن x، باستعمال زوج من معادلات النظام هو (1) و (2)

$10x - 20y + 15z = 5 \quad (1)$ بضربِ المعادلةِ الأولى في العددِ 2

$(-) \quad 10x - 20y + 15z = 5 \quad (2)$ بضربِ المعادلةِ الثانيةِ في العددِ 5

$0 = 0$ بطرحِ المعادلتيْنِ

الناتج هو عبارة صحيحة دائمًا: $0 = 0$

ألاحظ فيما يلي أنه ينتج دائمًا عبارة صحيحة عند محاولة حذف متغير باســتعمال أي زوج من معادلات النظام.

$10x - 20y + 15z = 5 \quad (1)$ بضربِ المعادلةِ الأولى في العددِ 2

$(-) \quad 10x - 20y + 15z = 5 \quad (3)$

$0 = 0$ بطرح المعادلتين

الناتج هو أيضًا عبارة صحيحة دائمًا: $0 = 0$

بضربِ المعادلةِ الثانيةِ في العددِ 5 $10x - 20y + 15z = 5$ (2)

(−) $10x - 20y + 15z = 5$ (3)

بطرح المعادلتين $0 = 0$

فـي كلا الحالات الثلاث الســابقة نتجت عبارةٌ صحيحةٌ دائمًا. إذنْ، لنظــامِ المعادلاتِ عددٌ لانهائيٌّ منَ الحلولِ.

2 $x - 2y + 3z = 2$ (1)

$-2x + 4y - 6z = 5$ (2)

$4x - 8y + 12z = 1$ (3)

لنحذف أحد المتغيرات الثلاثة، وليكن x باستعمال زوج المعادلات (1) و (2)

بضربِ المعادلةِ الأولى في العددِ 2 $2x - 4y + 6z = 4$ (1)

(+) $-2x + 4y - 6z = 5$ (2)

بطرح المعادلتين $0 = 9$

الناتج هو عبارة غيرُ صحيحةٍ: $0 = 9$

بما أنَّهُ نتجَ منْ حَلِّ المعادلتيْنِ عبارةٌ غيرُ صحيحةٍ، فإنَّهُ لا يوجدُ حَلٌّ للنظامِ. ألاحظ فيما يلي أنَّهُ ينتجُ دائمًا عبارةٌ غيرُ صحيحةٍ عندَ محاولةِ حذفِ مُتغيِّرٍ باستعمال أيِّ زوجِ معادلاتٍ في النظامِ.

بضربِ المعادلةِ الأولى في العددِ 4 $4x - 8y + 12z = 8$ (1)

(−) $4x - 8y + 12z = 1$ (3)

بطرح المعادلتين $0 = 7$

بضربِ المعادلةِ الثانيةِ في العددِ 2 $-4x + 8y - 12z = 10$ (2)

(−) $4x - 8y + 12z = 1$ (3)

بطرح المعادلتين $0 = 11$

العبارة الناتجة غير صحيحةٍ في كلتا الحالتيْنِ.

أتحقق من فهمي

أَحُلُّ كلَّ نظامِ معادلاتٍ ممّا يأتي:

1 $2x + 4y - 6z = 8$
$x + 2y - 3z = 4$
$3x + 6y - 9z = 12$

2 $5x - y + 2z = 1$
$15x - 3y + 6z = 9$
$20x - 4y + 8z = 2$

مثال 3 من الحياة

رحلاتٌ: ذهبَتْ كلٌّ منْ عائلة معاذٍ، وعليٍّ، ومحمدٍ إلى حدائقِ الملكِ عبدِ اللهِ الثاني في إربدَ، وقدِ اشترَتْ عائلةُ معاذٍ ثلاثَ شطائرَ وعلبتَيْ عصيرٍ وقطعةَ حلوى بمبلغِ 155 قرشًا، واشترَتْ عائلةُ عليٍّ شطيرتيْنِ وثلاثَ علبِ عصيرٍ وثلاثَ قطعٍ منَ الحلوى بمبلغِ 180 قرشًا، واشترَتْ عائلةُ محمدٍ ثلاثَ شطائرَ وعلبةَ عصيرٍ وقطعتَيْ حلوى بمبلغِ 145 قرشًا. ما ثمنُ كلٍّ منَ الشطيرةِ الواحدةِ، وعلبةِ العصيرِ الواحدةِ، وقطعةِ الحلوى الواحدةِ؟

حدائقُ الملكِ عبدِ اللهِ الثاني أكبرُ حديقةٍ عامةٍ في محافظةِ إربدَ، وهيَ مُقامَةٌ على أرضٍ مساحتُها 177 دونمًا، وتضمُّ مُسطَّحاتٍ خضراءَ، وأُخرى مائيةً، وملاعبَ للرياضاتِ المختلفةِ، وأُخرى للأطفالِ.

أتذكَّرُ

تسمى طريقة حل هذا المثال بخطة الخطوات الأربعة وهي: أفهم، أخطط، أحل، أتحقق.

أفهمُ: **أُعرِّفُ ثلاثةَ مُتغيِّراتٍ.** أفترضُ أنَّ ثمنَ الشطيرةِ x، وعلبةِ العصيرِ y، وقطعةِ الحلوى z.

أُخطِّطُ: **أكتبُ نظامَ معادلاتٍ.**

دفعَتْ عائلةُ معاذٍ 155 قرشًا.	المعادلةُ (1)	$3x + 2y + z = 155$
دفعَتْ عائلةُ معاذٍ 180 قرشًا.	المعادلةُ (2)	$2x + 3y + 3z = 180$
دفعَتْ عائلةُ معاذٍ 145 قرشًا.	المعادلةُ (3)	$3x + y + 2z = 145$

أَحُلُّ: **أَحُلُّ نظامَ المعادلاتِ الناتجَ:**

نحذف أحد المتغيرات الثلاثة، وليكن x؛ فنحصل على نظام مكون من معادلتين بمتغيرين على النحو الآتي:

بضربِ المعادلةِ الأولى في العددِ 2 $\quad 6x + 4y + 2z = 310 \quad (1)$

بضربِ المعادلةِ الثانيةِ في العددِ 3 $\quad (-) \quad 6x + 9y + 9z = 540 \quad (2)$

بالطرحِ، تنتجُ المعادلةُ (4) $\quad -5y - 7z = -230 \quad (4)$

$3x + 2y + z = 155 \quad (1)$

$(-) \quad 3x + y + 2z = 145 \quad (3)$

بالطرح تنتجُ المعادلةُ (5) $\quad y - z = 10 \quad (5)$

وبهذا نحصل على نظام مكون من معادلتين خطيتين بمتغيرين هما (4) و (5) نحذف أحد المتغيرين وليكن y.

بضرب المعادلة الخامسة في العدد 5

$-5y - 7z = -230 \quad (4)$

$(+) \quad 5y - 5z = 50 \quad (5)$

بالجمع $\quad -12 - z = -180$

بحل المعادلة $\quad z = 15$

بتعويضِ $z = 15$ في المعادلةِ الخامسةِ (لماذا؟)　$y - 15 = 10$

بالتبسيطِ　$y = 25$

بتعويضِ $y = 25, z = 15$ في المعادلةِ الأولى (لماذا؟)　$3x + 2(25) + 15 = 155$

بالتبسيطِ　$3x = 90$

بقسمة الطرفين على 3　$x = 30$

إذنْ، الحَلُّ هوَ: $(x, y, z) = (30, 25, 15)$

سعرَ الشطيرةِ الواحدةِ 30 قرشًا، والعصيرِ 25 قرشًا، وقطعةِ الحلوى 15 قرشًا.

أتحقق: أيْ إنَّ أُعوِّضُ الثلاثيَّ المُرتَّبَ (30, 25, 15) في نظامِ المعادلاتِ.

أَتذكَّرُ

عندَ التحقُّقِ مِنْ صحَّةِ الحَلِّ، أُعوِّضُ الثلاثيَّ المُرتَّبَ في المعادلاتِ جميعِها، لا بعضِها.

أتحقق من فهمي

مدينةُ ألعابٍ: ذهبَتْ رغدُ معَ صديقتَيْها سارةَ ورندَ إلى مدينةِ ألعابٍ تحوي ثلاثةَ أنواعٍ منَ الألعابِ، وقدْ لعبَتْ رغدُ اللعبةَ الأولى مرَّتيْنِ، والثانيةَ مرَّةً واحدةً، والثالثةَ ثلاثَ مرّاتٍ، ودفعَتْ 875 قرشًا. أمّا سارةُ فلعبَتِ اللعبةَ الأولى مرَّةً واحدةً، والثانيةَ مرَّتيْنِ، والثالثةَ مرَّةً واحدةً، ودفعَتْ 450 قرشًا، في حينِ لعبَتْ رندُ كُلَّ لعبةٍ مرَّةً واحدةً فقطْ، ودفعَتْ 375 قرشًا. ما ثمنُ تذكرةِ كلِّ لعبةٍ؟

أتدرب وأحل المسائل

أَحُلُّ كلًّا منْ أنظمةِ المعادلاتِ الآتيةِ، ثمَّ أَتحقَّقُ منْ صِحَّةِ الحَلِّ:

1
$$x + 2y - z = -3$$
$$-x + y + 2z = -2$$
$$-3y - 5z = 1$$

2
$$2x + y - z = -3$$
$$x - y + 2z = -2$$
$$-3x - 3z = 9$$

3
$$x - 2y - z = 8$$
$$2x - 3y + z = 23$$
$$4x - 5y + 5z = 53$$

4
$$x - y - z = 1$$
$$-x + 2y - 3z = -4$$
$$3x - 2y - 7z = 0$$

5
$$2x + y - z = -2$$
$$x + 2y - z = -9$$
$$x - 4y + z = 1$$

6
$$2x - 2y + 3z = 6$$
$$4x - 3y + 2z = 0$$
$$-2x + 3y - 7z = 1$$

7 $y = x - 1$
$x + y + 2z = 23$
$x + y + z = 21$

8 $x - 3y + z = -4$
$2x + 3y = z - 15$
$4x - 3y - z = 19$

9 $\frac{x}{2} - 3z = 12$
$y - \frac{z}{2} = \frac{5}{2}$
$\frac{y}{2} - \frac{x}{3} = 1$

10 اشـــترَتْ لينا علبتيْنِ منَ البســكويتِ، وثلاثَ علبٍ منَ الشوكولاتةِ، وخمســةَ أكياسٍ منْ رقائقِ البطاطا (الشيبسُ)، ودفعَتْ ثمنًا لها 380 قرشًا. وفي اليومِ التالي اشــترَتْ منَ الأصنافِ نفسِها علبةَ بسكويتٍ، وعلبتينِ منَ الشوكولاتةِ، وثلاثةَ أكياسٍ منْ رقائقِ البطاطا، ودفعَتْ ثمنَها 265 قرشًــا. وفي اليومِ الثالثِ اشــترَتْ ثلاثَ علبٍ منَ البسكويتِ، وعلبةً واحدةً منَ الشوكولاتةِ، وأربعةَ أكياسٍ منْ رقائقِ البطاطا، ودفعَتْ ثمنَها 320 قرشًا. كمْ سعرُ كلٍّ منَ البسكويتِ، والشوكولاتةِ، ورقائقِ البطاطا؟

11 أَحُلُّ المسألةَ الواردةَ في بدايةِ الدرسِ.

مهارات التفكير العليا

12 **تحدٍّ**: أَجِدُ قيمةَ كلٍّ منْ: a , c , b في المعادلةِ التربيعيةِ: $y = ax^2 + bx + c$ التي يمرُّ منحناها بالنقاطِ:

$$(-2, 3), (5, 2), (2, -1)$$

13 **تبريرٌ**: استنتجَتْ ريمُ عدمَ وجودِ حَلٍّ للنظامِ الآتي منْ دونِ أنْ تحُلَّهُ. كيفَ عرفَتْ ذلكَ؟ أُبرِّرُ إجابتي.

$$x + y + z = 1$$
$$x + y + z = 5$$
$$x + y + z = -2$$

14 **حَلٌّ عكسيٌّ**: أَجِدُ قيمةَ كلٍّ منْ: a, c, b التي تجعلُ الثلاثيَّ المُرتَّبَ $(-1, 2, -3)$ حَلًّا لنظامِ المعادلاتِ الآتي:

$$x + 2y - 3z = a$$
$$-x - y + z = b$$
$$2x + 3y - 2z = c$$

15 **مسألةٌ مفتوحةٌ**: أكتبُ ثلاثةَ أنظمةِ معادلاتٍ خطِّيةٍ، في كلٍّ منْها ثلاثةُ مُتغيِّراتٍ، بحيثُ يكونُ للنظامِ الأولِ حَلٌّ واحدٌ، وللنظامِ الثاني عددٌ لانهائيٌّ منَ الحلولِ، ولا يكونُ للنظامِ الثالثِ أيُّ حَلٍّ.

حَلُّ أنظمةِ المعادلاتِ التربيعيةِ
Solving Systems of Equations

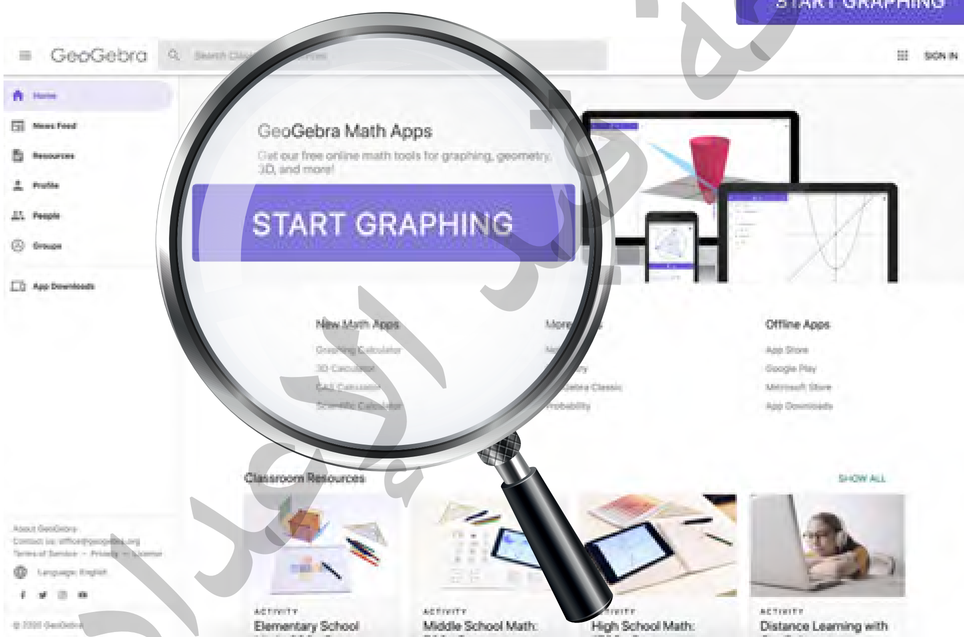
يُمكِنُني استعمالُ برنامجِ الحاسبةِ البيانيةِ جيوجبرا (GEOGEBRA) لتمثيلِ أنظمةِ المعادلاتِ التربيعيةِ، وحَلِّها بيانيًّا.

أَستعملُ الرابطَ: www.geogebra.org للوصولِ إلى الحاسبةِ البيانيةِ جيوجبرا في شبكةِ الإنترنتْ؛ فهيَ مجانيةٌ، وسهلةُ الاستعمالِ.

نشاط أَحُلُّ نظامَ المعادلاتِ التربيعيةِ الآتيَ بيانيًّا باستعمالِ الحاسبةِ البيانيةِ جيوجبرا.

$$x^2 + y^2 = 13$$
$$x^2 - y = 7$$

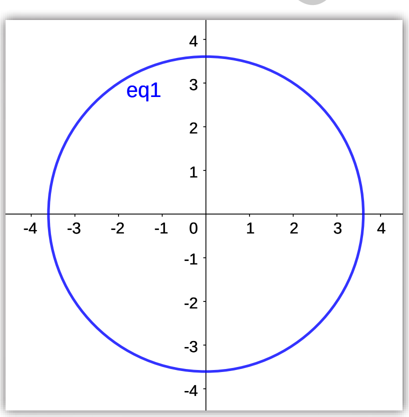
الخطوةُ 1: أدخلُ موقعَ جيوجبرا في شبكةِ الإنترنتْ www.geogebra.org، ثمَّ أَضغطُ على START GRAPHING

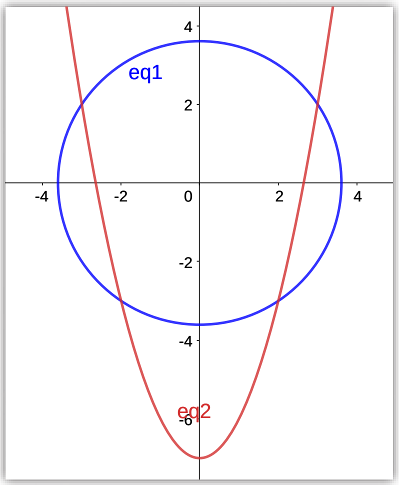


الخطوةُ 2: أُمثِّلُ بيانيًّا المعادلةَ التربيعيةَ: $x^2 + y^2 = 13$

أدخلُ المعادلةَ في حاسبةِ جيوجبرا، بالضغطِ على المفاتيحِ الآتيةِ من اليسارِ إلى اليمينِ:

x | □² | + | y | □² | = | 1 | 3 | ↵



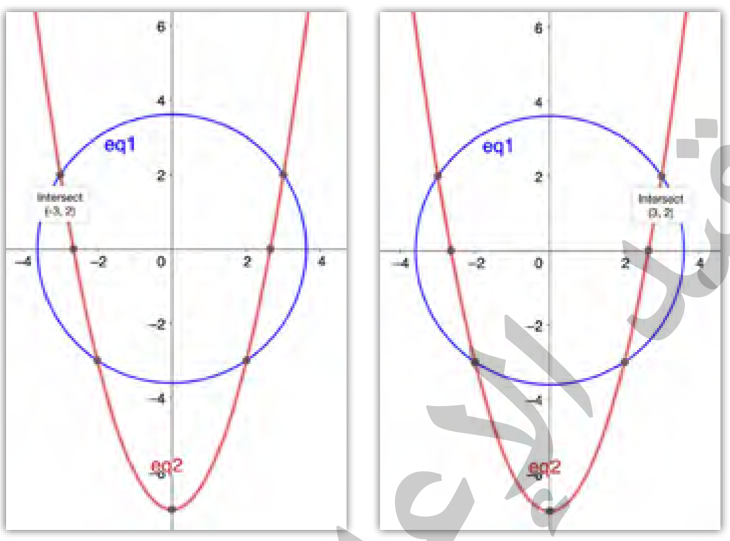


الخطوةُ 3: أُمثِّلُ بيانيًّا المعادلةَ التربيعيةَ: $x^2 - y = 7$

أدخل المعادلة في حاسبةِ جيوجبرا، بالضغطِ على المفاتيحِ الآتيةِ من اليسار إلى اليمين:

x | $\square^2$ | − | y | = | 7 | ↵

أُلاحِظُ أنَّ منحنيَي المعادلتيْنِ يتقاطعانِ في أربعِ نقاط، ما يعني وجودَ أربعةِ حلول لنظامِ المعادلاتِ.



الخطــوةُ 4: أُحدِّدُ إحداثيــاتِ نقــاطِ التقاطعِ بينَ منحنياتِ المعادلاتِ

أَنقرُ بفأرةِ الحاســوبِ عنــدَ كلِّ نقطةِ تقاطعٍ ليظهرَ إحداثيّاها.

إحداثيّا نقاط التقاطع هي: (-3, 2), (3, 2), (2, -3), (-2, -3) مــا يعني وجودَ أربعــةِ حلول لنظامِ المعادلاتِ، هي:

الحل الأول: $x = 3, y = 2$ **الحل الثاني:** $x = 3, y = 2$

الحل الثالث: $x = 2, y = -3$ **الحل الثاني:** $x = -2, y = -3$

أتدرب

أَحُلُّ كلَّ نظامِ معادلاتٍ ممّا يأتي بيانيًّا باستعمالِ الحاسبةِ البيانيةِ جيوجبرا:

1 $y^2 - x^2 + 4 = 0$
$2x^2 + 3y^2 = 6$

2 $y^2 - x^2 + 3y = 26$
$x^2 + 2y^2 = 34$

3 $x^2 + y^2 = 16$
$x^2 - y^2 = 20$

الدرس 2

حَلُّ نظامٍ مُكوَّنٍ منْ معادلةٍ خطِّيةٍ ومعادلةٍ تربيعيةٍ
Solving a System of Linear and Quadratic Equations

فكرةُ الدرسِ حَلُّ نظامٍ مُكوَّنٍ منْ معادلةٍ خطِّيةٍ ومعادلةٍ تربيعيةٍ جبريًّا.

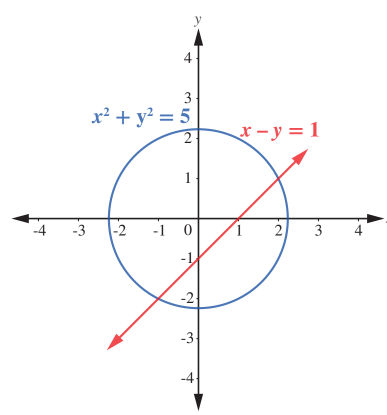
مسألةُ اليومِ تُمثِّلُ المعادلةُ $y = x - 3$ طريقًا مستقيمًا داخلَ إحدى المدنِ، في حينِ تُمثِّلُ المعادلةُ $y = x^2 - 3x - 10$ طريقًا آخرَ منحنيًا داخلَ المدينةِ نفسِها. هلْ يتقاطعُ هذانِ الطريقانِ أمْ لا؟

يُمكِنُني حَلُّ نظامٍ مُكوَّنٍ منْ معادلةٍ خطِّيةٍ وأُخرى تربيعيةٍ باستعمالِ طريقةِ التعويضِ، وذلكَ بكتابةِ أحدِ المُتغيِّريْنِ في المعادلةِ الخطِّيةِ بدلالةِ الآخرِ، ثمَّ تعويضِهِ في المعادلةِ التربيعيةِ وحلِّها.

مثال 1

أَحُلُّ نظامَ المعادلاتِ الآتيَ، ثمَّ أَتحقَّقُ منْ صِحَّةِ الحَلِّ:

$$x - y = 1$$
$$x^2 + y^2 = 5$$



يُمكِنُني استعمالُ برمجيةِ جيوجبرا (GEOGEBRA)، أوْ حاسبةٍ بيانيةٍ، لتمثيلِ المعادلتيْنِ بيانيًّا على المستوى الإحداثيِّ نفسِهِ كما في التمثيلِ البيانيِّ المجاورِ. أُلاحِظُ أنَّ منحنيَي المعادلتيْنِ يتقاطعانِ في نقطتيْنِ؛ ما يعني أنَّ للنظامِ حَلَّيْنِ مختلفيْنِ. أَتحقَّقُ منْ ذلكَ جبريًّا باستعمالِ طريقةِ التعويضِ.

$x - y = 1$	المعادلةُ الخطِّيةُ
$y = x - 1$	بكتابةِ y بدلالةِ x
$x^2 + (x - 1)^2 = 5$	بتعويضِ قيمةِ y في المعادلةِ التربيعيةِ
$x^2 + x^2 - 2x + 1 = 5$	بفكِّ القوسيْنِ
$2x^2 - 2x - 4 = 0$	بالتبسيطِ
$x^2 - x - 2 = 0$	بالقسمةِ على 2

لِحَلِّ المعادلةِ باستعمالِ القانونِ العامِّ، تُحدَّدُ قيمُ المعاملاتِ؛ $a = 1, b = -1, c = -2$

القانونُ العامُّ	$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
بالتعويضِ	$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-2)}}{2(1)}$
بالتبسيطِ	$x = -1 , x = 2$

الحالة الأولى: عندما $x = -1$

$y = x - 1$

بتعويضِ $x = -1$ في المعادلةِ الخطِّيَةِ $y = -1 - 1 = -2$

الحلُّ الأولُ: $(x, y) = (-1, -2)$

لِلتحقُّقِ منْ صِحَّةِ الحَلِّ الأول، نعوض الزوج المرتب $(-1, -2)$ في كل من المعادلة الخطية والتربيعية:

بالتعويضِ في المعادلةِ الخطية $x - y = -1 - (-2) = 1$ ✓

بالتعويضِ في المعادلةِ التربيعية $x^2 + y^2 = (-1)^2 + (-2)^2 = 1 + 4 = 5$ ✓

الحالة الثانية: عندما $x = 2$

بتعويضِ $x = 2$ في المعادلةِ الخطية $y = 2 - 1 = 1$

الحلُّ الثاني: $(x, y) = (2, 1)$

لِلتحقُّقِ مِنْ صِحَّةِ الحَلِّ الثاني نعوض الزوج المرتب $(2,1)$ في كل من المعادلة الخطية والتربيعية:

بالتعويضِ في المعادلةِ الخطية $x - y = 2 - 1 = 1$ ✓

بالتعويضِ في المعادلةِ التربيعية $x^2 + y^2 = (2)^2 + (1)^2 = 4 + 1 = 5$ ✓

أتحقق من فهمي

أَحُلُّ نظامَ المعادلاتِ الآتيَ، ثمَّ أَتحقَّقُ منْ صِحَّةِ الحَلِّ:

$2x + 3y = 5$

$y = x^2 + 5x - 6$

يوجدُ حَلّانِ لنظامِ المعادلاتِ في المثالِ السابقِ. ولكنْ، هلْ يوجدُ نظام معادلات له حل واحد؟ لمعرفةِ الإجابةِ، أدرسُ المثالَ الآتيَ.

أَتذكَّرُ

توجدُ طرائقُ عِدَّةٌ لِحَلِّ معادلةٍ تربيعيةٍ، منْها: التحليلُ إلى العواملِ، والقانونُ العامُّ.

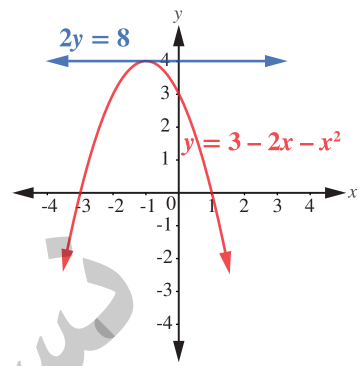
إرشاد

يجب تعويض الحل في كلا معادلتي النظام لأننا قد نحصل على حل خاطئ يحقق إحدى المعادلتين ولا يحقق الأخرى.

مثال 2

أَحُلُّ نظامَ المعادلاتِ الآتيَ:

$$2y = 8$$
$$y = 3 - 2x - x^2$$



عندَ تمثيلِ معادلتَيِ النظامِ على المستوى الإحداثيِّ نفسِهِ، يُلاحَظُ أنَّ هناك نقطة تقاطع واحده كما في التمثيل البياني المجاورِ؛ ما يعني أنَّ للنظامِ حَلًّا واحدًا فقطْ. أَتحقَّقُ منْ ذلكَ جبريًّا باستعمال طريقة التعويض.

المعادلة الخطية	$2y = 8$
بالقسمة على 2	$y = 4$
بتعويضِ قيمةِ y في المعادلةِ التربيعيةِ	$4 = 3 - 2x - x^2$
بالتبسيط	$x^2 + 2x + 1 = 0$

أَحُلُّ المعادلةَ باستعمالِ طريقةِ التحليلِ إلى العواملِ. هلْ توجدُ طريقةٌ أُخرى؟

بالتحليلِ	$(x + 1)(x + 1) = 0$
خاصية الضرب الصفري	$x + 1 = 0$
بحلِّ المعادلة	$x = -1$

أُعوِّضُ قيمةَ x لإيجادِ قيمةِ y

المعادلةُ التربيعيةُ	$y = 3 - 2x - x^2$
بتعويض قيمة x	$y = 3 - 2(-1) - (-1)^2$
	$y = 4$

إذن حل النظام هو الزوج المرتب $(-1, 4)$

لِلتحقُّقِ منْ صِحَّةِ الحَلِّ:

$$4 \stackrel{?}{=} 3 - 2(-1) - (-1)^2$$
$$4 = 4 \checkmark$$

أتحقق من فهمي

أَحُلُّ نظامَ المعادلاتِ الآتيَ، ثمَّ أَتحقَّقُ منْ صِحَّةِ الحَلِّ:

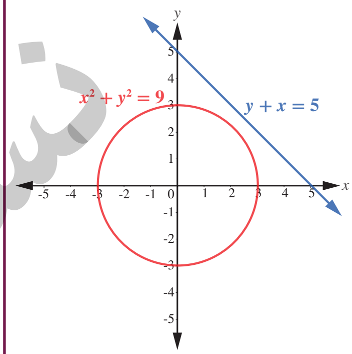
$$y = x^2 - 2$$
$$y + 2 = 0$$

لاحظتُ في المثالَيْنِ السابقيْنِ وجودَ حَلٍّ أوْ حَلَّيْنِ لنظامِ المعادلاتِ. ولكنْ، هلْ توجد أنظمة معادلات ليس لها حل؟ لمعرفةِ الإجابةِ، أدرسُ المثالَ الآتيَ.

مثال 3

أحلُ نظامَ المعادلاتِ الآتي:

$$y + x = 5$$
$$x^2 + y^2 = 9$$



يَتبيَّنُ منَ التمثيل البياني المجاورِ أنَّ منحنيَي المعادلتيْنِ لا يتقاطعانِ في أيِّ نقطةٍ؛ ما يعني عدمَ وجودِ حَلٍّ لنظامِ المعادلاتِ. أَتحقَّقُ منْ ذلكَ جبريًّا باستعمالِ طريقةِ التعويضِ.

المعادلةُ الخطية $y + x = 5$

بكتابةِ x بدلالةِ y $x = 5 - y$

بتعويضِ قيمةِ x في المعادلةِ التربيعيةِ $(5 - y)^2 + y^2 = 9$

$25 - 10y + y^2 + y^2 = 9$

بالتبسيطِ $2y^2 - 10y + 16 = 0$

لِحَلِّ المعادلةِ التربيعيةِ الناتجةِ باستعمالِ القانونِ العامِّ، أُحدِّدُ قيمَ المعاملاتِ:

$a = 2,\ b = -10,\ c = 16$

القانونُ العامُّ $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

بالتعويضِ $x = \dfrac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4(2)(16)}}{2(2)}$

بالتبسيطِ $x = \dfrac{10 \pm \sqrt{-28}}{2}$

أُلاحِظُ أنَّهُ عندَ تعويضِ قيمِ a، وَ b، وَ c في القانونِ العامِّ، ينتجُ جذرٌ تربيعيٌّ لعددٍ سالبٍ؛ اذن، لا يوجد حل لهذا النظام.

أَتذكَّرُ

لا يوجدُ عددٌ حقيقيٌّ مربَّعُهُ عددٌ سالبٌ.

أتحقق من فهمي

أحل نظام المعادلاتِ الآتي:

$$x - y = 0$$
$$y = x^2 + 3x + 2$$

نتيجةٌ

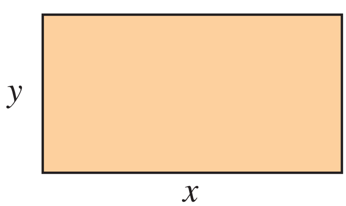
لأي نظام يتكون منْ معادلــةٍ خطِّيةٍ وأُخرى تربيعيةٍ، تكون واحــدة من العبارات التالية صحيحة:

1 وجودُ حَلَّيْنِ مختلفيْنِ. 2 وجودُ حَلٍّ واحدٍ فقطْ. 3 لا يوجد حَلٌّ.

توجدُ تطبيقاتٌ حياتية كثيرةٌ لِحَلِّ الأنظمةِ التي تتكوَّنُ منْ معادلةٍ خطِّيةٍ وأُخرى تربيعيةٍ.

مثال 4 من الحياة

سـجادة مصنوعـة يدويًـا مجمـوع بعديهـا 7 m، وطـولُ قطرها 5 m. أَجِدُ كُلًّا من طولها وعرضها.



قد تســتغرق صناعة السجادة اليدوية الصغيرة 4 أشــهر من العمل المتواصل.

لإيجــادِ بُعْدَي الســجادة، أَكتــبُ نظامَ معــادلاتٍ يُمثِّلُ المسألة، ثمَّ أَحُلُّهُ.

أَفترضُ أنَّ طول الســجادة هو: x، وَعرضها هو y، وبما أنَّ مجموعَ بُعْدَيِ السجادة هوَ 7 m، فــإنَّ: $x + y = 7$، وبمـا أنَّ قُطْرَ الســجادة هوَ 5 m، فإنَّ (باســتعمالِ نظريــةِ فيثاغورس): $x^2 + y^2 = 25$، إذنْ، أصبحَ لدينا نظامٌ يتكوَّنُ منْ معادلةٍ خطِّيةٍ وأُخرى تربيعيةٍ.

$$y + x = 7$$
$$x^2 + y^2 = 25$$

والآنَ، سأَحُلُّ النظامَ باستعمالِ طريقةِ التعويضِ.

المعادلة الخطية	$x + y = 7$
بكتابةِ y بدلالةِ x	$y = 7 - x$
بتعويضِ قيمةِ y في المعادلةِ التربيعيةِ	$x^2 + (7 - x)^2 = 25$
بالتبسيطِ	$2x^2 - 14x + 24 = 0$
بالقسمةِ على 2	$x^2 - 7x + 12 = 0$

أَحُلُّ المعادلةَ التربيعية بالتحليلِ إلى العواملِ

بالتحليلِ	$(x - 4)(x - 3) = 0$
خاصية الضرب الصفريِّ	$x - 4 = 0$ او $x - 3 = 0$
بحلِّ كلِّ معادلةٍ	$x = 4$ او $x = 3$

أَتذكَّرُ

أتحقق من صحــة التحليل باستعمال خاصية التوزيع.

أُعوِّضُ قيم x في المعادلة الخطية لإيجادِ قيم y

بتعويض قيمة $x = 3$ في المعادلة الخطية	$y = 7 - 3$
قيمة y الأولى	$y = 4$
بتعويض قيمة $x = 4$ في المعادلة الخطية	$y = 7 - 4$
قيمة y الثانية	$y = 3$

إذن، حَلُّ المعادلتيْنِ هوَ $(4, 3)$ وَ $(3, 4)$

وبما أن طول السجادة أكبر من عرضها فإن الطول هو 4 m والعرض هو 3 m

أتحقق من فهمي

حديقةٌ مستطيلةُ الشكلِ، طولُ قُطْرِها $2\sqrt{78}\,m$، ومحيطُها $24\,m$. أَجِدُ بُعْدَيِ الحديقةِ.

أتدرب وأحل المسائل

أَحُلُّ كلًّا منْ أنظمةِ المعادلاتِ الآتيةِ، ثمَّ أَتحقَّقُ منْ صِحَّةِ الحَلِّ:

1) $y = x^2 + 6x - 3$
$y = 2x - 3$

2) $y = x^2 + 4x - 2$
$y + 6 = 0$

3) $y = x^2 + 4$
$x - y = -1$

4) $y = x^2 + 5x - 1$
$2x + 3y = 1$

5) $y = x^2 + 4x + 7$
$y - 3 = 0$

6) $y = x^2 - 2x + 4$
$y = x$

7) $x^2 + y^2 = 8$
$2x + 3y = 7$

8) $y = x^2 + 2x + 1$
$y = 0$

9) $x^2 + y^2 = 4$
$x + y = 5$

10) $x^2 + y^2 = 10$
$x - y = 2$

11) $x^2 + (y - 1)^2 = 17$
$x = 1$

12) $(x - 1)^2 = 4$
$y = 5 - x$

13) **بناء:** محيطُ جدار مستطيل الشكلِ هوَ $16\,m$، والفرقُ بينَ مربَّعِ بُعْدَيْه هوَ $16\,m^2$. أَجِدُ بُعْدَيْه.

14) **أعداد:** أجد العددَيْنِ الموجبيْنِ اللذيْنِ مجموعُهُما 12، والفرقُ بينَ مربَّعَيْهِما 24

15) **هندسةٌ:** دائرتانِ مجموعُ محيطَيْهِما $12\pi\,cm$، ومجموعُ مساحتَيْهِما $20\pi\,cm^2$. أَجِدُ قُطْرَ كلٍّ منْهُما.

16 **أعمارٌ:** قالَتْ شيماءُ: «أنا أكبرُ بأربعِ سنواتٍ منْ أخي ريّانَ، ومجموع مُربَّعَيْ عُمْرَيْنا هوَ 346». ما عُمْرُ شيماءَ؟

17 **لوحة:** لوحة مستطيلة الشكل طولها يساوي مثلي عرضها، وطول قطرها $\sqrt{1.25\text{ m}^2}$ ، أُحيطت بإطار تكلفة المتر الواحد منه بالدينار 2.25 . أجد تكلفة الإطار.

18 **أراضٍ:** قطعة أرض على شكل مثلث متطابق الضلعين، محيطها يساوي 180m، ومساحتها 1200m^2 ، أحيطت بسياج تكلفة المتر الواحد منه 5 دنانير. فما تكلفة السياج؟

19 **زراعة:** قسم فيصل 41m^2 من مزرعته إلى منطقتين مربعتي الشكل، وزرعهما بمحصولي الطماطم والبطاطا، فإذا كان بعد المنطقة المزروعة بالطماطم يزيد بمقدار متر واحد عن بُعد المنطقة المزروعة بالبطاطا. فأجد مساحة المنطقة المزروعة بكل محصول.

مهارات التفكير العليا

20 **تبرير:** صُممت نافورة بحيث ينطلق الماء منها حسب العلاقة $y + x^2 = 10$، وعلى بعد منها وضعت وحدة إنارة تقع على المستقيم الذي معادلته $y = 12 + x$. فهل يصل ماء النافورة إلى وحدة الإنارة أم لا؟

21 **تحدٍّ:** إذا علمْتُ أنَّ المعادلةَ الخطِّيَّةَ $y = 3x + p$ تقطعُ المنحنى $y = 2x^2 + 3x - 5$ في نقطة واحدةٍ فقطْ، فما قيمةُ p؟

22 **تحدٍّ:** ما حَلُّ نظامِ المعادلاتِ الآتي علمًا بأنَّ $5x - 6 < 3x^2 - 7x + 2$ ؟

$$y = 3x^2 - 7x + 2$$
$$y = 5x - 6$$

23 **أكتشف الخطأ:** عددان موجبان، يزيد العدد x عن العدد y بمقدار 5، والفرق بين مربعيهما يساوي 45. فما العددان؟

حل كل من سارة وأسامة السؤال السابق فكانت إجابتهما كالآتي، أبين الخطأ الذي وقع فيه كل منهما مبررا إجابتي.

إجابة سارة
$(x, y) = (2, 7)$

إجابة أسامة
$(x, y) = (\mp 7, 2)$

24 **مسألةٌ مفتوحةٌ:** أَكتبُ ثلاثَ معادلاتٍ خطِّيَّةٍ تُكوِّنُ كُلٌّ منْها معَ المعادلةِ التربيعيةِ $y = x^2$ نظامًا يُحقِّقُ إحدى الحالاتِ الآتيةِ:

أ- يوجدُ حَلّانِ للنظامِ.

ب- يوجدُ حَلٌّ واحدٌ للنظامِ.

جـ- لا يوجدُ حَلٌّ للنظامِ.

الدرس 3

حَلُّ نظامٍ مُكوَّنٍ منْ معادلتيْنِ تربيعيتيْنِ

Solving a System of two Quadratic Equations

فكرةُ الدرسِ حَلُّ نظامٍ مُكوَّنٍ منْ معادلتيْنِ تربيعيتيْنِ بمُتغيِّريْنِ.

مسألةُ اليومِ استعملَ خبيرُ تسويقِ المعادلتين التربيعيتين التاليتين لتمثيلِ مقدارِ كلٍّ منَ العرضِ والطلبِ لسلعةٍ تجاريةٍ؛ بُغْيَةَ تحديدِ نقاطِ التوازنِ التي يتساوى عندَها العرضُ معَ الطلبِ في السوقِ. هلْ يُمكِنُني مساعدةُ الخبيرِ على تحديدِ نقاطِ التوازنِ، علمًا بأنَّه استعملَ المعادلتيْنِ الآتيتيْنِ؟

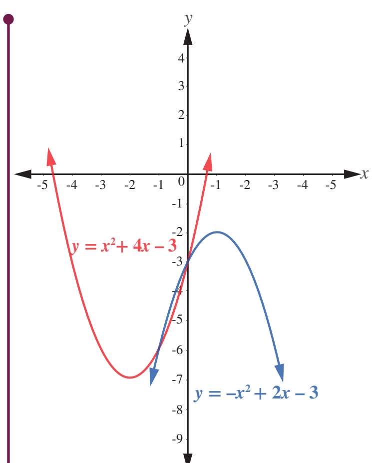
$$y = x^2 - 6x$$
$$y = -x^2 - 24x$$

لِحَلِّ نظامٍ يتكوَّنُ منْ معادلتيْنِ تربيعيتيْنِ، نُساوي المعادلتانِ بعضُهما ببعضٍ لتكوينِ معادلةٍ تربيعيةٍ واحدةٍ، ثمَّ نَحلُّ.

مثال 1

أَحُلُّ نظامَ المعادلاتِ الآتيَ، ثمَّ أَتحقَّقُ منْ صِحَّةِ الحَلِّ:

$$\mathbf{y = x^2 + 4x - 3}$$
$$\mathbf{y = -x^2 + 2x - 3}$$



عندَ تمثيلِ معادلتَيِ النظامِ على المستوى الإحداثيِّ نفسِهِ، يُلاحَظُ أنَّ منحنييْهما يتقاطعانِ في نقطتيْنِ كما في الشكلِ المجاورِ؛ ما يعني أنَّ للنظامِ حلانِ مختلفانِ. أَتحقَّقُ منْ ذلكَ جبريًّا.

بدايةً، يجبُ مساواةُ معادلتَيِ النظامِ المعطى، ثمَّ حَلُّ المعادلةِ التربيعيةِ الناتجةِ:

$x^2 + 4x - 3 = -x^2 + 2x - 3$ بمساواةِ المعادلتيْنِ

$2x^2 + 2x = 0$ بجمعِ الحدودِ المتشابهةِ، والتبسيطِ

أَحُلُّ المعادلةِ التربيعيةِ الناتجةِ باستعمالِ التحليلِ:

$2x\,(x + 1) = 0$ بتحليلِ المعادلةِ التربيعيةِ الناتجةِ

$x = 0$ أو $x = -1$ حلا المعادلة

لإيجادِ قيمةِ y ، نعوض قيمتَيْ x في أيٍّ منْ معادلتَيِ النظامِ.

الحالةُ الأولى: إذا كانَتْ $x = 0$:

أَتذكَّرُ

يُمكِنُني حَلُّ المعادلةِ التربيعيةِ الناتجةِ باستعمالِ القانونِ العامِّ أيضًا.

بتعويضِ $x = 0$ في إحدى المعادلتيْنِ $y = -(0)^2 + 2(0) - 3$

بالتبسيطِ $y = -3$

إذن، الحل الأول للمعادلة هو $(x, y) = (0, -3)$

الحالةُ الثانيةُ: إذا كانَتْ $x = -1$:

بتعويضِ $x = -1$ في إحدى المعادلتيْنِ $y = -(-1)^2 + 2(-1) - 3$

بالتبسيطِ $y = -6$

إذن، الحل الثاني للنظام هو $(x, y) = (-1, -6)$

إذنْ، مجموعةُ الحلِّ هيَ: $(0, -3), (-1, -6)$

إرشاد

لِلتحقُّقِ منْ صِحَّةِ الحلِ الثاني، أُعوِّضُ القيمتيْنِ: $x = -1$، وَ $y = -6$ في كلٍّ منْ معادلتَيِ النظامِ.

أتحقق من فهمي

أَحُلُّ نظامَ المعادلاتِ الآتيَ، ثمَّ أَتحقَّقُ منْ صِحَّةِ الحَلِّ:

$y = -x^2 - 2x + 3$

$y = x^2 + 2x - 3$

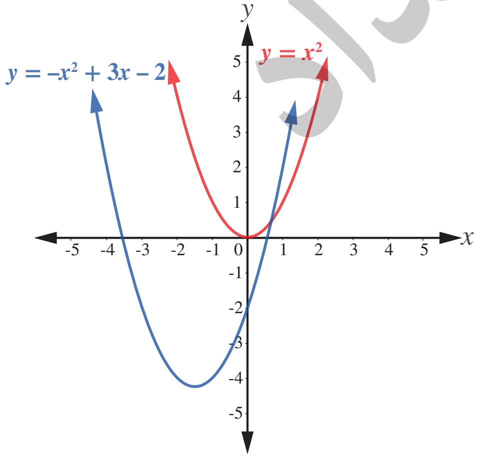
قدْ يتقاطعُ مُنْحَنَيا معادلتيْنِ تربيعيتيْنِ في نقطةٍ واحدةٍ فقطْ، وعندئذٍ يكونُ لنظامِ المعادلاتِ الذي تُكوِّنُهُ هاتانِ المعادلتانِ حَلٌّ واحِدٌ.

مثال 3 من الحياة

سباقات: في إحدى سباقات المراحل، سلكَ مُتسابِقٌ مسارًا تُمثِّلُهُ المعادلةُ التربيعيةُ: $y = x^2$ في حين سلك متسابق آخر مسار تمثله المعادلة $y = x^2 + 3x - 2$. أَجِدُ نقطةَ التقاطعِ بينَ مسارَيِ المُتسابِقيْنِ.

تُجرى سباقات المراحلِ على مدى أيامٍ و يرتبُ فيها المتنافسون حسب أفضلِ مجموعِ أوقاتٍ مسجلةٍ في كل المراحل. وتُقامُ هذه السباقات فوقَ مساراتٍ متنوعةِ الجغرافيا كالطرق المنبسطةِ و الطرقِ الجبليةِ.

عندَ تمثيلِ المعادلتيْنِ بيانيًّا كما في الشكلِ المجاورِ، يُلاحَظُ وجودُ نقطةِ تقاطعٍ واحدةٍ بينَ منحنييْهِما؛ ما يعني أنَّ لنظامِ المعادلاتِ حَلًّا واحدًا. أتحقَّقُ منْ ذلكَ جبريًّا.



بدايةً، يجبُ مساواةُ معادلتَيِ النظامِ المعطى، ثمَّ حَلُّ المعادلةِ التربيعيةِ الناتجةِ:

بمساواةِ المعادلتيْنِ $x^2 + 3x - 2 = x^2$

بطرحِ x^2 منْ كلا الطرفيْنِ $x^2 + 3x - 2 - x^2 = 0$

بجمعِ الحدودِ المُتشابِهةِ، والتبسيطِ $3x - 2 = 0$

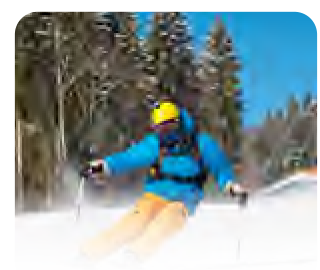
$$x = \frac{2}{3}$$

بعدَ ذلكَ نجدُ قيمةِ y، وذلكَ بتعويضِ قيمةِ $x = \frac{2}{3}$ في أي من معادلتي النظام.

بتعويضِ قيمةِ $x = \frac{2}{3}$ $$y = \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 3\left(\frac{2}{3}\right) - 2$$

بالتبسيطِ $$y = \frac{4}{9}$$

إذنْ، حَلُّ نظامِ المعادلاتِ هوَ: $x = \frac{2}{3}, y = \frac{4}{9}$، ونقطةُ تقاطعِ المنحنييْنِ الوحيدةُ هيَ: $(\frac{2}{3}, \frac{4}{9})$.



أتحقق من فهمي

تُمثِّلُ المعادلةُ $y = x^2 + 2x$ مسارَ مُتزلِّجٍ على الجليدِ، في حينِ تُمثِّلُ المعادلةُ $y = x^2 - x + 5$ مسارَ مُتزلِّجٍ آخرَ. أَبحثُ عنْ جميعِ النقاطِ التي قدْ يصطدمُ عندَها المُتزلِّجانِ إذا لمْ يكونا حذريْنِ.

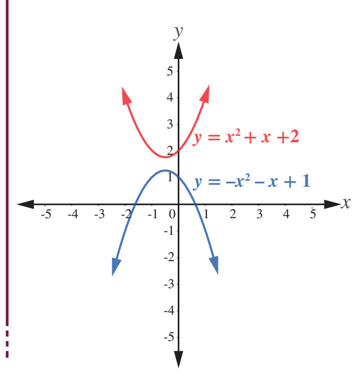
عرضْنا في المثاليْنِ السابقيْنِ أنظمةَ معادلاتٍ تربيعيةٍ لها حَلّانِ أوْ حَلٌّ واحدٌ. ولكنْ، هلْ يوجدُ دائمًا حَلٌّ للنظامِ المُكوَّنِ منْ معادلتيْنِ تربيعيتيْنِ؟ أدرسُ المثالَ الآتيَ.

مثال 3

أَحُلُّ نظامَ المعادلاتِ الآتيَ

$$\mathbf{y = x^2 + x + 2}$$
$$\mathbf{y = -x^2 - x + 1}$$

عندَ تمثيلِ المعادلتيْنِ بيانيًّا كما في الشكلِ المجاورِ، يُلاحَظُ عدمُ وجودِ نقاطِ تقاطعٍ بينَ منحنييْهِما؛ ما يعني عدمَ وجودِ حَلٍّ لنظامِ المعادلاتِ. أَتحقَّقُ منْ ذلكَ جبريًّا.



بدايةً، يجبُ مساواةُ معادلتَيِ النظامِ المعطى، ثمَّ حَلُّ المعادلةِ التربيعيةِ الناتجةِ لإيجادِ قيمةِ x:

بمساواةِ المعادلتيْنِ $x^2 + x + 2 = -x^2 - x + 1$

بالتبسيطِ $2x^2 + 2x + 1 = 0$

بعـدَ ذلكَ نجد قيمةِ المُميِّزِ $b^2 - 4ac$ لتحديدِ إذا كانَ للمعادلةِ التربيعيةِ الناتجةِ حَلٌّ أمْ لا. قيمُ المعاملاتِ هي: $a = 2, b = 2, c = 1$، وبالتعويض في المميزِ ينتج: $(2)^2 - 4(2)(1) = -4$

قيمةُ المميزِ سالبةٌ. إذنْ، لا يوجدُ حَلٌّ للمعادلةِ.

أتحقق من فهمي

هل يوجد حل لنظام المعادلات الآتي؟

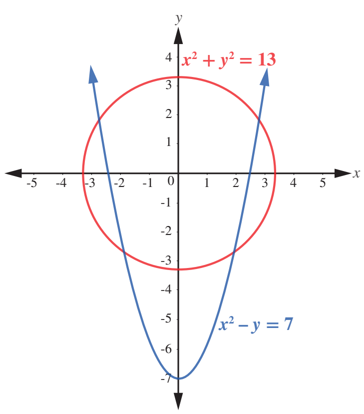
$$y = x^2 + 4$$
$$y = -x^2 + 2$$

عرضْنا في الأمثلةِ السـابقةِ أنظمةً لها حَلّانِ، أوْ حَلٌّ واحدٌ، أوْ ليسَ لها حَلٌّ. ولكنْ، هلْ يوجد نظام مكون من معادلتين تربيعيتين له ثلاثة حلول أو أربعة حلول؟ أَدرسُ المثالَ الآتيَ.

مثال 4

أَحُلُّ نظامَ المعادلاتِ التربيعية الآتيَ، ثمَّ أَتحقَّقُ منْ صِحَّةِ الحَلِّ:

$$x^2 + y^2 = 13$$
$$x^2 - y = 7$$



عنـدَ تمثيـلِ المعادلتيْنِ بيانيًّا كما في الشـكلِ المجـاورِ، يُلاحَظُ وجودُ 4 نقـاطِ تقاطعٍ بينَ منحنييْهِما؛ ما يعني وجودَ أربعةِ حلولٍ لنظامِ المعادلتين. أَتحقَّقُ منْ ذلكَ جبريًّا.

يظهرُ المُتغيِّرُ x في كلتا المعادلتيْنِ بالقوَّةِ نفسِـها؛ لذا يُمكِنُني استعمالُ الحذفِ للتخلُّصِ منْ هذا المُتغيِّرِ، ثمَّ حَلُّ المعادلةِ التربيعيةِ الناتجةِ التي تحوي مُتغيِّرًا واحدًا هوَ y:

$$x^2 + y^2 = 13$$
$$(-) \quad x^2 - y = 7$$

$$y^2 + y = 6 \quad \text{بالطرحِ}$$

$$y^2 + y - 6 = 0 \quad \text{بطرحِ 6 منْ كلا الطرفيْنِ}$$

يُمكنُني حَلُّ المعادلةِ التربيعيةِ الناتجةِ باستعمالِ القانونِ العامِّ، أوِ التحليلِ.

$$(y + 3)(y - 2) = 0 \quad \text{بالتحليلِ}$$

إذنْ: $y = -3 \, , \, y = 2$

أُعوِّضُ قيمتَيْ y في إحدى معادلتَي النظامِ لإيجادِ قيمِ x

$$x^2 = -3 + 7 \quad \text{بتعويضِ قيمة } y = -3$$

بحل المعادلة $x = \pm 2$

إذن، $x = 2 , x = -2$

بتعويض قيمة $y = 2$ $x^2 = 2 + 7 = 9$

بحل المعادلة $x = \pm 3$

إذنْ، توجدُ أربعةُ حلولٍ للنظامِ، هيَ: $(-3 , 2)$ ، وَ$(3 , 2)$ ، وَ $(2 , -3)$، وَ$(-3 , 2)$.

أَتحقَّقُ منْ صِحَّةِ هذهِ الحلولِ بتعويضها في كل من معادلتي النظام.

أتدرب وأحل المسائل

أَحُلُّ كلًّا منْ أنظمةِ المعادلاتِ التربيعيةِ الآتيةِ، ثمَّ أَتحقَّقُ منْ صِحَّةِ الحَلِّ:

1) $y = 2x^2 + x - 5$
$y = -x^2 - 2x - 5$

2) $y = x^2 - 4x + 1$
$y = -2x^2 - 4$

3) $y = x^2 + 1$
$y = 2x^2 - 3$

4) $y = x^2 + x + 1$
$y = -x^2 + x - 2$

5) $y = -x^2 + 5x$
$y = x^2 - 5x$

6) $y = x^2$
$y = x^2 + x + 6$

7) $y = -x^2 + 6x + 8$
$y = -x^2 - 6x + 8$

8) $x^2 + y^2 = 16$
$y = x^2 - 5$

9) $x^2 + y^2 - xy - 21 = 0$
$x^2 - 8y^2 + 2xy = 0$

10) $5x^2 - 2y^2 = 18$
$3x^2 + 5y^2 = 17$

11) $x^2 + x\,y = 4$
$2xy - y^2 = -3$

12) $x^2 - y^2 = 24$
$x^2 = (y + 4)^2$

13) أجد نقاط التقاطع بين الدائرتين:

$$x^2 + (y - 2)^2 = 4$$
$$x^2 + y^2 = 9$$

14) **بركة:** بركة ماء على شكل متوازي مستطيلات، ارتفاعها 2m، وقاعدتها مستطيلة الشكل مساحتها تساوي 8m^2، وطول قطرها يساوي $2\sqrt{5}\ \text{m}$. فما حجمها؟

15) **فيزياءُ:** قُذِفَتْ كرتانِ رأسيًّا في الوقتِ نفسِهِ منْ موقعيْنِ مختلفيْنِ. إذا كانَتِ المعادلةُ $y = -10t^2 + 50t + 12$ تُمثِّلُ ارتفــاعَ الكرةِ الأولى بالأمتارِ بعدَ مرورِ t ثانيةً، وكانَتِ المعادلةُ $y = -10t^2 + 40t + 15$ تُمثِّلُ ارتفاعَ الكرةِ الثانيةِ، فأَجِدُ الزمنَّ الذي يتساوى عندَهُ ارتفاعُ كلٍّ منَ الكرتيْنِ، ثمَّ أَجِدُ ارتفاعَ كلِّ كرةٍ في تلك اللحظة.

16 **ثقافةٌ ماليةٌ:** بالعودةِ إلى مقدمةِ الدرسِ، أَستعملُ نظامَ المعادلاتِ المعطى لإيجادِ نقاطِ التوازنِ التي يتساوى عندَها العرضُ والطلبُ.

17 عددان، مجموع مربعيهما يساوي 58، والفرق بين مربعيهما يساوي 40، فما العددان؟

18 قطعة أرض على شكل مثلث متطابق الضلعين طول ضلعه المتطابق 50 m، ومساحته $1200\ m^2$. جد طول قاعدته وارتفاعه.

مهارات التفكير العليا

19 **تبرير:** قالت زينب أنه لايوجد حل لنظام المعادلات الآتي:

$$x^2 + y^2 = 4$$
$$x^2 + y^2 = 9$$

دون حل النظام جبريا أفسر سبب إجابتها.

20 **مسألةٌ مفتوحةٌ:** أَكتبُ نظامًا مكونًا من معادلتين تربيعيتين ليسَ لهُ حَلٌّ.

21 **تحدٍّ:** أَحُلُّ نظامَ المعادلاتِ الآتيَ:

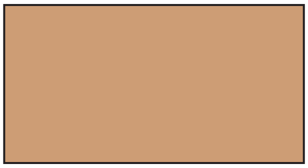
$$x^2 - 3xy + 2y^2 = 0$$
$$x^2 + xy = 6$$

22 **مسألةٌ مفتوحةٌ:** أكتب نظاما من معادلتين تربيعيتين، تكون النقطة (5, 3) إحدى حلوله.

23 **تحدٍّ:** ورقةٌ مستطيلةُ الشكلِ، مجموعُ مربَّعَيْ طولِها وعرضِها 300 cm، طُوِيَتْ بموازاةِ الضلعِ الأطولِ، فتشكَّلَتْ أسطوانةٌ حجمُها $40\ cm^3$. أَجِدُ بُعْدَيِ الورقةِ.

إرشاد

أَفترضُ أنَّ طولَ المستطيلِ هوَ x، وأنَّ عرضَهُ هوَ y. أَكتبُ نظامَ معادلاتٍ يُمثِّلُ المسألةَ، ثمَّ أَحُلُّهُ.



الدرس 4

العباراتُ والمقاديرُ الأُسِّيَّةُ

Exponential Terms and Expressions

فكرةُ الدرسِ معرفة الأسس النسبية وتبسيطها.

المصطلحاتُ الأُسُّ النسبيُّ.

مسألةُ اليومِ تستغرق الزمبقة المائية 26 يومًا لتنمو بصورةٍ كاملةٍ. إذا علمْتُ أنَّ الزهرة تنمو يوميًّا بمقدارِ الضِّعْفِ عنِ اليومِ السابقِ، فكمْ يومًا يَلزمُها لتصلَ إلى نصفِ مرحلةِ النموِّ؟

مراجعةُ المفاهيمِ

لأيِّ عددٍ حقيقيٍّ a، إذا كانَ n وَ m عددينِ صحيحينِ موجبينِ $(n > 1)$ ، فإنَّ: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$ ، إلّا إذا كانَتْ $a < 0$ ، وَ n عددًا زوجيًّا، فإنَّ الجذرَ يكونُ عددًا غيرَ حقيقيٍّ.

مثال 1

أَجِدُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

1 $27^{\frac{1}{3}}$

$27^{\frac{1}{3}} = \left(\sqrt[3]{27}\right)^1$ بكتابة المقدارَ في صورةِ الجذرِ الثالثِ

$= \sqrt[3]{3\times3\times3}$ بتحليل العدد 27 إلى عواملِهِ الأوليةِ

$= 3$

2 $4^{\frac{3}{2}}$

$4^{\frac{3}{2}} = \left(\sqrt{4}\right)^3$ بكتابة المقدار في صورةِ الجذرِ التربيعي مرفوعًا للأُسِّ 3

$= \left(\sqrt{2\times2}\right)^3$ بتحليل العدد 4 إلى عواملِهِ الأوليةِ

$= (2)^3$

$= (2 \times 2 \times 2)$ تعريف الاسس

$= 8$

أَتذكَّرُ

لأيِّ عددٍ حقيقيٍّ a، إذا كانَ n عددًا صحيحًا موجبًا، فإنَّ:

$a^n = \underbrace{a\times a\times a\times a\times \ldots \times a}_{n \text{ مرة}}$

ويُسمّى a الأساسَ، وَ n الأُسَّ.

3 $(81)^{-\frac{5}{4}}$

$(81)^{-\frac{5}{4}} = (\sqrt[4]{81})^{-5}$ الصورة الجذرية

$= (\sqrt[4]{3 \times 3 \times 3 \times 3})^{-5}$ بتحليل العددَ 81 إلى عواملِهِ الأوليةِ

$= (3)^{-5}$

$= \frac{1}{(3)^5}$ تعريف الأُسِّ السالبُ

$= \frac{1}{(3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3)}$ تعريف الأسس

$= \frac{1}{243}$

4 $(-8)^{\frac{7}{3}}$

$(-8)^{\frac{7}{3}} = (\sqrt[3]{-8})^{7}$ الصورة الجذرية

$= (\sqrt[3]{-2 \times -2 \times -2})^{7}$ بتحليل العدد -8 الى عواملة الاولية

$= (-2)^7$

$= -128$

5 $(-9)^{\frac{1}{2}}$

$(-9)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-9}$ عددٌ غيرُ حقيقيٍّ

أتذكّر

لأيِّ عــددٍ حقيقيٍّ $a \neq 0$، فإنَّ: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$. وإذا كانَ a مرفوعًا للقوَّةِ السالبةِ في المقامِ، فإنَّ: $\frac{1}{a^{-n}} = a^n$.

أتذكّر

لا يوجدَ عددٌ حقيقيٌّ مربَّعُهُ عدد سالبٌ.

فمثلًا: $a^2 \neq -4$

أتحقق من فهمي

أَجِدُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

1 $32^{\frac{1}{5}}$ 2 $9^{\frac{5}{2}}$ 3 $(16)^{-\frac{5}{4}}$ 4 $(-25)^{\frac{1}{2}}$

مراجعةُ المفاهيمِ

خصائصُ ضربِ القوى وقسمتِها

لأيِّ عددَيْنِ حقيقيَّيْنِ a و b وعددَيْنِ صحيحيْنِ n, m و فإنَّ:

1 $a^n \times a^m = a^{n+m}$ ضربُ القوى

2 $(a^n)^m = a^{n \times m}$ قوَّةُ القوى

3 $(ab)^n = a^n \times b^n$ قوَّةُ ناتجِ الضربِ

4 $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} , a \neq 0$ قسمةُ القوى

5 $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} , a , b \neq 0$ قوَّةُ ناتجِ القسمةِ

تنطبقُ خصائصُ ضربِ القوى وقسمتِها التي درسْتُها سابقًا للأسسِ الصحيحةِ على **الأسسِ النسبيةِ (rational exponents)** أيضًا.

مثال 2

أَجِدُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

1 $y^{-\frac{5}{2}} \times y^{\frac{3}{2}}$

$y^{-\frac{5}{2}} \times y^{\frac{3}{2}} = y^{-\frac{5}{2}+\frac{3}{2}}$ ضربُ القوى

$= y^{-1}$ بجمع الأسس

$= \frac{1}{y}$ تعريف الاس السالب

2 $(x^{\frac{4}{3}})^{\frac{1}{2}}$

$(x^{\frac{4}{3}})^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{4}{3}\times\frac{3}{2}}$ قوّةُ القوى

$= x^{\frac{2}{3}}$

$= \sqrt[3]{x^2}$ الصورة الجذرية

3 $(a \times b^2)^{\frac{3}{2}}$

$(a \times b^2)^{\frac{3}{2}} = a^{\frac{3}{2}} \times b^{2\times\frac{3}{2}}$ قوّةُ ناتج الضربِ

$= \sqrt{a^3} \times b^3$ الصورةُ الجذريةُ

4 $\dfrac{z^{\frac{7}{8}}}{z^{\frac{1}{8}}}$

$\dfrac{z^{\frac{7}{8}}}{z^{\frac{1}{8}}} = z^{\frac{7}{8}-\frac{1}{8}}$ قسمةُ القوى

$= z^{\frac{6}{8}}$

$= z^{\frac{3}{4}}$ بتبسيط الأُسِّ

$= \sqrt[4]{z^3}$ الصورةُ الجذريةُ

أَتذكَّرُ

تنقسمُ الجذورُ بحسبِ دليلِ الجـذرِ إلى نوعيْـنِ، هما: الجذورُ الفرديةُ، والجذورُ الزوجيةُ.

5 $\left(\dfrac{x^4}{y^2}\right)^{\frac{3}{4}}$

$$\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\frac{3}{4}} = \frac{x^{4\times\frac{3}{4}}}{y^{2\times\frac{3}{4}}}$$ قوَّةُ ناتجِ القسمةِ

$$= \frac{x^3}{y^{\frac{3}{2}}}$$ قوة القوى

$$= \left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right)^3$$ الصورة الجذرية

6 $\dfrac{\sqrt[5]{x^4}}{\sqrt[3]{x^2}}$

$$\frac{\sqrt[5]{x^4}}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{x^{\frac{4}{5}}}{x^{\frac{2}{3}}}$$ تعريف الأُسِّ النسبيِّ

$$= x^{\frac{4}{5}-\frac{3}{2}}$$ قسمةُ القوى

$$= x^{\frac{2}{15}}$$

$$= \sqrt[15]{x^2}$$ الصورةُ الجذريةُ

أتحقق من فهمي

أَجِدُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

1 $a^{\frac{2}{3}} \times a^{-\frac{3}{7}}$

2 $\left(x^{\frac{5}{2}}\right)^{-\frac{7}{5}}$

3 $(y \times z)^{\frac{5}{4}}$

4 $\dfrac{x^{\frac{9}{2}}}{x^{\frac{8}{5}}}$

5 $\left(\dfrac{x}{y^2}\right)^{-\frac{3}{2}}$

6 $\dfrac{\sqrt[5]{x^2}}{\sqrt[7]{x^3}}$

مفهوم أساسي

تكونُ العبارةُ الأُسِّيَّةُ في أبسطِ صورةٍ إذا:

1 ظهرَ الأساسُ مَرَّةً واحدةً، وكانَتِ الأسسُ جميعُها موجبةً.

2 لمْ تتضمَّنِ العبارةُ قوَّةَ القوى.

3 كانتِ الكسورُ والجذورُ جميعُها في أبسطِ صورةٍ.

مثال 3

أَكتبُ كلًا مما يأتي في أبسطِ صورةٍ، علمًا بأنَّ أيًا منَ المُتغيِّراتِ لا يساوي صفرًا:

1 $\dfrac{(6x^{\frac{4}{3}})(y^{\frac{-7}{5}})}{(2x^{\frac{-8}{3}})(y^{\frac{-2}{5}})}$

$\dfrac{6x^{\frac{4}{3}}y^{-\frac{7}{5}}}{2x^{\frac{-8}{3}}y^{\frac{-2}{5}}} = \left(\dfrac{6}{2}\right)\times\left(x^{\frac{4}{3}-\frac{-8}{3}}\right)\times\left(y^{\frac{-7}{5}-\frac{-2}{5}}\right)$ قسمةُ القوى

$= 3x^{4}y^{-1}$

$= \dfrac{3x^{4}}{y}$ الاس السالب

2 $\dfrac{(3xy^{\frac{3}{2}})(6y^{\frac{2}{5}})}{(9x^{\frac{-3}{2}})(x^{\frac{5}{2}}y^{\frac{4}{10}})}$

$\dfrac{(3xy^{\frac{3}{2}})(6y^{\frac{2}{5}})}{(9x^{\frac{-3}{2}})(x^{\frac{5}{2}}y^{\frac{4}{10}})} = \dfrac{3\times 6}{9}\times\dfrac{x}{x^{\frac{-3}{2}+\frac{5}{2}}}\times\dfrac{y^{\frac{3}{2}+\frac{2}{5}}}{y^{\frac{4}{10}}}$ ضربُ القوى

$= 2\times\dfrac{x}{x^{1}}\times\dfrac{y^{\frac{19}{10}}}{y^{\frac{4}{10}}}$ بالتبسيط

$= 2x^{1-1}y^{\frac{19}{10}-\frac{4}{10}}$ بقسمة القوى

$= 2x^{0}y^{\frac{3}{2}}$ تعريف الأس الصفريُّ

$= 2\sqrt{y^{3}}$ الصورةُ الجذرية

3 $\sqrt[3]{64x^{12}y^{3}}$

$\sqrt[3]{64x^{12}y^{3}} = (64x^{12}y^{3})^{\frac{1}{3}}$ صورة الاس النسبي

$= (64)^{\frac{1}{3}}(x)^{\frac{12}{3}}(y)^{\frac{3}{3}}$ قوّةُ ناتجِ الضرب

$= 4x^{4}y$

أتحقق من فهمي

أَكتبُ كلا مما يأتي في أبسطِ صورةٍ، علمًا بأنَّ أيًا منَ المُتغيِّراتِ لا يساوي صفرًا:

1 $\dfrac{9x^{-\frac{3}{4}}y}{3x^{\frac{7}{2}}y^{-\frac{5}{3}}}$

2 $\dfrac{(125y^{-\frac{9}{2}})(10xy^{\frac{10}{3}})}{(5x^{\frac{5}{2}}y)(y^{-\frac{3}{7}})}$

3 $\sqrt[4]{16x^{18}y^{22}}$

أفهم

إذا كانت $n = m$ فإنَّ:

$1 = \dfrac{a^{n}}{a^{m}} = a^{n-n} = a^{0}$

إذن، $a^{0} = 1$

أتدرب وأحل المسائل

أَجِدُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

1) $512^{\frac{1}{9}}$ 2) $125^{\frac{2}{3}}$ 3) $36^{-\frac{1}{2}}$

4) $(-243)^{\frac{6}{5}}$ 5) $(-25)^{\frac{3}{2}}$ 6) $(-8)^{\frac{7}{3}}$

أَجِدُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

7) $z^{-\frac{4}{2}} \times z$ 8) $(x^{\frac{3}{5}})^{\frac{5}{7}}$ 9) $(a^3 \times b)^{\frac{2}{3}}$

10) $\dfrac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{7}{2}}}$ 11) $\left(\dfrac{a^3}{b^6}\right)^{\frac{1}{3}}$ 12) $\dfrac{\sqrt[2]{y^3}}{\sqrt[6]{y^9}}$

13) $x \div x^{\frac{1}{2}}$ 14) $t^{-\frac{1}{3}} \times t^{-\frac{3}{2}}$ 15) $\dfrac{k^{\frac{1}{2}} \times k^{\frac{3}{2}}}{k^2}$

أَكتبُ ما يأتي في أبسطِ صورةٍ، علمًا بأنَّ أيًّا منَ المُتغيِّراتِ لا يساوي صفرًا:

16) $\left(\dfrac{15x^{\frac{4}{3}}y^{-\frac{7}{3}}}{5x^{-\frac{3}{2}}y^{\frac{2}{11}}}\right)^{-\frac{2}{5}}$ 17) $\dfrac{27x^{\frac{7}{3}}y^{-\frac{4}{2}}xz^2}{\left(3x^2y^{-\frac{5}{4}}\right)\left(3x^{\frac{3}{5}}y^5\right)}$ 18) $\dfrac{(a^2b^3)^{-2} \times ab^4}{a^{-1}b^2}$

19) $\dfrac{(8p^{-6}q^3)^{\frac{2}{3}}}{(27p^3q)^{-\frac{1}{3}}}$ 20) $\dfrac{(x^2y)^{\frac{1}{3}}(xy^2)^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}}$ 21) $\dfrac{(4x^{-1}y^{\frac{1}{3}})^{\frac{3}{2}}}{(xy)^{\frac{3}{2}}}$

مهارات التفكير العليا

تحدٍّ: أَجِدُ قيمةَ كلٍّ منْ a وَ b في كلٍّ ممّا يأتي:

22) $3^a x^b = \dfrac{27x^{\frac{7}{3}}}{x^{\frac{1}{2}}}$ 23) $\dfrac{(x^2y^3)^{-\frac{1}{2}}}{\left(x^{-3}y^{\frac{1}{4}}\right)^{-2}} = x^a y^b$ 24) $\dfrac{x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}}}{x - x^2}$

25) **تحدٍّ:** تتضاعفُ عيِّنةٌ في المختبرِ 3 مَرّاتٍ كلَّ أسبوعٍ. إذا علمْتُ أنَّ فيها 7300 خليةٍ بكتيريةٍ، فكمْ خليةً سيصبح فيها بعدَ مرورِ 5 أسابيعَ؟

تحدٍّ: أَكتبُ ما يأتي في أبسطِ صورةٍ، علمًا بأنَّ أيًّا منَ المُتغيِّراتِ لا يساوي صفرًا:

26) $\dfrac{r^{\frac{3}{2}} + r^{\frac{5}{2}}}{r^2 + r^3}$ 27) $\dfrac{y^{-\frac{1}{2}} - 2y^{-\frac{3}{2}}}{y^{\frac{1}{2}} - 2y^{-\frac{1}{2}}}$ 28) $\dfrac{1 + x}{2x^{\frac{1}{2}}} + x^{\frac{1}{2}}$

الدرس
5

حَلُّ المعادلةِ الأُسِّيَّةِ
Solving Exponential Equation

فكرةُ الدرسِ حَلُّ معادلاتٍ أُسِّيَّةٍ، حَلُّ أنظمةِ معادلاتٍ أُسِّيَّةٍ.

المصطلحاتُ المعادلة الأسية، جملة المبلغ.

مسألة اليوم يُمثِّلُ المقدارُ 3^{t-2} عددَ الخلايا البكتيريةِ في تجربةٍ مخبريةٍ بعدَ مرورِ t منَ الساعاتِ. ما عددِ الخلايا البكتيريةِ بعدَ 27 ساعةً؟

المعادلةُ الأُسِّيَّةُ (exponential equation) هيَ معادلةٌ تتضمَّنُ قوًى أُسُسُها مُتغيِّراتٌ، ويتطلَّبُ حَلُّها كتابةَ طرفَيِ المعادلةِ بصورةِ قوَّةٍ للأساسِ نفسِهِ، ثمَّ المقارنةَ بينَ أُسَّيِ الطرفيْنِ، وَفقَ القاعدةِ التي نصُّها: "إذا تساوَتْ قوَّتانِ لهُما الأساسُ نفسُهُ، فإنَّ أُسَّيْهِما متساويانِ".

مثال 1

أَحُلُّ المعادلاتِ الأُسِّيَّةَ الآتيةَ:

1 $5^{3x+2} = 25^{x-1}$

$5^{3x+2} = (5^2)^{x-1}$ $5^2 = 25$

$5^{3x+2} = 5^{2(x-1)}$ الأساسانِ متساويانِ

$3x + 2 = 2x - 2$ بمساواة الأسس

$x = -4$ بحل المعادلة

2 $8^x = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^x$

$(2^3)^x = 2 \times (2^{-1})^x$ قوَّةُ القوى

$2^{3x} = 2 \times 2^{-x}$ ضربُ القوى

$2^{3x} = 2^{-x+1}$ بمساواة الأسس

$3x = -x + 1$ بحل المعادلة

$x = \frac{1}{4}$

أَبحثُ: قوة العدد 2 أو 2^x مهمة جدًا في علم الحاسوب. لماذا؟

3 $49^{x+1} = \frac{\sqrt{7}}{7}$

$(7^2)^{x+1} = \frac{7^{\frac{1}{2}}}{7}$ صورة الاس النسبي

$7^{2x+2} = \frac{7^{\frac{1}{2}}}{7}$ قوَّةُ القوى

$7^{2x+2} = 7^{\frac{1}{2}-1}$ قسمةُ القوى

$7^{2x+2} = 7^{-\frac{1}{2}}$ الأساسانِ متساويانِ

$2x + 2 = -\frac{1}{2}$ بمساواة الاسس

$x = -\frac{5}{4}$ بحل المعادلة

أتحقق من فهمي

أَحُلُّ المعادلاتِ الأُسِّيَّةَ الآتيةَ:

1 $4^{x-5} = 32^{2x+1}$

2 $9^x = 3 \times (\frac{1}{3})^x$

3 $625^{2x+1} = \frac{5}{\sqrt{5}}$

الصيغةُ العامةُ للاقترانِ الأسيِّ هيَ: $y = a(b)^x$ ، حيثُ a وَ b عددانِ حقيقيانِ، وَ $a \neq 1, b \neq 1, b > 0$

مثال 2 من الحياة

بدأَتْ دعاءُ تجربتَها في مختبرِ العلومِ باستعمالِ 5000 خليةٍ بكتيريةٍ. وبعدَ مرورِ 3 ساعاتٍ لاحظَتْ أنَّ عددَ الخلايا البكتيريةِ قدْ أصبحَ 11000 خليةً، وأنَّ عددَها كانَ يتغيَّرُ بالنسبةِ نفسِها كلَّ ساعةٍ. أَكتبُ اقترانًا أسيًّا يمثل عددَ الخلايا البكتيريةِ بعدَ أيِّ عددٍ منَ الساعاتِ، ثمَّ أستعملُهُ لإيجادِ عددِ الخلايا البكتيريةِ بعدَ 12 ساعةً.

يمكن أن يحتوي الغرام الواحد من التربة على ما يقارب 10^{10} خلية بكتيرية وبأنواع مختلفة قد يبلغ عددها 5×10^4

أولًا: أجد الاقتران الأسي الذي يمثل عددَ الخلايا البكتيريةِ بعدَ أيِّ عددٍ منَ الساعاتِ. في الصيغةِ العامةِ للاقترانِ الأسيِّ، يوجدُ مُتغيِّرانِ x, y، وهما يُمثِّلانِ الزمنَ وعددَ الخلايا البكتيريةِ في تجربةِ دعاءَ. أَفترضُ أنَّ الزمنَ هوَ x، وأنَّ عددَ الخلايا البكتيريةِ هوَ y.

بدأَتْ دعاءُ تجربتَها عندَ الزمنِ $x = 0$، مُستعمِلةً 5000 خليةٍ بكتيريةٍ؛ أيْ إنَّ

الصيغة العامة للاقتران الأسي	$y = a(b)^x$
بتعويض قيمة $x = 0$ وقيمة $y = 5000$	$5000 = a(b)^0$
$b^0 = 1$	$a = 5000$
بتعويض قيمة a	$y = 5000(b)^x$

عندَ الزمنِ $x = 3$ أصبحَ العددُ 11000 خليةً بكتيريةً؛ أيْ إنَّ:

بالتعويضِ	$11000 = 5000(b)^3$
بقسمةِ كلا الطرفيْنِ على 5000	$\frac{11000}{5000} = b^3$
الجذرِ التكعيبيِّ للطرفيْنِ	$b = \sqrt[3]{\frac{11000}{5000}}$
باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ	$b \approx 1.3$

إذنْ، يُمكِنُني التعبيرُ عنْ عددِ الخلايا البكتيريةِ بعدَ x منَ الساعاتِ بالاقترانِ الأسي:

$$y = 5000(1.3)^x$$

ثانيًا: عددُ الخلايا البكتيريةِ بعدَ 12 ساعةً:

أُعوِّضُ $x = 12$ في الاقترانِ	$y = 5000(1.3)^{12}$
باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ	$y \approx 116490$

أتحقق من فهمي

بلغَ عددُ الزائرينَ لموقعٍ تعلُّميٍّ على شبكةِ الإنترنتْ 579 زائرًا في اليومِ الأولِ منْ إنشاءِ الموقعِ، وفي اليومِ التالي زادَ العددُ ليصلَ إلى 1386 زائرًا. إذا كانَ عددُ الزُّوّارِ يتغيَّرُ بالنسبةِ نفسِها كلَّ يومٍ، فأكتبُ المعادلةَ الأُسِّيةَ التي تُمثِّلُ عددَ زائري الموقعِ بعدَ أيِّ عددٍ منَ الأيامِ، ثمَّ أستعملُها لإيجادِ عددِهِمْ بعدَ 10 أيامٍ.

تستعملُ المؤسساتُ الماليةُ القانونَ $A = p(1 + r)^n$ لحسابِ **جملة المبلغ (future value)** (المبلغُ بعدَ استثمارِهِ) في حالةِ الربحِ المُركَّبِ، حيثُ يُمثِّلُ A جملةَ المبلغِ، وَ p المبلغَ الحاليَّ (المبلغُ المرادُ استثمارُهُ)، وَ r نسبةَ الربحِ، وَ n الزمنَ بالسنواتِ.

مثال 3 من الحياة

استثمرَ سليمانُ 6000 دينارٍ في شركةٍ صناعيةٍ، بنسبةِ ربحٍ مقدارُها 20%، وقدْ أصبحَ المبلغُ بعدَ n منَ السنينَ 10368 دينارًا. أحسُبُ الزمنَ n.

قانونُ جملةِ المبلغِ $A = p(1+r)^n$

بالتعويضِ $10368 = 6000\,(1+0.2)^n$

بالقسمةِ على 6000 $\frac{216}{125} = (1.2)^n$

بالتبسيطِ $\left(\frac{6}{5}\right)^3 = (1.2)^n$

الأساسان متساويان $(1.2)^3 = (1.2)^n$

بمساواةِ الأسسِ $n = 3$

إذنْ، استثمرَ سليمانُ المبلغَ مدَّةَ 3 سنواتٍ.

أتذكَّرُ

لتحويلِ 20% إلى كسرٍ عشريٍّ، أَقسِمُ على 100،

$20\% = \frac{20}{100} = 0.2$

أتحقق من فهمي

اشترى مأمونٌ أسهمًا بمبلغِ 50000 دينارٍ، بنسبةِ ربحٍ بلغَتْ 10%، وقدْ أصبحَ المبلغُ 60500 دينارٍ بعدَ n منَ السنواتِ. أَجِدُ الزمنَ n.

يُمكِنُني حَلُّ نظامٍ مُكوَّنٍ منْ معادلتيْنِ أُسِّيَّتيْنِ بكتابةِ طرفَي المعادلةِ الأولى في صورةِ قوَّةٍ للأساسِ نفسِهِ، ثمَّ مساواةِ أُسَّيِ الطرفيْنِ، ثمَّ تكرارِ ذلكَ في المعادلةِ الثانيةِ، فيتكوَّنُ نظامٌ منْ معادلتيْنِ.

مثال 4

أَحُلُّ نظامَ المعادلاتِ الآتيَ:

$$4^{2x} \times 2^y = 64$$
$$9^x \times 3^y = 81$$

المعادلةُ الأُسِّيَّةُ الأولى $4^{2x} \times 2^y = 64$

بتحليلِ العددَيْنِ 4 وَ 64 إلى عواملِهِما الأوليةِ $(2^2)^{2x} \times 2^y = 2^6$

قوَّةُ القوى $2^{4x} \times 2^y = 2^6$

ضربِ القوى $2^{4x+y} = 2^6$

بمساواةِ الأسسِ $4x + y = 6$

بتطبيقِ الخطواتِ نفسِها على المعادلةِ الثانيةِ تنتج المعادلة الخطية $2x + y = 4$

نحلُّ نظام المعادلاتِ الخطِّيِّ الناتج بالحذفِ

$$\begin{array}{rr} & 4x + y = 6 \\ (-) & 2x + y = 4 \\ \hline & 2x = 2 \end{array}$$

بطرحِ المعادلتيْنِ

$x = 1$ بالقسمةِ على 2

$4(1) + y = 6$ بتعويضِ قيمةِ x في المعادلةِ الثانية

$4 + y = 6$

$y = 2$ بحل المعادلة

اذن حل نظام المعادلات هو $x = 1 , y = 2$

أَتذكَّرُ

يُمكِنُني حَلُّ نظامِ المعادلاتِ الخطِّيِّ بالحذفِ، أوِ التعويضِ.

أتحقق من فهمي

أَحُلُّ نظامَ المعادلاتِ الآتيَ:

$$\frac{4^x}{256^y} = 64$$

$$3^{2x} \times 9^y = 243$$

أتدرب وأحل المسائل

أَحُلُّ المعادلاتِ الأُسِّيَّةَ الآتيةَ:

1) $64 = (32)^{3-x}$

2) $81^{5x+1} = 27^{4x-3}$

3) $128^{x-5} = \frac{2}{\sqrt{2}}$

4) $64^{7x+1} = \frac{2}{16^{4x-3}}$

5) $\left(\frac{11}{\sqrt{11}}\right)^{3x+1} = \left(\frac{\sqrt{33}}{11}\right)^{x+7}$

6) $\left(\sqrt{7}\right)^{4x+5} = \left(\sqrt{28}\right)^{7x-2}$

7) $9^{x^2} \times 27^{x^2} = 3^{-1}$

8) $5^{2x} \times 25^{y} = 125$

9) $2^{x^2} \times 2^{6x} = \frac{1}{32}$

أحل أنظمة المعادلات الآتية:

10) $5^y = 25^{x-3}$
$125^y = 25^{x-1}$

11) $3^y = 3^{2x+y}$
$27^y = 27^{x+3}$

12) $5^{2x} \times 25^y = 125$
$\frac{8^x}{2^y} = 16$

13 $9^{2-x} = 81^{6y}$

$\left(\frac{1}{216}\right)^{-2x-3} = 36^{3y}$

14 $\frac{16^{-x}}{64^{-3x}} = 16^{-3y^2-3}$

$8^{x^2} = \left(\frac{1}{2^{y+1}}\right)^2$

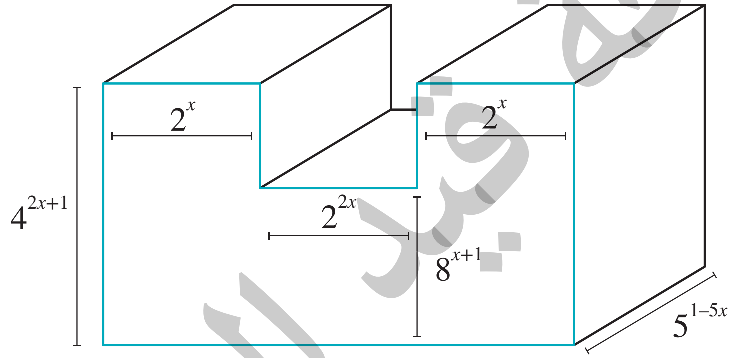
15 $\frac{1}{27} \times 9^{2-n^2} = 3^{m^2+4}$

$2m^2 + 7^{n^2} = 112$

16 **ثقافةٌ ماليةٌ:** يتضاعفُ مبلغٌ يستثمرُهُ عليٌّ 3 أضعافٍ كلَّ أسبوعٍ. إذا أصبحَ المبلغُ بعدَ 4 أسابيعَ 1701 دينارًا، فكمْ دينارًا كانَ رأسُ المالِ؟

17 **سيارة:** اشــترى سعيدٌ سيارةً بمبلغِ 15000 دينارٍ. إذا قَلَّتْ قيمةُ السيارةِ بنسبةِ 20% سنويًّا، فبعدَ كمْ سنةٍ تصبحُ قيمتُها 6144 دينارًا؟

18 **هندسةٌ:** أَكتبُ في أبسطِ صورةٍ عبارةً أُسِّيَّةً تُمثِّلُ حجمَ الشكلِ المجاورِ.



مهارات التفكير العليا

19 **تبرير:** هلْ يمكنُ حَلُّ المعادلةِ الأُسِّيَّةِ الآتيةِ: $2 + 2^x = 1$ ؟

20 **تحدٍّ:** أَحُلُّ المعادلةَ الأُسِّيَّةَ الآتيةَ:

$$x^{\frac{1}{2}} + 3x^{-\frac{1}{2}} = 4$$

21 **تحدٍّ:** ما قيمةُ كلٍّ منْ x وَ y في المعادلةِ الآتيةِ:

$$\frac{36^{x-y+1}}{54^{x+y-1}} = 48^{x+y}$$

22 **تحدٍّ:** أحل نظام المعادلات الأسية الآتي:

$$2^x + 3^y = 10$$
$$2^{x+1} + 3^{y+1} = 29$$

أَحُلُّ كلَّ نظامِ معادلاتٍ ممّا يأتي، ثمَّ أَتحقّقُ منْ صِحّةِ الحلِّ:

1 $2x + y + z = 1$
$x - y + 4z = 0$
$x + 2y - 2z = 3$

2 $x - 7y + 2z = -4$
$2x - 14y + 4z = 5$
$-3x + 21y - 6z = 1$

3 $6x - 2y - 10z = 4$
$-3x + y + 5z = -2$
$15x - 5y - 25z = 10$

4 $x + y + z = 6$
$2x - y + z = 3$
$3x = 2y - 1$

إذا كانَ c ثابتًا في نظامِ المعادلاتِ الآتي، فأَجِدُ:

$$3x - 2y = 7$$
$$x^2 - y^2 = c$$

5 حَلَّ هذا النظامِ، علمًا بأنَّ $c = 8$

6 جميعَ قيمِ c الممكنةِ التي تجعل النظام لا حل له.

7 أَحُلُّ نظامَ المعادلات الاتي علمًا بأنَّ: $3 - 7y < 6x^2$
$y = 3 - 7x$
$y = 6x^2$

8 أَجِدُ العددَيْنِ اللذيْنِ مجموعُهُما 129، ومجموعُ مربَّعَيْهِما 8433

أَحُلُّ كلَّ نظامِ معادلاتٍ تربيعيةٍ ممّا يأتي، ثمَّ أَتحقّقُ منْ صِحّةِ الحلِّ:

9 $y = x^2 - 4x + 5$
$y = -x^2 + 5$

10 $y = -x^2 - x + 12$
$y = x^2 + 7x + 12$

11 $y = x^2 - 4x + 5$
$y = -x^2 - 5$

12 $x^2 - y^2 = 24$
$x^2 = (y + 4)^2$

أَحُلُّ كلَّ نظامِ معادلاتٍ ممّا يأتي، ثمَّ أَتحقّقُ منْ صِحّةِ الحلِّ:

13 $y = 4x$
$y = 5 - x^2$

14 $y - x = 15$
$x^2 + y^2 = 64$

15 $y = x^2 - 2x - 2$
$2y = -6$

16 $y = x^2 - 1$
$y = 5 - x$

17 اشترى زيدٌ 5 kg منَ البندورةِ، و 1 kg منَ الخيارِ، و 1 kg منَ الليمونِ بمبلغِ 520 قرشًا، واشترى عوني 3 kg منَ البندورةِ، و 2 kg منَ الخيارِ، و 1 kg منَ الليمونِ بمبلغِ 470 قرشًا، واشترى عصامٌ 2 kg منَ البندورةِ، و 1 kg منَ الخيارِ، و 2 kg منَ الليمونِ بمبلغِ 440 قرشًا. ما ثمنُ الكيلوغرامِ الواحدِ لكلٍّ منَ البندورةِ، والخيارِ، والليمونِ؟

18 أَجِدُ قيمةَ كلٍّ منْ: a, b, c في المعادلةِ التربيعيةِ: $y = ax^2 + bx + c$ التي يمرُّ منحناها بالنقاطِ:
$(0, 0), (2, 4), (-3, 9)$

أَجِدُ ناتجَ كلٍّ ممّا يأتي:

19 $4^6 \times 4^{-2} \times 4^0$

20 $\dfrac{2}{2^3 \times 2^{-4}}$

21 $49^{\frac{1}{2}}$

22 $\left(\dfrac{9}{16}\right)^{\frac{3}{2}}$

23 $\left(\dfrac{8}{125}\right)^{\frac{2}{3}}$

24 $\left(\dfrac{64}{27}\right)^{\frac{2}{3}}$

أَكتبُ كلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

25 $x^{\frac{1}{2}} \times x^2$

26 $\dfrac{y \times y^{-\frac{1}{2}}}{y^{-1}}$

27 $\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^{-5}$

28 $\dfrac{(b^2)^{-\frac{1}{2}} \times b^{\frac{1}{3}}}{b^{\frac{2}{3}}}$

29 $\dfrac{(16p^4q^{-2})^{-\frac{3}{2}}}{(25p^2q)^{-\frac{1}{2}}}$

30 $\dfrac{(27a^{-2}b^{-6})^{-\frac{1}{3}}}{(8a^{-4}b^{-2})^{-\frac{1}{2}}}$

31 أُقارِنُ بيــنَ العددَيْنِ: 2^{175} وَ 5^{75} اعتمادًا على خصائصِ الأسسِ، منْ دونِ استعمالِ الآلةِ الحاسبةِ.

أَحُلُّ كلًا منَ المعادلاتِ الأُسِّيَّةِ الآتيةِ:

32 $2^{2x} = 2^{x-1}$

33 $5^{\frac{t}{2}} = 5^{2t-1}$

34 $3^{3a} = 3^{a} \times 3^{1-2a}$

35 $3^{4y} = 9^{y+1}$

36 $1000^{-m} = 100^{-\frac{2}{3m}}$

37 $7^{4x} = \dfrac{1}{49}$

38 $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n} = 16^{4-n}$

39 $27^{-\frac{1}{c}} = \left(\dfrac{1}{9}\right)^{c-\frac{5}{2}}$

40 $2^{2x} \times 3^{2} = 72$

41 $432 = 3^{x+1} \times 2^{2x}$

42 $500 = \dfrac{2^{\frac{1}{2}-x}}{5^{2x}}$

43 $4^{x} \times 2^{x^2} = 16^{2}$

أَحُلُّ كل نظامَ معادلاتِ فيما يلي:

44
$$36^{x+4} = 6^{y}$$
$$36^{y} = 36^{x+6}$$

45
$$5^{2x+4} = 5^{y-3}$$
$$7^{y-x} = 49$$

أسئلةٌ من الاختبارات المعيارية

46 العبارة الجبرية التي يجبُ وضعها فـي المربَّعِ الفارغِ للمعادلة $\dfrac{8x^2y^3}{\square} = \left(\dfrac{2y}{x}\right)^2$ هيَ:

a) $2x^4y$ b) $4x^4y^2$

c) $2xy$ d) x^2y^2

47 ما قيمة العبارة الأسية التالية؟

$$(-5)^{43} + (-1)^{43} + (5)^{43}$$

48 أجد جميع قيم p التي تجعـل منحنى المعادلةُ الخطِّيةُ $y = 2x + p$ لا يقطعُ منحنى المعادلةُ $y = x^2 + 3x - 1$.

49 أي الثلاثيات المرتبة الآتية تمثل حلًا لنظام المعادلات الخطية:

$$x + y + z = 2$$
$$x + y - z = 2$$
$$2x + 2y + z = 4$$

a) $(3x, 0, 6 + x)$ b) $(5, 1, 3)$

c) $(x, -x + 2, 0)$ d) $(0, x + 2, 3x)$

50 أكتب موقفا أشتري فيه 3 أنواع من الفاكهة. فأحدد سعر الكيلوغرام الواحد من كل نوع، ومجموع كمية الفواكه التي أحتاجها، والمبلغ الذي ســأدفعه للبائع ثمنا لها، ونسبة كمية الفواكه التي أشتريها من كل نوع.

أكتب نظام معادلات يمثل المسألة ثم أحله لأجد كمية الفاكهة التي أشتريها من كل نوع.

الوحدة 2

الدائرةُ
Circles

ما أهميةُ هذهِ الوحدةِ؟

تُعَدُّ الدائرةُ أحدَ أكثرِ الأشكالِ ظهورًا على سطحِ الأرضِ، بلْ في جميعِ الكونِ. فهيَ تظهرُ جليًّا في صورِ الكواكبِ ومساراتِها، وفي بؤبؤِ العينِ، وفي الفاكهةِ، وجذوعِ الأشجارِ، وغيرِ ذلكَ منَ المخلوقاتِ. وقدِ استفادَ الإنسانُ منَ الخصائصِ الفريدةِ لهذا الشكلِ المُعقَّدِ في مجالاتٍ عِدَّةٍ، مثلِ: الهندسةِ، والصناعةِ. ستتعلَّمُ الكثيرَ عنْ خصائصِ الدائرةِ في هذهِ الوحدةِ، ونستعملُها في حَلِّ مسائلَ حياتيةٍ.

تعلَّمْتُ سابقًا:

✓ إيجادَ محيطِ الدائرةِ، ومساحتِها.

✓ التمييزَ بينَ خصائصِ المثلثاتِ، والمثلثاتِ قائمةِ الزاويةِ، والمثلثاتِ مُتطابقةِ الضلعيْنِ.

✓ تمييزَ حالاتِ تطابُقِ المثلثاتِ، وتشابهِها.

✓ إيجادَ مجموعِ قياسِ زوايا كلٍّ منَ المثلثِ، والشكلِ الرباعيِّ.

✓ إيجادَ المسافةِ بينَ نقطتيْنِ في المستوى الإحداثيِّ.

سأتعلَّمُ في هذهِ الوحدةِ:

◄ ماهيةَ الوترِ، والقُطْرِ، والمماسِّ، وخصائصَ كلٍّ منْها، والعلاقاتِ التي تربطُ بعضَها ببعضٍ.

◄ حسابَ طولِ القوسِ، ومساحةِ القطاعِ الدائريِّ.

◄ العلاقاتِ بينَ الزوايا في الدائرةِ، والإفادةَ منْها في إيجادِ زوايا مجهولةٍ.

◄ كتابةَ معادلةِ الدائرةِ، وإيجادَ المركزِ ونصفِ القُطْرِ منْ معادلةِ دائرةٍ معلومةٍ.

◄ العلاقةَ بينَ دائرتيْنِ، وماهيَّةَ المماسّاتِ المشتركةِ.

الدرس 1

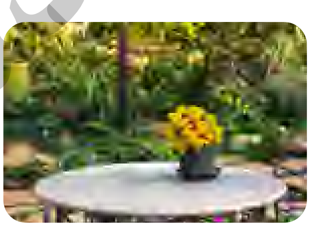
أوتارُ الدائرةِ، وأقطارُها، ومماسّاتُها

Chords, Diameters and Tangents of a Circle

فكرةُ الدرسِ معرفةُ الوتـرِ، والقُطْرِ، والمماسِّ، وخصائصِ كلٍّ منهـا، والعلاقاتِ التي تربطُ بعضَها ببعضٍ، وتوظيفُ ذلكَ في إيجادِ قياسات زوايا مجهولةٍ.

المصطلحاتُ الدائرةُ، المركـزُ، الوترُ، القـوسُ، القُطْرُ، نصفُ القُطْـرِ، المماسُّ، نقطةُ التَّماسِّ، القاطعُ.

سؤالُ اليوم في حديقةِ منزلِ عبير طاولةٌ دائريةٌ، وتريـدُ عملَ فتحةٍ عندَ مركزِها لتثبيتِ عمودٍ يحمل مِظلَّةٍ بها. كيفَ يُمكِنُ لعبير تحديدُ مركزِ الطاولةِ؟

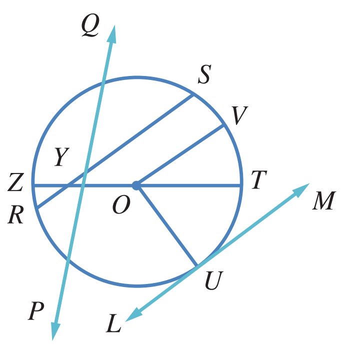


الدائرةُ (circle) هي المحلُّ الهندسيُّ لنقطةٍ تتحرَّكُ في المستوى، بحيثُ تظلُّ على البُعْدِ نفسِهِ عنْ نقطةٍ مُحدَّدةٍ تُسـمّى **مركزَ الدائرةِ (center)**. أما **الوترُ (chord)** فهو قطعةٌ مستقيمةٌ تصلُ بينَ نقطتيْنِ على الدائرةِ، ويسـمى الوترُ الذي يمرُّ بمركزِ الدائرةِ **القُطْرَ (diameter)**. القطعةُ المستقيمة التي تصلُ مركزَ الدائرةِ بنقطةٍ عليْها تُسمّى **نصفَ القُطْرِ (radius)**.

القاطعُ (secant) هو مسـتقيمٌ يقطعُ الدائرةَ في نقطتيْنِ، ويحوي وترًا في الدائرةِ. أمّا المستقيمُ الذي يشترك مع الدائرة في نقطةٍ واحدةٍ فقطْ فيُسمّى **المماسَّ (tangent)** وتسمى نقطةُ التقاءِ المماس بالدائرةِ **نقطةُ التَّماسِّ (point of contact)**.

مثال 1

في الشكلَ المجاورَ دائرة مركزها O ثمَّ أُسمّي:



1 مماسًّا للدائرةِ.

$\overleftrightarrow{LM}$

2 أنصافَ الأقطارِ جميعَها.

$\overline{OV}$, $\overline{OT}$, $\overline{OZ}$, $\overline{OU}$

رموز رياضية

ترمز LM إلى طول القطعة المسـتقيمة أما $\overline{LM}$ فترمز إلـى القطعـة المسـتقيمة نفسها.

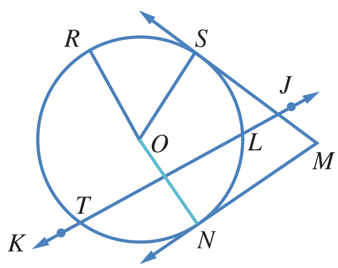
3 قُطْرًا للدائرةِ.

$\overline{ZT}$

4 وترًا للدائرةِ.

$\overline{SR}$, $\overline{ZT}$

أتحقق من فهمي



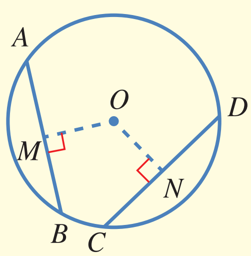
يبين الشكلُ المجاورُ دائرةً مركزها O. أُسمّي:

1 قاطعًا للدائرةِ.

2 وترًا للدائرةِ.

3 مماسًّا للدائرة.

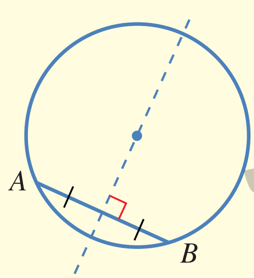
نظريات



1 الوترانِ المُتطابِقانِ يبعدانِ المسافةَ نفسَها عنْ مركزِ الدائرةِ. والوترانِ اللذانِ يبعدانِ المسافةَ نفسَها عنْ مركزِ الدائرةِ مُتطابِقانِ.

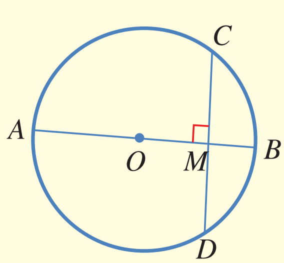
مثال: بما أن $AB = CD$ فإن $OM = ON$

وإذا كان $OM = ON$ فإن $AB = CD$



2 المُنصِّفُ العموديُّ لأيِّ وترٍ في الدائرةِ يمرُّ بمركزِها.

مثال: في الشكلِ المجاورِ، يقعُ مركزُ الدائرةِ على الخطِّ المُتقطِّعِ.



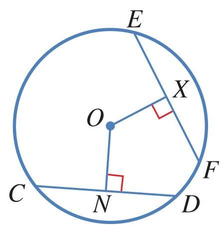
3 القُطْرُ (أوْ نصفُ القُطْرِ) العموديُّ على وترٍ في دائرةٍ يُنصِّفُ ذلكَ الوترَ.

مثال: بما أن $AB \perp CD$ فإن $MC = MD$، وإذا عامدَ القطرُ $\overline{AB}$ الوترَ $\overline{CD}$ في النقطةِ M، فإنَّ $MC = MD$.

أَتذكَّرُ

رموز رياضية

يدل الرمز $\perp$ على تعامد قطعتين أو مستقيمين.



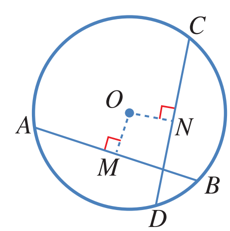
مثال 2

في الشكلِ المجاورِ، $\overline{CD}$ و $\overline{EF}$ وترانِ في دائرةٍ مركزُها O. إذا كانَ $ON = OX$ ، وَ $EF = 8$ cm، فما طولُ $\overline{NC}$؟

ON و OX يُمثِّلانِ بُعْدَيِ الوترَيْنِ CD و EF عنْ مركزِ الدائرةِ، وهما متساويانِ.

منْ معطياتِ السؤالِ	$ON = OX$
إذا تساوى بُعْدا وترَيْنِ عنْ مركزِ الدائرةِ، فهما مُتطابِقانِ	$CD = EF$
نصفُ القُطْرِ العموديِّ على وترٍ يُنصِّفُهُ	$= \frac{1}{2} CD$
الوتران $\overline{CD}$ وَ $\overline{EF}$ متطابقان	$= \frac{1}{2} EF$
بالتعويضِ	$= \frac{1}{2}(8) = 4$ cm

أتحقق من فهمي

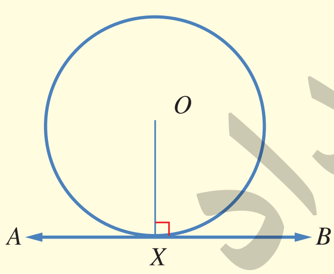


فـي الشـكلِ المجـاورِ $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$ وتـرانِ فـي دائـرةٍ مركزُهـا O. إذا كانَ $OM = ON$، وَ $CN = 12$ cm، فما طولُ $\overline{AB}$؟

نظريات

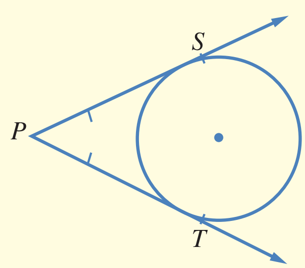
1. مماسُّ الدائرةِ يكونُ عموديًّا على نصفِ القُطْرِ المرسومِ منْ نقطةِ التَّماسِّ.

مثال: نصفُ القُطْرِ $\overline{OX}$ عموديٌّ على المماسِّ $\overleftrightarrow{AB}$.
$\overline{OX} \perp \overleftrightarrow{AB}$



2. المماسّانِ المرسومانِ للدائرةِ منْ نقطةٍ خارجَها لهُما الطولُ نفسُهُ.

مثال: $\overline{PS}$ و $\overline{PT}$ لهُما الطولُ نفسُهُ: $PS = PT$.



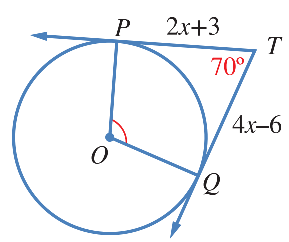
رموز رياضية

يقرأ الرمز $\overleftrightarrow{AB}$ المستقيم AB .

رموز رياضية

يدل الرمز $\overleftrightarrow{AB}$ على مماس الدائرة، أما الرمز $\overline{AB}$ فيدل على القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطة P ونقطة التماس، ويدل الرمز PT على طول هذه القطعة.

مثال 3



جبْرٌ: في الشكلِ المجاورِ، $\overleftrightarrow{TP}$ و $\overleftrightarrow{TQ}$ مماسّانِ لدائرةٍ مركزُها O:

1 أَجِدُ قيمةَ x .

مماسّانِ مرسومانِ للدائرةِ منْ نقطةٍ خارجَها	$TP = TQ$
بالتعويضِ	$2x + 3 = 4x - 6$
بإضافةِ $2x - 6$ إلى الطرفيْنِ	$2x + 3 + 6 - 2x = 4x - 6 + 6 - 2x$
بالتبسيطِ	$9 = 2x$
	$x = \frac{9}{2}$

2 أَجِدُ قياسَ الزاويةِ POQ.

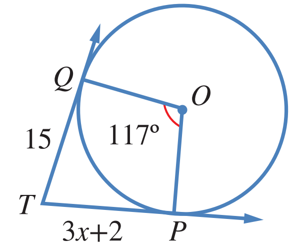
أفترضُ أنَّ قياسَ الزاويةِ POQ هوَ y:

مماسُّ الدائرةِ يتعامدُ معَ نصفِ القُطْرِ في نقطةِ التَّماسِّ	$m\angle OQT = m\angle OPT = 90°$
مجموعُ قياسِ الزوايا الداخليةِ للشكلِ الرباعيِّ هو $360°$	$90° + 70° + 90° + y = 360°$
بالتبسيطِ	$250° + y = 360°$
بطرحِ $250°$ منَ الطرفيْنِ	$y = 360° - 250° = 110°$

رموز رياضية

يرمز الحرف m في $m\angle OQT$ إلى قياس الزاوية OQT.

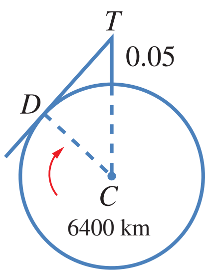
أتحقق من فهمي



في الشكلِ المجاورِ، $\overleftrightarrow{TP}$ و $\overleftrightarrow{TQ}$ مماسّانِ لدائرةٍ مركزُها O:

1 أَجِدُ قيمةَ x . **2** أَجِدُ قياسَ الزاويةِ PTQ .

مثال 4 من الحياة



أبراجٌ: يرتفعُ برجُ مراقبةٍ 50 m عنْ مستوى الأرضِ.

ما أبعدُ نقطةٍ على الأرضِ يُمكِنُ مشاهدَتُها منْ قمّةِ البرجِ، بافتراضِ أنَّ الأرضَ كرةٌ طولُ نصفِ قُطْرِها 6400 km.

أرسمُ مُخطَّطًا يُمثِّلُ المسألةَ:

الدائرةُ تُمثِّــلُ الأرضَ، وَالنقطة T تُمثِّلُ قمَّةَ البرجِ، والممــاسُّ $\overleftrightarrow{TD}$ يُمثِّلُ خطَّ البصرِ، ونقطةُ التَّماسِّ D هيَ أبعدُ نقطةٍ يُمكِنُ مشاهدَتُها منْ قمَّةِ البرجِ. ارتفاع البرج $50\text{ m} = 0.05\text{ km}$

المماسُّ يتعامدُ معَ نصفِ القُطْرِ عندَ نقطةِ التَّماسِّ	$m\angle TDC = 90°$
نظريةُ فيثاغورسْ	$(CT)^2 = (TD)^2 + (CD)^2$
بالتعويضِ	$(6400 + 0.05)^2 = (TD)^2 + (6400)^2$
باستعمالِ الحاسبةِ	$40960640.0025 = (TD)^2 + 40960000$
بطرحِ 40960000 منَ الطرفيْنِ	$6400.25 = (TD)^2$
بأخذِ الجذرِ التربيعيِّ للطرفيْنِ	$25.3 = TD$

إذنْ، المسافةُ التي تُمثِّلُ أبعدَ نقطةٍ على الأرضِ يُمكِنُ مشاهدَتُها منْ قمَّةِ البرجِ هيَ: 25 km.

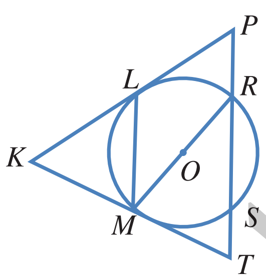
أتحقق من فهمي

برجُ مراقبةٍ: تبعدُ أقصى نقطةٍ يُمكِنُ مشاهدَتُها منْ قمَّةِ برجِ مراقبةٍ مسافةَ 32 km عنْهُ. ما ارتفاعُ قمَّةِ البرجِ عنْ سطحِ الأرضِ، علمًا بأنَّ طولَ نصفِ قطرِ الأرضِ 6400 km؟

> **أَتذكَّرُ**
>
> **نظريةُ فيثاغــورسْ**: إذا كانَ المثلثُ ABC قائمَ الزاويةِ في B، فإنَّ:
>
> $(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$

أتدرب وأحل المسائل

أدرسُ الشكلَ المجاورَ دائرة مركزها O. أُسمّي:



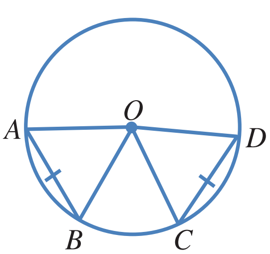
1 نصفَيْ قُطْرَيْنِ على استقامةٍ واحدةٍ.

2 وترين.

3 مماسين.

4 قاطعًا.

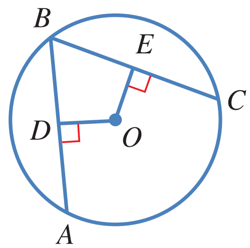
$\overline{AB}$ وَ $\overline{CD}$ وترانِ لهما الطولُ نفسُهُ في دائرةٍ مركزُها O:



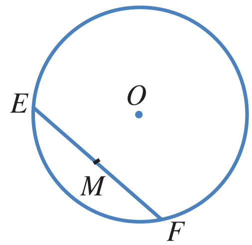
5 ما نوعُ المثلثِ AOB؟ أُبرِّرُ إجابتي.

6 هل المثلثان AOB وَ COD متطابقان؟ أبرر إجابتي.

7 إذا كانَ قياسُ الزاويةِ OAB هوَ 65°، فما قياسُ الزاويةِ COD؟



8 **جَبْرٌ**: في الشكل المجاور $\overline{AB}$ وَ $\overline{CB}$ وترانِ مُتطابِقانِ في دائرةٍ مركزُها O.
إذا كانَ $OE = x + 9$ ، وَ $OD = 3x - 7$، فما قيمةُ x؟

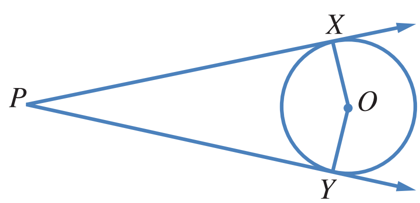


في الشكل المجاور $\overline{EF}$ وترٌ في دائرةٍ مركزُها O، والنقطةُ M هيَ منتصفُ الوترِ $\overline{EF}$:

9 هل المثلثان EOM، وَ FOM مُتطابِقانِ؟ أبرر إجابتي.

10 هل الزاويةُ EMO قائمةً؟ أبرر إجابتي.

11 إذا كانَ قياسِ الزاويةِ MOF هوَ 72^o، فما قياسُ الزاويةِ MEO؟ أبرر إجابتي.

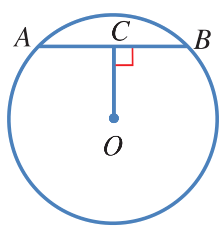


في الشكل المجاور $\overleftrightarrow{PX}$ و $\overleftrightarrow{PY}$ مماسّانِ لدائرةٍ مركزُها O:

12 هل قياسُ الزاويةِ PXO هوَ 90^o؟ أبرر إجابتي.

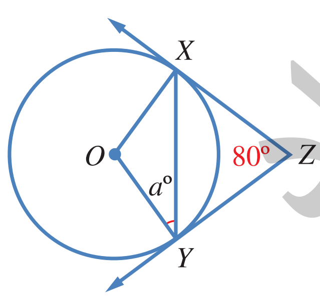
13 أُبيِّنُ أنَّ المثلثيْنِ XPO وَ YPO مُتطابِقانِ.

14 إذا كانَ قياسُ الزاويةِ XPO هوَ 17^o، فما قياسُ الزاويةِ XOY؟



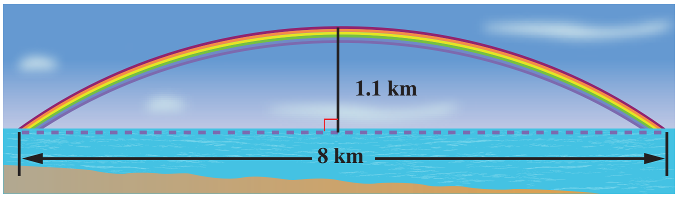
15 في الشكل المجاور $\overline{AB}$ وترٌ طولُهُ $6\ cm$ في دائرةٍ مركزُها O. إذا كانَ قياسُ الزاويةِ ACO هوَ 90^o،
وَ $OC = 4\ cm$ ، فما طولُ نصفِ قُطْرِ الدائرةِ؟

16 أَحُلُّ المسألةَ الواردةَ في بدايةِ الدرسِ.



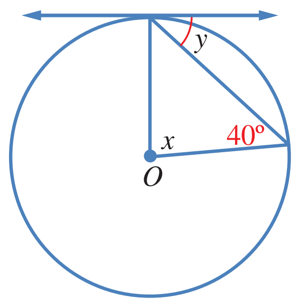
17 في الشكل المجاور $\overleftrightarrow{ZX}$ و $\overleftrightarrow{ZY}$ مماسّانِ لدائرةٍ مركزُها O. أَجِدُ قيمةَ a.

18 **قوسُ المطر**: الشكلُ الحقيقيُّ لقوسِ المطرِ هوُ دائرةٌ كاملةٌ. أمّا ما نراهُ فوقَ الأُفقِ فهوَ القوسُ الذي يُمثِّلُ جزءًا منَ الدائرةِ. أَجِدُ طولَ نصفِ قُطْرِ الدائرة التي تحوي القوسَ المُبيَّنَ في الشكلِ المجاورِ.

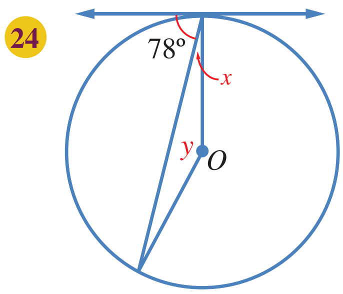


يَظهرُ في كل منَ الشكليْنِ الآتييْنِ مماسًّا لدائرةٍ مركزُها O. أَجِدُ قيمةَ x وَ y في كلِّ حالةٍ.

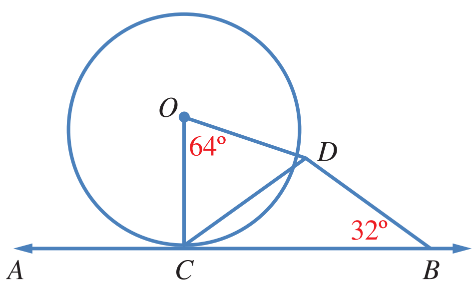
25



24

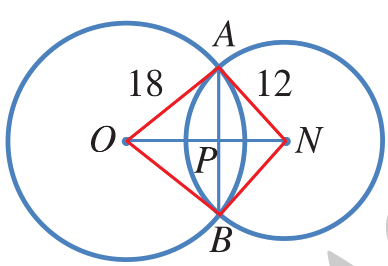


19 في الشكل المجاور $\overleftrightarrow{AB}$ مماسٌّ لدائرةٍ مركزُها O في النقطةِ C. لماذا يُعَدُّ المثلثُ BCD مُتطابِقَ الضلعيْنِ؟ أُبرِّرُ إجابتي.



مهارات التفكير العليا

20 **تحدٍّ:** $\overline{AB}$ وترٌ مشتركٌ بينَ دائرتيْنِ متقاطعتيْنِ، وهوَ عموديٌّ على القطعةِ المستقيمةِ $\overline{ON}$ الواصلةِ بينَ مركزيْهِما. إذا كانَ $AB = 14\text{ cm}$، فما طولُ $\overline{ON}$ ؟ أُبرِّرُ إجابتي.



21 **برهانٌ:** $\overline{AB}$، وَ $\overline{CD}$ وترانِ متساويانِ في دائرةٍ مركزُها N. أثبت أنَّ لهُما البُعْدَ نفسَهُ عنِ النقطةِ N.

22 **تبريرٌ:** $\overleftrightarrow{AB}$ مماسٌّ لدائرةٍ مركزُها N في النقطةِ A، وطولُ نصفِ قُطرِها 3 cm، وَ $BA = 5\text{ cm}$. تقولُ سارةُ: إنَّ $BN = 4\text{ cm}$؛ لأنَّ $(BN)^2 = (BA)^2 - (AN)^2 = 16$. هلْ قولُ سارةَ صحيحٌ؟ أُبرِّرُ إجابتي.

23 **أكتبُ:** كمْ مماسًّا يُمكِنُ أنْ يُرسَمَ للدائرةِ منْ نقطةٍ عليْها، ومنْ نقطةٍ خارجَها، ومنْ نقطةٍ داخلَها؟ أُبرِّرُ إجابتي.

الأقواسُ والقطاعاتُ الدائريةُ

Arcs and Sectors

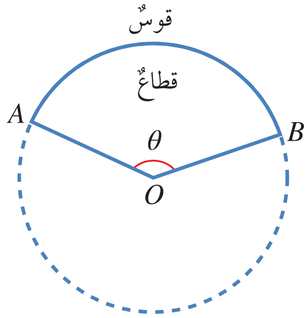
فكرةُ الدرسِ حسابُ طولِ القوسِ، ومساحةِ القطاعِ الدائريِّ، وحَلُّ مسائلَ تتعلَّقُ بهِما.

المصطلحاتُ القوسُ، القطاعُ.

سؤالُ اليومِ أَعَدَّتْ عفافُ فطيرةَ بيتزا في وعاءٍ دائريٍّ طولُ قُطْرِهِ 24 cm. وبعدَ أنْ خبزَتْها أحدثَتْ فيها شَقَّيْنِ منَ المركزِ إلى الطرفِ، بحيثُ كانَ قياسُ الزاويةِ بينَهُما 80°. كيفَ يُمكِنُ إيجادُ مساحةِ الجزءِ الذي قطعَتْهُ عفافُ منَ الفطيرةِ؟

القوسُ (arc) هو جزءٌ منَ الدائرةِ مُحدَّدٌ بنقطتيْنِ عليْها.

و **القطاعُ (sector)** هو جزءٌ منَ الدائرةِ محصورٌ بينَ قوسٍ منْها ونصفَي القُطْرَيْنِ اللذيْنِ يمرّانِ بطرفَي القوسِ.

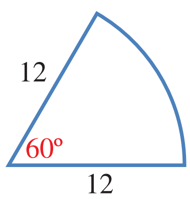


تُمثِّلُ الزاويةُ AOB زاويةَ القطاعِ الذي يُعَدُّ كسرًا منَ الدائرةِ. ويُمكِنُ استعمالُ قياس زاويةِ القطاعِ لكتابةِ هذا الكسرِ، وذلكَ بقسمةِ قياس الزاويةِ على الدورةِ الكاملةِ؛ أيْ: $\frac{\theta}{360^\circ}$، حيثُ θ قياسُ زاويةِ القطاعِ.

مثال 1

يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ قطاعًا دائريًّا. أَجِدُ:

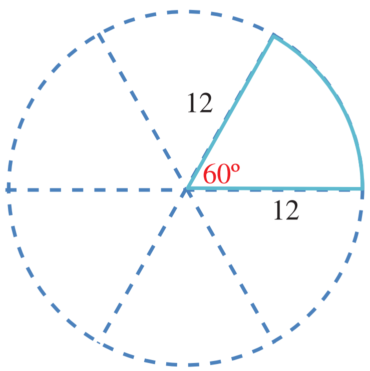
1 طولَ القوسِ (أكتب الإجابةَ بدلالةِ π).



القطاعُ كسرٌ منَ الدائرةِ، وهذا الكسرُ هوَ $\frac{60^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{6}$، وبما أن طولَ قُطْرِ الدائرةِ 24 cm، فإن طول محيطِها يساوي: $24 \times \pi = 24\pi$ cm

إذن طولُ القوسِ يساوي $\frac{1}{6}$ طول محيطِ الدائرةِ؛ أيْ:

$24\pi \div 6 = 4\pi$ cm



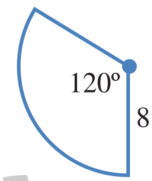
2 مساحةَ القطاعِ.

مساحةُ الدائرةِ هيَ: $\pi \times 12^2 = 144\pi \text{ cm}^2$

مساحةُ القطاعِ تساوي $\frac{1}{6}$ مساحةِ الدائرةِ؛ أيْ: $144\pi \div 6 = 24\pi \text{ cm}^2$

أتحقق من فهمي

يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ قطاعًا دائريًّا. أَجِدُ طولَ القوسِ، ومساحةَ القطاعِ الدائريِّ.



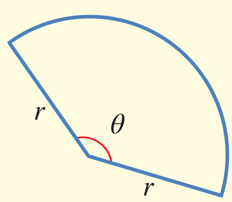
تعرَّفْنا في المثالِ الســابقِ أنَّ القطاعَ هوَ كســرٌ منَ الدائرةِ، ويُمكِنُ دائمًا استعمالُ قياس زاويةِ القطاعِ لحسابِ طولِ القوسِ ومساحةِ القطاعِ الدائريِّ.

مفهومٌ أساسيٌّ

إذا كانَ قيــاسُ زاويــةِ القطاعِ θ^o، وطولُ نصفِ قُطْــرِ الدائرةِ r، وطولُ القوسِ l، ومساحةُ القطاعِ A، فإنَّ:

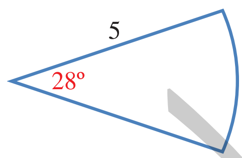
$$l = \frac{\theta}{360^o} \times 2\pi r$$

$$A = \frac{\theta}{360^o} \times \pi r^2$$



مثال 2

أَجِدُ طولَ القوسِ ومساحةَ القطاعِ في الشكلِ المجاورِ.



زاويةُ القطاعِ هيَ 28^o، وطولُ نصفِ القُطْرِ هوَ 5 وحدة طول

$l = \frac{\theta}{360^o} \times 2\pi r$ قانون طول القوس

$l = \frac{28^o}{360^o} \times \pi \times 2 \times 5$ بتعويض $\theta = 28^o, r = 5$

≈ 2.4 باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ

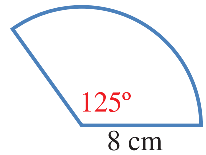
إذنْ، طولُ هذا القوسِ مُقرَّبًا إلى أقربِ منزلةٍ عشريةٍ واحدةٍ هوَ: 2.4 وحدة طول

$A = \frac{\theta}{360^o} \times \pi r^2$ قانونُ مساحةِ القطاعِ

$= \frac{28^o}{360^o} \times \pi \times 5^2$ بتعويض $r = 5, \theta = 28^o$

≈ 6.1 باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ

إذنْ، مساحةُ هذا القطاعِ مُقرَّبةً إلى أقربِ منزلةٍ عشريةٍ واحدةٍ هيَ: 6.1 وحدة مربعة.



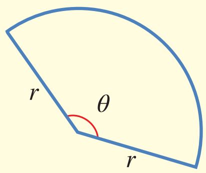
أتحقق من فهمي

أَجِدُ طولَ القوسِ ومساحةَ القطاعِ في الشكلِ المجاورِ.

مفهومٌ أساسيٌّ

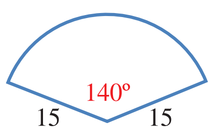
محيطُ القطاعِ الدائريِّ (L) هو المســافةُ حولَ القطاعِ، وهيَ تساوي طولَ قوسِ القطاعِ، مضافًا إليْهِ مِثْلا طولِ نصفِ قُطْرِ الدائرةِ:

$$L = \frac{\theta}{360^\circ} \times 2\pi \times r + 2r$$



مثال 3

أَجِدُ محيطَ القطاعِ الدائريِّ في الشــكلِ المجاورِ، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ منزلةٍ عشريةٍ واحدةٍ.



زاويةُ القطاعِ هيَ 140°، وطولُ نصفِ القُطْرِ هوَ 15 وحدة طول

$L = \frac{\theta}{360^\circ} \times 2\pi \times r + 2r$ قانونُ محيطِ القطاعِ

$= (\frac{140^\circ}{360^\circ} \times 2 \times \pi \times 15) + 2 \times 15$ بتعويضِ $r = 15, \theta = 140^\circ$

≈ 66.6519 باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ

إذنْ، محيطُ هذا القطاعِ مُقرَّبًا إلى أقربِ منزلةٍ عشريةٍ واحدةٍ هوَ: 66.7 وحدة طول.

رموز رياضية

يرمــزُ الحــرفُ l إلى طولِ القوسِ، ويرمــزُ الحرفُ L إلى محيطِ القطاعِ.

أتحقق من فهمي

أَجِدُ محيطَ قطــاعٍ دائريٍّ زاويتُهُ 225°، في دائرةٍ طولُ نصفِ قُطْرِها **50 cm**، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ منزلةٍ عشريةٍ واحدة.

مثال 4 من الحياة

ضُبِطَ مِرَشٌّ للمياهِ في حقلٍ على زاويةِ 135° عندَ دورانِهِ حولَ الرأسِ الذي يرتكزُ عليْهِ؛ على أنْ يصلَ الماءُ إلى مسافةِ **10 m** منَ المِرَشِّ. أَجِدُ مساحةَ المنطقةِ التي سيرويها هذا المِرَشُّ، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ منزلةٍ عشريةٍ واحدةٍ.

تُمثِّلُ المنطقةُ التي سيرويها المِرَشُّ قطاعًا دائريًّا زاويتُهُ $135°$، وطولُ نصفِ قُطْرِهِ $10\ m$:

قانونُ مساحةِ القطاعِ $A = \frac{\theta}{360°} \times \pi r^2$

بتعويضِ $r = 10, \theta = 135°$ $= \frac{135°}{360°} \times \pi \times 10^2$

باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ ≈ 117.809

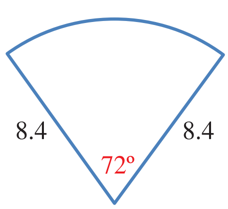
إذنْ، مساحةُ هذهِ المنطقةِ مُقرَّبةً إلى أقربِ منزلةٍ عشريةٍ واحدةٍ هيَ: 117.8^2.

أتحقق من فهمي

طولُ عقربِ الدقائقِ في ساعةِ حائطٍ هوَ 15 cm. ما المسافةُ التي يقطعُها رأسُ العقربِ في حركتِهِ بينَ العددينِ 9 وَ 2؟

أتدرب وأحل المسائل

يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ قطاعًا دائريًّا:

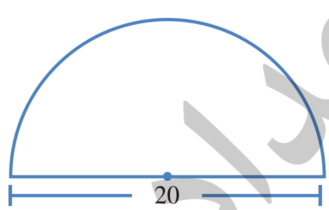


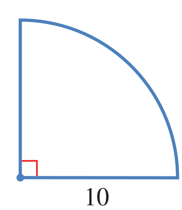
1 أُعبِّرُ بكسرٍ عنِ الجزءِ الذي يُمثِّلُهُ هذا القطاعُ منَ الدائرةِ.

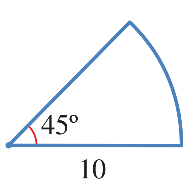
2 أَجِدُ طولَ القوسِ، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ منزلةٍ عشريةٍ واحدةٍ.

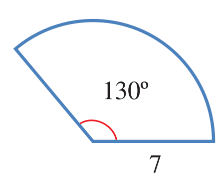
3 أَجِدُ مساحةَ القطاعِ، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ منزلةٍ عشريةٍ واحدةٍ.

أَجِدُ طولَ القوسِ ومساحةَ القطاعِ في كلٍّ منَ الأشكالِ الآتيةِ (أكتبُ الإجابةَ بدلالةِ π):

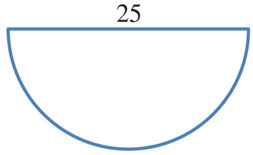
4


5


6


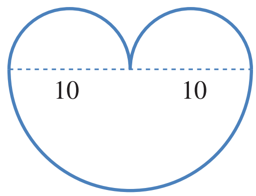
7


8 أَجِدُ مساحةَ نصفِ الدائرةِ المجاورةِ، ثمَّ أُجِدُ محيطَها.



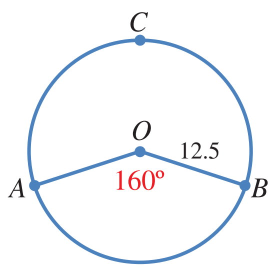
9 أَحُلُّ المسألةَ الواردةَ في بدايةِ الدرسِ.

يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ 3 أنصافِ دوائرَ:

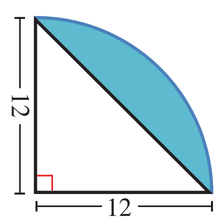


10 أَجِدُ محيطَ الشكلِ (أكتب الإجابة بدلالةِ π).

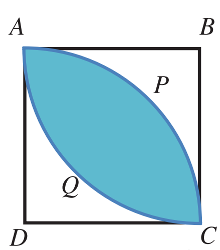
11 أَجِدُ مساحةَ الشكلِ (أكتب الإجابة بدلالةِ π).



12 تُمثِّلُ النقطةُ O مركزَ دائرةٍ، طولُ نصفِ قُطْرِها 12.5 وحدة طول.
أَجِدُ طولَ القوسِ ACB.



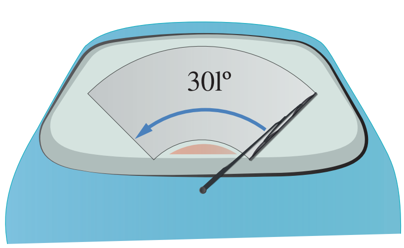
13 يمثل الشـكل المجاورِ ربعَ دائرةٍ. أَجِدُ مساحةَ الجزءِ المُظلَّلِ في الشكلِ (أكتب الإجابةُ بدلالةِ π).



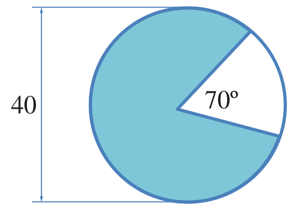
14 يُمثِّلُ الشـكلُ المجاورُ المربَّعَ $ABCD$ الذي طولُ ضلعِهِ 8 cm، ويُمثِّلُ APC وَ AQC قوسيْنِ منْ دائرتيْنِ مركزُاهُما D وَ B على التوالي. أَجِدُ مساحةَ الجزءِ المُظلَّلِ (أكتب الإجابةُ بدلالةِ π).

15 **فطائرُ:** اشـترى سـعيدٌ فطيرةَ بيتزا طولُ قُطرِها 36 cm، ثمَّ قسَّـمَها إلى قطعٍ متسـاويةٍ. بعدَ ذلكَ أكلَ منْها قطعتيْنِ تُمثِّلانِ معًـا $180\ cm^2$ منْها. أَجِدُ قياسَ الزاويةِ لقطعـةِ البيتزا الواحدةِ، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ عددٍ كليٍّ.

16 صمَّمَ مهندسٌ مِرَشَّ مياهٍ لريِّ منطقةٍ مساحتُها $100\ m^2$ على هيئةِ قطاعٍ دائريٍّ طولُ نصفِ قُطْرِهِ 15 m. ما زاويةُ دورانِ هذا المِرَشِّ؟



17 **سيارات:** يُبيِّنُ الشكلُ المجاورُ ماسحةَ الزجاجِ الأماميِّ لسيارةٍ. إذا كانَ طولُ شـفرةِ الماسحةِ 40 cm، وطولُ شـفرة الماسـحةِ معَ ذراعِها 66 cm، فما مساحةُ الزجاجِ التي تُنظِّفُها الماسحةُ، مُقرَّبةً إلى أقربِ منزلةٍ عشريةٍ واحدةٍ؟



18 **أكتشــفُ الخطأَ**: أرادَتْ كلٌّ منْ سلمى ونوالَ إيجادَ مســاحةِ المنطقةِ المُظلَّلةِ في الشكلِ المجاورِ بالوحدة المربعة. أيُّهُما كانَ حَلُّها صحيحًا؟ أُبرِّرُ إجابتي.

سلمى

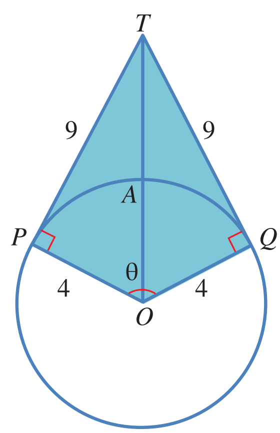
$$A = \frac{70^\circ}{360^\circ} \times \pi \times 20^2$$
$$\approx 244.3$$

نوالَ

$$A = \frac{290^\circ}{360^\circ} \times \pi \times 20^2$$
$$\approx 1012.3$$

تحدٍّ: يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ دائرةً مركزُها O، وطولُ نصفِ قُطْرِها **4 cm**.

إذا كانَ $TP = TQ = 9$ **cm**، فأَجِدُ:



19 قياسَ الزاويةِ θ.

20 طولَ القوسِ PAQ.

21 مساحةَ المنطقةِ المُظلَّلةِ في الشكلِ.

22 **مســألة مفتوحة**: أرسمُ دائرتيْنِ، نصفُ قُطْرِ الأولى مختلفٌ عنْ نصفِ قُطْرِ الثانيةِ، ثمَّ أرسمُ قطاعًا دائريًّا في كلِّ دائرةٍ، بحيثُ يكونُ للقطاعيْنِ المساحةُ نفسُها.

الدرس 3

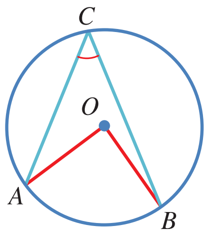
الزوايا في الدائرةِ

Angles in a Circle

فكرةُ الدرسِ معرفةُ العلاقاتِ بيـنَ الزوايا في الدائرةِ، وتوظيفُها في إيجادِ زوايا مجهولةٍ وحَلِّ مسائلَ حياتيةٍ.

المصطلحاتُ الزاويةُ المركزيةُ، الزاويةُ المحيطيةُ، القوسُ المقابلُ، الزاويةُ المقابلةُ لقُطْرِ الدائرةِ، الرباعيُّ الدائريُّ، الزاويةُ المماسيةُ.

سؤال اليوم يُمثِّلُ الشـكلُ المجاورُ تصميمًا مُكوَّنًا منْ نجمةٍ خماسـيةٍ منتظمةٍ محاطةٍ بدائرةٍ يحيطُ بها مربَّعٌ. ماذا تُسمّى الزوايا عندِ رؤوسِ النجمةِ؟ كيفَ نجدُ قياسَ كلٍّ منْها؟



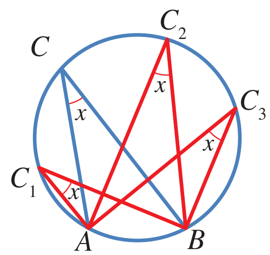
تسـمى الزاويةُ التي يكونُ رأسُـها في مركزِ الدائـرةِ، وضلعاها نصفَيْ قُطْرَيْنِ للدائرةِ **زاويةً مركزيةً (central angle)**. ففي الشكلِ المجاورِ، AOB زاويةً مركزيةً في الدائرةِ التي مركزُها O ، ويسـمى القوسُ $\overset{\frown}{AB}$ **القوسُ المقابلُ (subtended arc)**.

تسـمى الزاويةِ التي يقعُ رأسُـها على الدائرةِ، ويكونُ ضلعاها وترَيْنِ في الدائرةِ **زاويةٌ محيطيةٌ (inscribed angle)**. في الشكلِ المجاورِ، الزاويةَ ACB محيطيةَ، والزاويةَ AOB مركزيةَ، وهما مرسومتانِ على نفسِ القوسِ $\overset{\frown}{AB}$ في الدائرةِ التي مركزُها O. وعندَ قياسِ هاتيْنِ الزاويتيْنِ سنجدُ أنَّ قياسَ الزاويةِ المركزيةِ AOB يساوي مِثْلَيْ قياسِ الزاويةِ المحيطيةِ ACB.

نظريةٌ

قيـاسُ الزاويةِ المركزيةِ يسـاوي مِثْلَيْ قياسِ الزاويةِ المحيطيةِ المرسـومةِ على القوسِ نفسِهِ. $m\angle AOB = 2m\angle ACB$

إذا رسمْنا زوايا محيطيةً أُخرى مُقابِلةً للقوسِ ACB سنجدُ أنَّ لها القياسَ نفسَهُ.



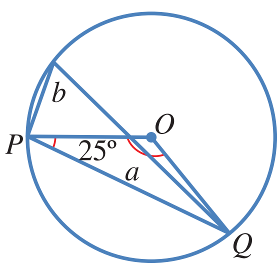
نظريةٌ

جميع الزوايا المحيطيةُ المرسومةُ على قوسٍ واحدٍ في دائرةٍ لها القياسُ نفسُهُ.

$$m\angle AC_1B = m\angle AC_2B = m\angle AC_3B = m\angle AC_4B$$

مثال 1

إذا كانَتِ النقطةُ O هيَ مركزَ الدائرةِ في الشكلِ المجاورِ، فما قياسُ الزاويتيْنِ المشارِ إليْهما بالحرفيْنِ a وَ b؟



المثلثُ OPQ مُتطابِقُ الضلعيْـنِ، لأنَّ $\overline{OQ}$ وَ $\overline{OP}$ نصفا قُطْرَيْنِ في الدائرةِ ومجموعُ قياساتِ زوايا المثلثِ يساوي $180°$، إذن؛

$m\angle POQ + m\angle OQP + m\angle OPQ = 180°$ نعوض قياسات الزوايا المعلومة.

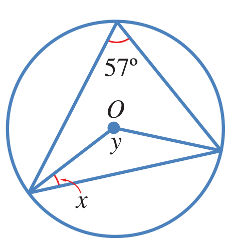
في المثلثِ مُتطابِقِ الضلعيْنِ تتطابقُ زاويتا القاعدةِ	$a + 25° + 25° = 180°$
بالتبسيطِ	$a + 50° = 180°$
بطرحِ $50°$ منَ الطرفيْنِ	$a = 180° - 50°$
	$a = 130°$
قياسُ الزاويةِ المركزيةِ يساوي مِثْلَيْ قياسِ الزاويةِ المحيطيةِ المشتركة معها بنفس القوس	$b = 130° \div 2$
	$= 65°$

أتذكر

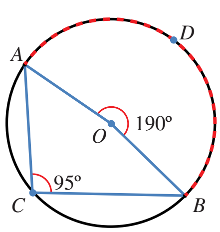
زاويتا قاعدة المثلث متطابق الضلعيـن متسـاويتان في القياس.

أتحقق من فهمي

إذا كانَتِ النقطةُ O هيَ مركزَ الدائرةِ في الشكلِ المجاورِ، فما قيمةُ كلٍّ منْ x وَ y؟

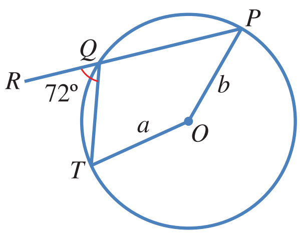


قـدْ يكونُ قيـاسُ الزاويـةِ المركزيةِ أكبـرَ منْ $180°$. ففي الشـكلِ المجاورِ، الزاويةُ AOB مقابلة للقوس $\widehat{ADB}$، وقياسُـها $190°$، وهوَ ضعفُ قياسِ الزاويةِ المحيطيةِ ACB.



مثال 2

إذا كانَتِ النقطةُ O هيَ مركزَ الدائرةِ في الشكلِ المجاورِ، والنقاطُ P, Q, R على استقامةٍ واحدةٍ فما قيمةُ a؟



الزاويتانِ PQT, RQT تُشكِّلانِ زاويةً مستقيمةً $m\angle PQT = 180° - 72° = 108°$

مجموعُ قياساتِ الزوايا حولَ نقطةٍ هوَ $360°$ $a + b = 360°$

قياسُ الزاويةِ المركزيةِ يساوي مِثْلَيْ قياسِ الزاويةِ المحيطيةِ المرسومةِ على القوسِ نفسِهِ $b = 2 \times 108° = 216°$

بتعويضِ قيمةِ b $a + 216° = 360°$

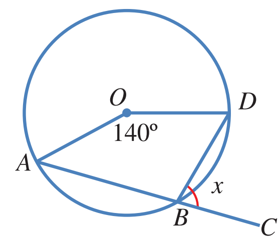
بطرحِ $216°$ منَ الطرفيْنِ $a = 360° - 216° = 144°$

أتذكَّرُ

- قياسُ الزاويةِ المستقيمةِ يُساوي $180°$.
- مجموعُ قياساتِ الزوايا حولَ نقطةٍ يساوي $360°$.

أتحقق من فهمي

إذا كانَتِ النقطةُ O هيَ مركزَ الدائرةِ في الشكلِ المجاورِ، والنقاطُ A, B, C على استقامةٍ واحدةٍ، فما قيمةُ x؟

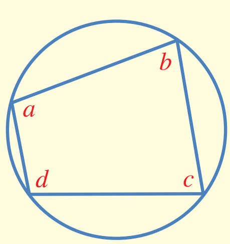


إذا وقعَتْ رؤوسُ مُضلَّعٍ رباعيٍ على دائرةٍ، فإنَّهُ يُسمّى **رباعيًّا دائريًّا (cyclic quadrilateral)**. وإذا حسبنا مجموعَ قياسَيْ كلِّ زاويتيْنِ متقابلتيْنِ فيهِ، فإنَّهُ يكونُ $180°$.

نظريةٌ

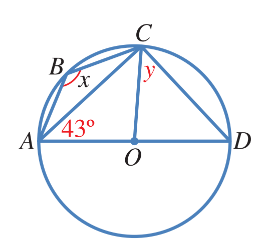
مجموعُ قياسَيْ كلِّ زاويتيْنِ متقابلتيْنِ في المُضلَّعِ الرباعيِّ الدائريِّ هوَ $180°$:

$b + d = 180°, a + c = 180°$.



مثال 3

إذا كانَتِ النقطةُ O هيَ مركزَ الدائرةِ في الشكلِ المجاورِ، فما قيمةُ كلٍّ منْ x وَ y؟



المثلث ACO مُتطابق الضلعين $m\angle ACO = 43°$

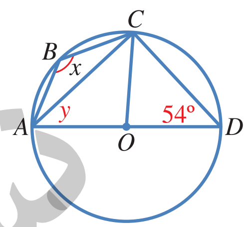
الزاويةُ ACD محيطية تقابل قطر الدائرة $y + m\angle ACO = 90°$

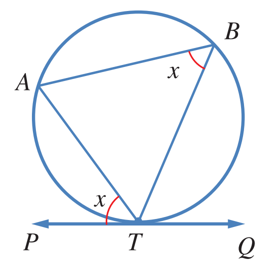
بالتعويض $y + 43° = 90°$

بطرحِ 43° منَ الطرفيْنِ	$y = 90° - 43°$
	$= 47°$
الشكلُ $ABCD$ رباعي دائري	$x + m\angle ADC = 180°$
المثلثُ OCD مُتطابِق الضلعين	$m\angle ADC = y = 47°$
بتعويضِ قيمةِ y	$x + 47° = 180°$
بطرحِ 47° منَ الطرفيْنِ	$x = 180° - 47°$
	$= 133°$

أتحقق من فهمي

إذا كانَتِ النقطةُ O هيَ مركزَ الدائرةِ في الشكلِ المجاورِ، فما قيمةُ كلٍّ منْ x وَ y؟





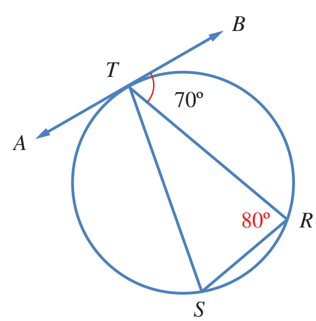
فـي الشـكلِ المجـاورِ، $\overleftrightarrow{PQ}$ هـوَ مماسٌّ للدائـرةِ عنـدَ النقطـةِ T، وَ $\overline{TA}$ هـوَ وتـرٌ للدائـرةِ. تسـمى الزاويـةِ المحصـورةِ بيـنَ المماسِّ والوتـرِ المـارِّ بنقطـةِ التَّمـاسِّ **الزاويــةِ المماسِّــيةِ (angle between a tangent and a chord)**. وهذهِ الزاويةُ تحصرُ القوسَ الأصغـرَ TA، ويُمكِـنُ مُلاحظةُ أنَّ قياسَ الزاويةُ المماسـيةُ PTA يسـاوي قياسَ الزاويةِ ABT المحيطيةِ المرسـومةِ على القوسِ TA نفسِـهِ.

نظريةٌ

قياسُ الزاويةِ المماسِّيةِ يساوي قياسَ الزاويةِ المحيطيةِ المشتركةِ معَها بالقوسِ.

$$m\angle ATB = m\angle ABT$$

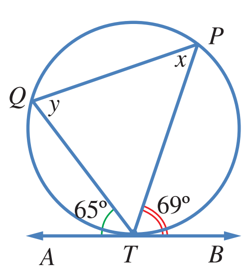
مثال 4



في الشكلِ المجاورِ، $\overleftrightarrow{AB}$ مماس للدائرة في T. أَجِدُ قياسَ كلٍّ منَ الزاويتيْنِ ATS وَ TSR.

زاويتانِ (مماسِّيةٌ، ومحيطيةٌ) مشتركتانِ في القوسِ	$m\angle ATS = m\angle TRS = 80°$
زاويتانِ (مماسِّيةٌ، ومحيطيةٌ) مشتركتانِ في القوسِ	$m\angle TSR = m\angle BTR = 70°$

أتحقق من فهمي



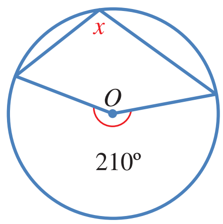
في الشكلِ المجاورِ، $\overleftrightarrow{AB}$ مماس للدائرة في T.

أَجِدُ قياسَ كلٍّ منَ الزوايا: TQP، وَ TPQ، وَ QTP.

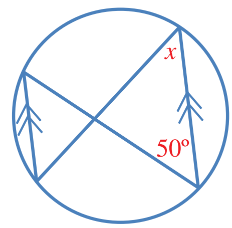
أتدرب وأحل المسائل

إذا كانَتِ النقطةُ O هيَ مركزَ الدائرةِ، فأَجِدُ قيمةَ x في كلٍّ مما يأتي:

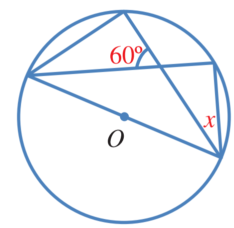
1



2



3

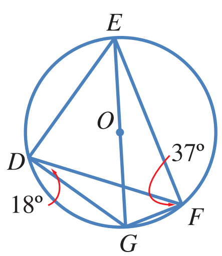


إذا كانَتِ النقطةُ O هيَ مركزَ الدائرةِ في الشكلِ المجاورِ، فأَجِدُ كلًّا مما يأتي:

4 $m\angle EGF$.

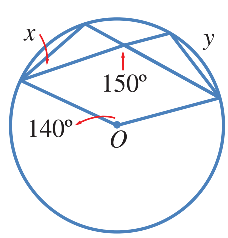
5 $m\angle DEG$.

6 $m\angle EDF$.

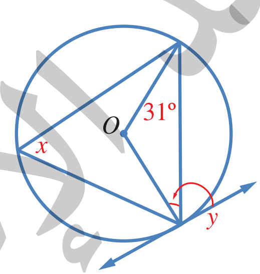


إذا كانَتِ النقطةُ O هيَ مركزَ الدائرةِ، أَجِدُ قياسَ الزوايا المشارِ إليْها بالحرفيْنِ x وَ y في كلٍّ منَ الدوائرِ الآتيةِ:

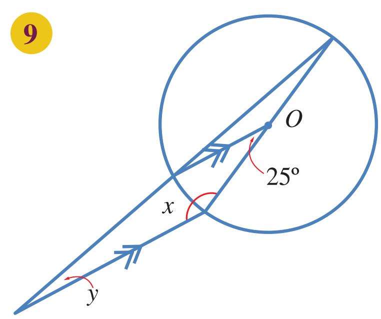
7



8

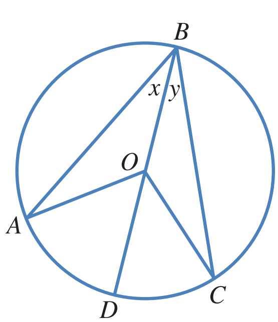


9



في الشكل المجاور دائرة مركزها O. إذا كانَ قياسُ الزاويةِ ABO هوَ x°،

وقياسُ الزاويةِ CBO هوَ y°:

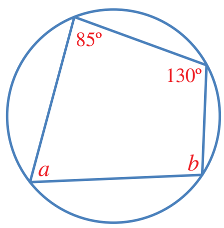


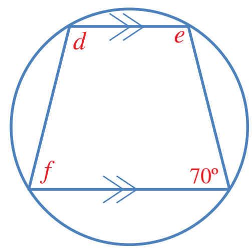
10 أَجِدُ قياسَ الزاويةِ BAO.

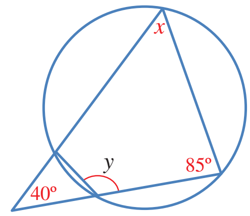
11 أَجِدُ قياسَ الزاويةِ AOD.

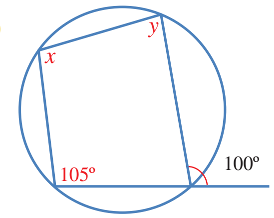
12 أُثبِتُ أنَّ قياسَ الزاويةِ المركزيةِ يساوي مِثْلَيْ قياسِ الزاويةِ المحيطيةِ المرسومةِ على القوسِ نفسِهِ.

أَجِدُ قياسَ الزوايا المشارِ إليْها بأحرفٍ في كلٍّ منَ الدوائرِ الآتيةِ:

13 

14 

15 

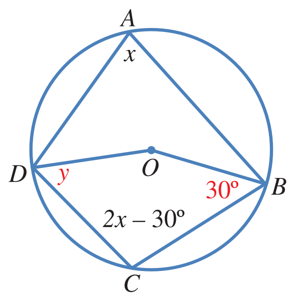
16 

في الشـــكلِ الرباعيِّ الدائريِّ $PQRT$ ، قياسُ الزاويةِ ROQ هوَ $38°$، حيثُ O مركزُ الدائرةِ، وَPOT قُطْرٌ فيها. أَجِدُ قياسَ كلٍّ منَ الزوايا الآتيةِ:

17 ROT.

18 QRT.

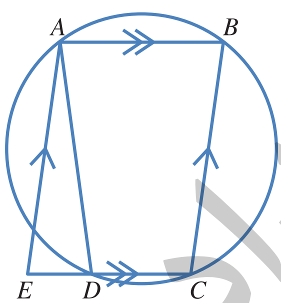
19 QPT.



الشكلِ المجاورِ دائرة مركزها O:

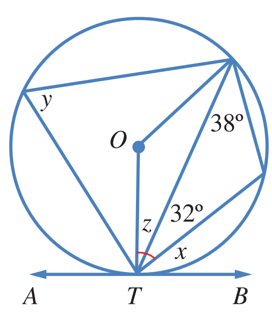
20 لماذا $3x - 30° = 180°$؟

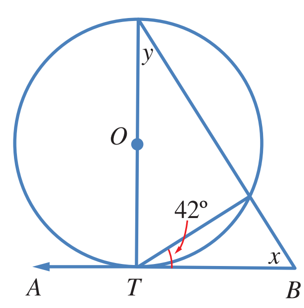
21 أَجِدُ قياسَ الزاويةِ CDO المشارِ إليْها بالحرفِ y، مُبرِّرًا كلَّ خطوةٍ في حَلّي.



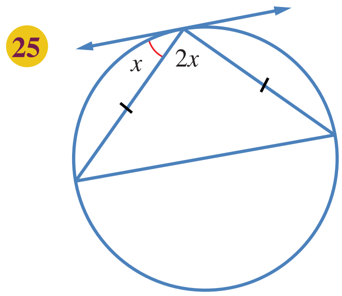
22 يُمثِّلُ الشـــكلُ المجاورُ $ABCE$ متـــوازيَ أضلاعٍ: أُبين أنَّ قيـــاسَ الزاويةِ AED يساوي قياسَ الزاويةِ ADE، مُبرِّرًا كلَّ خطوةٍ في حَلّي.

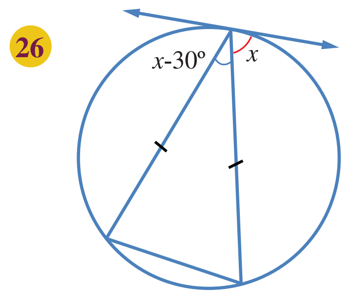
أَجِدُ قياسَ الزوايا المشارِ إليْها بأحرفٍ في كلٍّ منَ الدوائرِ الآتيةِ:

23 

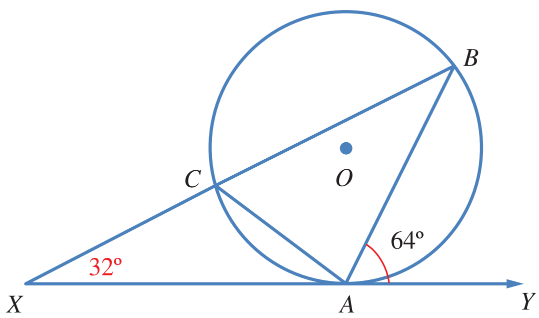
24 

أَجِدُ قيمةَ x في كلٍّ منَ الشكليْنِ الآتييْنِ:

25 

26 

27 تُمثِّلُ النقطةُ O مركزَ الدائرةِ في الشكلِ الآتي، ويُمثِّلُ $\overleftrightarrow{XY}$ مماسًّا للدائرةِ عندَ A. إذا كانَتِ النقاطُ B وَ C وَ X تُمثِّلُ خطًّا على استقامةٍ واحدةٍ، فأُثبِتُ أنَّ المثلثَ ACX مُتطابِقُ الضلعيْنِ، مُبرِّرًا إجابتي.

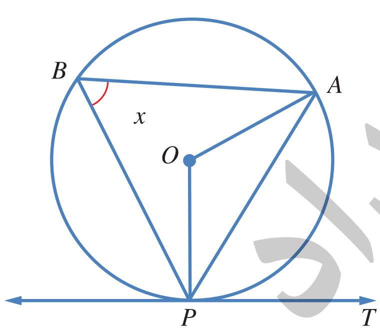


مهارات التفكير العليا

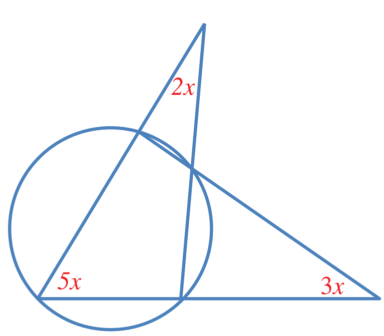
28 **تبرير**: قالت فاتن أن جميع الزوايا المحيطية المقابلة لقطر الدائرة تُكوِّن زوايا قائمة. هل هي على صواب؟ أبرر إجابتي.

29 في الشكلِ المجاورِ، $\overleftrightarrow{PT}$ مماسٌّ لدائرةٍ مركزُها O. إذا كانَ قياسُ الزاويةِ PBA هوَ x^o:

أُثبِتُ أنَّ قياسَ الزاويةِ APT يساوي قياسَ الزاويةِ ABP. أبرر خطوات الحل.



30 **تحدٍّ**: أَجِدُ قيمةَ x في الشكلِ المجاورِ.



الدرس 4

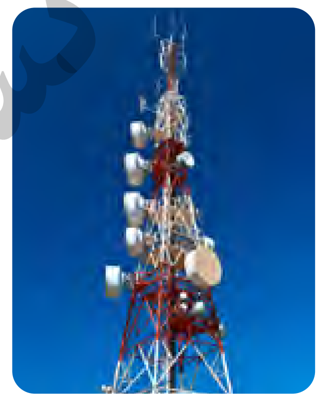
معادلةُ الدائرةِ

Equation of a Circle

فكرةُ الدرسِ كتابةُ معادلةِ الدائرةِ، وإيجادُ المركزِ ونصفِ القُطْرِ منْ معادلةِ دائرةٍ معلومةٍ، وإيجادُ نقاطِ تقاطعِ مستقيمٍ ودائرةٍ.

المصطلحاتُ معادلةُ الدائرةِ، الصورةُ القياسيةُ، الصورةُ العامةُ.

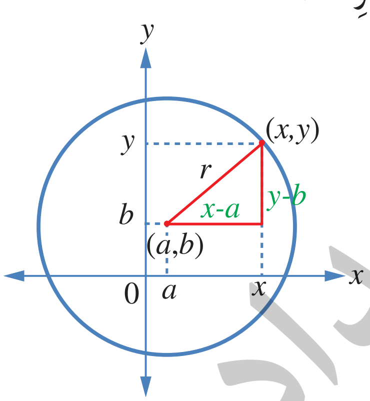
سؤالُ اليوم تُمثِّلُ النقطةُ $(7, 4)$ موقعَ محطةِ إذاعةٍ يُلتقَطُ بثُّها في دائرةٍ نصفُ قُطْرِها 224 km. إذا كانَ فوّازٌ يقيمُ في بيتٍ تُمثِّلُهُ النقطةُ $(-75, 95)$ على مستوًى إحداثيٍّ وحدتُهُ 1 km، فكيفَ يستطيعُ معرفةَ إنْ كانَ بثُّ هذهِ الإذاعةِ يصلُ بيتَهُ أمْ لا؟



معادلةُ الدائرةِ (equation of the circle) هي العلاقةُ التي تربطُ بينَ الإحداثيِّ x والإحداثيِّ y لكلِّ نقطةٍ واقعةٍ على الدائرةِ. فإذا عُوِّضَ إحداثيا نقطةٍ في المعادلةِ، وكانَتِ النتيجةُ عبارةً صحيحةً، فهذا يعني أنَّ تلكَ النقطةَ تقعُ على الدائرةِ.

معادلةُ الدائرةِ التي مركزُها النقطةُ (a, b)، وطولُ نصفِ قُطْرِها r:

يُمثِّلُ الشكلُ الآتي دائرةً مركزُها النقطةُ (a, b)، وطولُ نصفِ قُطْرِها r. والنقطةُ (x, y) تقعُ على الدائرةِ. ألاحظ أنه يُمكِنُ تكوينُ المثلثِ قائمِ الزاويةِ الذي طولُ ضلعِهِ الأفقيِّ $(x-a)$، وطولُ ضلعِهِ الرأسيِّ $(y-b)$، وطولُ وترِهِ r. وبتطبيقِ نظريةِ فيثاغورسْ تنتجُ المعادلةُ $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ التي تُسمّى **الصورةَ القياسيةَ (standard form)** لمعادلةِ الدائرةِ.



مفهومٌ أساسيٌّ

1. الصورةُ القياسيةُ لمعادلةِ الدائرةِ التي مركزُها النقطةُ (a, b)، وطولُ نصفِ قُطْرِها r، هيَ: $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$.

2. معادلةُ الدائرةِ التي مركزُها نقطةُ الأصلِ $(0, 0)$، وطولُ نصفِ قُطْرِها r، هيَ:
$$x^2 + y^2 = r^2$$

مثال 1

أكتبُ معادلةَ الدائرةِ في كلٍّ منَ الحالاتِ الآتيةِ:

1 المركزُ هوَ النقطةُ $(-2, 7)$، وطولُ نصفِ القُطْرِ 6 وحداتٍ.

الصورةُ القياسيةُ لمعادلةِ الدائرةِ $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

$(a, b) = (-2, 7), r = 6$ $\quad (x-(-2))^2 + (y-7)^2 = 6^2$

$(x+2)^2 + (y-7)^2 = 36$

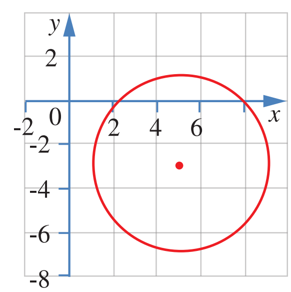
2 المركزُ هوَ نقطةُ الأصلِ، وطولُ نصفِ القُطْرِ 5 وحداتٍ.

الصورةُ القياسيةُ لمعادلةِ الدائرةِ التي مركزُها نقطةُ الأصلِ $x^2 + y^2 = r^2$

بتعويضِ $r = 5$ $\quad x^2 + y^2 = 5^2$

$x^2 + y^2 = 25$

3 الدائرةُ المرسومةُ في المستوى الإحداثيِّ المجاورِ.



عنـدَ النظرِ إلى الدائرةِ يَتبيَّـنُ أنَّ مركزَها النقطـةُ $(5, -3)$، وأنَّ طولَ نصفِ قُطْرِها 4 وحداتٍ.

الصورةُ القياسيةُ لمعادلةِ الدائرةِ $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

$(a, b) = (5, -3), r = 2$ $\quad (x-5)^2 + (y-(-3))^2 = 4^2$

$(x-5)^2 + (y+3)^2 = 16$

أتحقق من فهمي

أكتبُ معادلةَ الدائرةِ في الحالتيْنِ الآتيتيْنِ:

1 المركزُ هوَ النقطةُ $(0, 4)$، وطولُ نصفِ القُطْرِ 9 وحداتٍ.

2 المركز هو نقطة الأصل وطول القطر 8 وحدات.

إذا عُلِمَ مركزُ الدائرةِ ونقطةٌ واقعةٌ عليْها، فإنَّهُ يُمكِنُ إيجادُ طولِ نصفِ القُطْرِ باستعمالِ قانونِ المسافةِ بينَ نقطتيْنِ، ثمَّ كتابةُ معادلةِ الدائرةِ.

مراجعةُ المفهومِ

إذا كانَ طولُ القطعةِ المستقيمةِ الواصلةِ بينَ النقطتيْنِ $A(x_1, y_1)$، وَ $B(x_2, y_2)$، هوَ d فإنَّ:

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

مثال 2

أَجِدُ معادلةَ الدائرةِ التي مركزُها النقطةُ $(-7, 13)$، وتمرُّ بالنقطةِ $(5, 4)$

أجدُ طولَ نصفِ القُطْرِ باستعمالِ قانونِ المسافةِ بينَ نقطتيْنِ:

$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$ قانونُ المسافةِ بينَ نقطتينِ

$r^2 = (5 - (-7))^2 + (4 - 13)^2$ بالتعويضِ

$= 144 + 81$ بالتبسيطِ

$= 225$

$r = \sqrt{225} = 15$ بأخذِ الجذرِ التربيعيِّ

والآنَ، أُعوِّضُ إحداثيَّي المركزِ وَقيمة r^2 في الصورةِ القياسيةِ لمعادلةِ الدائرةِ، فأَجِدُ أنَّ معادلةَ هذهِ الدائرةِ هيَ:

$$(x + 7)^2 + (y - 13)^2 = 225.$$

أتحقق من فهمي

أَجِدُ معادلةَ الدائرةِ التي مركزُها النقطةُ $(4, -3)$، وتمرُّ بالنقطةِ $(2, 0)$.

إذا علمْنا معادلةَ دائرةٍ بالصورةِ القياسيةِ $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$، فإنَّهُ يُمكِنُ فكُّ الأقواسِ وإعادةُ الترتيبِ، فتنتجُ المعادلةُ: $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$

يُمكِنُ أيضًا كتابةُ هذهِ المعادلةِ بالصورةِ التاليةِ: $x^2 + y^2 + 2fx + 2gy + c = 0$، حيثُ: $f = -a, g = -b, c = a^2 + b^2 - r^2$، والتي تُسمّى **الصورةُ العامةُ (general form)** لمعادلةِ الدائرةِ.

إذا علمْنا الصورةَ العامةَ لمعادلةِ أيِّ دائرةٍ، فإنَّهُ يُمكِنُ تحويلُها إلى الصورةِ القياسيةِ $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$، وذلكَ بإكمالِ المربَّعِ.

مراجعةُ المفهومِ

لإكمالِ المربَّعِ للحدَّيْنِ $x^2 + ax$، يضافُ $\left(\frac{a}{2}\right)^2$، ثمَّ يُطرَحُ، فينتجُ مربَّعٌ كاملٌ هوَ $(x + \frac{a}{2})^2$ وبذلكَ يتحوَّلُ $x^2 + ax$ إلى $\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$

مثال 3

أَجِدُ إحداثياتِ المركزِ، وطولَ نصفِ القُطْرِ للدائرةِ $x^2 + y^2 - 8x + 6y - 56 = 0$.

بإكمـــالِ المربَّعِ للحدودِ التي تحـــوي x ينتـجُ: $x^2 - 8x = (x-4)^2 - 16$ ، وبإكمالِ المربَّعِ للحدودِ التي تحوي y ينتجُ: $y^2 + 6y = (y+3)^2 - 9$.

وبذلكَ يُمكِنُ تحويلُ المعادلةِ $x^2 + y^2 - 8x + 6y - 56 = 0$ إلى:

$$(x-4)^2 - 16 + (y+3)^2 - 9 - 56 = 0$$

$$(x-4)^2 + (y+3)^2 = 81.$$

بمقارنةِ هذهِ المعادلةِ بالصورةِ القياسيةِ $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$، نجدُ أنَّ:

$a = 4\ ,\ b = -3,\ r = 9$.

إذنْ، مركزُ هذهِ الدائرةِ هوَ النقطةُ $(4, -3)$، وطولُ نصفِ قُطْرِها 9 وحداتٍ.

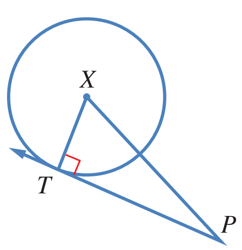
أتحقق من فهمي

أَجِدُ إحداثياتِ المركزِ، وطولَ نصفِ القُطْرِ للدائرةِ $x^2 + y^2 + 2x - 10y - 10 = 0$.

تعلَّمْتُ في درسٍ سـابقٍ أنَّ مماسَّ الدائرةِ يشتركُ معَ الدائرةِ في نقطةٍ واحدةٍ فقطْ، وأنَّهُ يتعامدُ معَ نصفِ القُطْرِ المارِّ بنقطةِ التَّماسِّ. وهذا يفيدُ في التحققِ من أنَّ مسـتقيمًا معطًى هوُ مماسٌّ لدائرةٍ معطاةٍ، وحسابِ طولِ قطعةٍ مماسِّيةٍ كما في الأمثلةِ التاليةِ.

مثال 4

أَجِـدُ طـولَ المـماسِّ المرسـومِ مـنَ النقطـةِ $P(6, -6)$، والـذي يمـسُّ الدائـرةَ التـي معادلتُهـا $(x+5)^2 + (y-4)^2 = 25$.



نرسمُ مُخطَّطًا، ولتكنِ النقطةُ X مركزَ الدائرةِ، وَ T نقطةَ التَّماسِّ.

لحسـابِ طولِ المماسِّ $\overline{PT}$، نُطبِّقُ نظريةَ فيثاغـورسْ على المثلثِ القائـمِ XTP والذي يُمكِـنُ إيجادُ طولَيْ ضلعيْـنِ فيهِ، هما: نصفُ القُطْرِ $\overline{XT}$، والوترُ $\overline{XP}$.

نصفُ القُطْرِ XT هوَ 5 ولحسـابِ XP، نجدُ المسافةَ بينَ مركزِ الدائرةِ $X(-5, 4)$ والنقطةِ $P(6, -6)$ باستعمالِ قانونِ المسافةِ بينَ نقطتيْنِ:

$$(XP)^2 = (6-(-5))^2 + (-6-4)^2 = (11)^2 + (-10)^2 = 221.$$

وبتطبيقِ نظريةِ فيثاغورسْ على المثلثِ XTP :

نظريةُ فيثاغورسْ	$(PT)^2 = (XP)^2 - (XT)^2$
بالتعويضِ	$= 221 - 25$
بالتبسيطِ	$=196$
بأخذِ الجذرِ التربيعيِّ للطرفيْنِ	$PT = \sqrt{196} = 14$

إذنْ، طولُ المماسِّ 14 وحدةً.

أتحقق من فهمي

أَجِدُ طولَ المماسِّ المرسومِ منَ النقطةِ $P\ (7, 4)$، والذي يمس الدائرةِ التي معادلتُها $(x + 4)^2 + (y - 1)^2 = 81$.

مثال 5

أُثبِتُ أنَّ المستقيمَ $y = 2x + 3$ هوَ مماسٌّ للدائرةِ التي معادلُتها $(x - 10)^2 + (y - 8)^2 = 45$.

أَحُلُّ النظامِ المُكوَّنُ من المعادلتيْنِ: $y = 2x + 3$، وَ $(x - 10)^2 + (y - 8)^2 = 45$؛ لإيجادِ عددِ نقاطِ تقاطعِ المستقيمِ والدائرةِ. فإذا كانَ عددُ نقاطِ التقاطعِ واحدٌ فقط، فإنَّ المستقيمَ يكونُ مماسًّا للدائرةِ.

بتعويضِ $y = 2x + 3$ في معادلةِ الدائرةِ	$(x - 10)^2 + (2x + 3 - 8)^2 = 45$
بالتبسيطِ	$(x - 10)^2 + (2x - 5)^2 = 45$
بفكِّ الأقواسِ	$x^2 - 20x + 100 + 4x^2 - 20x + 25 = 45$
بجمعِ الحدودِ المتشابهةِ، وجعلِ الطرفِ الأيمنِ صفرًا	$5x^2 - 40x + 80 = 0$
بقسمةِ الطرفيْنِ على 5	$x^2 - 8x + 16 = 0$
بالتحليلِ	$(x - 4)^2 = 0$
	$x = 4$
بتعويضِ قيمةِ x في إحدى المعادلتيْنِ لإيجادِ قيمةِ y	$y = 2(4) + 3 = 11$

بما أنَّ هذا المستقيمَ يقطعُ الدائرةَ في نقطةٍ واحدةٍ فقطْ هيَ $(4, 11)$، فإنَّهُ مماسٌّ للدائرةِ.

أتحقق من فهمي

أُثبِتُ أنَّ المستقيمَ $y = 4x - 5$ هوَ مماسٌّ للدائرةِ التي معادلُتها $(x + 5)^2 + (y - 9)^2 = 68$.

أتدرب وأحل المسائل

أكتب معادلة الدائرة في كل من الحالات الآتية:

1 المركز هو نقطةُ الأصلِ، وطولُ نصفِ قُطْرِها 7 وحداتٍ.

2 المركز هو النقطة $(-1, 3)$ وطول نصف القطر 5 وحدات.

3 المركز هو النقطة $(-3, -2)$ وطول القطر 10 وحدات.

أَجِدُ معادلة الدائرة المعطى مركزها وإحداثيا نقطة تمر بها في كل مما يلي:

4 المركز $(-1, 2)$ وتمر بالنقطة $(3, 5)$.

5 المركز نقطة الأصل وتمر بالنقطة $(-9, -4)$.

أَجِدُ إحداثيَّي المركزِ، وطولَ نصفِ القُطْرِ لكلٍّ منَ الدوائرِ الآتيةِ:

6 $(x + 5)^2 + (y - 8)^2 = 36$

7 $(x - 19)^2 + (y - 33)^2 = 400$

8 $x^2 + (y + 4)^2 = 45$

9 $(x - 3)^2 + (y + 10)^2 = 28$

أَجِدُ إحداثيَّي المركزِ، وطولَ نصفِ القُطْرِ لكلٍّ منَ الدوائرِ الآتيةِ:

10 $x^2 + y^2 - 18x + 14y = 14$

11 $x^2 + y^2 + 8x = 9$

12 $2x^2 + 2y^2 + 20x + 36y + 158 = 0$

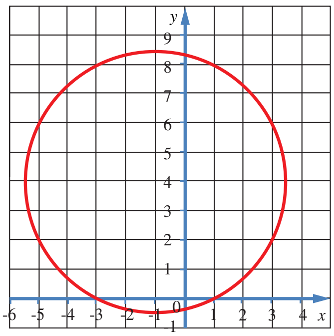
13 $4x^2 + 4y^2 + 120x + 855 = 24y$

أكتبُ معادلةَ الدائرةِ بالصورتيْنِ: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, $x^2 + y^2 + 2fx + 2gy + c = 0$، حيثُ: f، g، وَ c أعدادٌ صحيحةٌ في الحالاتِ الآتيةِ:

14 المركزُ $(-11, -1)$، وطولُ قطرها 26 وحدةً.

15 المركزُ $(3, 0)$، وطولُ نصفِ القُطْرِ $4\sqrt{3}$ وحداتٍ.

16 المركزُ $(-4, 7)$، وتمرُّ بالنقطةِ $(1, 3)$.



17 أَجِدُ معادلةَ الدائرةِ المُبيَّنةِ في الرسمِ البيانيِّ المجاورِ.

18 أَحُلُّ المسألةَ الواردةَ في بدايةِ الدرسِ.

19 أجدُ إحداثيَّي المركزِ وطولَ نصفِ قطرِ الدائرةِ التي معادلتها $(2x-4)^2+(2y+6)^2=100$

20 دائـرةٌ معادلتُها $x^2+y^2+px+6y=96$ ، وطولُ نصفِ قُطْرِها 11 وحـدةً، وَ p عددٌ ثابتٌ موجبٌ. أَجِدُ بُعْدَ مركزِ الدائرةِ عنْ نقطةِ الأصلِ.

21 **ممر:** ممرٌّ دائريٌّ محصورٌ بينَ دائرتيْنِ لهُما المركزُ نفسُهُ، وهوَ النقطةُ $(7, 3)$. إذا كانَتِ الدائرةُ الكبرى تمسُّ المحورَ y، والصغـرى تمسُّ المحورَ x، فأكتبُ معادلتَي الدائرتيْنِ اللتيْنِ تُشـكِّلانِ المحيـطَ الخارجيَّ والمحيطَ الداخليَّ للممرِّ، ثمَّ أَجِدُ مساحةَ الممرِّ بالوحداتِ المربَّعةِ.

تُمثِّلُ النقطتانِ $D\ (2, 9)$، وَ $E\ (14, -7)$ نهايتَيْ قُطْرٍ لدائرةٍ مركزُها C:

22 أَجِدُ إحداثيَّي المركزِ C.

23 أَجِدُ طولَ نصفِ القُطْرِ.

24 أكتبُ معادلةَ الدائرةِ.

25 أُثبِتُ أنَّ المستقيمَ $y=3x-2$ هوَ مماسٌّ للدائرةِ التي معادلتُها $x^2+y^2+10x-18y+38=0$.

26 رُسِـمَ مماسٌّ منَ النقطةِ $P\ (8, 5)$ للدائرةِ التي معادلتُها $x^2+y^2+8x-6y-75=0$. أَجِدُ طولَ القطعةِ المستقيمةِ التي تصلُ النقطةَ P بنقطةِ التَّماسِّ.

27 أَجِدُ معادلةَ مماسِّ الدائرةِ التي مركزُها $(4, 6)$ إذا كانَتْ نقطةُ التَّماسِّ $(7, 8)$.

مهاراتُ التفكيرِ العليا

28 **تبريرٌ:** قالَ عبدُ الرحمنِ إنَّ $x^2+y^2-14x+6y+59=0$ ليسَتْ معادلةَ دائرةٍ. هلْ قولُ عبدِ الرحمنِ صحيحٌ؟ أُبرِّرُ إجابتي.

29 يتقاطعُ المسـتقيمُ $y=2x+14$ معَ الدائرةِ التي معادلتُها $x^2+y^2+6x-16y=52$ في النقطتيْنِ M، وَ N. أُثبِتُ أنَّ $\overline{MN}$ قُطْرٌ لهذهِ الدائرةِ.

30 **تحدٍّ:** رُسِمَ منَ النقطةِ $A\ (8, 21)$ مماسّانِ للدائرةِ التي مركزُها C، فمسّاها عندَ النقطتيْنِ D، وَ B. إذا كانَتْ معادلةُ الدائرةِ هيَ $(x-9)^2+(y+4)^2=49$ ، فما مساحةُ الشكلِ الرباعيِّ $ABCD$؟

31 **تحدٍّ:** أَجِدُ معادلةَ الدائرةِ التي تمرُّ بالنقاطِ: $A\ (0, 0)$ ، وَ $B\ (-2, 8)$ ، وَ $C\ (-10, -8)$.

32 **تحدٍّ:** أكتب الصورة القياسية لمعادلة الدائرة $x^2+y^2+8x-10y+24=0$ دون استخدام طريقة إكمال المربع.

33 **مسألة مفتوحة:** أكتب الصورة القياسية لمعادلة دائرة مركزها النقطة $(4, 0)$. ثم أكتب الصورة العامة لها.

الدرس

5

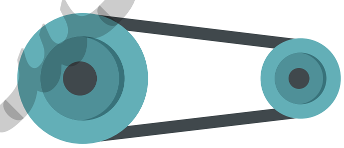
الدوائرُ المتماسَّةُ

Tangent Circles

فكرةُ الدرسِ استنتاجُ العلاقةِ بينَ دائرتيْنِ، وتعرُّفُ المماسّاتِ المشتركةِ، وتوظيفُ ذلكَ في حَلِّ مسائلَ حياتيةٍ.

المصطلحاتُ المماسُّ المشتركُ الخارجيُّ، المماسُّ المشتركُ الداخليُّ.

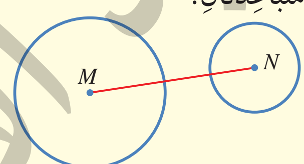
سؤالُ اليومِ يدورُ حزامٌ مطّاطيٌّ حولَ بكرتيْنِ دائريتيْنِ، طولُ نصفَيْ قُطْرَيْهِما 8 cm، وَ 3 cm على التوالي. إذا كانَ طولُ الحزامِ بينَ نقطتَيِ التَّماسِّ معَ البكرتيْنِ 25 cm، فما المسافةُ بينَ مركزَيِ البكرتيْنِ؟



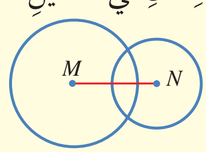
مفهوم أساسي

إذا رُسِمَتْ دائرتانِ في مستوًى واحدٍ، فإنَّ وضعَهُما بالنسبةِ إلى بعضِهِما ينحصرُ في الحالاتِ الآتيةِ:

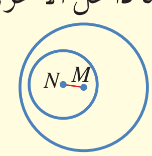
1 مُتباعِدتانِ.



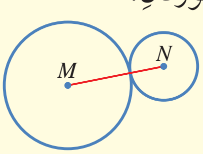
2 مُتقاطِعتانِ في نقطتيْنِ.



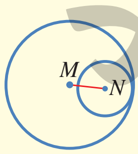
3 إحداهُما داخلَ الأُخرى.



4 مُشتركتانِ في نقطةٍ واحدةٍ؛ أيْ إنَّهما متماسَّتان. ولهذا الوضعِ صورتانِ:

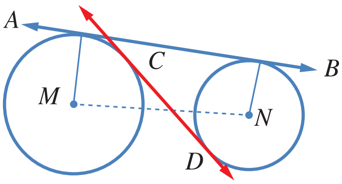


متماسَّتانِ منَ الخارجِ.



متماسَّتانِ منَ الداخلِ.

إذا كانَ المستقيمُ مماسًّا لكلٍّ منْ دائرتيْنِ، فإنَّهُ يُسمّى **مماسًّا مشتركًا (common tangent)**.

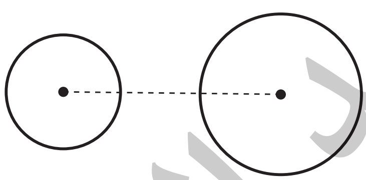


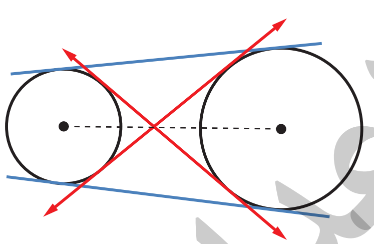
وإذا قطعَ المماسُّ المشتركُ القطعةَ المستقيمةَ الواصلةَ بينَ مركزَيِ الدائرتيْنِ، فإنَّهُ يُسمّى **المماسَّ المشتركَ الداخليَّ (common internal tangent)**، وإلّا فإنَّهُ يُسمّى **المماسَّ المشتركَ الخارجيَّ (common external tangent)**. ففي الشكلِ المجاورِ، $\overleftrightarrow{AB}$ مماسٌّ مشتركٌ خارجيٌّ، وَ $\overleftrightarrow{CD}$ مماسٌّ مشتركٌ داخليٌّ.

يُمكِنُ رسمُ مماسٍّ واحدٍ فقطْ للدائرةِ عندَ نقطةٍ عليْها، ويُمكِنُ أيضًا رسمُ مماسَّيْنِ للدائرةِ منْ نقطةٍ خارجَها، فما عددُ المماسّاتِ المشتركةِ التي يُمكِنُ رسمُها للدائرتيْنِ؟ تعتمدُ إجابةُ هذا السؤالِ على وضعِ الدائرتيْنِ بالنسبةِ إلى بعضِهِما.

مثال 1

كم مماسا يمكن رسمه مشتركا للدائرتين في الشكل الآتي؟ أرسم المماسات ثم أصنفها الى خارجية وداخلية.





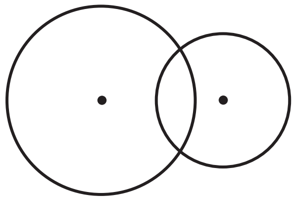
أرسم القطعة المستقيمة الواصلة بين مركزي الدائرتين، ثم أرسم المماسات التي تقطعها بلون أحمر، والمماسات التي لا تقطعها بلون أزرق.

ألاحظ أنه يوجد للدائرتين مماسان داخليان ومماسان خارجيان.

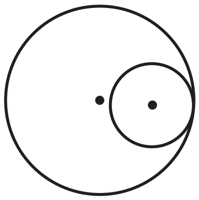
أتحقق من فهمي

كم مماسا يمكن رسمه مشتركا للدائرتين في الشكل الآتي؟ أرسم المماسات ثم أصنفها الى خارجية وداخلية.

a)



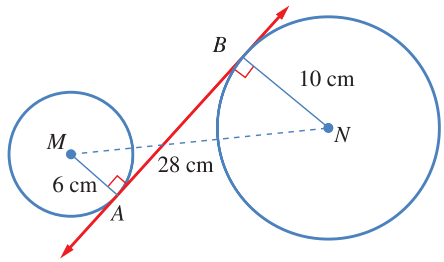
b)



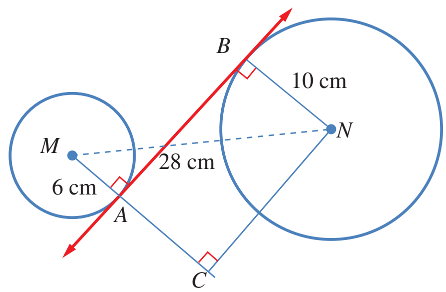
يُمكِنُ حســابُ طولِ المماسِّ المشتركِ (المســافةُ بينَ نقطتَي التَّماسِّ على الدائرتيْنِ) بطريقةٍ مُماثِلةٍ لحسابِ طولِ المماسِّ المرسومِ منْ نقطةٍ خارجَ الدائرةِ إلى نقطةٍ عليْها.

مثال 2

أَجِدُ طولَ $\overline{AB}$ في الشكلِ المجاورِ.



أمدُّ $\overline{MA}$ على اســتقامتِهِ، ثمَّ أرسمُ منْ N عمودًا على امتدادِ $\overline{MA}$ ، ثمَّ أُســمّي نقطةَ تقاطعِ العمودِ معَها C.



المماسُّ عموديٌّ على نصفِ القُطْرِ المارِّ بنقطةِ التَّماسِّ $\quad m\angle NBA = m\angle BAC = 90^\circ$

رسم $\overline{NC}$ عموديًّا على $\overline{MA}$ $\quad m\angle ACN = 90^\circ$

مجموعُ قياسِ زوايا الشكلِ الرباعيِّ 360° $\quad m\angle BNC = 90^\circ$

إذنْ، الشكلُ الرباعيُّ $ACNB$ مستطيلٌ؛ لأنَّ زواياهُ الأربعَ قوائمُ.

ضلعانِ مُتقابِلانِ في المستطيلِ $\quad AB = NC$

والآنَ، أُطبِّقُ نظريةَ فيثاغورسْ على المثلثِ قائمِ الزاويةِ MCN لأَجِدَ CN:

نظريةُ فيثاغورسْ $\quad (CN)^2 = (MN)^2 - (MC)^2$

بالتعويضِ $\quad = 28^2 - (6 + 10)^2$

بالتبسيطِ $\quad (CN)^2 = 784 - 256 = 528$

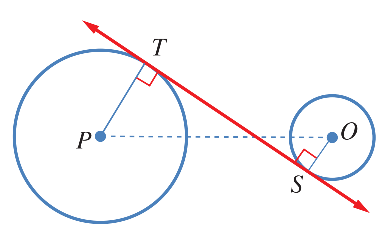
بأخذِ الجذرِ التربيعيِّ للطرفيْنِ $\quad CN = \sqrt{528} \approx 23$

$AB = CN \approx 23\, cm$

أتحقق من فهمي

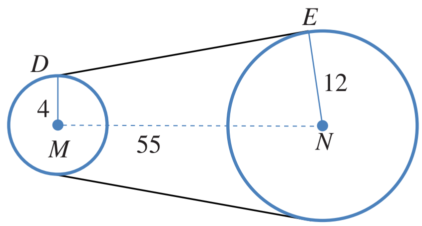
أَجِدُ طولَ المماسِّ المشتركِ $\overline{ST}$ في الشكلِ المجاورِ، علمًا بأنَّ:

$PT = 12$ cm, $OS = 4$ cm, $PO = 34$ cm



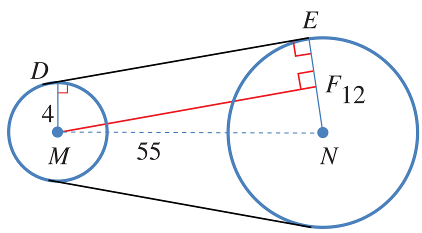
مثال 3 من الحياة

درّاجاتٌ: تلتفُّ في درّاجةٍ هوائيةٍ سلسلةٌ معدنيةٌ على عجلتيْنِ مُسنَّنتيْنِ دائريتيْنِ، نصفُ قُطْرِ الصغرى **4 cm**، ونصفُ قُطْرِ الكبرى **12 cm**، والمسافةُ بينَ مركزيْهِما **55 cm**. أَجِدُ طولَ السلسلةِ بينَ نقطتَيْ تماسِّها معَ المُسنَّنتيْنِ.



المطلوبُ هوَ حسابُ طولِ $\overline{DE}$.

أرسمُ منْ M عموداً على $\overline{NE}$، ثمَّ أُسمّي نقطةَ تقاطعِهِ معَها F. كما في الشكلِ المجاورِ.



لركوب الدراجة الهوائية فوائد صحية وبيئية كثيرة منها تقوية عضلات الجسم والتقليل من التلوث الناتج عن استعمال وسائل النقل التقليدية.

$m\angle NED = m\angle MDE = 90°$ المماسُّ يتعامدُ معَ نصفِ القُطْرِ المارِّ بنقطةِ التَّماسِّ

$m\angle MFE = 90°$ $\overline{MF}$ عمودي على $\overline{NE}$

$m\angle DMF = 90°$ مجموعُ قياسِ زوايا الشكلِ الرباعيِّ $360°$

إذنْ، الشكلُ الرباعيُّ $MDEF$ مستطيلٌ؛ لأنَّ زواياهُ الأربعَ قوائمُ.

والآنَ، أُطبِّقُ نظريةَ فيثاغورسْ على المثلثِ قائمِ الزاويةِ MFN لأَجِدَ طولَ $\overline{MF}$:

$(MF)^2 = (MN)^2 - (FN)^2$ نظريةُ فيثاغورسْ

$= 55^2 - (12-4)^2$ بالتعويضِ

$(MF)^2 = 3025 - 64 = 2961$ بالتبسيطِ

$MF = \sqrt{2961} = 54.4$ بأخذِ الجذرِ التربيعيِّ للطرفيْنِ

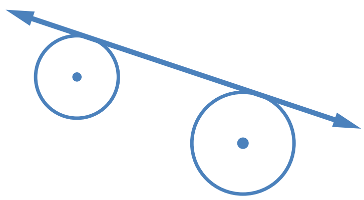
$DE = MF = 54.4 \text{ cm}$

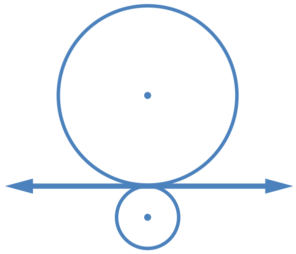
أتحقق من فهمي

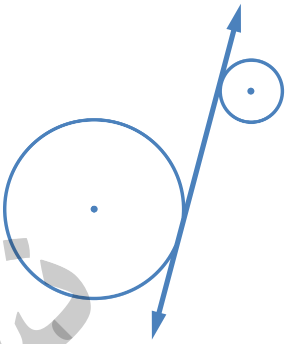
أَجِدُ طولَ نصفِ قُطْرِ العجلةِ المُسنَّنةِ الكبرى في درّاجةٍ، علماً بأنَّ طولَ السلسلةِ بينَ نقطتَيْ تماسِّها معَ المُسنَّنتيْنِ **40 cm**، وطولَ نصفِ قُطْرِ العجلةِ المُسنَّنةِ الصغرى **5 cm**، والمسافةَ بينَ مركزَيِ العجلتيْنِ المُسنَّنتيْنِ **41 cm**.

أتدرب وأحل المسائل

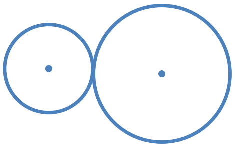
أُحدِّدُ إذا كانَ المماسُّ داخليًّا أمْ خارجيًّا في كلٍّ ممّا يأتي:

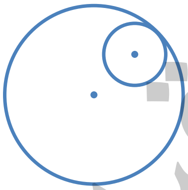
1 

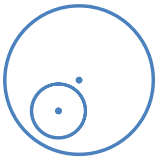
2 

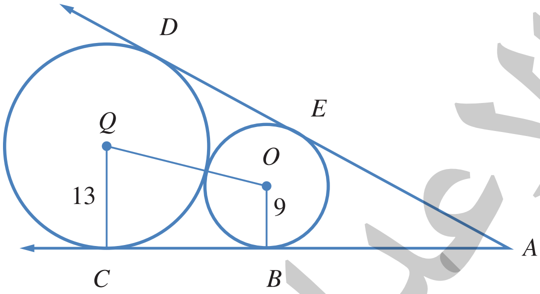
3 

كمْ مماسًّا مشتركًا يُمكِنُ رسمُهُ لكلٍّ منْ أزواجِ الدوائرِ الآتيةِ؟ أرسمُها، ثمَّ أُصنِّفُها إلى خارجيةٍ، وداخليةٍ:

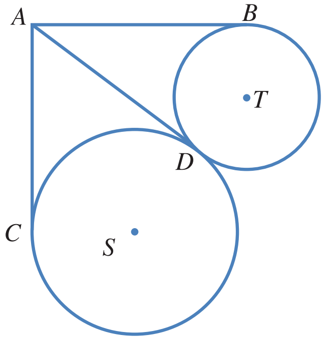
4 

5 

6 

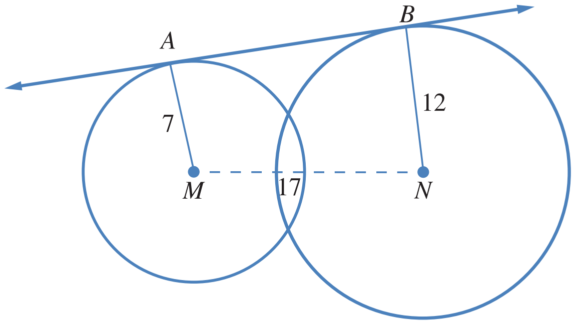


7 يبيِّنُ الشكلُ المجاورُ مماسَّيْنِ منَ النقطةِ A لدائرتيْنِ متماسَّتيْنِ منَ الخارجِ. أَجِدُ طولَ $\overline{CB}$ باستعمالِ القياساتِ المُبيَّنةِ في الشكلِ.



8 يُبيِّنُ الشكلُ المجاورُ دائرتيْنِ متماسَّتيْنِ منَ الخارجِ، والمماسّاتِ: $\overline{AB}$ وَ $\overline{AC}$ وَ $\overline{AD}$. إذا كانَ $AC = 2x + 5$، وَ $AB = 3x - 2$، فما قيمةُ x؟

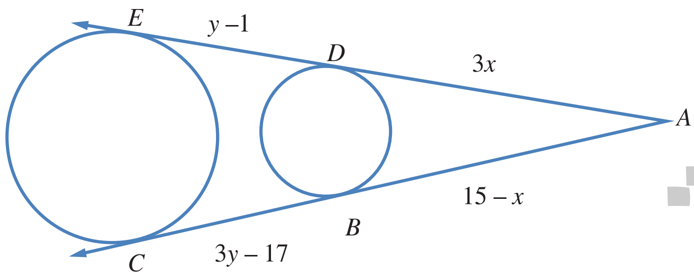
9 أَجِدُ طولَ $\overline{AB}$ باستعمالِ القياساتِ المُبيَّنةِ في الشكلِ الآتي.



10 **حـزامٌ ناقلٌ:** يمرُّ حزامٌ حولَ دولابيْنِ دائريّيْنِ، نصفُ قُطْرِ الصغيرِ منْهُما 15 cm، ونصفُ قُطْرِ الكبيرِ 25 cm. إذا كانَ طولُ الحزامِ بينَ نقطتَيِ التَّماسِّ معَ الدولابيْنِ 2 m، فما المسافةُ بينَ مركزَيِ الدولابيْنِ؟

11 أُحدِّدُ وضعَ الدائرتيْنِ بالنسبةِ إلى بعضِهما إذا كانَتْ معادلاتُهُما: $x^2+y^2=25$,$x^2+y^2-6x+8y-11=0$.

أجد قيمة كل من x وَ y في الشكل المجاور.

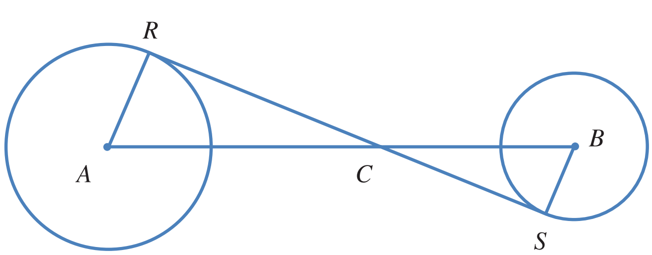


مهارات التفكير العليا

12 **تحد:** يبين الشكلان أدناه طريقتين لرسم دائرة تلامس كلا من الدوائر الزرقاء والخضراء والحمراء. أجد 6 طرق أخرى لرسم هذه الدائرة.

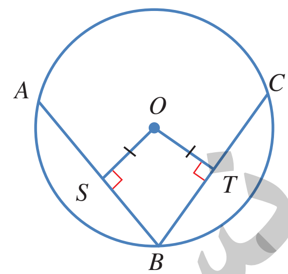
13 **برهـانٌ:** تُمثِّلُ $\overline{RS}$ في الشكلِ الآتي مماسًّا داخليًّا مشتركًا لدائرتيْنِ، مركزاهُما A، وَ B على التوالي. أُثبِتُ أنَّ:

$$\frac{RC}{SC}=\frac{AC}{BC}$$



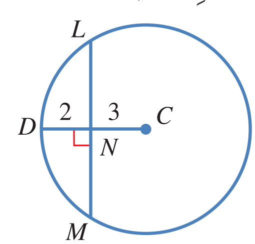
أَضعُ دائرةً حولَ رمزِ الإجابةِ الصحيحةِ في ما يأتي:

1 $\overline{AB}$ وَ $\overline{CB}$ في الشكلِ الآتي وتَرانِ في دائرةٍ مركزُها O.
إذا كانَ $AS = 4$ cm، وَ $OT = 3$ cm، فـإنَّ طولَ $\overline{BC}$ بالسنتيمتراتِ هوَ:



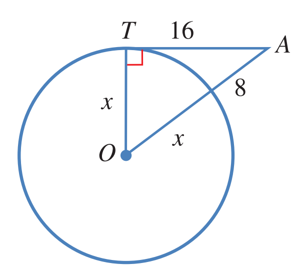
a) 6 b) 7
c) 8 d) 10

2 اعتمادًا على الشكلِ الآتي، فإنَّ طولَ $\overline{LM}$ هوَ:



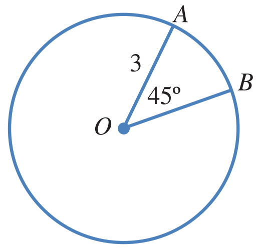
a) 5 b) 8
c) 10 d) 13

3 اعتمادًا على الشكلِ الآتي، فإنَّ طولَ نصفِ قُطْرِ الدائرة هوَ:



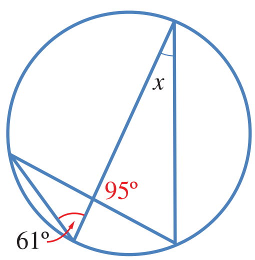
a) 5.75 b) 11.5
c) 4 d) 8

4 طولُ القوسِ الأصغرِ $\widehat{AB}$ بدلالةِ π في الشـكلِ الآتي هوَ:



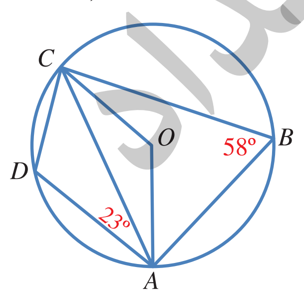
a) $\frac{9\pi}{8}$ b) $\frac{3\pi}{2}$
c) $\frac{9\pi}{2}$ d) $\frac{3\pi}{4}$

5 قيمةُ x في الشكلِ الآتي هيَ:



a) 61° b) 24°
c) 34° d) 95°

6 قياسُ الزاويةِ DCA في الشكلِ الآتي هوَ:



a) 55° a) 41°
b) 35° c) 45°

7 النقطـةُ التي لا تقـعُ علـى الدائـرةِ التـي معادلتُها $(x+2)^2+(y-4)^2=25$ هيَ:

a) $(-2,-1)$ b) $(1,8)$

c) $(3,4)$ d) $(0,5)$

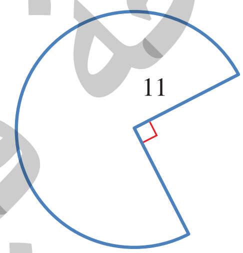
9 عددُ المماسّاتِ المشتركةِ التي يُمكِنُ رسمُها لدائرتيْنِ متماسَّتيْنِ منَ الداخلِ هوَ:

a) 3 b) 2

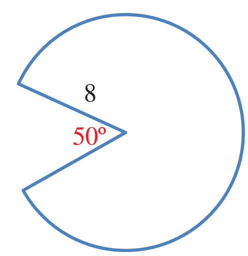
c) 1 d) 0

أَجِدُ المساحةَ والمحيطَ لكلٍّ منَ القطاعيْنِ الآتييْنِ:

10



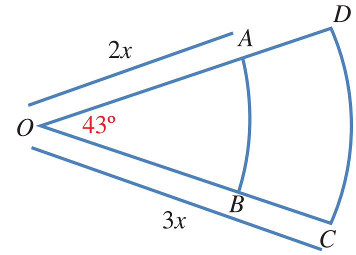
11



12 يُمثِّلُ الشـكلُ أدناه قطاعيْنِ دائرييْنِ مـنْ دائرتيْنِ لهُما المركزُ نفسُـهُ O. إذا كانَ نصفُ قُطْرِ الدائرةِ الصغرى $2x$، ونصفُ قُطْرِ الدائرةِ الكبـرى $3x$، وقياسُ الزاويةِ AOB هـوَ $43°$، ومسـاحةُ المنطقـةِ $ABCD$ هـيَ $30\ cm^2$، فأَجِدُ:

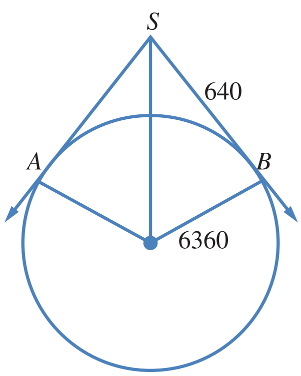
a قيمةَ x.

b الفرقَ بينَ طولَي القوسيْنِ CD ، وَAB.



13 أكتبُ معادلةَ الدائرةِ التي تُمثِّلُ النقطتانِ $A(4,-3)$، وَ $B(6,9)$ طرفَيْ قُطْرٍ فيها.

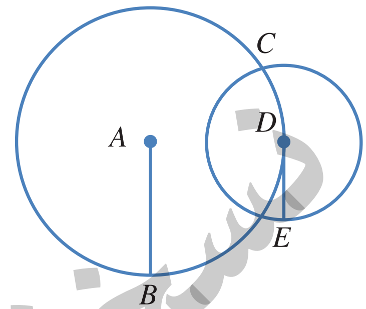
14 **أقمارٌ صناعيةٌ:** يرتفعُ قمرٌ صناعيٌّ مسافةَ 640 km عنْ سـطحِ الأرضِ التي نصفُ قُطْرِها 6360 km، ويُمكِنُ منْهُ مشـاهدةُ المنطقةِ الواقعةِ بينَ المماسَّـيْنِ $\overleftrightarrow{SP}$ وَ $\overleftrightarrow{SA}$ منْ سطحِ الأرضِ. ما المسافةُ بينَ القمرِ الصناعيِّ وأبعدِ نقطةٍ يُمكِنُ مشاهدتُها منْهُ على سطحِ الأرضِ؟



15 **حـزامٌ مطّاطيٌّ:** يـدورُ حـزامٌ مطّاطيٌّ حـولَ بكرتيْنِ دائريتيْنِ، طولُ نصفَـيْ قُطْرَيْهِما 8 cm، وَ 3 cm على التوالـي. إذا كانَ طولُ الحزامِ بيـنَ نقطتَيِ التَّماسِّ معَ البكرتيْنِ 25 cm، فما المسافةُ بينَ مركزَيِ البكرتيْنِ؟

أسئلةٌ من الاختبارات المعيارية

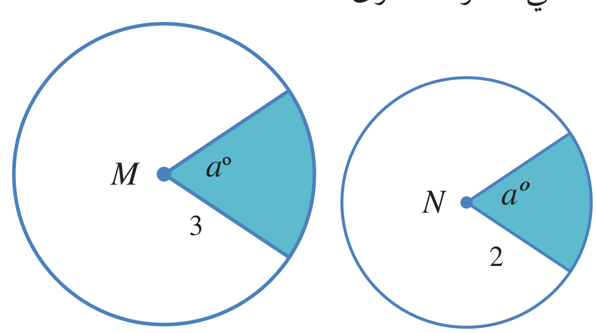
16 تتقاطــع دائرتان مركزاهما A, D فــي النقطتين C, E. إذا كان $AB = AD = 10\ \text{cm}$، فمــا طــول $\overline{AD}$ بالسنتيمترات؟



a) $5\sqrt{2}$ b) $5\sqrt{3}$

c) $10\sqrt{2}$ d) $5\sqrt{3}$

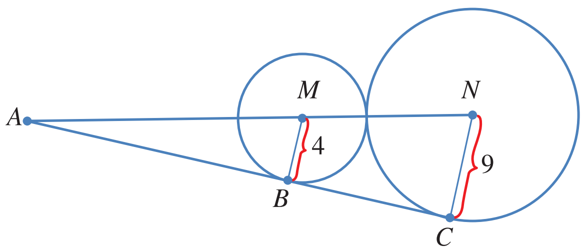
17 النقطتــان M, N مركــزا الدائرتين في الشــكل الآتي. إذا كانت مســاحة المنطقة المظللة في الدائرة الكبرى تساوي 9 وحدات مربعة، فما مساحة المنطقة المظللة في الدائرة الصغرى؟



a) $3\ \text{cm}^2$ b) $4\ \text{cm}^2$

c) $5\ \text{cm}^2$ d) $7\ \text{cm}^2$

18 يبين الشكل الآتي دائرتين متماستين من الخارج رسم لهما مماس مشترك من النقطة A الواقعة على المستقيم المار بالمركزين M, N. إذا كان نصفا قطري الدائرتين 4 وحدات و 9 وحدات، فأي العبارات الآتية صحيحة:



a) طول $\overline{AN}$ يساوي طول $\overline{AC}$

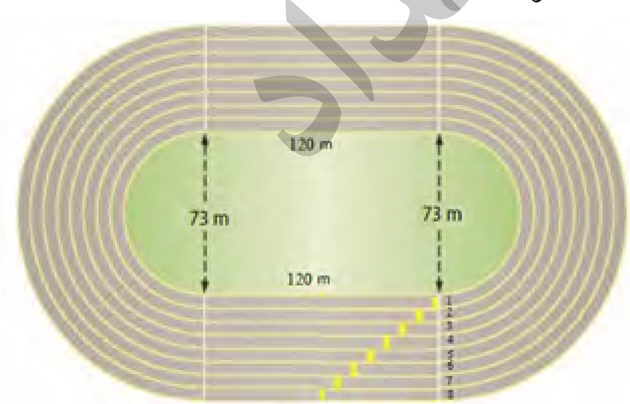
b) طول $\overline{BC}$ يساوي 13 وحدة.

c) $AC = \frac{9}{4} AB$.

d) $AC = \frac{4}{9} AB$.

19 أجد طول $\overline{AM}$ مبينا خطوات الحل.

20 يبين الشــكل أدناه مضمار للجري ذي ثمانية مسارب. يتكون كل مســرب مــن جزأين مســتقيمين متوازيين ونصفي دائرتيــن متصلتين بهمــا. إذا كان عرض كل مســرب $1\ \text{m}$، فكــم يزيد طــول الحــد الداخلي من المسرب الثالث على طول الحد الداخلي من المسرب الأول؟



الوحدة 3

حسابُ المثلثاتِ
Trigonometry

ما أهميةُ هذهِ الوحدةِ؟

تُعَدُّ دراسةُ العلاقاتِ بينَ أطوالِ أضلاعِ المثلثِ وقياساتِ زواياهُ (أوْ ما يُسمّى علمَ المثلثاتِ) أحدَ أهمِّ فروعِ الرياضياتِ وأقدمِها؛ إذْ ساعدَ هذا العلمُ قدماءَ المصريينَ على بناءِ الأهراماتِ ودراسةِ الفَلَكِ، وقدِ استمرَّ الاهتمامُ بهِ حتّى اليومِ؛ فكانَ أساسًا لكثيرٍ منَ العلومِ الأُخرى.

تعلَّمْتُ سابقًا:

✓ مفهومَ جيبِ الزاويةِ الحادَّةِ، وجيبَ تمامِها، وظلِّها بوصفِها نسبًا بينَ أضلاعِ المثلثِ قائمِ الزاويةِ.

✓ استخدامَ العلاقةِ $(\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2 = 1$ في حَلِّ مسألةٍ عنْ مثلثٍ قائمِ الزاويةِ.

✓ حَلَّ معادلاتٍ خطِّيةٍ وتربيعيةٍ ضمنَ مجموعةِ الأعدادِ الحقيقيةِ

سأتعلَّمُ في هذهِ الوحدةِ:

◄ ماهيةَ دائرةِ الوحدةِ، ووضعَ الزاويةِ القياسيَّ.

◄ إيجادَ النسبِ المثلثيةِ للزوايا ضمنَ الدورةِ الواحدةِ.

◄ تمثيلَ الاقتراناتِ المثلثيةِ في المستوى الإحداثيِّ، واستنتاجَ خصائِصها.

◄ حَلَّ معادلاتٍ مثلثيةٍ، بحيثُ تكونُ مجموعةُ الحَلِّ ضمنَ الدورةِ الواحدةِ.

الدرس 1

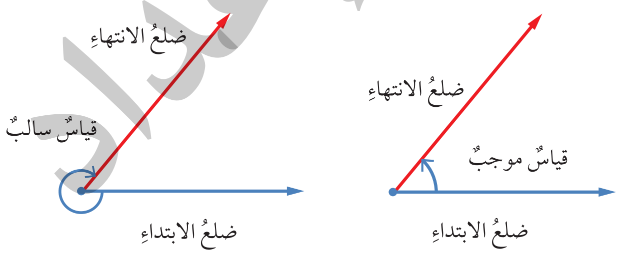
النسبُ المثلثيةُ
Trigonometric Ratios

فكرةُ الدرسِ تعرُّفُ الوضعِ القياسيِّ للزاويةِ، وربطُ النسبِ المثلثيةِ بدائرةِ الوحدةِ، وإيجادُها للزوايا الربعيةِ، وإيجادُ النسبتيْنِ الأساسيتيْنِ المثلثيتيْنِ الباقيتيْنِ في حالِ معرفةِ إحدى النسبِ المثلثيةِ الأساسيةِ للزاويةِ.

المصطلحاتُ ضلعُ الابتداءِ، ضلعُ الانتهاءِ، الوضعُ القياسيُّ، الزاويةُ الربعيةُ، دائرةُ الوحدةِ.

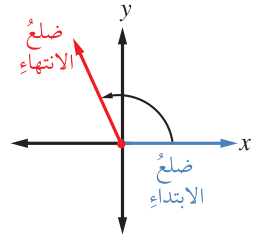
سؤالُ اليومِ تعلَّمْتُ سابقًا إيجادَ النسبِ المثلثيةِ لزوايا حادَّةٍ، مثلِ النسبِ بينَ أطوالِ أضلاعِ المثلثِ قائمِ الزاويةِ. ولكنْ، كيفَ يُمكِنُ إيجادُ النسبِ المثلثيةِ لزاويةٍ أكبرَ منْ $90°$، مثلِ الزاويةِ بينَ شفراتِ مروحةِ توليدِ الطاقةِ الكهربائيةِ؟

الزاويةُ هيَ اتحادُ شعاعيْنِ لهُما نقطةُ البدايةِ نفسُها. والنقطةُ المشتركةُ تُعرَفُ برأسِ الزاويةِ، أمّا الشعاعانِ فيُسمّى أحدُهُما **ضلعَ الابتداءِ (initial side)**، والآخرُ **ضلعَ الانتهاءِ (terminal side)**. يوجدُ قياسانِ لأيِّ زاويةٍ؛ أحدُهُما موجبٌ عندما يدورُ ضلعُ الابتداءِ عكسَ اتجاهِ حركةِ عقاربِ الساعةِ، والآخرُ سالبٌ حينَ يدورُ ضلعُ الابتداءِ معَ اتجاهِ حركةِ عقاربِ الساعةِ.

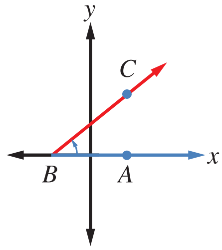


وضعُ الزاويةِ القياسيُّ (position standard)

يكونُ وضعُ الزاويةِ **قياسيًّا** في المستوى الإحداثيِّ إذا كانَ رأسُها عندَ نقطةِ الأصلِ $(0, 0)$، وضلعُ ابتدائِها مُنطبِقًا على محورِ x الموجبِ.



زاوية في الوضع القياسي

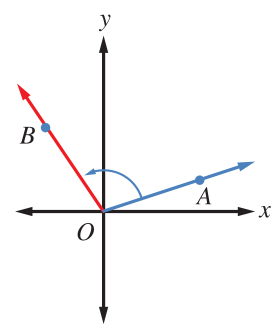


زاوية ليست في وضع قياسي

مثال 1

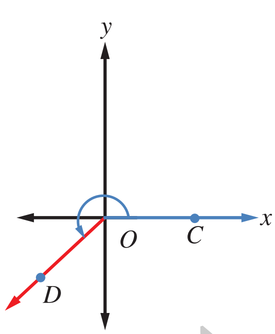
أُحدِّدُ إذا كانَتِ الزاويتانِ الآتيتانِ في وضعٍ قياسيٍّ أمْ لا، مُبيِّنًا السببَ:

1



الزاويةُ AOB ليسَتْ في وضعٍ قياسيٍّ؛ لأنَّ ضلعَ ابتدائِها لا ينطبقُ على محورِ x الموجبِ.

2

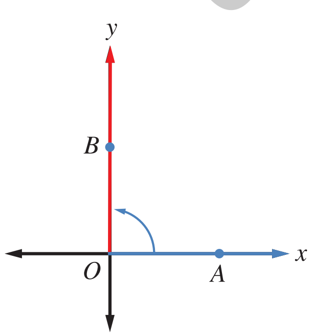


الزاويةُ COD في وضعٍ قياسيٍّ؛ لأنَّ ضلعَ ابتدائِها ينطبقُ على محورِ x الموجبِ، ورأسُها على نقطةِ الأصلِ O.

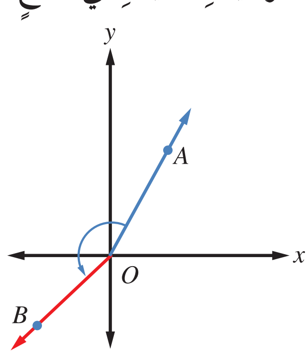
أتحقق من فهمي

أُحدِّدُ إذا كانَتِ الزاويتانِ الآتيتانِ في وضعٍ قياسيٍّ أمْ لا، مُبيِّنًا السببَ:

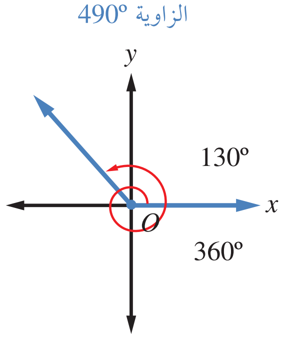
1



2



إذا دارَ ضلعُ زاويةٍ في الوضعِ القياسيِّ دورةً كاملةً عكسَ اتجاهِ حركةِ عقاربِ الساعةِ، فإنَّهُ يصنعُ زوايا قياساتُها بينَ 0° وَ 360°. وإذا استمرَّ في دورانِهِ، فإنَّهُ يصنعُ زوايا قياساتُها أكبرُ منْ 360°.

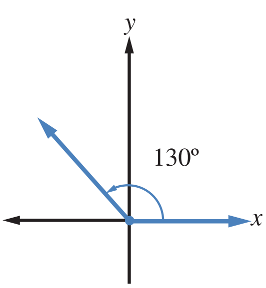


مثال 2

أرسمُ في الوضعِ القياسيِّ الزاويةَ المعطى قياسُها في ما يأتي، مُحدِّدًا مكانَها:

1 130°

أرسمُ المحوريْنِ الإحداثييْنِ، ومنْ نقطةِ الأصلِ أرسمُ ضلعَ الابتداءِ مُنطبِقًا على محورِ x الموجبِ، ثمَّ أضعُ مركزَ المنقلةِ على نقطةِ الأصلِ، وتدريجَ المنقلةِ 0° على ضلعِ الابتداءِ، ثمَّ أُعيِّنُ نقطةً مقابلَ التدريجِ 130°. بعدَ ذلكَ أرسمُ ضلعَ الانتهاءِ منْ نقطةِ الأصلِ إلى النقطةِ التي عيَّنْتُها، فأجِدُ أنَّ ضلعَ انتهاءِ الزاويةِ يقعُ في الربعِ الثاني.



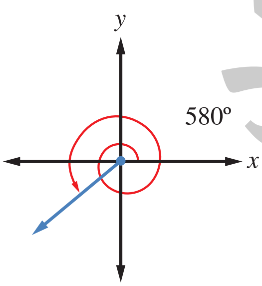
إرشاد

تحتوي المنقلة التي على شكل نصف دائرة على تدريجين متعاكسين، يبدأ كل منهما من 0° وينتهي عند 180°

احرص دائما على وضع التدريج 0° على ضلع ابتداء الزاوية عند الحاجة الى قياسها أو رسمها.

2 580°

بما أنَّ $580^\circ = 360^\circ + 220^\circ$، فإنَّ ضلعَ انتهاءِ الزاويةِ 580° هوَ نفسُهُ ضلعُ انتهاءِ الزاويةِ 220° الذي يقعُ في الربعِ الثالثِ.



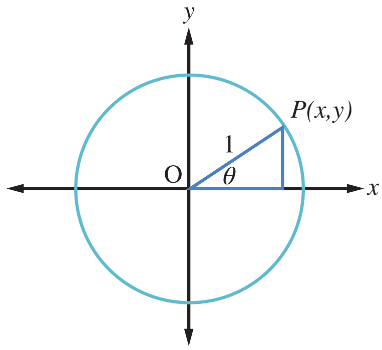
أتحقق من فهمي

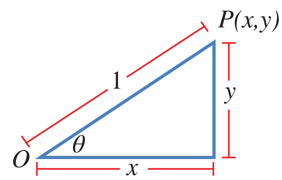
أرسمُ زاويةً قياسُها 460° في الوضعِ القياسيِّ، مُحدِّدًا مكانَها.

النسبُ المثلثيةُ على دائرةِ الوحدةِ

دائرةُ الوحدةِ (unit circle) هي دائرةٌ مركزُها نقطةُ الأصلِ، وطولُ نصفِ قطرِها وحدةٌ واحدةٌ. إذا رُسِمَتِ الزاويةُ θ في الوضعِ القياسيِّ، فإنَّ ضلعَ انتهائِها يقطعُ دائرةَ الوحدةِ في نقطةٍ وحيدةٍ هيَ $P(x, y)$. ومعَ تغيُّرِ قياسِ الزاويةِ يتغيَّرُ موقعُ النقطةِ P على الدائرةِ، ويتغيَّرُ إحداثيّاها.

يُمكِنُ تعريفُ النسبِ المثلثيةِ الأساسيةِ للزاويةِ θ بدلالةِ إحداثيَّيْ P كما في الشكليْنِ الآتييْنِ:





تكونُ هذهِ النسبُ كما يأتي:

1. $\sin\theta = \dfrac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \dfrac{y}{1} = y$
2. $\cos\theta = \dfrac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \dfrac{x}{1} = x$
3. $\tan\theta = \dfrac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \dfrac{y}{x}, x \neq 0$

مثال 3

أَجِدُ النسبَ المثلثيةَ الأساسيةَ للزاويةِ θ المرسومةِ في الوضعِ القياسيِّ، التي يقطعُ ضلعُ انتهائِها دائرةَ الوحدةِ في النقطةِ الواردةِ في ما يأتي:

1) $P(-0.6, 0.8)$

$\sin\theta = y = 0.8, \quad \cos\theta = x = -0.6, \quad \tan\theta = \dfrac{y}{x} = \dfrac{0.8}{-0.6} = -\dfrac{4}{3}$

2) $P\left(\dfrac{5}{13}, -\dfrac{12}{13}\right)$

$\sin\theta = y = -\dfrac{12}{13}, \quad \cos\theta = x = \dfrac{5}{13}, \quad \tan\theta = \dfrac{y}{x} = \dfrac{-12/13}{5/13} = -\dfrac{12}{5}$

إرشاد

النسبُ المثلثيةُ الأساسيةُ للزاويةِ θ هيَ: $\sin\theta$، $\cos\theta$، وَ $\tan\theta$.

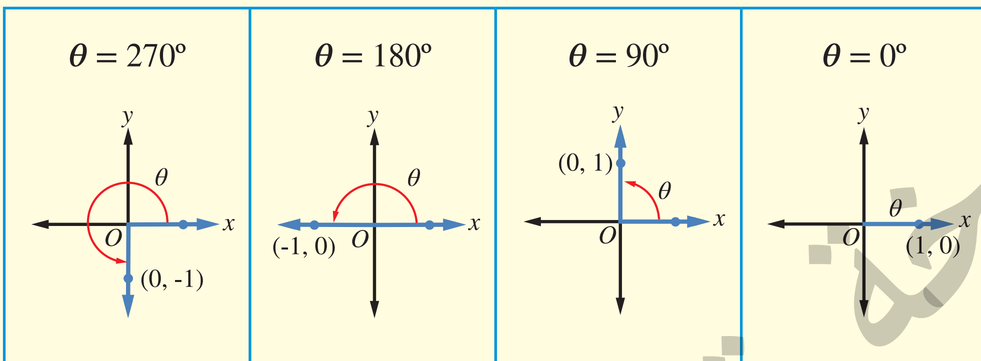
أتحقق من فهمي

أَجِدُ النسبَ المثلثيةَ الأساسيةَ للزاويةِ θ المرسومةِ في الوضعِ القياسيِّ، التي يقطعُ ضلعُ انتهائِها دائرةَ الوحدةِ عندَ النقطةِ $P\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

عندَ رســمِ الزاويةِ θ في الوضعِ القياســيِّ، قدْ يقعُ ضلــعُ انتهائِها في أحدِ الأربــاعِ الأربعةِ، فيقــالُ عندئذٍ إنَّ الزاويةَ θ واقعةٌ في الربعِ كذا، وقــدْ ينطبقُ ضلعُ انتهائِها على أحدِ المحوريْنِ الإحداثييْنِ، فتُسمّى الزاويةُ θ في هذهِ الحالةِ **زاوية ربعية (quadrantile angle)**.

مفهوم أساسي

الزوايا الربعيةُ في دائرة اوحدة:



ويُمكِــنُ تحديــدُ النســبِ المثلثيــةِ للزوايــا الربعيــةِ مــنْ إحداثيــاتِ نقــاطِ تقاطــعِ دائــرةِ الوحــدةِ مــعَ المحوريْــنِ الإحداثييْنِ فمثــلًا، يتقاطعُ ضلــعُ انتهاءِ الزاويــةِ 90° في الوضعِ القياســيِّ مــعَ دائرةِ الوحــدةِ في النقطــةِ $B(0, 1)$. وبذلــكَ، فــإنَّ: $\sin 90^\circ = 1$، $\cos 90^\circ = 0$، ويكون $\tan 90^\circ$ غير معرفًا لأنَّهُ لا تجوزُ القسمةُ على صفرٍ.

أفكر

هــل ســيتغير $\sin 90$ لــو رســمت الزاوية فــي دائرة طــول نصــف قطرهــا لا يساوي وحدة واحدة؟

مثال 4

أينَ يقطعُ ضلعُ انتهاءِ الزاويةِ التي قياسُــها 180° دائرةَ الوحدةِ إذا رُسِمَتْ في الوضعِ القياسيِّ؟ ما قيمةُ النسبِ المثلثيةِ الأساسيةِ لها؟

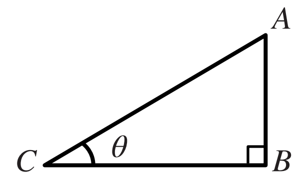
يقطعُ ضلعُ انتهاءِ الزاويةِ التي قياسُها 180° دائرةَ الوحدةِ في النقطةِ $C(-1, 0)$:

$$\sin 180^\circ = y = 0, \quad \cos 180^\circ = x = -1, \quad \tan 180^\circ = \frac{y}{x} = \frac{0}{-1} = 0$$

أتحقق من فهمي

أجِدُ النسبَ المثلثيةَ الأساسيةَ للزاويتيْنِ اللتيْنِ قياسُهما 270°، وَ 360° على الترتيبِ.

إذا كانَتْ θ زاويةً حادَّةً، فإنَّهُ يُمْكِنُ رسمُ مثلثٍ قائمِ الزاويةِ تكونُ θ إحدى زواياهُ.



نظريةُ فيثاغورسْ $(AB)^2 + (BC)^2 = (AC)^2$

بقسمةِ الطرفينِ على $(AC)^2$ $\dfrac{(BC)^2}{(AC)^2} + \dfrac{(AB)^2}{(AC)^2} = \dfrac{(AC)^2}{(AC)^2}$

بتطبيقِ قوانينِ الأسسِ $\left(\dfrac{BC}{AC}\right)^2 + \left(\dfrac{AB}{AC}\right)^2 = 1$

تعريف الجيبِ، وجيب التمامِ $\dfrac{BC}{AC} = \cos\theta,\ \dfrac{AB}{AC} = \sin\theta$

بالتعويضِ $(\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2 = 1$

تظلُّ هذهِ النتيجةُ صحيحةً بقطعِ النظرِ عنْ قياسِ الزاويةِ θ، وهيَ تُستعمَلُ لإيجادِ إحدى هاتيْنِ النسبتيْنِ إذا عُلِمَتِ الأُخرى.

نتيجة

لأيِّ زاويةٍ θ، فإنَّ:

$(\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2 = 1$

مثال 5

أَجِدُ قيمةَ النسبتيْنِ الأساسيتيْنِ الباقيتيْنِ إذا كانَ:

1 $\sin\theta = -\dfrac{1}{5}$ ، ووقعَ ضلعُ انتهاءِ θ في الوضعِ القياسيِّ في الربعِ الثالثِ.

نتيجةً لنظريةِ فيثاغورسْ $(\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2 = 1$

بتعويضِ قيمةِ $\sin\theta$ $(\cos\theta)^2 + \left(\dfrac{-1}{5}\right)^2 = 1$

بطرحِ $\dfrac{1}{25}$ منَ الطرفيْنِ $(\cos\theta)^2 = 1 - \dfrac{1}{25} = \dfrac{24}{25}$

بأخذِ الجذرِ التربيعيِّ للطرفينِ $\cos\theta = \pm\dfrac{\sqrt{24}}{5}$

في الربعِ الثالثِ يكونُ $\cos\theta$ سالبًا $\cos\theta = -\dfrac{\sqrt{24}}{5}$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{-1/5}{-\sqrt{24}/5} = \frac{1}{\sqrt{24}}$$

2 $\tan\theta = -3.5$ ، ووقعَ ضلعُ انتهاءِ θ في الوضعِ القياسيِّ في الربعِ الثاني.

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

بالتعويضِ	$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = -3.5$
بضربِ الطرفيْنِ في $\cos\theta$	$\sin\theta = -3.5\cos\theta$
نتيجةً لنظريةِ فيثاغورسْ	$(\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2 = 1$
بتعويضِ قيمةِ $\sin\theta$	$(\cos\theta)^2 + (-3.5\cos\theta)^2 = 1$
بالتربيعِ	$(\cos\theta)^2 + 12.25(\cos\theta)^2 = 1$
بالتبسيطِ	$13.25(\cos\theta)^2 = 1$
بقسمةِ الطرفيْنِ على 13.25	$(\cos\theta)^2 = \frac{1}{13.25}$
بأخذ الجذر التربيعي للطرفين، واستعمال الآلة الحاسبة	$\cos\theta = \pm\sqrt{\frac{1}{13.25}} = \pm 0.2747$
في الربع الثاني يكون $\cos\theta$ سالبًا	$\cos\theta = -0.2747$
بتعويضِ قيمةِ $\cos\theta$	$\sin\theta = -3.5 \times -0.2747 = 0.96145 \approx 0.96$

أتحقق من فهمي

أَجِدُ قيمةَ كلٍّ منْ $\sin\theta$ وَ $\tan\theta$ إذا كانَ $\cos\theta = 0.8$، ووقعَ ضلعُ انتهاءِ θ في الوضعِ القياسيِّ في الربعِ الرابعِ.

أتدرب وأحل المسائل

أرسمُ الزوايا الآتيةَ في الوضعِ القياسيِّ:

1. 225°
2. 160°
3. 330°
4. 240°

أحدد الربع الذي يقع فيه ضلع انتهاء كل زاوية مما يأتي إذا رسمت في الوضع القياسي:

5. 285°
6. 75°
7. 100°
8. 265°

أُحدِّدُ الربعَ (أوِ الأرباعَ) الذي يقعُ فيهِ ضلعُ انتهاءِ الزاويةِ θ في الوضعِ القياسيِّ إذا كان:

9. $\sin\theta > 0$
10. $\cos\theta > 0$
11. $\tan\theta < 0$
12. $\cos\theta < 0$ و $\sin\theta < 0$

أُحدِّدُ الربعَ (أوِ الأرباعَ) الذي يقعُ فيهِ ضلعُ انتهاءِ الزاويةِ θ في الوضعِ القياسيِّ في كلٍّ ممّا يأتي:

13 $\sin\theta = -0.7$

14 $\tan\theta = 2$

15 $\cos\theta = -\frac{1}{2}$

16 $\tan\theta = -1$

17 $\cos\theta = 0.45$

18 $\sin\theta = 0.55$

19 $\sin\theta = 0.3, \cos < 0$

20 $\tan\theta = -4, \sin\theta > 0$

أَجِدُ النسبَ المثلثيةَ الأساسيةَ للزاويةِ θ إذا قطعَ ضلعُ انتهائِها في الوضعِ القياسيِّ دائرةَ الوحدةِ في النقاطِ الآتيةِ:

21 $P(0, -1)$

22 $P(0.5, 0.5\sqrt{3})$

23 $P\left(\frac{-8}{17}, \frac{15}{17}\right)$

24 $P\left(\frac{20}{29}, \frac{-21}{29}\right)$

أَجِدُ النسبتيْنِ المثلثيْنِ الأساسيتيْنِ الباقيتيْنِ في الحالاتِ الآتيةِ:

25 $\sin\theta = \frac{3}{4}$, $90^\circ < \theta < 180^\circ$

26 $\tan\theta = 0.78$, $-1 < \sin\theta < 0$

27 $\cos\theta = -0.75$, $\tan\theta < 0$

28 $\sin\theta = -0.87$, $270^\circ < \theta < 360^\circ$

مهارات التفكير العليا

29 **أُبرِّرُ:** ما أكبرُ قيمةٍ لجيبِ الزاويةِ؟ ما أصغرُ قيمةٍ لهُ؟

30 **أكتشفُ الخطأَ:** حَلَّ كلٌّ منْ أمجدٍ وحسنٍ المسألةَ الآتيةَ. إذا كانَ $\tan x = 0.75$ ، وكانَتْ x بينَ 180° وَ 360°، فما قيمةُ $\sin x + \cos x$؟

إجابةُ أمجدٍ:

$\sin x + \cos x = -0.2$

إجابةُ حسنٍ:

$\sin x + \cos x = -1.4$

أُحدِّدُ منْ دونِ استعمالِ الآلةِ الحاسبةِ أيُّهما كانَتْ إجابتُهُ صحيحةً، مُبرِّرًا إجابتي.

26 **أكتبُ:** أشرحُ كيفَ أعرفُ إشارةَ النسبةِ المثلثيةِ لأيِّ زاويةٍ.

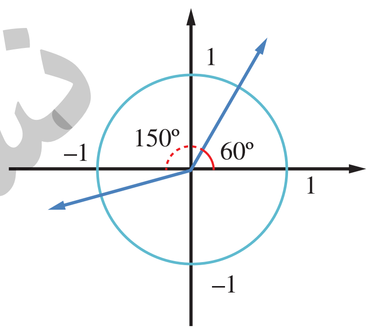
النسبُ المثلثيةُ للزوايا ضمنَ الدورةِ الواحدةِ

Trigonometric Ratios for Angles between 0º and 360º

فكرةُ الدرسِ إيجادُ النسبِ المثلثيةِ الأساسيةِ لأيِّ زاويةٍ بينَ 0º وَ360º، وإيجادُ الزاويةِ إذا عُرِفَتْ إحدى نسبِها المثلثيةِ.

المصطلحاتُ زاويةُ المرجعِ، معكوسُ النسبةِ المثلثيةِ.

سؤالُ اليومِ دارَ ضلعُ انتهاءِ زاويةٍ قياسُها 60º في الوضعِ القياسيِّ بزاويةِ 150º عكسَ اتجاهِ حركةِ عقاربِ الساعةِ. كيفَ نجدُ إحداثيَّيْ نقطةِ تقاطعِ ضلعِ الانتهاءِ معَ دائرةِ الوحدةِ في موقعِهِ الجديدِ؟



تعرَّفْنا في الدرسِ السابقِ كيفيةَ إيجادِ النسبِ المثلثيةِ لزاويةٍ مرسومةٍ في الوضعِ القياسيِّ باستعمالِ إحداثيَّيْ نقطةِ تقاطعِ ضلعِ انتهائِها معَ دائرةِ الوحدةِ، وسنتعرَّفُ في هذا الدرسِ كيفَ نجدُ النسبَ المثلثيةَ إذا عُلِمَ قياسُ الزاويةِ بالدرجاتِ.

إذا وقعَ ضلعُ انتهاءِ الزاويةِ θ في الربعِ الأولِ (أيْ كانَتْ $0^\circ < \theta < 90^\circ$)، فإنَّهُ يُمكِنُ إيجادُ النسبِ المثلثيةِ لهذهِ الزاويةِ باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ، أوْ بما نحفظُهُ منْ نسبٍ مثلثيةٍ للزوايا الخاصةِ: (30º, 45º, 60º).

مراجعةُ المفاهيمِ

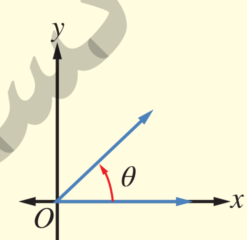
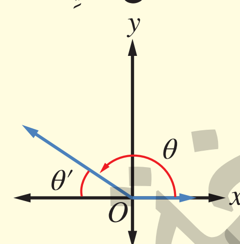
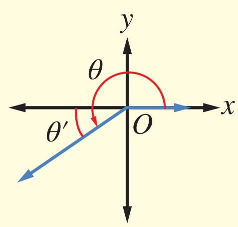
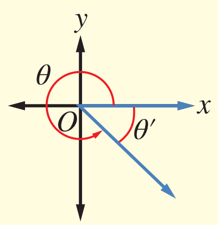
النسبُ المثلثيةُ للزوايا الخاصةِ

θ	0º	30º	45º	60º	90º
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	غير معرَّف

أمّا إذا وقعَ ضلعُ انتهاءِ الزاويةِ θ المرسومةِ في الوضعِ القياسيِّ في أيٍّ منَ الأرباعِ الثلاثةِ الأُخرى، فإنَّ نســبَها المثلثيةَ تكونُ مُرتبطةً بالنســبِ المثلثيةِ **لزاويةِ المرجعِ (reference angle)**، θ' وهيَ الزاويةُ الحادَّةُ المحصورةُ بينَ ضلعِ انتهاءِ الزاويةِ θ والمحورِ x.

مراجعةُ المفاهيمِ

الزوايا المرجعيةُ

الربعُ الأوَّلُ	الربعُ الثاني	الربعُ الثالثُ	الربعُ الرابعُ
			
$\theta' = \theta$	$\theta' = 180^\circ - \theta$	$\theta' = \theta - 180^\circ$	$\theta' = 360^\circ - \theta$

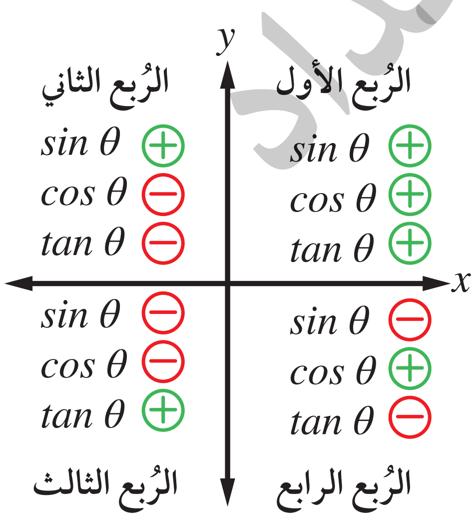
النســبُ المثلثيةُ للزاويةِ θ تساوي النســبَ المثلثيةَ لزاويتِها المرجعيةِ θ' معَ اختلافِ الإشارةِ أحيانًا بحسبِ الربعِ الذي يقعُ فيهِ ضلعُ انتهاءِ الزاويةِ θ.

لإيجادِ النسبِ المثلثيةِ لأيِّ زاويةٍ θ، فإنَّنا نتَّبعُ الخطواتِ الثلاثَ الآتيةَ:

الخطوة 1: إيجادُ الزاويةِ المرجعيةِ θ'.

الخطوة 2: إيجادُ النســبةِ المثلثيةِ للزاويةِ المرجعيةِ θ'.

الخطوة 3: تحديدُ إشــارةِ النسبةِ المثلثيةِ للزاويةِ θ بحسبِ الربعِ الذي يقعُ فيهِ ضلعُ انتهائِها.

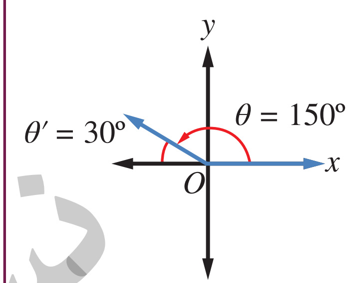


مثال 1

أَجِدُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي:

1 **sin 150°**.

يقعُ ضلعُ الانتهاءِ للزاويةِ 150° في الربعِ الثاني؛ لذا نستعملُ زاويتَها المرجعيةَ:



إيجادُ قياسِ الزاويةِ المرجعيةِ $\theta' = 180° - \theta$

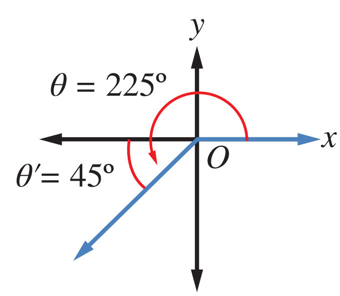
$\theta = 150°$ $= 180° - 150°$

$= 30°$

الجيبُ موجبٌ في الربعِ الثاني $\sin 150° = \sin 30° = 0.5$

2 **cos 225°**.

يقعُ ضلعُ الانتهاءِ للزاويةِ 225° في الربعِ الثالثِ؛ لذا نستعملُ زاويتَها المرجعيةَ:



إيجادُ قياسِ الزاويةِ المرجعيةِ $\theta' = \theta - 180°$

$\theta = 255°$ $= 225° - 180°$

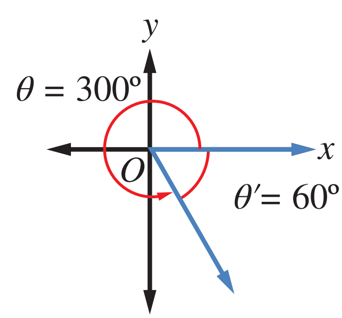
$= 45°$

جيبُ التمامِ سالبٌ في الربعِ الثالثِ $\cos 225° = -\cos 45°$

$= -\frac{\sqrt{2}}{2}$

3 **tan 300°**.

يقعُ ضلعُ الانتهاءِ للزاويةِ 300° في الربعِ الرابعِ؛ لذا نستعملُ زاويتَها المرجعيةَ:



إيجادُ قياسِ الزاويةِ المرجعيةِ $\theta' = 360° - \theta$

$\theta = 300°$ $\theta' = 360° - 300°$

$= 60°$

الظلُّ سالبٌ في الربعِ الرابعِ $\tan 300° = -\tan 60°$

$= -\sqrt{3}$

أتحقق من فهمي

أَجِدُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي:

1 $\sin 120^\circ$

2 $\tan 240^\circ$

3 $\cos 315^\circ$

4 $\sin 210^\circ$

جميعُ الزوايا في المثالِ السابقِ مُرتبِطةٌ بزوايا مرجعيةٍ مألوفةٍ، مثل: 30°، أوْ 45°، أوْ 60°، وهيَ زوايا خاصةٌ عرفْنا قيمَ النسبِ المثلثيةِ لها. ولكنْ، كيفَ نجدُ النسبَ المثلثيةَ لأيِّ زوايا أُخرى؟ يُمكِنُ إيجادُ النسبةِ المثلثيةِ للزاويةِ المرجعيةِ باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ، ثمَّ تحديدُ الإشارةِ المناسبةِ تبعًا للربعِ الذي يقعُ فيهِ ضلعُ انتهاءِ الزاويةِ.

انتبه

يجبُ ضبطُ الآلةِ الحاسبةِ على خيارِ درجاتٍ (DEGREES) قبلَ استعمالِها. أسألُ مُعلِّمي

مثال 2

أَجِدُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي:

1 **$\sin 255^\circ$.**

يقعُ ضلعُ الانتهاءِ للزاويةِ 255° في الربعِ الثالثِ؛ لذا نستعملُ زاويتَها المرجعيةَ:

$$\theta' = \theta - 180^\circ$$ إيجادُ قياسِ الزاويةِ المرجعيةِ

$$\theta' = 255^\circ - 180^\circ$$ $\theta = 255^\circ$

$$= 75^\circ$$

$$\sin 255^\circ = -\sin 75^\circ$$ الجيبُ سالبٌ في الربعِ الثالثِ

والآنَ، أستعملُ الآلةَ الحاسبةَ لإيجادِ $\sin 75^\circ$ كما يأتي:

أضغطُ على مفتاحِ sin، ثمَّ أُدخِلُ القيمةَ 75، ثمَّ أضغطُ على مفتاحِ =، فتظهرُ النتيجةُ:

sin 75 = 0.965925826

بالتقريبِ إلى ثلاثِ منازلَ عشريةٍ، تكونُ النتيجةُ 0.966

إذنْ، $\sin 255^\circ \approx -0.966$

يُمكِنُ أيضًا إيجادُ $\sin 255°$ مباشــرةً باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ منْ دونِ إيجادِ الزاويةِ المرجعيةِ على النحوِ الآتي:

أضغطُ على مفتاحِ sin، ثمَّ أُدخِلُ القيمةَ 255 ، ثمَّ أضغطُ على مفتاح =، فتظهرُ النتيجةُ:

sin 255 = -0965925826

بالتقريبِ إلى ثلاثِ منازلَ عشــريةٍ، تكونُ النتيجةُ -0.966 ، وهيَ النتيجةُ نفسُها التي توصَّلْتُ إليْها آنفًا.

2 **tan 168°**.

أضغطُ على مفتاحِ tan، ثمَّ أُدخِلُ القيمةَ 168، ثمَّ أضغطُ على مفتاح =، فتظهرُ النتيجةُ:

tan 168 = -0.212556561

بالتقريبِ إلى ثلاثِ منازلَ عشريةٍ، تكونُ النتيجةُ -0.213

إذنْ، $\tan 168° \approx -0.213$

أتحقق من فهمي

أَجِدُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ:

1 $\sin 320°$ 2 $\cos 175°$ 3 $\tan 245°$

يُمكِنُ اســتعمالُ الآلةِ الحاســبةِ لإيجادِ قياسِ أيِّ زاويةٍ حادَّةٍ (في الربعِ الأولِ) عُلِمَتْ إحدى نسبِها المثلثيةِ، وذلكَ باستعمالِ **معكوسِ النسبةِ المثلثيةِ (inverse trigonometric ratio)**. فإذا عُلِمَ جيبُ الزاويةِ استُعمِلَ معكوسُ الجيبِ $(\sin^{-1})$، وإذا عُلِمَ جيبُ تمامَ الزاويةِ استُعمِلَ معكوسُ جيبِ التمــامِ $(\cos^{-1})$، وإذا عُلِمَ ظلُّ الزاويةِ اســتُعمِلَ معكــوسُ الظلِّ $(\tan^{-1})$. وبالطريقةِ نفســها، يُمكِنُ إيجادُ قيــاسِ أيِّ زاويةٍ في الأرباعِ الثلاثةِ الباقيةِ باســتعمالِ مفهومِ الزاويةِ المرجعيةِ وإشاراتِ النسبِ المثلثيةِ في الأرباعِ الأربعةِ.

لغة الرياضيات

نقرأُ معكوسَ الجيبِ
sine inverse

نقرأُ معكوسَ جيبِ التمامِ
cosine inverse

نقرأُ معكوسَ الظلِّ
tan inverse

مثال 3

أَجِدُ قيمةَ (أوْ قيمَ) θ في ما يأتي، علمًا بأنَّ $0^\circ \le \theta \le 360^\circ$:

1) $\sin\theta = 0.98$

θ هي الزاوية التي نسبة الجيب لها تساوي 0.98 $\qquad \theta = \sin^{-1}(0.98)$

والآنَ، أستعملُ الآلةَ الحاسبةَ لإيجادِ $\sin^{-1}(0.98)$ كما يأتي:

2ND | sin | 0.98 | = → 78.521659

وبالتقريب إلى منزلةٍ عشـريةٍ واحدةٍ، تكون النتيجة 78.5°، وهيَ زاويةٌ مرجعيةٌ لزاويةٍ أُخرى؛ لأنَّها تقعُ في الربعِ الأولِ. وبما أنَّ الجيبَ موجبٌ في ربعيْنِ (الأولُ والثاني فقطْ)، فإنَّ الزاويةَ الأُخرى θ تكونُ في الربعِ الثاني، ويُمكِنُ إيجادُها باستعمالِ العلاقـةِ بينَ الزاويةِ المرجعيةِ والزاويةِ المناظرةِ في الربعِ الثاني التي تعرَّفْتُها آنفًا.

العلاقةُ بينَ الزاويةِ المرجعيةِ والزاويةِ المناظرةِ في الربعِ الثاني $\qquad \theta' = 180^\circ - \theta$

$$\theta' = 78.5^\circ$$

$$78.5^\circ = 180^\circ - \theta$$

بحَلِّ المعادلةِ $\qquad \theta = 101.5^\circ$

إذنْ، $\theta = 78.5^\circ$، أوْ $\theta = 101.5^\circ$

2) $\tan\theta = -1.2$

θ هيَ الزاويةُ التي نسبة الظل لها تساوي -1.2 $\qquad \theta = \tan^{-1}(-1.2)$

والآنَ، أستعملُ الآلةَ الحاسبةَ لإيجادِ $\tan^{-1}(-1.2)$ كما يأتي:

أضغطُ على مفتاحِ 2ND، ثمَّ على مفتاحِ tan، ثمَّ أُدخِلُ القيمةَ 1.2 (أتجاهلُ الإشارةَ السالبةَ)، ثمَّ أضغطُ على مفتاحِ =، فتظهرُ النتيجةُ: 50.1944289

وبالتقريب إلى منزلةٍ عشـريةٍ واحدةٍ، تكون النتيجة 50.2°؛ ولأنَّ الظلَّ يكونُ سالبًا في ربعيْنِ فقطْ (الثاني والرابعُ)، فإنَّ الزاويةَ 50.2° ليسَتْ منَ الحلولِ، وإنّما زاويةٌ مرجعيةٌ لها.

2ND | tan | 1.2 | = → 50.1944289

ملحوظة

بعـضُ الآلاتِ الحاسـبةِ تحوي المفتـاحَ (INV) أوِ (SHIFT) بـدلَ المفتـاحِ (2ND).

إذا اســتعملْنا العلاقةَ بينَ الزاويةِ المرجعيةِ والزوايا المناظرةِ فــي الربعيْنِ الثاني والرابعِ، فإنَّنا سنجدُ هاتيْنِ الزاويتيْنِ:

زاويةُ الربعِ الثاني: $180^\circ - 50.2^\circ = 129.8^\circ$

زاويةُ الربعِ الرابعِ: $360^\circ - 50.2^\circ = 309.8^\circ$

أتحقق من فهمي

أَجِدُ قيمةَ (أوْ قيمَ) θ في ما يأتي، علمًا بأنَّ $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$:

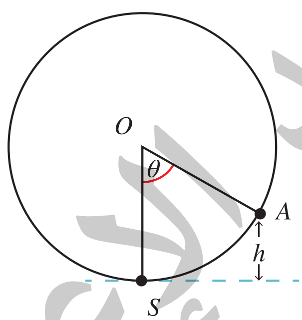
1) $\cos\theta = -0.4$

2) $\tan\theta = 5.653$

3) $\sin\theta = -0.5478$

مثال 4 **من الحياة**

ترفيهٌ: تُمثِّلُ الصورةُ الآتيةُ دولابًا دوّارًا في مدينةِ ألعابٍ يدورُ بسرعةٍ ثابتةٍ، ويُمثِّلُ S في الشكلِ المجاورِ للصورةِ نقطةَ صعودِ الراكبِ الذي موقعُهُ الآنَ عندَ النقطةِ A، في حينِ تُمثِّلُ النقطةُ O مركـزَ الدولابِ. إذا دارَ الدولابُ بزاويةِ θ، فإنَّ ارتفاعَ الراكبِ عنِ الأرضِ (h) بالأمتارِ يعطى بالعلاقةِ: $h = 67.5 - 67.5 \cos\theta$. أَجِدُ طولَ قُطْرِ الدولابِ.



صُمـم أول دولاب هواء في مدينة شيكاغو الأمريكية عام 1893 وسُمي عجلة فيريس الأصلية.

عندما يصلُ الراكبُ إلى النقطةِ الواقعةِ فوقَ S مباشــرةً، فإنَّ ارتفاعَهُ عنِ الأرضِ يساوي طولَ قُطْرِ الدولابِ، وإنَّ θ في تلكَ اللحظةِ تساوي 180°

$h = 67.5 - 67.5 \cos 180^\circ$ بتعويضِ قيمةِ θ

$= 67.5 - 67.5\,(-1)$ $\cos 180^\circ = -1$

$= 67.5 + 67.5 = 135$ بالتبسيطِ

إذنْ، طولُ قُطْرِ الدولابِ هوَ: 135 m

أتحقق من فهمي

أَجِدُ ارتفاعَ الراكبِ عنِ الأرضِ عندما θ تساوي 235°

أتدرب وأحل المسائل

أَجِدُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي:

1 $\sin 130^\circ$ 2 $\sin 325^\circ$ 3 $\cos 270^\circ$

4 $\tan 120^\circ$ 5 $\cos 250^\circ$ 6 $\tan 315^\circ$

أَجِدُ في ما يأتي زاويةً ثانيةً بينَ 0° وَ 360°، لها نسبةُ الجيبِ نفسُها مثل الزاويةِ المعطاةِ:

7 325° 8 84° 9 245°

أَجِدُ في ما يأتي زاويةً ثانيةً بينَ 0° وَ 360°، لها نسبةُ جيبِ التمامِ نفسُها مثل الزاويةِ المعطاةِ:

10 280° 11 150° 12 215°

أَجِدُ في ما يأتي زاويةً ثانيةً بينَ 0° وَ 360°، لها نسبةُ الظلِّ نفسُها مثل الزاويةِ المعطاةِ:

13 75° 14 300° 15 235°

16 أَحُلُّ المسألةَ الواردةَ في بدايةِ الدرسِ.

أَجِدُ في ما يأتي قيمةَ (أوْ قيمَ) θ، علمًا بأنَّ $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$:

17 $\sin \theta = 0.55$ 18 $\cos \theta = -0.05$ 19 $\tan \theta = 0$

20 **أنهارٌ:** يتغيَّرُ عمقُ الماءِ y بالأمتارِ في نهرٍ بسببِ المدِّ والجزْرِ البحريِّ تبعًا للساعةِ x منَ اليومِ. إذا كانَتِ العلاقةُ $y = 3 \sin ((x-4)30^\circ) + 8$ تُمثِّلُ عمقَ الماءِ في النهرِ يومًا ما، حيثُ: $x = 0, 1, 2, 3, \ldots, 24$، وَ $0 =$ الساعةَ الثانيةَ عشرةَ منتصفَ الليلِ، وَ $5 =$ الساعةَ الخامسةَ فجرًا، وَ $13 =$ الساعةَ الواحدةَ بعدَ الظهرِ، وهكذا، فما أقصى عمقٍ للنهرِ؟ في أيِّ ساعةٍ يحدثُ ذلكَ؟

مهارات التفكير العليا

21 **أُبرِّرُ:** ما مجموعُ جيوبِ كلِّ الزوايا الواقعةِ بينَ 0° وَ 360°؟ أُبرِّرُ إجابتي.

22 **أكتشفُ الخطأَ:** حسبَتْ سندسُ نسبةَ جيبِ إحدى الزوايا في الربعِ الثاني، فكانَتْ قيمتُها 1.4527 منْ دونِ استعمالِ الآلةِ الحاسبةِ. ما الخطأُ الذي وقعَتْ فيهِ سندسُ؟ أُبرِّرُ إجابتي.

23 **أكتبُ:** أشرحُ كيفَ يُمكِنُ إيجادُ زاويةٍ عُلِمَتْ إحدى نسبِها المثلثيةِ.

الدرس 3

تمثيلُ الاقتراناتِ المثلثيةِ

Graphing Trigonometric Functions

فكرةُ الدرسِ تمثيلُ اقتراناتٍ مثلثيةٍ مجالُها الفترة $[0^\circ, 360^\circ]$ بيانيًّا.

المصطلحاتُ دوريٌّ، خطُّ التقاربِ الرأسيِّ.

سؤالُ اليومِ يرتبطُ عمقُ الماءِ عندَ نقطةٍ مُعيَّنةٍ في أحدِ الموانئِ بالزمنِ حسبَ العلاقةِ:

$$y = 10 + 6\sin(15x),\ x \geq 0$$

حيثُ: y عمقُ الماءِ بالأمتارِ، وَ x الزمنُ بالساعاتِ بعدَ منتصفِ الليلِ.

أَجِدُ عمقَ الماءِ في الميناءِ عندَ الساعةِ 6 صباحًا.

تُستخدَمُ الاقتراناتُ المثلثيةُ في تمثيلِ مواقفَ حياتيةٍ مرتبطةٍ بالحركةِ الدوريةِ، مثلِ: موجاتِ الصوتِ، والموجاتِ الكهرومغناطيسيةِ، وضغطِ الدمِ في جسمِ الإنسانِ، وارتفاعِ مقعدٍ في دولابٍ دوّارٍ، وتغيُّرِ عددِ ساعاتِ النهارِ خلالَ عامٍ، وغيرِ ذلكَ. ولكنْ، هلْ يُمكِنُ رسمُ منحنى اقترانٍ يُبيِّنُ كيفَ تبدو الحركةُ الدوريةُ التي تُمثِّلُها هذهِ الاقتراناتُ؟

تعلَّمْتُ سابقًا كيفيةَ تمثيلِ اقتراناتٍ خطِّيةٍ وتربيعيةٍ في المستوى الإحداثيِّ بإنشاءِ جدولِ قيمٍ للمُتغيِّرَيْنِ x وَ y، وتمثيلِ كلِّ زوجٍ (x, y) بنقطةٍ في المستوى، ثمَّ رسمِ المنحنى الذي يصلُ هذهِ النقاطَ ببعضِها. وفي هذا السياقِ، يُمكِنُ اتِّباعُ الطريقةِ نفسِها لتمثيلِ الاقتراناتِ المثلثيةِ.

مثال 1

أرسمُ منحنى كلٍّ منَ الاقترانيْنِ الآتييْنِ، علمًا بأنَّ $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$:

1) $y = \sin x$.

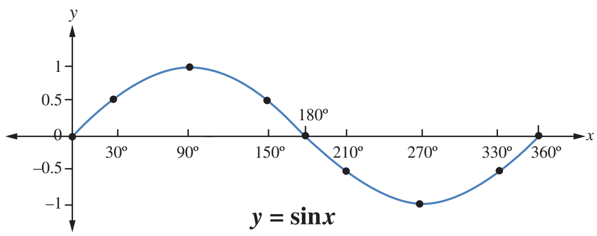
الخطوةُ 1: أكون جدولًا أكتبُ فيهِ زوايا شائعةً، نسبُها المثلثيةُ معروفةٌ، مثلَ: الزوايا الربعيةِ، والزوايا التي زاويتُها المرجعيةُ 30°.

الخطوةُ 2: أَجِدُ قيمةَ $\sin x$ لكلِّ زاويةٍ x، ثمَّ أكتبُها في الجدولِ:

x	0º	30º	90º	150º	180º	210º	270º	330º	360º
$y = \sin x$	0	0.5	1	0.5	0	– 0.5	–1	– 0.5	0

الخطوةُ 3: أُعيِّنُ الأزواجَ المُرتَّبَةَ: $(0º, 0), (30º, 0.5), (90º, 1), \ldots\ldots (360º, 0)$ في المستوى الإحداثيِّ.

الخطوةُ 4: أَصِلُ بمنحنًى أملسَ بينَ النقاطِ، فينتجُ رسمٌ كما في الشكلِ المجاورِ.



منَ التمثيلِ البيانيِّ لاقترانِ $\sin x$، أُلاحِظُ أنَّ:

- أكبرَ قيمةٍ للاقترانِ $\sin x$ هيَ 1، وأصغرَ قيمةٍ لهُ هيَ -1
- $\sin x$ يكونُ موجبًا إذا كانَتْ $0º < x < 180º$، وسالبًا إذا كانَتْ $180º < x < 360º$.
- منحنى الاقترانِ $\sin x$ مُتماثِلٌ. فمثلًا، $\sin 30º = \sin 150º$، وَ $\sin 210º = \sin 230º$.

أفكر

ما العلاقةُ بينَ تماثلِ منحنى اقترانِ الجيبِ والزوايا المرجعيةِ التي تعلَّمْتُها في الدرسِ السابقِ؟

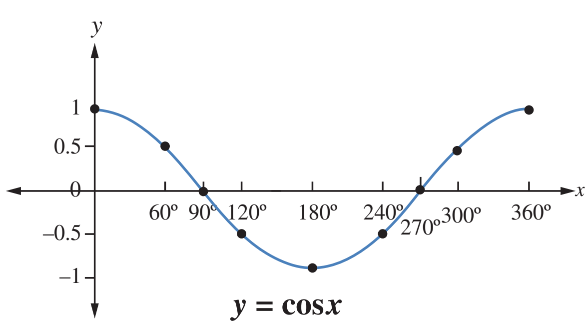
2 $y = \cos x$.

الخطوةُ 1: أكون جدولًا أكتبُ فيهِ زوايا شائعةً.

الخطوةُ 2: أَجِدُ قيمةَ $\cos x$ لكلِّ زاويةٍ x، ثمَّ أكتبُها في الجدولِ:

x	0º	60º	90º	120º	180º	240º	270º	300º	360º
$y = \cos x$	1	0.5	0	–0.5	–1	– 0.5	0	0.5	1

الخطوةُ 3: أُعيِّنُ الأزواجَ المُرتَّبَةَ: $(0º, 1), (60º, 0.5), (90º, 0), \ldots\ldots (360º, 1)$ في المستوى الإحداثيِّ، وأَصِلُ بينَ النقاطِ بمنحنًى أملسَ.



منَ التمثيلِ البيانيِّ لاقترانِ $\cos x$، أُلاحِظُ أنَّ:

- أكبرَ قيمةٍ للاقترانِ $\cos x$ هيَ 1، وأصغرَ قيمةٍ لهُ هيَ -1

- $\cos x$ يكونُ موجبًا إذا كانَتْ $0^\circ < x < 90^\circ$، وَ $270^\circ < x < 360^\circ$، وسالبًا إذا كانَتْ $90^\circ < x < 270^\circ$.
- منحنى الاقترانِ $\cos x$ مُتماثِلٌ. فمثلًا، $\cos 60^\circ = \cos 300^\circ$، وَ $\cos 120^\circ = \cos 240^\circ$.

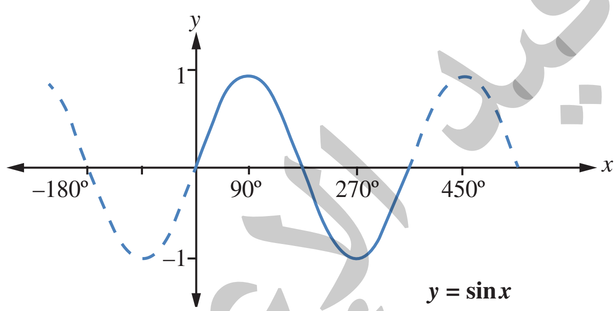
أتحقق من فهمي

أرسمُ منحنى الاقترانِ $y = \sin x$، علمًا بأنَّ $90^\circ \leq x \leq 360^\circ$، مُستعمِلًا زوايا مختلفةً عنْ تلكَ التي في الجدولِ السابقِ، ثمَّ أَجِدُ قيمَ الجيبِ لهذهِ الزوايا باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ.

معلومة أساسية

يُسمّى الاقترانُ دوريًّا إذا كان منحناه تكرار لنمط على فترات منتظمة متتالية. ويسمى النمط الواحد الكامل منها دورة.

تعرَّفْتُ أنَّهُ توجدُ زوايا أكبرُ منْ 360°. فإذا دارَ ضلعُ ابتداءِ الزاويةِ (في الوضعِ القياسيِّ) أكثرَ مِنْ دورةٍ واحدةٍ عكسَ اتجاهِ عقاربِ الساعةِ، فإنَّهُ يُكوِّنُ زوايا أكبرَ من 360°، وإذا دارَ معَ اتجاهِ عقاربِ الساعةِ، فإنَّهُ يُكوِّنُ زوايا قياسُها سالبٌ؛ ولهذا، فقدْ يكونُ قياسُ الزاويةِ أيَّ عددٍ حقيقيٍّ، علمًا بأنَّهُ يُمكِنُ تمثيلُ الاقتراناتِ المثلثيةِ للأعدادِ الحقيقيةِ جميعِها، وليسَ فقطْ للزوايا الواقعةِ بينَ 0° وَ 360°، أُلاحِظُ منحنى اقترانِ الجيبِ الآتي.



والآنَ، سأرسمُ منحنى الاقترانِ $y = \tan x$، مُلاحِظًا الفرقَ بينَهُ وبينَ منحنيَي الاقترانَيْنِ $\sin x$، وَ $\cos x$.

مثال 2

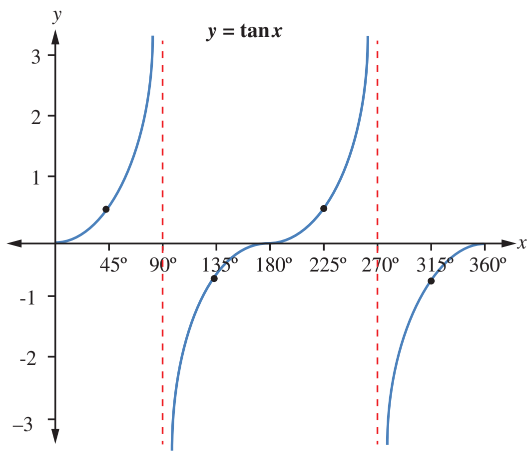
أرسم منحنى الاقتران $y = \tan x$، علمًا بأنَّ $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$:

الخطوةُ 1: أكون جدولا وأكتب فيهِ زوايا شائعةً.

الخطوةُ 2: أجدُ قيمةَ $\tan x$ لكلِّ زاويةٍ x، ثمَّ أكتبُها في الجدولِ:

x	0°	45°	90°	135°	180°	225°	270°	315°	360°
$\tan x$	0	1	غيرُ مُعرَّفٍ	-1	0	1	غيرُ مُعرَّفٍ	-1	0

الخطوةُ 3: أُعيِّنُ النقاطَ في المستوى الإحداثيِّ، مُلاحِظًا صعوبةَ التوصيلِ بينَ النقاطِ بمنحنًى واحدٍ؛ لأنَّ قيمــةَ $\tan x$ غيرُ مُعرَّفةٍ للزاويتيْنِ $90°$ وَ $270°$؛ لذا نصــلُ النقاطَ قبلَ الزاويةِ $90°$ ببعضِها، والنقاطَ بينَ الزاويتيْنِ $90°$ وَ $270°$ ببعضِها، والنقاطَ بعدَ الزاويةِ $270°$ ببعضِها، فينتجُ رسمٌ كما في الشكلِ المجاورِ.



يُسمّى كلٌّ منَ المستقيميْنِ $x = 90°$ وَ $x = 270°$ خطُّ تقاربٍ رأسيٍّ (vertical asymptote) لمنحنى $\tan x$؛ لأنَّ المنحنى يقتربُ كثيرًا منْهُما، لكنَّهُ لا يقطعُهُما.

يُبيِّنُ الشكلُ الســابقُ أنَّ منحنى $\tan x$ غيرُ متصلٍ؛ فهوَ مُكوَّنٌ منْ عِدَّةِ قطعٍ، وأنَّ الظلَّ موجبٌ بينَ الزاويتيْنِ $0°$ وَ $90°$، وبينَ الزاويتيْنِ $180°$ وَ $270°$، وأنَّهُ يكونُ ســالبًا بينَ الزاويتيْنِ $90°$ وَ $180°$، وبينَ الزاويتيْنِ $270°$ وَ $360°$.

أتحقق من فهمي

أرسمُ منحنى الاقترانِ $y = \tan x$، علمًا بأنَّ $90° < x < 270°$، مُستعمِلًا زوايا مختلفةً عنْ تلكَ التي في الجدولِ السابقِ، ثمَّ أَجِدُ قيمَ الظلِّ لهذهِ الزوايا باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ.

أتدرب وأحل المسائل

أرسمُ منحنى الاقترانِ لكلٍّ ممّا يأتي في الفترةِ المعطاةِ، مُحدِّدًا الفترةَ التي يكونُ فيها الاقترانُ موجبًا، وتلكَ التي يكونُ فيها سالبًا:

1) $y = \sin x \quad 90° \le x \le 450°$

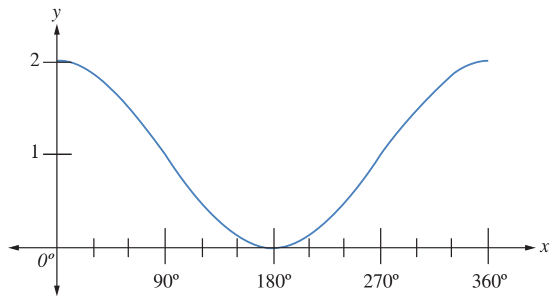
2) $y = \cos x \quad -180° \le x \le 360°$

3) $y = \sin x \quad -180° \le x \le 180°$

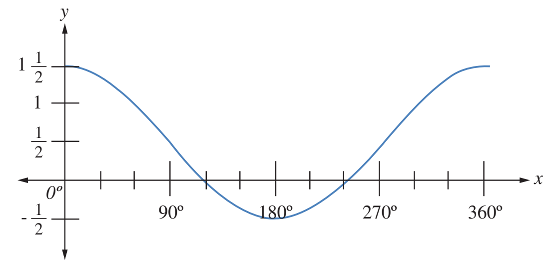
4) $y = \tan x \quad -180° \le x \le 0°$

5 أي التمثيلات البيانية الآتية تمثل منحنى الاقتران $y = \cos x$ في الفترة $0^\circ \le x \le 360^\circ$

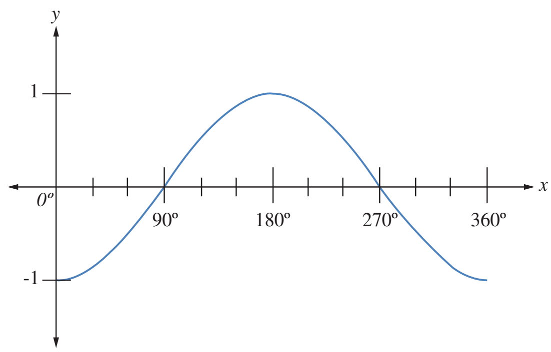
a)



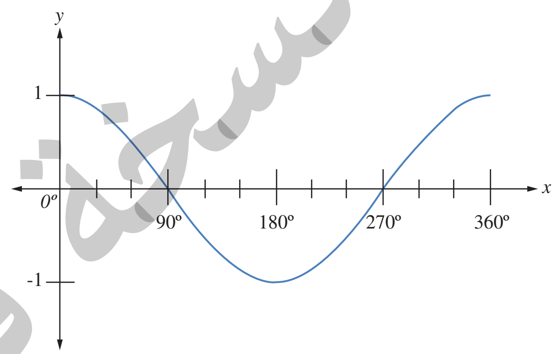
b)



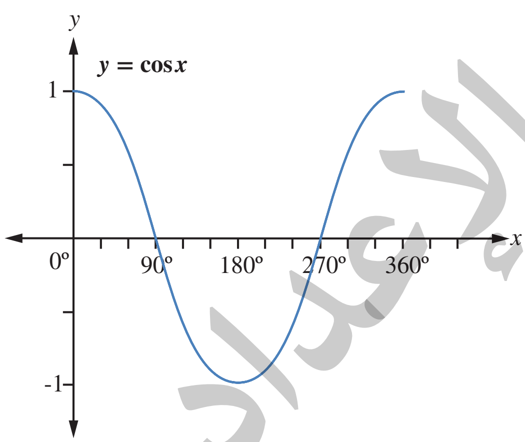
c)



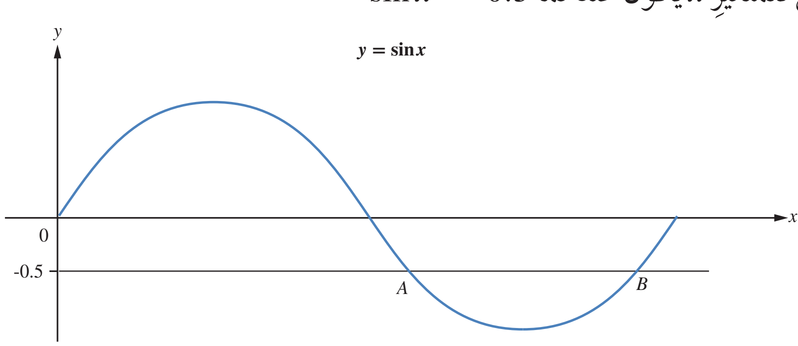
d)



6 يُبيِّنُ الشكلُ الآتي جزءًا منَ التمثيلِ البيانيِّ للاقترانِ $y = \cos x$. بناءً على هذا الشكلِ، أُقدِّرُ قيمتيْنِ للمُتغيِّرِ x يكونُ عندَهُما $\cos x = -0.5$

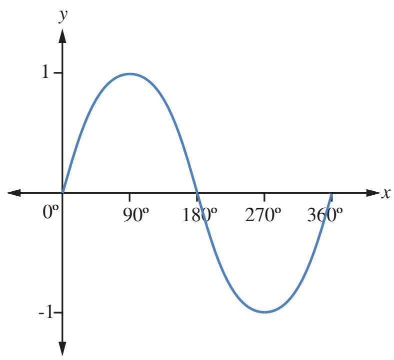


7 يُبيِّنُ الشكلُ الآتي جزءًا منَ التمثيلِ البيانيِّ للاقترانِ $y = \sin x$. بناءً على هذا الشكلِ، أَجِدُ قيمتيْنِ للمُتغيِّرِ x يكونُ عندَهُما $\sin x = -0.5$



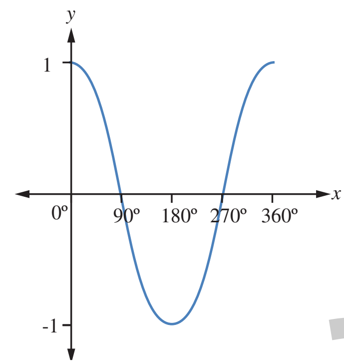
أستعملُ التمثيلاتِ البيانيةَ الآتيةَ لأَجِدَ قيمَ: a, b, c, d, e, f, g, h, k, m, n, r:

8



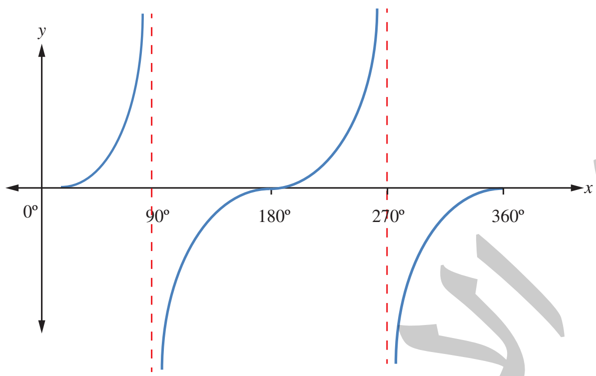
$\sin 0° = \sin a° = \sin b°$
$\sin 30° = \sin c°$
$\sin 60° = \sin d°$
$\sin 210° = \sin e°$

9



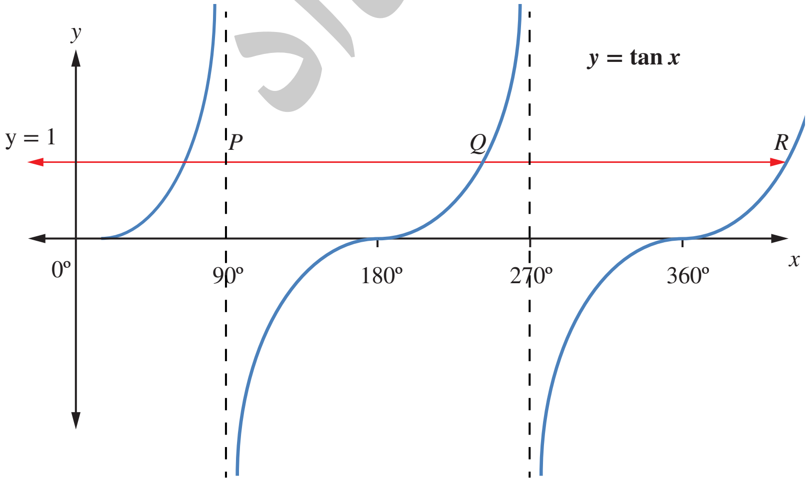
$\cos 0° = \cos k°$
$\cos 30° = \cos m°$
$\cos 45° = \cos n°$
$\cos 90° = \cos r°$

10

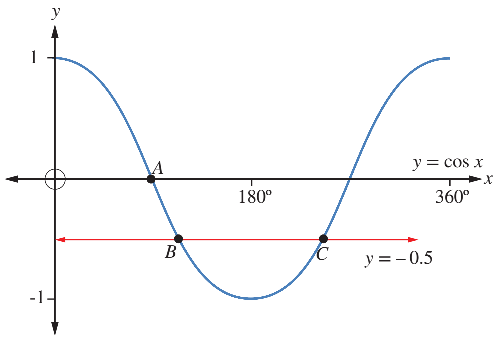


$\tan 0° = \tan e° = \tan f°$
$\tan 45° = \tan g°$
$\tan 60° = \tan h°$

11 يُبيِّنُ الشــكلُ الآتي جزءًا منَ التمثيلِ البيانيِّ للاقترانِ $y = \tan x$، حيثُ يقطعُ المســتقيمُ $y = 1$ منحنى $y = \tan x$ في النقاطِ: P، وَQ، وَ R . أكتبُ الإحداثيَّ x لكلٍّ منَ النقاطِ: P، وَQ، وَ R.



يُبيِّنُ الشـكلُ التالي جزءًا منَ التمثيلِ البيانيِّ للاقترانِ $y = \cos x$ الذي يقطعُهُ المستقيمُ $y = -0.5$ في النقطتيْنِ B, C:

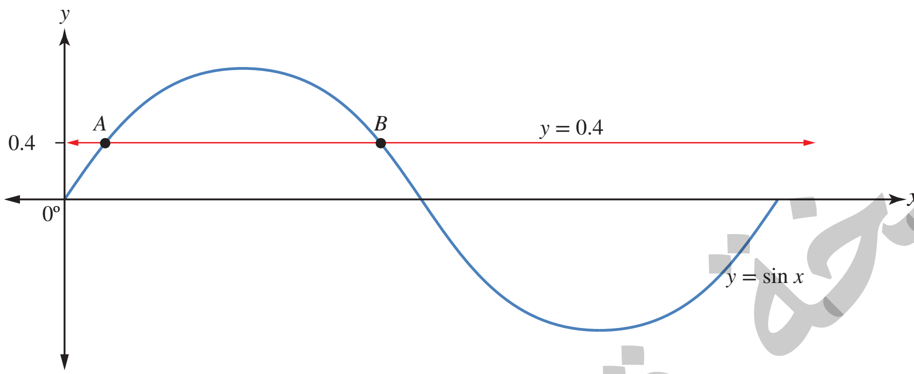


12 أَجِدُ إحداثياتِ النقطةِ A.

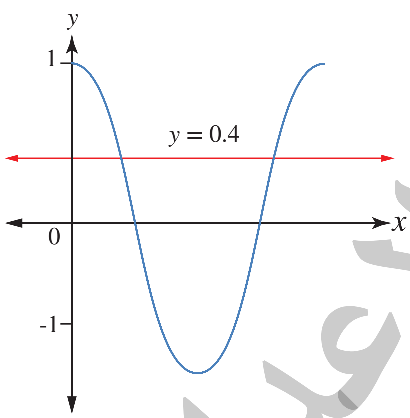
13 أَجِدُ إحداثياتِ النقطتيْنِ B, C.

أَجِدُ إحداثياتِ النقطتيْنِ A وَ B في كلِّ شكلٍ ممّا يأتي باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ:

14



15



مهارات التفكير العليا

16 **تحدٍّ:** أرســمُ منحنيَي الاقترانيْنِ $y = \cos x$ وَ $f = 2 \cos x$ في المستوى الإحداثيِّ نفسِهِ، في الفترة $0° \leq x \leq 360°$، ثمَّ أُقارِنُ بينَهُما.

الاقترانُ الدوريُّ هو الاقتران الذي يكرر نفســه على فترات منتظمة متتالية. أُحدِّدُ إذا كانَ أيٌّ منَ الاقتراناتِ الآتيةِ دوريًّا، ثمَّ أَجِدُ دورتَهُ، مُبرِّرًا إجابتي:

17 $y = \cos x$

18 $y = \sin x$

19 $y = \tan$

20 **أكتبُ:** ما الفرقُ بينَ منحنيَي الجيبِ وجيبِ التمامِ؟

الدرس 4

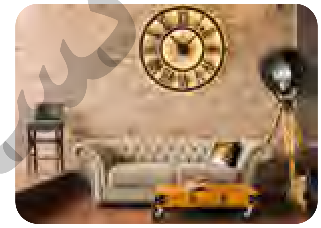
حَلُّ المعادلاتِ المثلثيةِ
Solving Trigonometric Equations

فكرةُ الدرسِ حَلُّ معادلاتٍ تتضمَّنُ النسبَ المثلثيةَ الأساسيةَ، وتكونُ فيها مجموعةُ الحَلِّ ضمنَ دورةٍ واحدةٍ.

المصطلحاتُ المعادلةُ المثلثيةُ.

سؤالُ اليومِ ساعةُ حائطٍ كبيرةٌ مُعلَّقةٌ على جدارِ غرفةٍ. إذا كانَ طولُ عقربِها 60 cm، وبُعْدُ رأسِ العقربِ عنْ سقفِ الغرفةِ يُمثِّلُ دائمًا بالعلاقةِ: $d = -60 \cos (30x) + 135$، حيثُ: d البُعْدُ بالسنتيمترِ، و x الوقتُ بالساعاتِ.

فما الوقتُ الذي يبعدُ فيهِ رأسُ عقربِ الساعاتِ 187 cm عنِ السقفِ؟



المعادلةُ المثلثيةُ (trigonometric equation) هي معادلةٌ مُتغيِّراتُها نسبٌ مثلثيةٌ لزاويةٍ مجهولةٍ. وحل المعادلة المثلثية يعني إيجاد الزاوية (أو الزوايا) التي تحقق هذه المعادلة وتجعل منها عبارة صحيحة.

منَ الأمثلةِ على المعادلاتِ المثلثيةِ:

$$\sin x = 0.5, \quad \tan \theta = 2.435, \quad 2 + \cos x = 3 - 2\cos x, \quad 2\sin^2 x = 3$$

يُمكِنُ حَلُّ بعضِ المعادلاتِ، مثلِ: $\sin x = a$، وَ $\cos x = a$ (حيثُ: $-1 \le a \le 1$)، باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ، أوِ استعمالِ ما نتذكَّرُهُ منْ نسبِ الزوايا الشائعةِ.

مثال 1

أَحُلُّ المعادلتيْنِ الآتيتيْنِ، علمًا بأنَّ $0^\circ \le x \le 360^\circ$:

1 $\mathbf{2 \sin x = 1}$

$\sin x = \frac{1}{2}$ بقسمةِ طرفَيِ المعادلةِ على 2

$x = \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 30^\circ$ باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ

ولأنَّ الجيبَ يكونُ أيضًا موجبًا في الربعِ الثاني؛ فإنَّهُ يوجدُ حَلٌّ آخرُ للمعادلةِ:

$180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$

إذنْ، لهذهِ المعادلةِ حَلّانِ ضمنَ الفترةِ المعطاةِ في المسألةِ، هما: 30°، وَ 150°.

2 $3\cos x - 1 = 2$

$3\cos x = 3$ بإضافةِ 1 إلى الطرفيْنِ

$\cos x = 1$ بقسمةِ طرفَي المعادلةِ على 3

$x = \cos^{-1}(1) = 0^\circ$ باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ

لهذهِ المعادلةِ حَلّانِ ضمنَ الفترة المعطاةِ في المسألةِ، هما: 0°، وَ 360°.

أتحقق من فهمي

أحُلُّ المعادلتيْنِ الآتيتيْنِ، علمًا بأنَّ: $0^\circ \le x \le 360^\circ$

1 $2\cos x = \sqrt{3}$

2 $2\tan x + 3 = 1$

يتطلَّبُ حَلُّ بعضِ المعادلاتِ مزيدًا منَ التبسيطِ والمعالجةِ قبلَ استعمالِ الآلةِ الحاسبةِ.

مثال 2

أحُلُّ المعادلتيْنِ الآتيتيْنِ:

1 $2(\tan x - 3) + 4 = 12\ ,\ 0^\circ \le x \le 360^\circ$

$2\tan x - 6 + 4 = 12$ باستعمالِ خصيصةِ توزيعِ الضربِ

$2\tan x = 14$ بالتبسيطِ

$\tan x = 7$ بقسمةِ طرفَي المعادلةِ على 2

$x = \tan^{-1}(7)$ تعريفُ معكوسِ الظلِّ

$x = 81.9^\circ$ باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ

ولأنَّ الظلَّ يكونُ أيضا موجبًا في الربعِ الثالثِ؛ فإنَّهُ يوجدُ حَلٌّ آخرُ للمعادلة هو:

$180^\circ + 81.9^\circ = 261.9^\circ$

إذنْ، لهذهِ المعادلةِ حَلّانِ ضمنَ الفترة المعطاةِ في المسألةِ، هما: 81.9°، وَ 278.1°.

2 $1 + 4 \sin(3x) = 2.5 , 0° \le x \le 90°$

$4 \sin(3x) = 2.5 - 1$ بطرحِ 1 من الطرفيْنِ

$\sin(3x) = \frac{1.5}{4}$ بقسمةِ طرفَيِ المعادلةِ على 4

$\sin\theta = \frac{1.5}{4} = 0.375$ باستعمالِ الرمزِ θ بدلًا منْ $3x$ ، حيثُ: $0° \le \theta \le 270°$

$\theta = \sin^{-1}(0.375)$ تعريفُ معكوسِ الجيبِ

$\theta = 22°$ باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ

ولأنَّ الجيبَ يكونُ أيضا موجبًا في الربعِ الثاني؛ فإنَّهُ يوجدُ حَلٌّ آخرُ للمعادلة هو:

$180° - 22° = 158°$

لكنْ، $\theta = 3x$

إذنْ، $158° = 3x \Rightarrow x = 52.7°$

أوْ: $22° = 3x \Rightarrow x = 7.3°$

إذنْ، للمعادلةِ $1 + 4\sin(3x) = 2.5$ حَلّانِ ضمنَ الفترةِ المعطاةِ في المسألةِ، هما: $7.3°$، وَ $52.7°$.

أتحقق من فهمي

أَحُلُّ المعادلتيْنِ الآتيتيْنِ:

1. $3(\sin x + 2) = 3 - \sin x , 0° \le x \le 360°$
2. $3\cos(2x) - 1 = 0 , 0° \le x \le 180°$

حَلُّ معادلاتٍ مثلثيةٍ منَ الدرجةِ الثانيةِ

يُمكِنُ حَلُّ المعادلاتِ المثلثيةِ التربيعيةِ بطرائقَ مشابهةٍ لطرائقِ حَلِّ المعادلاتِ التربيعيةِ الجبريةِ (مثلِ التحليلِ)، أبرزُها: إيجادُ العاملِ المشتركِ، والتحليلُ إلى ناتجِ ضربِ قوسيْنِ، وغيرُ ذلكَ منَ الطرائقِ التي تعرَّفْناها سابقًا.

مثال 3

أَحُلُّ المعادلتيْنِ الآتيتيْنِ، علمًا بأنَّ $0^\circ \le x \le 360^\circ$:

1 $\mathbf{3 \sin x \cos x - 2 \sin x = 0}$

تحوي هذه المعادلةُ نســبتيْنِ مثلثيتيْنِ، ويُلاحَظُ أنَّ $\sin x$ تكرَّرَ في حَدَّيِ المعادلةِ، ما يعني أنَّها تُشْبِهُ المعادلةَ $3yz - 2y = 0$؛ لذا يُمكِنُ تحليلُها بإخراجِ عاملٍ مشتركٍ:

$\sin x (3 \cos x - 2) = 0$ بإخراجِ العاملِ المشتركِ $\sin x$

$3 \cos x - 2 = 0 , \sin x = 0$ خاصية الضرب الصفرية

وبذلكَ نتوصَّلُ إلى معادلتيْنِ بسيطتيْنِ، ثمَّ نحُلُّ كلَّ معادلةٍ على حِدَةٍ.

$\sin x = 0$ المعادلةُ الأولى

$x = 0^\circ, x = 180^\circ$ باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ، أوْ جدولِ الزوايا الشائعةِ

$3 \cos x - 2 = 0$ المعادلةُ الثانيةُ

$3 \cos x = 2$ بإضافةِ 2 إلى الطرفيْنِ

$\cos x = \frac{2}{3}$ بقسمةِ الطرفيْنِ على 3

$x = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$ تعريفُ معكوسِ جيبِ التمامِ

$x = 48.2^\circ$ باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ

ولأنَّ جيبَ التمامِ يكونُ أيضا موجبًا في الربعِ الرابعِ؛ فإنَّهُ يوجدُ حَلٌّ آخرُ هو:

$x = 360^\circ - 48.2^\circ = 311.8^\circ$

إذنْ، حلولُ هذهِ المعادلةِ هيَ: $0^\circ, 180^\circ, 48.2^\circ, 311.8^\circ$.

2 $\mathbf{3 \sin^2 x = 2 \sin x + 1}$

أجعلُ الطرفَ الأيمنَ منَ المعادلةِ صفرًا بطرحِ $(2 \sin x + 1)$ منَ الطرفيْنِ:

$3 \sin^2 x - 2 \sin x - 1 = 0$

هذهِ المعادلةُ تُشْبِهُ المعادلةَ الجبريةَ $3y^2 - 2y - 1 = 0$؛ لذا يُمكِنُ حَلُّها بالتحليلِ إلى العواملِ:

$(3\sin x + 1)(\sin x - 1) = 0$ بالتحليلِ إلى العواملِ

$3 \sin x + 1 = 0 , \sin x - 1 = 0$ خاصية الضرب الصفرية

المعادلةُ الأولى $3\sin x+1=0$

بطرحِ 1 منَ الطرفيْنِ $3\sin x=-1$

بقسمةِ الطرفيْنِ على 3 $\sin x=-\frac{1}{3}$

تعريفُ معكوسِ الجيبِ $x=\sin^{-1}(-\frac{1}{3})$

باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ، وتجاهلِ الإشارةِ السالبةِ $x=19.5^\circ$

يُمثِّلُ ما سبقَ الزاويةَ المرجعيةَ للحَلِّ، لا الحَلَّ نفسَهُ؛ لأنَّ الجيبَ سالبٌ في الربعيْنِ: الثالثِ، والرابعِ.

حَلُّ هذهِ المعادلةِ في الربعِ الثالث هوَ: $180^\circ + 19.5^\circ = 199.5^\circ$

وحلها في الربعِ الرابعِ هوَ: $360^\circ - 19.5^\circ = 340.5^\circ$

والآنَ، أحُلُّ المعادلةَ $\sin x-1=0$:

بإضافةِ 1 إلى الطرفيْنِ (1) $\sin x=1$

تعريفُ معكوسِ الجيبِ $x=\sin^{-1}$

باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ، أوْ جدولِ الزوايا المشهورةِ $x=90^\circ$

إذنْ، حلولُ هذهِ المعادلةِ هيَ: $90^\circ, 199.5^\circ, 340.5^\circ$.

أتحقق من فهمي

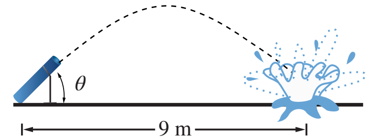
أحُلُّ المعادلتيْنِ الآتيتيْنِ، علمًا بأنَّ $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$:

1) $4\sin x\tan x+3\tan x=0$

2) $2\cos^2 x-3\cos x+1=0$

مثال 4 من الحياة

مِدْفعُ هواءٍ يميلُ عنِ الأرضِ بزاويةٍ قياسُها θ. انطلقَ منْ فُوَّهتِهِ بالونٌ مملوءٌ بالماءِ بسرعةٍ ابتدائيةٍ مقدارُها 12 m/s، فسقطَ على بُعْدِ 9 m منَ المِدْفعِ. إذا كانَتِ العلاقةُ التي تُمثِّلُ المسافةَ الأفقيةَ d التي يقطعُها البالون:



$d=\frac{1}{10}v^2\sin 2\theta$؛ حيثُ v سرعةُ البالونِ الابتدائيةُ، فما قيمةُ θ، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ عُشْرِ درجةٍ؟

الخطوة 1: أُعوِّضُ القيمَ المعطاةَ في المسألةِ في المعادلةِ المعطاةِ، ثمَّ أحُلُّها لإيجادِ قيمةِ θ.

عندَ تعويضِ القيمِ المعطاةِ، أتوصَّلُ إلى المعادلةِ: $9 = \frac{1}{10}(12)^2 \sin 2\theta$

الخطوة 2: لتسهيلِ الحساباتِ، أفترضُ أنَّ $x = 2\theta$، وأحل المعادلة:

المعادلةُ	$9 = \frac{1}{10}(12)^2 \sin x$
بضربِ الطرفيْنِ في 10، والتبسيطِ	$90 = 144 \sin x$
بقسمةِ الطرفيْنِ على 144	$\sin x = \frac{90}{144}$
باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ، والتقريبِ إلى أقربِ عُشْرٍ	$x = \sin^{-1}\frac{90}{144} = 38.7^\circ$

الخطوة 3: أَجِدُ الحَلَ الآخرَ في الربعِ الثاني وهوَ: $180^\circ - 38.7^\circ = 141.3^\circ$

الخطوة 4: أَجِدُ الآنَ قيمةَ θ:

العلاقةُ بينَ x و θ	$x = 2\theta$
بالقسمة على 2 والتعويض	$\theta = \frac{38.7^\circ}{2}$ أو $\theta = \frac{141.3^\circ}{2}$
	19.4° أو 70.7°

إذنْ، يصنعُ المِدْفعُ معَ الأرضِ زاويةً قياسُها 19.4°، أوْ 70.7° تقريبًا.

أتحقق من فهمي

فيزياءُ: فـرقُ الجهدِ E (بالفولت) في دارةٍ كهربائيةٍ يُعطـى بالعلاقةِ: $E = 20 \cos (180t)$، حيثُ t الزمنُ (بالثواني):

1 أفتـرضُ أنَّ $x = 180\,t$، وأحُـلُّ المعادلـةَ $12 = 20 \cos x$، علمًـا بـأنَّ $0^\circ \le x \le 360^\circ$.

2 أَجِـدُ الزمنَ t (حيثُ $0 \le t \le 2$) عندما يكونُ فـرقُ الجهدِ 12 volt، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ جزءٍ منْ مئةٍ منَ الثانيةِ.

أتدرب وأحل المسائل

أحُلُّ المعادلاتِ الآتيةَ، علمًا بأنَّ $0° \leq x \leq 360°$:

1 $\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

2 $\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

3 $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

4 $7 + 3 \cos x = 1$

5 $2 \sin x + 1 = 0$

6 $1 - 2 \tan x = 5$

أحُلُّ المعادلاتِ الآتيةَ، علمًا بأنَّ $0° \leq x \leq 90°$:

7 $5 - 2 \cos (4x) = 4$

8 $3 + 4 \tan (2x) = 6$

9 $4 \sin \theta + 1 = 6$

أحُلُّ المعادلاتِ الآتيةَ مُفترِضًا أنَّ قياسَ الزاويةِ المجهولةِ يقعُ في الفترة $[0°, 360°]$:

10 $2 (\sin x - 2) + 1 = 3 \sin x$

11 $\tan x - 3 (2 \tan x - 1) = 10$

12 $15 \tan x - 7 = 5 \tan x - 3$

13 $5 (\cos x - 1) = 6 + \cos x$

14 $\tan^2 x - 9 \tan x + 20 = 0$

15 $2 \cos^2 x - \cos x = 0$

16 $4 \sin^2 x - 3 \sin x = 1$

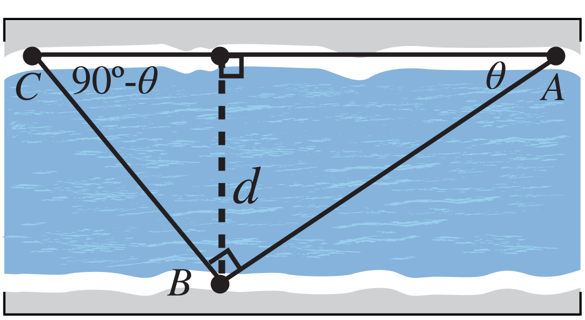
17 $2 \sin^2 x - 1 = 0$

18 $4 \cos^2 x - 4 = 15 \cos x$

19 $\cos x = \sin x$

20 **ساعاتٌ:** أحُلُّ المسألةَ الواردةَ في بدايةِ الدرسِ.

21 **سِباحةٌ:** سبحَ حامدٌ مسافةَ 90 m منَ النقطةِ A على الضفةِ الشماليةِ لنهرٍ إلى النقطةِ B على الضفةِ المقابلةِ، ثمَّ دارَ بزاويةٍ قائمةٍ، وسبحَ مسافةَ 60 m إلى نقطةٍ أُخرى C على الضفةِ الشماليةِ. إذا كانَ قياسُ الزاويةِ CAB هوَ θ، وقياسُ الزاويةِ ACB هوَ $(90° - \theta)$، وطولُ العمودِ منَ B إلى CA يساوي عرضَ النهرِ d. فأُعبِّرُ عنْ d بدلالةِ θ مرَّةً، وبدلالةِ $(90° - \theta)$ مرَّةً أُخرى، ثمَّ أكتبُ معادلةً وأحلها لإيجادِ قيمةِ θ، ثمَّ أجدُ عرضَ النهرِ.



22 **دولاب:** يعطـى ارتفـاع الراكب عن الأرض في دولاب دوار بالمعادلـة $h = 27 - 25\cos\theta$ ، حيث h هو الارتفاع بالأمتار، و θ قياس زاوية التي دارها الدولاب. أحسب متى يكون ارتفاع الراكب عن الأرض 49 m.

23 **حركة المقذوفات:** المســافة الأفقية التي تقطعهــا مقذوفة في الهواء (دون اعتبار لمقاومــة الهواء) تعطى بالمعادلة $d = \frac{v_0^2 \sin(2\theta)}{g}$ ، حيث v_0 الســرعة الابتدائية، θ الزاوية التي تطلق بها المقذوفة و g هو تســارع الجاذبية الأرضية ($9.8\ m/s^2$). إذا قُذِفَت كرة بيسبول بسرعة ابتدائية مقدارها 40 m/s ، فما هي الزاوية التي توجه بها الرمية لكي تقطع الكرة مســافة أفقية مقدارها 110 m قبل سقوطها على الأرض؟ وما أبعد نقطة يمكن أن تصلها الكرة إذا قذفت بهذه السرعة الابتدائية؟

مهارات التفكير العليا

24 **أُبرِّرُ:** حَلَّ كلٌّ منْ سعيدٍ وعليٍّ المعادلةَ $\sin x = 2\sin x \cos x$، حيثُ $0^\circ \le x < 360^\circ$:

إجابةُ سعيدٍ:
الحلولُ هيَ:
$0^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 300^\circ$

إجابةُ عليٍّ:
الحلولُ هيَ:
$60^\circ, 300^\circ$

أيُّهُما إجابتُهُ صحيحةٌ؟ أُبرِّرُ إجابتي.

25 **تحدٍّ:** أحُلُّ المعادلةَ $2\sin x \cos x + \sin x + 2\cos x + 1 = 0$، علمًا بأنَّ $0^\circ \le x \le 360^\circ$.

أَضعُ دائرةً حولَ رمزِ الإجابةِ الصحيحةِ في ما يأتي:

1 إذا كانَ $\cos\theta = -0.5$، فـإنَّ ضلعَ انتهاءِ الزاويةِ θ في الوضعِ القياسيِّ يقعُ في:

a) الربعِ الثاني. b) الربعِ الرابعِ.

c) الربعيْنِ: الثاني، والثالثِ. d) الربعيْنِ: الثاني، والرابعِ.

2 إذا قطعَ ضلعُ انتهاءِ الزاويةِ θ في الوضعِ القياسيِّ دائرةَ الوحدةِ في النقطةِ $P\left(-\frac{40}{41}, \frac{9}{41}\right)$، فإنَّ قيمةَ $\sin\theta$ هيَ:

a) $-\frac{40}{41}$ b) $\frac{9}{40}$

c) $-\frac{9}{41}$ d) $\frac{9}{41}$

3 قياسُ الزاويةِ المرجعيةِ للزاويةِ 230° هوَ:

a) 130° b) 40°

c) 50° d) 140°

4 إذا كانَـتْ $90^\circ < x < 180^\circ$، وكانَ $\sin x = \frac{8}{17}$، فإنَّ قيمةَ $\tan x$ هيَ:

a) $-\frac{8}{15}$ b) $\frac{8}{15}$

c) $\frac{15}{17}$ d) $-\frac{15}{8}$

5 حَلُّ المعادلةِ $x = \sin^{-1}(-1)$ هوَ:

a) 0° b) 90°

c) 270° d) 360°

أَجِدُ النسبَ المثلثيةَ الأساسيةَ للزاويةِ x المرسومةِ في الوضعِ القياســيِّ، التي يقطعُ ضلعُ انتهائِها دائرةَ الوحدةِ عندَ كلٍّ منَ النقاطِ الآتيةِ:

6 $(0.6, 0.8)$

7 $\left(\frac{5}{13}, \frac{-12}{13}\right)$

8 $(-1, 0)$

9 $\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$

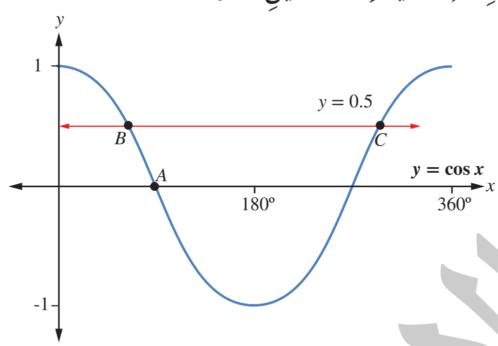
10 $(0, 1)$

11 $(-0.4, 0.4)$

يُبيِّنُ الشـكلُ التالي جـزءًا منَ التمثيـلِ البيانيِّ للاقترانِ المثلثيِ $y = \cos x$ الذي يقطعُهُ المسـتقيمُ $y = 0.5$ في النقطتيْنِ B وَ C:

12 أَجِدُ إحداثياتِ النقطةِ A.

13 أَجِدُ إحداثياتِ النقطتيْنِ B وَ C.



أَجِدُ النسبَ المثلثيةَ الأساسيةَ المُتبقِّيةَ في كلٍّ ممّا يأتي:

14 $\sin x = \frac{-1}{2}, 270^\circ \le x \le 360^\circ$

15 $\cos x = 0.4 , 0^\circ \le x \le 360^\circ$

16 $\tan x = 3 , 180^\circ \le x \le 360^\circ$

17 $\sin x = -\cos x , 0^\circ \le x \le 360^\circ$

أَجِدُ النسبَ المثلثيةَ الأساسيةَ المُتبقِّيةَ في كلٍّ ممّا يأتي:

18 $\sin 140^\circ$

19 $\cos 173^\circ$

20 $\tan 219^\circ$

21 $\sin 300^\circ$

22 $\cos 270^\circ$

23 $\sin(-60^\circ)$

24 $2\sin 150^\circ + \tan 135^\circ$

25 $\sin^2 150^\circ + \cos^2 150^\circ$

أَجِدُ حَلَّ المعادلاتِ الآتيةِ، علمًا بأنَّ $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$:

26 $7 + 3\cos x = 8$

27 $3\cos^2 x - 1 = 0$

28 $\tan x = -1.3212 \cos x$

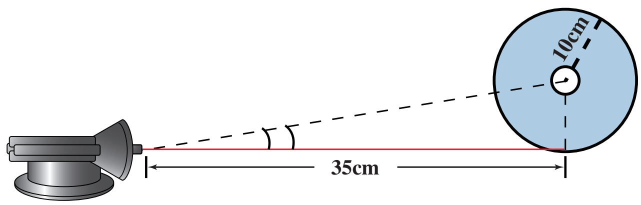
29 $4 + 5\sin^2 x = 9\sin x$

30 $\sin x = 4\cos x$

31 $3\tan^2 x \cos x = 3\tan^2 x$

32 إذا كانت x زاويةً في الربعِ الأولِ، وكان $\sin x + \sin(180^\circ - x) = 1.4444$ أَجِدُ قياسَ الزاويةِ x.

33 **خصائصُ الضوءِ:** في تجربةِ علومٍ لاكتشافِ خصائصِ الضوءِ، وُضِعَ مصدرٌ ضوئيٌّ ليزريٌّ على بُعْدِ 35 cm مِنْ قرصٍ دائريٍّ مثقوبٍ مِنْ مركزِه، وكانَ طولُ قطْرِه 10 cm كما في الشكلِ الآتي. أَجِدُ زاويةَ الشعاعِ الذي يمرُّ خلالَ ثقبِ مركزِ هذا القرصِ.

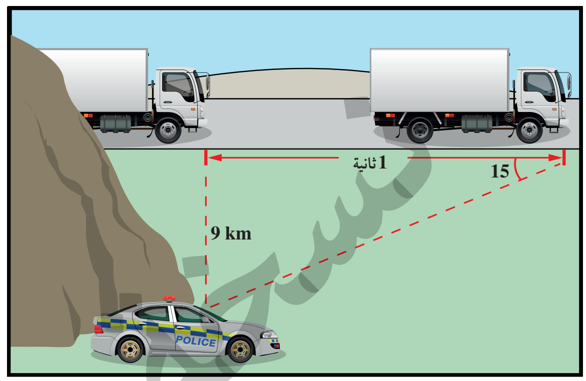


34 **لعبةُ مدفعٍ:** يُطلِقُ مدفعُ قذائفَ بالوناتٍ مائيةً في مسابقةٍ للتسليةِ. إذا كانَ البُعْدُ الأفقيُّ لقذيفةٍ أُطلِقَتْ منَ المدفعِ بزاويةٍ قياسُها x معَ المستوى الأفقيِّ، وبسرعةٍ ابتدائيةٍ مقدارُها 7 m/s، يُعطى بالأمتارِ حسبَ العلاقةِ: $d = 7 + 2\sin\left(\frac{3x}{5}\right)$، فما المسافةُ الأفقيةُ التي قطعَتْها قذيفةٌ أُطلِقَتْ بزاويةٍ مقدارُها 50°؟

35 أَجِدُ أصفارَ الاقترانِ $y = 4(\sin x)^2 - 3$، علمًا بأنَّ $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$.

36 **حمايةٌ:** وُضِعَتْ كاميرا مراقبةٍ فوقَ سورِ منزلٍ على ارتفاعِ 3 m عنْ سطحِ الأرضِ. أَجِدُ قياسَ الزاويةِ التي يُمكِنُ بها للكاميرا رصدُ جسمٍ يرتفعُ 2 m عنْ سطحِ الأرضِ، ويبعدُ 4 m عنِ السورِ.

37 **رادارٌ**: رَصَدَ رادارٌ شاحنة بعدَ ثانيةٍ مِنْ مرورِها بمحاذاتِهِ، فصنعَ الخطُّ الواصلُ بينَ الرادارِ والشاحنةِ وحافةِ الطريقِ زاويةً مقدارُها 15^o كما في الشكلِ الآتي. أَجِدُ سرعةَ الشاحنة بوحدة km/h.



38 **قياساتٌ**: يسكنُ حمزةُ في منزلٍ يقابلُهُ برجٌ يبعدُ عنِ المنزلِ مسافةَ 70 m. رصدَ حمزةُ منْ فوقِ منزلِهِ قمَّةَ البرجِ وقاعدتَهُ، فكانَتِ الزاويتانِ على التوالي: 50^o، وَ 38^o. أَجِدُ كُلًّا منَ ارتفاعِ المنزلِ، وارتفاعِ البرجِ.

أسئلةٌ من الاختبارات المعيارية

شاهد شخص يركب طائرة عمودية ارتفاعها 700 m، عن سطح البحر السفينتين A, B . إذا كانت زاوية انخفاض السفينة A تساوي 45^o، وزاوية انخفاض السفينة B تساوي 40^o فأجب عن الأسئلة 39، 40، 41

39 اعتمادًا على زوايا الانخفاض أختار العبارة الصحيحة:

a) موقع السفينة A عن الطائرة أبعد من السفينة B .

b) موقع السفينة B عن الطائرة أبعد من السفينة A .

c) بعد السفينتين متساوٍ عن الطائرة.

d) لا يمكن معرفة أي السفينتين أبعد من زوايا الانخفاض.

40 المسافة بين السفينتين A وَ B مقربةً إلى أقرب متر تساوي:

a) 134

b) 700

c) 834

d) 1534

41 وضح كيف حصلت على الإجابة في السؤال 39.

الوحدة

4

تطبيقاتُ المثلثاتِ

Triangle Applications

ما أهميةُ هذهِ الوحدةِ؟

تعلَّمْتُ في وحدةٍ سابقةٍ حسابَ المثلثاتِ الذي يستفادُ منْهُ في العلومِ، والهندسةِ، والإلكترونياتِ. وسأتعرَّفُ في هذهِ الوحدةِ العلاقاتِ بينَ زوايا المثلثاتِ وأضلاعِها، وأُوظِّفُ حسابَ المثلثاتِ في الإجابةِ عنِ الأسئلةِ السابقةِ وغيرِها.

تعلَّمْتُ سابقًا:

- ✓ ماهيةَ دائرةِ الوحدةِ، والوضعَ القياسيَّ للزاويةِ.
- ✓ إيجادَ النسبِ المثلثيةِ (الجيبُ، جيبُ التمامِ، الظلُّ) في الأرباعِ الأربعةِ.
- ✓ استخدامَ العلاقةِ $(\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2 = 1$ في حَلِّ مسألةٍ عنْ مثلثٍ قائمِ الزاويةِ.
- ✓ نمذجةَ مسائلَ حياتيةٍ باستعمالِ مثلثاتٍ قائمةِ الزاويةِ، تتضمَّنُ قياساتِ الزوايا والأطوالِ لأضلاعٍ مجهولةٍ، وحَلَّها.

سأتعلَّمُ في هذهِ الوحدةِ:

- ◄ تفسيرَ الاتجاهِ منَ الشمالِ، وإيجادَهُ لنقطةٍ ما بالنسبةِ إلى نقطةٍ مُعيَّنةٍ.
- ◄ حَلَّ المثلثِ باستخدامِ قانونَي الجيوبِ، وجيبِ التمامِ.
- ◄ استعمالَ جيبِ الزاويةِ لإيجادِ مساحةِ المثلثِ.
- ◄ إيجادَ أطوالٍ وزوايا مجهولةٍ في أشكالٍ ثلاثيةِ الأبعادِ.

الدرس
1

الاتجاهُ منَ الشمالِ

Bearing

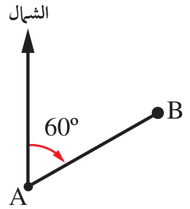
فكرةُ الدرسِ تفسيرُ الاتجاهِ منَ الشمالِ، وإيجادُهُ لنقطةٍ ما بالنسبةِ إلى نقطةٍ أُخرى بالرسمِ، والقياسِ، والحسابِ باستعمالِ العلاقاتِ بينَ الزوايا.

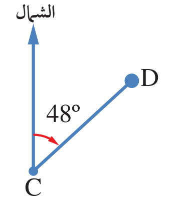
المصطلحاتُ الاتجاهُ منَ الشمالِ.

سؤالُ اليومِ حلَّقَتْ طائرةٌ منْ عمّانَ إلى العقبةِ، وقدْ صنعَ مسارُها المستقيمُ زاويةً قياسُها 200° معَ خطِّ الشمالِ الجغرافيِّ. ما قياسُ الزاويةِ بينَ مسارِ عودةِ الطائرةِ إلى عمّانَ وخطِّ الشمالِ الجغرافيِّ؟

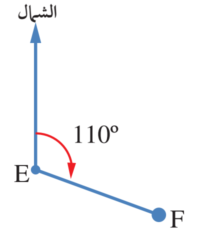
الاتجاهُ منَ الشمالِ (bearing) للنقطةِ B منَ النقطةِ A هوَ قياسُ الزاويةِ التي ضلعُ ابتدائِها خطُّ الشمالِ الجغرافيِّ، وضلعُ انتهائِها المستقيمُ AB، وذلكَ عندَ قياسِ الزاويةِ في اتجاهِ حركةِ عقاربِ الساعةِ. والاتجاهُ منَ الشمالِ يُكتَبُ باستعمالِ عددٍ منْ ثلاثةِ أرقامٍ (منازلُ) بينَ 000° وَ 360°.

يُبيِّنُ الشكلُ المجاورُ أنَّ الاتجاهَ منَ الشمالِ للنقطةِ B منَ النقطةِ A هوَ 060°.

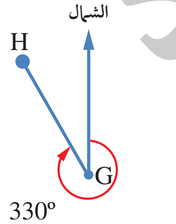




الاتجاهُ منَ الشمالِ للنقطةِ D منَ النقطةِ C هوَ 048°.



الاتجاهُ منَ الشمالِ للنقطةِ F منَ النقطةِ E هوَ 110°.

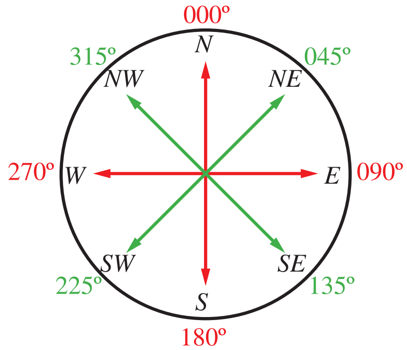


الاتجاهُ منَ الشمالِ للنقطةِ H منَ النقطةِ G هوَ 330°.

يُستخدَمُ الاتجاهُ منَ الشمالِ كثيرًا في تحديدِ خطوطِ الملاحةِ البحريةِ والجويةِ.

توجدُ أربعةُ اتجاهاتٍ رئيسةٍ يجبُ تذكُّرُها دائمًا، هيَ:

1. الشمالُ (N)، واتجاهُهُ منْ مركزِ البوصلةِ هوَ (000°).
2. الشرقُ (E)، واتجاهُهُ منْ مركزِ البوصلةِ هوَ (090°).
3. الجنوبُ (S)، واتجاهُهُ منْ مركزِ البوصلةِ هوَ (180°).
4. الغربُ (W)، واتجاهُهُ منْ مركزِ البوصلةِ هوَ (270°).



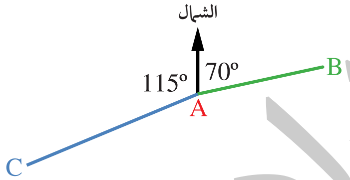
اعتمدَ الإنسانُ قديمًا على الشمسِ والقمرِ والنجومِ في معرفةِ الاتجاهاتِ، ثمَّ أخذَ يعتمدُ اليومَ على البوصلةِ التي تُحدِّدُ اتجاهَ الشمالِ، ومنْهُ تُحدَّدُ بقيةُ الاتجاهاتِ.

توجدُ أربعةُ اتجاهاتٍ أخرى مشهورةٍ يجبُ تذكُّرُها دائمًا، هيَ:

1. الشمالُ الشرقيُّ (NE)، واتجاهُهُ منْ مركزِ البوصلةِ هوَ (045°).
2. الجنوبُ الشرقيُّ (SE)، واتجاهُهُ منْ مركزِ البوصلةِ هوَ (135°).
3. الجنوبُ الغربيُّ (SW)، واتجاهُهُ منْ مركزِ البوصلةِ هوَ (225°).
4. الشمالُ الغربيُّ (NW)، واتجاهُهُ منْ مركزِ البوصلةِ هوَ (315°).

مثال 1

يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ موقعَ ثلاثِ مدنٍ، هيَ: A، وَ B، وَ C. أكتبُ اتجاهَ المدينةِ B منَ المدينةِ A، واتجاهَ المدينةِ C منَ المدينةِ A.



مقياسُ الرسمِ: 1 cm يُمثِّلُ 10 km.

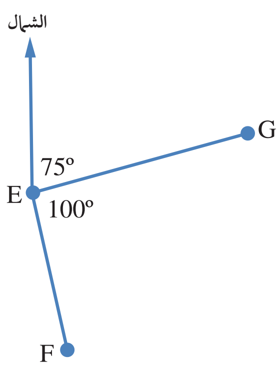
اتجاهُ المدينةِ B منَ المدينةِ A هوَ 070°، واتجاهُ المدينةِ C منَ المدينةِ A هوَ $360^\circ - 115^\circ = 245^\circ$.

أتعلم

سنستعملُ في بقيةِ الدرسِ كلمةَ (اتجاهٌ) وحدَها للدلالةِ على الاتجاهِ منَ الشمالِ.

أتحقق من فهمي

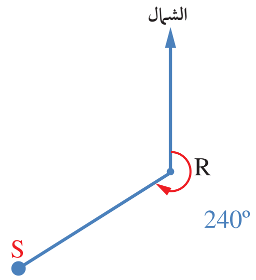
يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ موقعَ ثلاثِ سفنٍ، هيَ: E، وَ F، وَ G. أكتبُ اتجاهَ السفينةِ G منَ السفينةِ E، واتجاهَ السفينةِ F منَ السفينةِ E.



إذا عُلِمَ اتجاهُ النقطةِ S منَ النقطةِ R، فيُمكِنُ حسابُ اتجاهِ النقطةِ R منَ النقطةِ S .

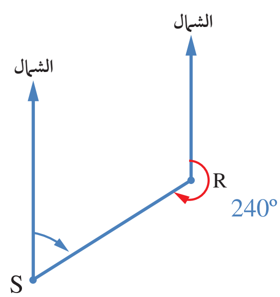
مثال 2

أَجِدُ اتجاهَ النقطةِ R منَ النقطةِ S في الشكلِ المجاورِ.



الطريقةُ الأولى: استعمالُ الرسمِ.

أرسمُ خطًّا رأسيًّا يُبيِّنُ اتجاهَ الشمالِ الجغرافيِّ عندَ النقطةِ S، ثمَّ أستعملُ منقلةً لأقيسَ الزاويةَ التي رأسُها S، وضلعاها خطُّ الشمالِ (SN) والمستقيمُ SR.



سأجدُ أنَّ قياسَ هذهِ الزاويةِ هوَ 60°، إذنْ، اتجاهُ النقطةِ R منَ النقطةِ S هوَ 060°.

الطريقةُ الثانيةُ: استعمالُ الجبرِ.

يُمكِنُ إيجادُ اتجاهِ النقطةِ R منَ النقطةِ S باستعمالِ العلاقاتِ بينَ الزوايا.

$m\angle NRS = 360^\circ - 240^\circ = 120^\circ$ مجموعُ قياساتِ الزوايا حولَ نقطةٍ يساوي 360°

$m\angle NSR = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$ خطّا الشمالِ متوازيانِ؛ لذا، فالزاويتانِ الداخليتانِ NRS ، وَ NSR متكاملتانِ

أتحقق من فهمي

إذا كانَ اتجاهُ النقطةِ X منَ النقطةِ Z هوَ 295°، فما اتجاهُ النقطةِ Z منَ النقطةِ X ؟

مثال 3

أســتعمل الخريطة المجاورة لأحدد اتجاه العاصمة عمان من مدينة القدس الشريف.

الخطوة 1: أرســم قطعة مستقيمة بين مدينتي القدس الشريف وعمان.

الخطوة 2: أرسم خطًا رأسيًا يبين اتجاه الشمال الجغرافي عند مدينة القدس الشريف.

الخطوة 3: أســتعمل المنقلــة لأجد قيــاس الزاوية بين خط الشمال الجغرافي والقطعة المستقيمة الواصلة بين المدينتين باتجاه عقارب الساعة.

سأجد أن قياس هذه الزاوية يساوي 70^{o}.

إذن، اتجــاه العاصمة عمــان من مدينة القدس الشــريف هو 070^{o}.

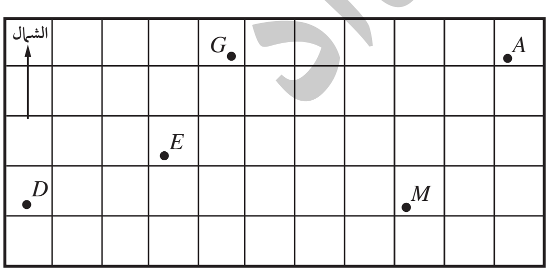
مدينــة القدس هــي عاصمة دولة فلســطين وأكبر مدنها، ولها أســماء عــدة منها بيت المقدس، وأولــى القبلتين، والقدس الشريف.

أتحقق من فهمي

أستعمل الخريطة في المثال السابق لأحدد اتجاه مدينة حيفا من مدينة القدس الشريف.

أتدرب وأحل المسائل

أَجِدُ كل من الاتجاهات التالية باستعمالِ المنقلةِ:



1 اتجاه النقطةُ D منَ النقطةِ E.

2 اتجاه النقطةُ M منَ النقطةِ D.

3 اتجاه النقطةُ G منَ النقطةِ A.

أرسمُ شكلًا يوضح كل موقف مما يلي:

4 اتجاه النقطةِ C منَ النقطةِ H هو 170°:

5 اتجاه النقطةِ B منَ النقطةِ W هو 310°:

أرسمُ شكلًا لحَلِّ المسائلِ الآتيةِ:

6 اتجاهُ A منْ B هوَ 070°. أجِدُ اتجاهَ B منْ A.

7 اتجاهُ X منْ Y هوَ 324°. أجِدُ اتجاهَ Y منْ X.

8 تقعُ النقطةُ A شماليَّ النقطةِ C، وتقعُ النقطةُ B شرقيَّ النقطةِ A، واتجاهُ النقطةِ B منَ النقطةِ C هوَ 045°. أرسمُ شكلًا يُبيِّنُ مواقعَ النقاطِ الثلاثِ.

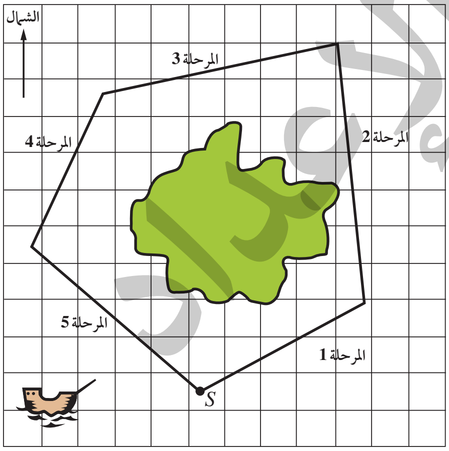
ملاحةٌ بحريةٌ: أبحرَ قاربٌ حولَ الأضلاعِ الأربعةِ لمربَّعٍ مساحتُهُ كيلو مترٍ مربَّعٌ واحدٌ:

9 إذا بدأَ الإبحارَ في اتجاهِ الشمالِ، فما الاتجاهاتُ الثلاثةُ التاليةُ التي سلكَها حتّى أكملَ رحلتَهُ حولَ المربَّعِ باتجاهِ حركةِ عقاربِ الساعةِ؟

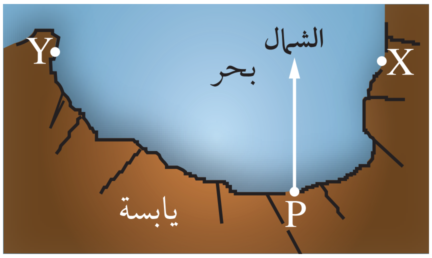
10 إذا بدأَ الإبحارَ في اتجاهِ 090°، فما الاتجاهاتُ الثلاثةُ التاليةُ التي سلكَها حتّى أكملَ رحلتَهُ حولَ المربَّعِ بعكسِ اتجاهِ حركةِ عقاربِ الساعةِ؟

11 **خرائطُ:** تُبيِّنُ الخريطةُ أدناه رحلةَ قاربٍ حولَ إحدى الجُزرِ، والتي بدأَتْ منَ الموقعِ S، وانتهَتْ عندَهُ. إذا كانَ كلُّ 1 cm على الخريطةِ يُمثِّلُ 10 km، فما طولُ كلِّ مرحلةٍ منْ مراحلِ الرحلةِ واتجاهُها بالنسبة للنقطةِ S؟ أنسخُ الجدولَ الآتيَ، ثمَّ أُكمِلُهُ:

المرحلةُ	المسافةُ الحقيقيةُ	الاتجاهُ
1		
2		
3		
4		
5		

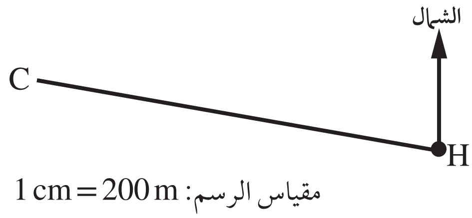


موانئ: يُبيِّنُ المُخطَّطُ المجاورُ الميناءَ P والمرفأيْنِ X وَ Y على الساحلِ:



12 أبحرَ قاربُ صيدٍ منَ الميناءِ P إلى المرفأِ X. ما اتجاهُ المرفأِ X منَ الميناءِ P؟

13 أبحرَ يختٌ منَ الميناءِ P إلى المرفأِ Y. ما اتجاهُ المرفأِ Y منَ الميناءِ P؟



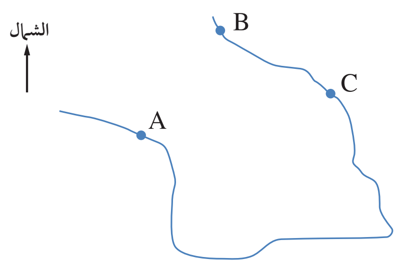
مواقع جغرافيــة: يُبيِّنُ المُخطَّطُ المجاور موقعَ بيــتِ أريج عند النقطة H والنادي الرياضي الذي ترتاده عند النقطة C:

14 أستعملُ مقياسَ الرســمِ المعطى لإيجادِ المسافةِ الحقيقيةِ بينَ بيتِ أريج والنادي الرياضي.

15 أستعملُ منقلةً لإيجادِ اتجاهِ الكليةِ منْ بيتِ كمالٍ.

16 يبعدُ الســوقُ التجاريُّ S مســافةَ 600 m عنْ بيتِ أريج، وباتجاهِ 150° منْ بيتِها. أُعيِّنُ موقعَ السوقِ التجاريِّ S على نسخةٍ منَ المُخطَّطِ.

17 **ملاحــةٌ جويةٌ:** في أثناءِ تحليقِ طائرةٍ باتجاهِ 072°، طُلِبَ إلى قائدِها التوجُّهُ إلى مطارٍ صوبَ الجنوبِ. ما الزاويةُ التي سيستديرُ بها؟



18 **خرائطُ:** تُمثِّلُ A وَ B وَ C ثلاثَ قرًى تقعُ على رؤوسِ مربَّعٍ في خليجٍ ما. إذا كانَ اتجاهُ القريةِ B منَ القريةِ A هوَ 030°، فما اتجاهُ القريةِ A منَ القريةِ C؟

19 أَحُلُّ المسألةَ الواردةَ في بدايةِ الدرسِ.

مهارات التفكير العليا

20 **مســألةٌ مفتوحةٌ:** أرسمُ مثلثًا ذا قاعدةٍ أفقيةٍ أُســمّيهِ ABC، ثمَّ أقيسُ زواياهُ، ثمَّ أَجِدُ اتجاهَ A منْ B، واتجاهَ C منْ A، واتجاهَ C منْ B.

تحدٍّ: أبحرَتْ ســفينةٌ منَ الميناءِ P مسافةَ 57 km باتجاهِ الشمالِ، ثمَّ تحوَّلَتْ إلى اتجاهِ 045°، وقطعَتْ مسافةَ 38 km. إذا كانَ موقعُ السفينةِ الحاليُّ هوَ S، فأَجِدُ:

21 SP .

22 اتجاهَ موقعِ السفينةِ منَ الميناءِ P.

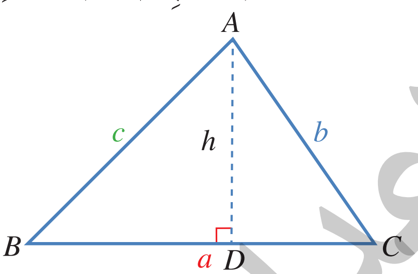
قانونُ الجيوبِ
Law of Sines

فكرةُ الدرسِ استعمالُ قانونِ الجيوبِ لإيجادِ طولِ ضلعٍ، أوْ قياسِ زاويةٍ في مثلثٍ، عُلِمَ فيهِ ضلعانِ وزاويةٌ مقابلةٌ لأحدِهما، أوْ زاويتانِ وضلعٌ بينَهُما.

المصطلحاتُ حَلُّ المثلثِ، قانونُ الجيوبِ.

سؤالُ اليومِ إذا كانَتْ جرشُ والزرقاءُ ومأدبا تُشكِّلُ رؤوسَ مثلثٍ على الخريطةِ، والمسافةُ بينَ مدينتَيِ الزرقاءِ وجرشَ 44 km، وقياسُ الزاويةِ التي تقعُ عندَ رأسِها مدينةُ جرش 52°، وقياسُ الزاويةِ التي تقعُ عندَ رأسِها مدينةُ الزرقاءِ 93°، فهلْ يُمكِنُ بهذهِ المعلوماتِ حسابُ المسافةِ بينَ مدينتَيْ جرشَ ومأدبا؟

يوجدُ في أيِّ مثلثٍ ستةُ قياساتٍ، هيَ: ثلاثةُ أضلاعٍ، وثلاثُ زوايا. وإيجادُ هذهِ القياساتِ يُعرَفُ باسمِ **حَلِّ المثلثِ (solving a triangle)**؛ إذْ تساعدُ قياساتُ الزوايا على حَلِّ المثلثاتِ في حالِ كانَتْ بعضُ قياساتِها معروفةً، وذلك باستعمال نسبةِ الجيبِ لإيجادِ علاقاتٍ بينَ أطوالِ الأضلاعِ.



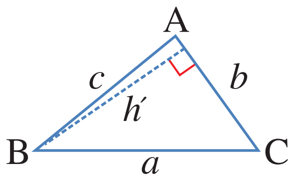
ففي المثلثِ ABC المرسومِ جانبًا، يُمثِّلُ h الارتفاعَ منَ النقطةِ A؛ لذا فهوَ عموديٌّ على القاعدةِ $\overline{BC}$.

يُمكِنُ الاستفادةُ منْ تعريفِ الجيبِ في استنتاجِ بعضِ العلاقاتِ كما يأتي:

تعريفُ الجيبِ	$\sin B = \frac{h}{c}$
بالضربِ التبادليِّ	$h = c\sin B$
تعريفُ الجيبِ	$\sin C = \frac{h}{b}$
بالضربِ التبادليِّ	$h = b\sin C$
بالمساواةِ $h = h$	$c\sin B = b\sin C$
بقسمةِ الطرفيْنِ على $\sin B$، ثمَّ على $\sin C$	$\frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B}$

رموز رياضية

تشيرُ الأحرفُ الكبيرةُ A, B, C إلى رؤوسِ المثلثِ وزواياهُ، في حينِ تشيرُ الصغيرةُ منْها إلى أطوالِ a, b, c الأضلاعِ. فمثلاً طولُ الضلعِ المقابلُ للزاويةِ A فيشارُ إليْهِ بالحرفِ a، وهكذا.



وبالمثلِ، يُمكِنُ استنتاجُ العلاقتيْنِ الآتيتيْنِ عندَ رسمِ ارتفاعِ المثلثِ منَ النقطةِ B بشكلٍ عموديٍّ على AC، أوْ رسمِ ارتفاعِهِ منَ النقطةِ C عموديًّا على AB.

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

عندَ دمجِ هذهِ العلاقاتِ الثلاثِ معًا، ينتجُ: **قانونَ الجيوبِ (law of sines)**.

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

إرشاد

توجدُ صيغةٌ أُخرى لقانونِ الجيوبِ هيَ:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

يُستعمَلُ قانونُ الجيوبِ لحَلِّ المثلثِ الذي عُلِمَتْ ثلاثةٌ من قياساتِهِ، وذلكَ في الحالتيْنِ الآتيتيْنِ:

1 ضلعٌ واحدٌ وزاويتانِ (ASA، أوْ SAA).

2 ضلعانِ وزاويةٌ مقابلةٌ لأحدِهما (SSA).

أفكر

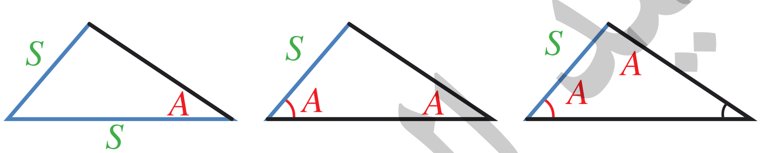
لماذا يتعذَّرُ حَلُّ المثلثِ الذي عُلِمَتْ فقطْ قياساتُ زواياهُ جميعًا؟

إرشاد

الحرفُ S هوَ اختصارٌ لكلمةِ Side، وتعني الضلعَ.

الحرفُ A هوَ اختصارٌ لكلمةِ Angle، وتعني الزاويةَ.

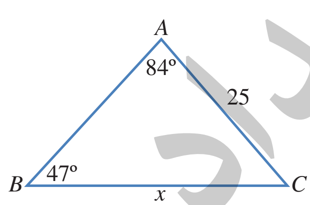
يُبيِّنُ الشكلُ الآتي هاتيْنِ الحالتيْنِ:



الحالة 1 ASA الحالة 1 SAA الحالة 2 SSA

مثال 1

أَجِدُ قيمةَ x في المثلثِ ABC.



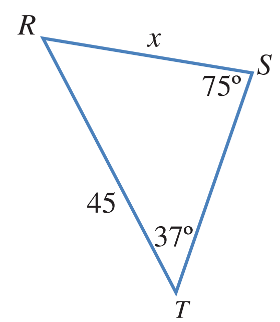
$$\frac{x}{\sin 84^\circ} = \frac{25}{\sin 47^\circ}$$ قانونُ الجيوبِ

$$x = \frac{25 \sin 84^\circ}{\sin 47^\circ}$$ بضربِ الطرفيْنِ في $\sin 84^\circ$

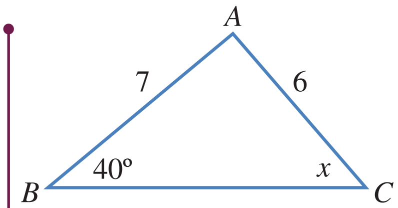
$$\approx 34 \text{ cm}$$ باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ

أتحقق من فهمي

أَجِدُ قيمةَ x في المثلث RST المبين جانبًا.



يُمكِنُ أيضًا استعمالُ قانونِ الجيوبِ لإيجادِ قياسِ زاويةٍ مجهولةٍ في المثلثِ.



مثال 2

أَجِدُ قيمةَ x في المثلثِ ABC.

قانونُ الجيوبِ

$$\frac{\sin x}{7} = \frac{\sin 40^\circ}{6}$$

بضربِ الطرفيْنِ في 7

$$\sin x = \frac{7\sin 40^\circ}{6}$$

$$\approx 0.7499$$

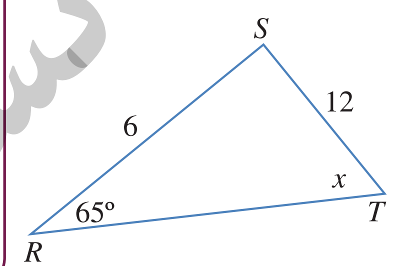
معكوسُ الجيبِ

$$x = \sin^{-1}(0.7499)$$

باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ

$$\approx 48.6^\circ$$

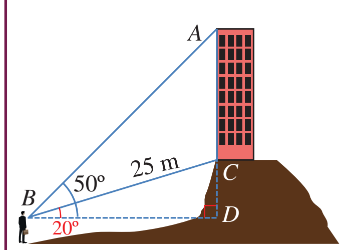
أتحقق من فهمي



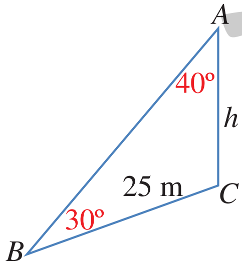
أَجِدُ قيمةَ x في المثلث RST.

يُمكِنُ نمذجةُ كثيرٍ منَ المواقفِ الحياتيةِ باســتعمالِ المثلثاتِ، ثمَّ إيجادُ قياساتٍ مجهولةٍ فيها باستعمالِ قانونِ الجيوبِ.

مثال 3 من الحياة



يقـع بـرج ارتفاعـه h متـر علـى تلـة، رُصـدت قمـة البـرج A مـن النقطـة B التـي تبعـد عـن قاعـدة البـرج 25 m فـكان قيـاس زاويـة ارتفاعهـا 50°، ورُصـدت قمـة التلـة مـن النقطـة B نفسـها فـكان قيـاس زاويـة ارتفاعهـا 20°. فمـا ارتفـاع البـرج h؟



أجد أولًا قياسَ الزاويةِ ABD:

$$m\angle ABD = 50^\circ - 20^\circ = 30^\circ$$

ثم أجد قياسُ الزاويةِ BAD:

$$m\angle BAD = 180^\circ - 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$$

ارتفاع البرج هو طول الضلع AC في المثلث BAC. استعمل قانون الجيب لأحل هذا المثلث.

بعدَ ذلكَ أستعملُ قانونُ الجيوبِ في المثلث BAC لإيجادِ ارتفاعِ البرجِ:

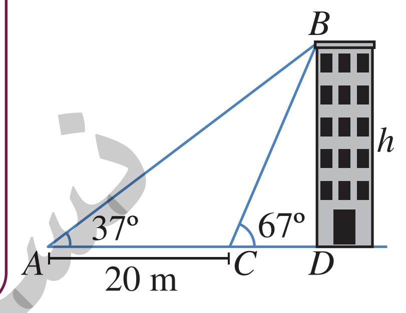
قانونُ الجيوبِ $\frac{h}{\sin 30^\circ} = \frac{25}{\sin 40^\circ}$

بضربِ الطرفيْنِ في $\sin 30^\circ$ $h = \frac{25\sin 30^\circ}{\sin 40^\circ}$

باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ $h \approx 19.45$ m

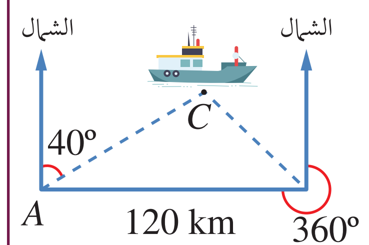
إذنْ، ارتفاعُ البرجِ هوَ 19.45 m

أتحقق من فهمي



رصدَ ليثٌ زاويةَ قمَّةِ بنايةٍ منَ النقطةِ A، فكانَتْ 37º، ثمَّ سارَ مسافةَ 20 m باتجاهِ البنايةِ حتّى النقطةِ C، ثمَّ رصدَ زاويةَ قمَّةِ البنايةِ، فكانَتْ 67º. أَجِدُ ارتفاعَ البنايةِ.

مثال 4 من الحياة



التقطَتْ محطّتا خفرِ السواحلِ A وَ B نداءَ استغاثةٍ منْ سفينةٍ عندَ النقطةِ C في البحرِ، وقدْ حدَّدَتِ المحطَّةُ A اتجاهَ السفينةِ عندَ 040º، وحدَّدَتِ المحطَّةُ B اتجاهَ السفينةِ عندَ 330º. إذا كانَتِ B شرقيَّ A وكانتِ المسافةُ بينَ المحطَّتيْنِ 120 km، فكمْ تبعدُ السفينةُ عنِ المحطَّةِ A؟

يجبُ أولًا إيجادُ قياس الزاويةِ C

قياس الزاوية BAC يساوي 50º (لأنها متممة للزاوية التي قياسها 40º).

وقياس الزاوية ABC يساوي 60º (لأن $30^\circ = 360^\circ - 330^\circ$). إذن،

$$m\angle ACB = 180^\circ - 60^\circ - 50^\circ = 70^\circ$$

ثمَّ استعمالُ قانونِ الجيوبِ:

قانونُ الجيوبِ $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

بالتعويضِ $\frac{b}{\sin 60^\circ} = \frac{120}{\sin 70^\circ}$

بضربِ الطرفيْنِ في $\sin 60^\circ$ $b = \frac{120 \times \sin 60^\circ}{\sin 70^\circ}$

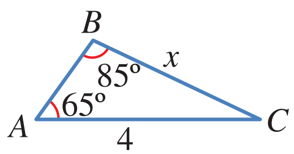
باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ ≈ 110.59 km

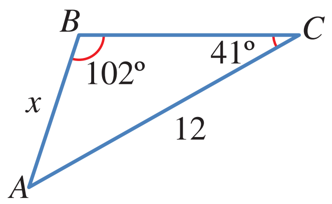
أتحقق من فهمي

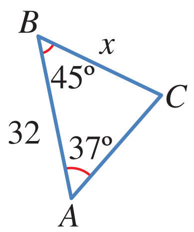
أَجِدُ بُعْدَ السفينةِ عنِ المحطَّةِ B في المثالِ السابقِ.

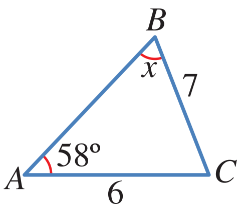
أتدرب وأحل المسائل

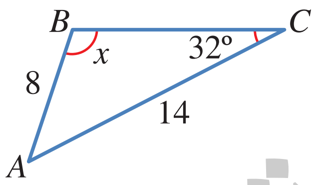
أَجِدُ قيمةَ x في كلٍّ منَ المثلثاتِ الآتيةِ:

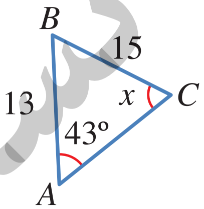
1 

2 

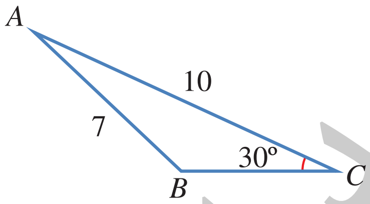
3 

4 

5 

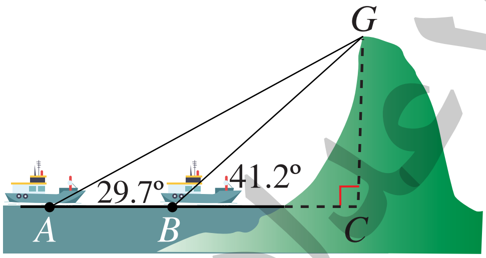
6 

7 أَجِدُ قياسَ الزاويةِ CBA في الشكلِ المجاورِ.

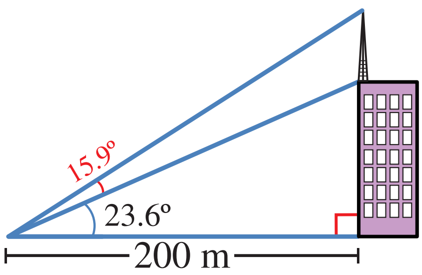


8 **خرائطُ:** أَحُلُّ المسألةَ الواردةَ في بدايةِ الدرسِ.

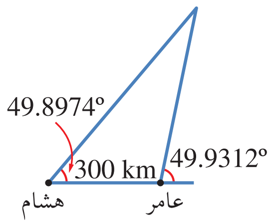
9 **بِحارٌ:** ترصدُ سفينتانِ في البحرِ قمَّةَ جبلٍ كما في الشكلِ المجاورِ. إذا كانَتِ المسافةُ بينَ السفينتيْنِ 1473 m، فما ارتفاعُ الجبلِ من مستوى سطح البحرِ؟



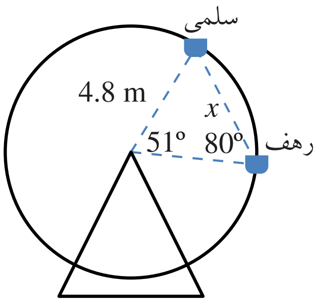
10 **أبراج إرسال:** رصدَ معاذٌ ارتفاعَ مبنًى، وارتفاعَ برجِ إرسالٍ فوقَهُ كما في الشكلِ المجاورِ. أَجِدُ ارتفاعَ المبنى.



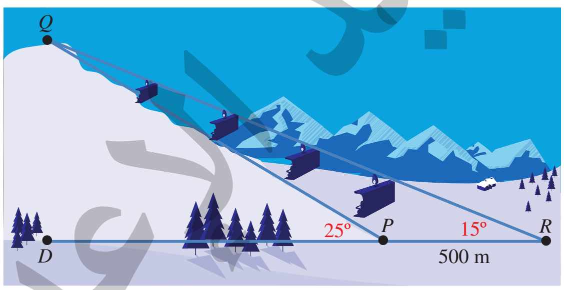
11 **علم الفلك:** رصدَ عامرٌ وهشامٌ منْ منزليْهِما نجمًا في السماءِ في اللحظةِ نفسِها. إذا كانَتْ زاويةُ رصدِ عامرٍ للنجمِ 49.8974°، وزاويةُ رصدِ هشامٍ لهُ 49.9312°، والمسافةُ بينَ منزليْهِما 300 km، فأُقدِّرُ بُعْدَ النجمِ عنِ الأرضِ.



12 **مدينة الألعاب:** في مدينةِ الألعابِ، جلسَتْ سلمى ورهفُ على مقعديْنِ منفصليْنِ في لعبةِ الدولابِ الدوّارِ كما في الشكلِ المجاورِ. أجِدُ المسافةَ x بينَهُما.

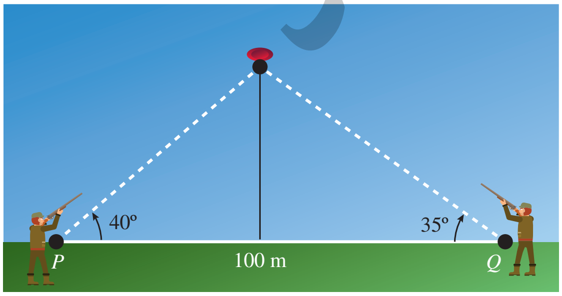


13 **رياضة التزلج:** يتكوَّنُ مسارُ تزلُّجٍ منْ جزءٍ مائلٍ، وآخرَ مستقيمٍ. إذا تزلَّجَ محمودٌ منَ النقطةِ Q إلى النقطةِ P، ثمَّ وصلَ خطَّ النهايةِ عندَ النقطةِ R، وكانَتْ زاويةُ ارتفاعِ مسارِ التزلُّجِ عنِ الأرضِ 25°، والمسافةُ بينَ النقطتيْنِ P وَ R تساوي 500 مترٍ، وزاويةُ رصدِ الحَكَمِ منْ نقطةِ النهايةِ للمُتزلِّجِ الذي يقفُ عندَ نقطةِ البدايةِ 15°، فما طولُ مسارِ التزلُّجِ QR؟

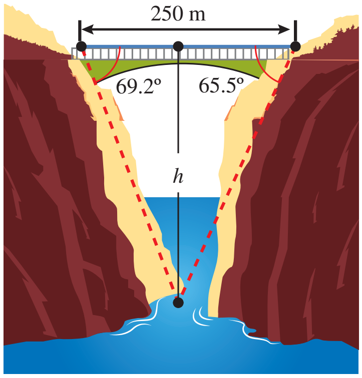


مهارات التفكير العليا

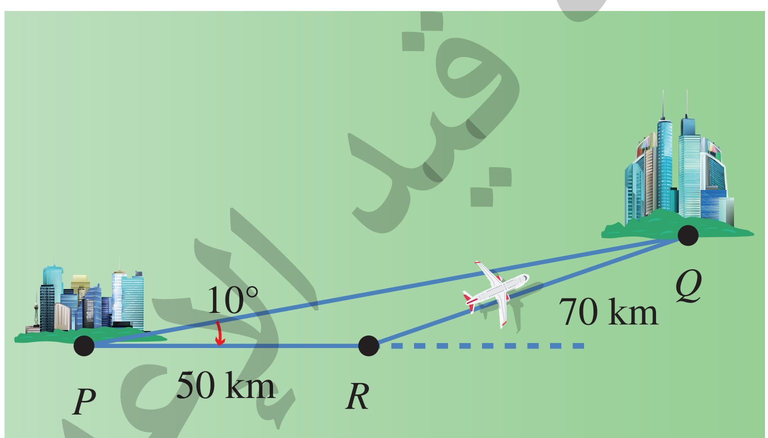
14 **تبرير:** أطلقَ قنّاصانِ النارَ على هدفٍ مُتحرِّكٍ في السماءِ في لحظةٍ ما. إذا كانَتْ زاويةُ إطلاقِ الأولِ 40°، وزاويةُ إطلاقِ الثاني 35°، والمسافةُ بينَهُما 100 m، فأيُّهُما سيصيبُ الهدفَ أولًا؟ أبرر إجابتي.



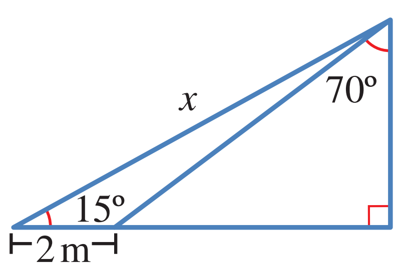
15 **تحدٍ:** مرَّ قاربٌ أسفل جسرٍ طولُهُ 250 مترًا. وقدْ رصدَ الشخصُ الذي في القاربِ الزاويتيْنِ اللتيْنِ تقعانِ عندَ طرفَيِ الجسرِ، فكانَتا 69.2° وَ 65.2°، أَجِدُ ارتفاعَ الجسرِ عنِ القاربِ.



16 **تبرير:** توجَّهَتْ طائرةٌ منَ المدينةِ P إلى المدينةِ Q، وبعدَ أنْ قطعَتْ مسافةَ 50 km أدركَ الطيّارُ وجودَ خطأٍ في زاويةِ الانطلاقِ مقدارُهُ 10°، فاستدارَ في الحالِ بزاويةِ تصحيحٍ مقدارُها 70°، وقطعَتِ الطائرةُ مسافةَ 70 km حتّى وصلَتِ المدينةَ Q. إذا كانَتْ سرعةُ الطائرةِ بمقدارٍ ثابتٍ هيَ 250 km/h، فما الوقتُ الإضافي الذي استغرقَهُ الطيّارُ بسببِ خطئِهِ في زاويةِ الانطلاقِ؟



17 **تحدٍّ:** أَجِدُ قيمةَ x في الشكلِ المجاورِ، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ جزءٍ منْ عشرةٍ.



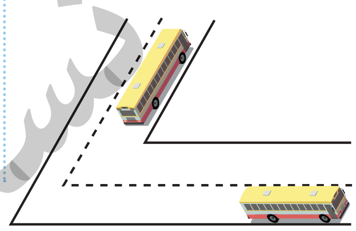
الدرس 3

قانونُ جيوبِ التمامِ
Law of Cosines

فكرةُ الدرسِ استعمالُ قانونِ جيوبِ التمامِ لإيجادِ طولِ ضلعٍ، أوْ قياسِ زاويةٍ في مثلثٍ عُلِمَتْ أطوالُ أضلاعِهِ الثلاثةِ، أوْ طولُ ضلعيْنِ فيهِ والزاويةُ المحصورةُ بينَهُما.

المصطلحاتُ قانونُ جيوبِ التمامِ.

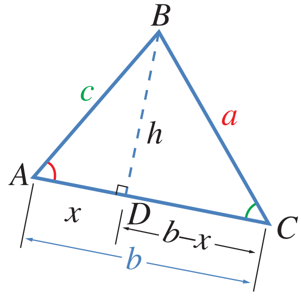
سؤالُ اليومِ انطلقَتْ حافلتانِ منْ محطَّةٍ واحدةٍ في الوقتِ نفسِهِ، وقدِ اتَّجهَتِ الأولى شرقًا بسرعةِ 60 km/h، وانطلقت الثانية في مسار يصنع زاوية 30° مع مسار الحافلة الأولى وبسرعة 50 km/h. هلْ يُمكِنُ حسابُ المسافةِ بينَ الحافلتيْنِ بعدَ مُضِيِّ 3 ساعاتٍ على انطلاقِهما؟



تعرَّفْنا في الدرسِ السابقِ قانونَ الجيوبِ، وكيفَ يُستعمَلُ لحَلِّ مثلثاتٍ عُلِمَ فيها ضلعٌ واحدٌ وزاويتانِ (ASA، أوْ SAA)، أوْ ضلعانِ وزاويةٌ مقابلةٌ لأحدِهما (SSA).

تُستعمَلُ أيضًا نسبةُ جيبِ التمامِ لإيجادِ علاقاتٍ أُخرى بينَ أطوالِ الأضلاعِ وقياساتِ الزوايا؛ ما يساعدُ على حَلِّ بعضِ المثلثاتِ التي لا يُمكِنُ حَلُّها باستعمالِ قانونِ الجيوبِ.

ففي الشكلِ المجاورِ، يُمثِّلُ h الارتفاعَ المرسومَ منْ B عموديًّا على AC. وباستعمالِ نظريةِ فيثاغورسْ وتعريفِ جيبِ التمامِ، يُمكِنُ استنتاجُ بعضِ العلاقاتِ على النحوِ الآتي:



باستعمالِ نظريةِ فيثاغورسْ في المثلثِ ADB	$h^2 = c^2 - x^2$
باستعمالِ نظريةِ فيثاغورسْ في المثلثِ BDC	$h^2 = a^2 - (b-x)^2$
بمساواةِ المعادلتيْنِ $h^2 = h^2$	$c^2 - x^2 = a^2 - (b-x)^2$
بفكِّ القوسِ	$c^2 - x^2 = a^2 - b^2 + 2xb - x^2$
بالتبسيطِ	$a^2 = b^2 + c^2 - 2xb$

لإدخالِ جيبِ التمامِ في المعادلةِ $a^2 = b^2 + c^2 - 2xb$ ، فإنَّنا نكتبُ x بدلالةِ $\cos A$

تعريفُ جيبِ التمامِ	$\cos A = \frac{x}{c}$
بالضربِ التبادليِّ	$x = c \times \cos A$
بتعويضِ قيمةِ x في المعادلةِ	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

وبذلكَ، نتوصَّلُ إلى العلاقةِ الآتيةِ بينَ أطوالِ أضلاعِ المثلثِ وقياساتِ زواياهُ باستعمالِ جيبِ التمامِ

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc \cos A$$

وبطريقةٍ مشابهةٍ، يُمكِنُ التوصُّلُ إلى العلاقتيْنِ الآتيتيْنِ

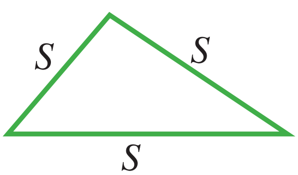
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

تُسمّى هذهِ العلاقاتُ الثلاثُ **قانونَ جيوبِ التمامِ (Law of Cosines)**، ويُستعمَلُ هذا القانونُ لحَلِّ أيِّ مثلثٍ عُلِمَتْ ثلاثةٌ من قياساتِهِ في الحالتيْنِ الآتيتيْنِ:

1 ضلعانِ وزاويةٌ محصورةٌ بينَهُما (SAS).

2 ثلاثةُ أضلاعٍ (SSS).



الحالة 2
SSS

الحالة 1
SAS

أتعلم

يمكن كتابة قانون جيوب التمام كما يلي:

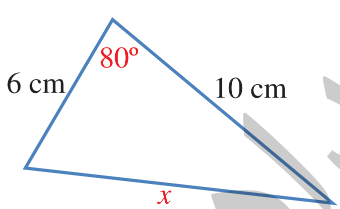
$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2bc}$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2bc}$$

مثال 1

أَجِدُ قيمةَ x في المثلثِ المجاورِ.



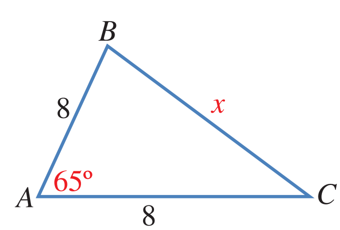
$x^2 = 6^2 + 10^2 - 2 \times 6 \times 10 \cos 80°$ قانونُ جيوبِ التمامِ

$x^2 = 115.16$ باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ

$x = 10.7$ cm بأخذِ الجذرِ التربيعيِّ للطرفيْنِ

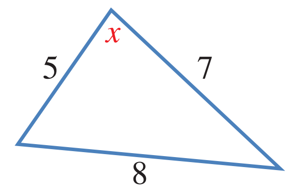
أتحقق من فهمي

أَجِدُ قيمةَ x في المثلثِ المجاورِ.



يُستعمَلُ قانونُ جيوبِ التمامِ أيضًا لإيجادِ قياسِ زاويةٍ مجهولةٍ في المثلثِ.

مثال 2



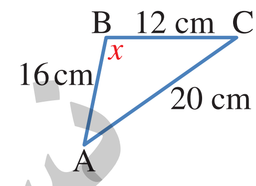
أَجِدُ قيمةَ x في المثلثِ RST المجاورِ.

قانونُ جيوبِ التمامِ
$$8^2 = 5^2 + 7^2 - 2 \times 5 \times 7 \cos x$$

بكتابةِ $\cos x$ موضوعَ القانونِ
$$\cos x = \frac{5^2 + 7^2 - 8^2}{2 \times 5 \times 7}$$

باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ
$$\cos x = 0.1428$$

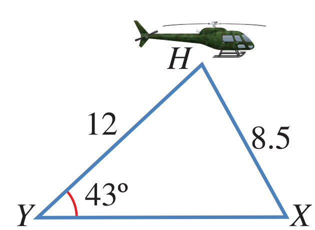
معكوسُ جيوبِ التمامِ
$$x = 81.8°$$



أتحقق من فهمي أَجِدُ قيمةَ x في المثلثِ ABC المجاورِ.

قدْ نحتاجُ في بعضِ المسائلِ إلى استعمالِ قانونَيِ الجيوبِ وجيوبِ التمامِ معًا لإيجادِ القياساتِ المطلوبةِ.

مثال 3 من الحياة



شوهِدَتْ طائرةٌ مروحيةٌ تُحلِّقُ في السماءِ منَ القريتيْنِ X وَ Y في اللحظةِ نفسِها. إذا كانَ بُعْدُ الطائرةِ عنِ القريةِ X يساوي 8.5 km، وعنِ القريةِ Y يساوي 12 km، وكانَتِ القريتانِ في مستوًى أفقيٍّ واحدٍ، وزاويةُ ارتفاعِ الطائرةِ منَ القريةِ Y يساوي 43°، فما المسافةُ بينَ هاتيْنِ القريتيْنِ؟

لإيجادِ المسافةِ بينَ القريتيْنِ، يجبُ معرفةُ قياسِ الزاويةِ بينَ الضلعيْنِ اللذيْنِ يُمثِّلانِ بُعْدَيِ الطائرةِ عنِ القريتيْنِ كما يأتي:

الخطوةُ 1: استعمالُ قانونِ الجيوبِ لإيجادِ قياسِ الزاويةِ X في المثلثِ HYX.

قانونُ الجيوبِ
$$\frac{\sin 43°}{8.5} = \frac{\sin X}{12}$$

بضربِ الطرفيْنِ في 12
$$\sin X = \frac{12 \sin 43°}{8.5}$$

باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ
$$\sin X \approx 0.963$$

معكوسُ sin
$$X = \sin^{-1} 0.963$$

باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ
$$\approx 74.3°$$

الخطوةُ 2: إيجادُ قياسِ الزاويةِ H:

مجموع قياسات زوايا المثلث 180° — $180^\circ - 43^\circ - 74.3^\circ = 62.7^\circ$.

الخطوةُ 3: استعمالُ قانونِ جيوبِ التمامِ لإيجادِ المسافةِ بينَ القريتيْنِ.

قانونُ جيوبِ التمامِ: $(XY)^2 = 12^2 + 8.5^2 - 2\,(12)\,(8.5)\cos 62.7^\circ$

باستعمال الآلة الحاسبة: $(XY)^2 = 122.7$

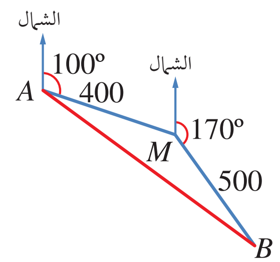
بحساب الجذرِ التربيعيِّ للطرفيْنِ: $XY = \sqrt{122.7} = 11.1$

إذن المسافة بين المدينتين هي 11.1 km

أتحقق من فهمي

سفن: أبحرَتْ سفينةٌ منَ الميناءِ A باتجاهِ الشمالِ، فقطعَتْ مسافةَ 240 km، ثمَّ انحرفَتْ بزاويةِ 50°، وقطعَتْ مسافةَ 160 km حتّى وصلَتْ إلى الميناءِ B. ما المسافةُ بينَ الميناءِ A والميناءِ B؟

مثال 4 من الحياة



أقلعَتْ طائرةٌ بزاويةِ 100° عنِ الشمالِ منَ المدينةِ A، فقطعَتْ مسافةَ 400 km، ثمَّ انعطفَتْ يمينًا، فأصبحَتِ الزاويةُ بينَ خطِّ مسارِها الجديدِ والشمالِ 170°، ثمَّ قطعَتْ مسافةَ 500 km لتصلَ إلى المدينةِ B. ما المسافةُ بينَ هاتيْنِ المدينتيْنِ؟

يُمكِنُ حسابُ المسافةِ بينَ المدينتيْنِ (طولُ القطعةِ المستقيمةِ AB) بإيجادِ قياسِ الزاويةِ AMB.

منَ المُلاحَظِ أنَّ الزاويةَ AMN مُكمِّلةٌ للزاويةِ MAN، وهيَ تساوي 80°.

مجموعُ الزوايا حولَ نقطةٍ: $m\angle AMB = 360^\circ - (80^\circ + 170^\circ) = 110^\circ$

قانونُ جيوبِ التمامِ: $(AB)^2 = (400)^2 + (500)^2 - 2 \times 400 \times 500 \cos 110^\circ$

باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ: $(AB)^2 = 546808.0573$

بأخذِ الجذرِ التربيعيِّ: $AB = \sqrt{546808.0573} \approx 739.5$

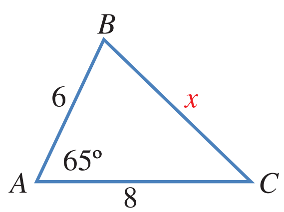
إذن، المسافة بين المدينتين تساوي 739.5 km تقريبًا.

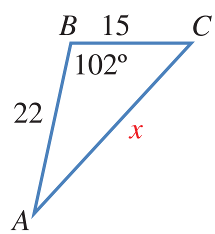
أتحقق من فهمي

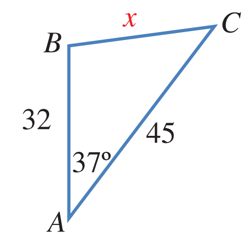
سارَ قطارٌ منَ المحطَّةِ A في اتجاهِ 080° إلى المحطَّةِ B التي تبعدُ عنها 120 km، ثمَّ تحوَّلَ إلى اتجاهِ 070°، وسارَ مسافةَ 90 km إلى المحطَّةِ C. ما المسافةُ بينَ المحطَّةِ A والمحطَّةِ C؟

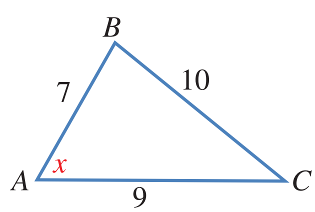
أتدرب وأحل المسائل

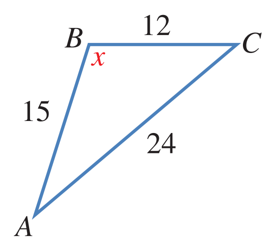
أَجِدُ قيمةَ x في كلٍّ منَ المثلثاتِ الآتيةِ:

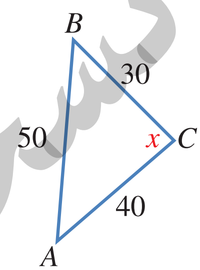
1


2


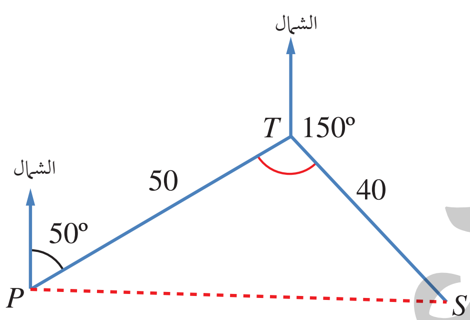
3


4


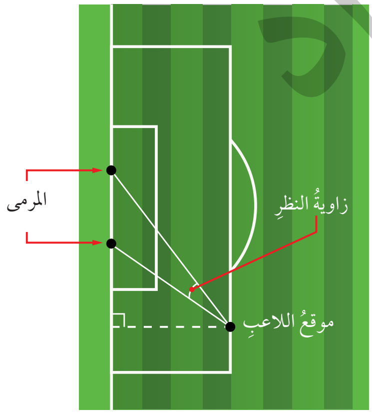
5


6


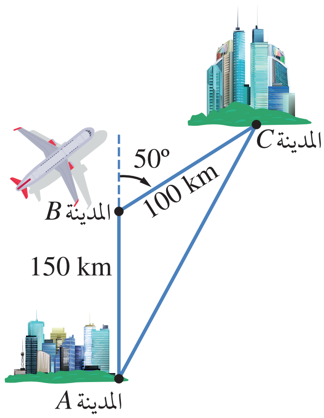
7 **ملاحة جوية:** أبحرَتْ سفينةٌ منْ أحدِ الموانئِ مسافةَ 50 km في اتجاهِ 050º ، ثمَّ غيَّرَ القبطانُ خطَّ سيرِها إلى اتجاهِ 150º وقطعت مسافةَ 40 km، ثم توقَّفَتْ بسببِ إصابةِ أحدِ أفرادِ الطاقمِ. ما المسافةُ التي ستقطعُها مروحيةُ الإنقاذِ منَ الميناءِ لتصلَ إلى السفينةِ في أقصرِ وقتٍ مُمكِنٍ؟



8 **كرة القدم:** يُبيِّنُ الشكلُ المجاورُ موقع لاعبَ كرةِ قدمٍ يركلُ الكرةَ نحوَ مرمًى عرضُهُ 5 m. أَجِدُ قياسَ الزاويةِ التي يستطيعُ منْها اللاعبُ أنْ يركلَ الكرةَ لتسديدِ هدفٍ، علمًا بأنَّهُ يبعدُ عنْ طرفَيِ المرمى مسافةَ 26 m و 23 m.

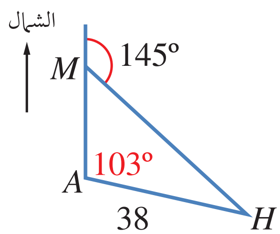


9 **خرائطُ طيـرانٍ:** أقلعَتْ طائرةٌ منَ المدينةِ A في اتجاهِ 000° مسـافةَ 150 km، ثمَّ اتَّجهَتْ إلى 050°، وسـارَتْ مسـافةَ 100 km حتّى وصلَتِ المدينةَ B كما في الشكلِ المجاورِ. ما أقصرُ مسـافةٍ ممكنةٍ بينَ المدينتيْنِ إذا كانَ مسـموحًا للطائرةِ اتِّخاذُ المسارِ الذي تريدُ؟



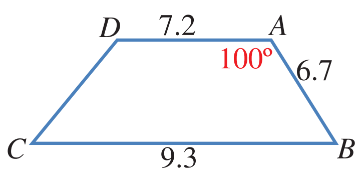
مهارات التفكير العليا

10 **مروحية إنقاذ:** أُرسِـلَتْ مروحيةٌ إنقاذٍ منَ القاعدةِ A لإسعافِ رجلٍ على جبلٍ عندَ النقطةِ M إلى الشـمالِ منْ هذهِ القاعدةِ، ثمَّ أوصلَتْهُ إلى المستشـفى H الذي يبعد عن القاعدة مسافة 38 km كما يظهرُ في الرسمِ. أَجِدُ المسافةَ منَ الجبلِ إلى المستشفى بطريقتيْنِ.

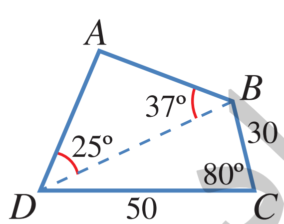


11 **تحدٍّ:** أَجِـدُ قياسَ أصغرِ زاويةٍ في مثلـثٍ أطوالُ أضلاعِـهِ $3a, 5a, 7a$ ، حيثُ a عددٌ حقيقيٌّ موجبٌ.

12 **تحدٍّ:** أَجِدُ طولَ الضلعِ CD في شبهِ المنحرفِ المجاورِ.

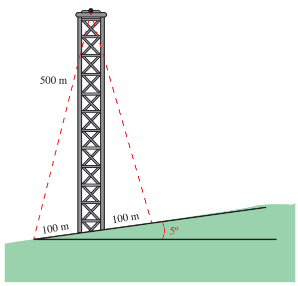


13 **تحدٍّ:** يُمثِّلُ الشـكلُ المجاورُ حقلَ النخيل $ABCD$ الذي يريدُ مالِكُهُ إحاطةَ سياجٍ. أَجِدُ طولَ السياجِ.



14 **عقارب السـاعة:** طولُ عقربَيْ سـاعةٍ 3 cm، وَ 4 cm. أَجِدُ المسـافةَ بينَ رأسَـيِ العقربيْنِ عندما يشيرانِ إلى الساعةِ 4 تمامًا.

15 **أبراج:** يرتفعُ برجٌ 500 m على تلَّةٍ تميلُ بزاوية 5° عنِ المستوى الأفقيِّ كما في الشكلِ المجاورِ. أرادت المهندسـة صفاء تثبيتَ البرجِ بسـلكيْنِ منْ قمَّتِـهِ إلى نقطتيْنِ على الأرضِ، تبعدُ كلٌّ منْهُما مسافةَ 100 m عنْ قاعدةِ البرجِ. أَجِدُ طولَ السلكيْنِ.



الدرس 4

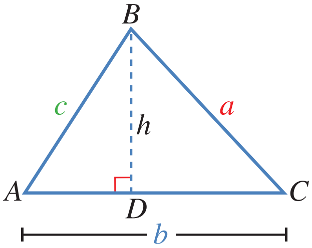
استعمالُ جيبِ الزاويةِ لإيجادِ مساحةِ المثلثِ
Using Sine to Find the Area of a Triangle

فكرةُ الدرسِ إيجادُ مساحةِ مثلثٍ عُلِمَ فيهِ طولا ضلعيْنِ، وقياسُ الزاويةِ المحصورةِ بينَهُما.

سؤالُ اليومِ لدى مُزارعٍ قطعةُ أرضٍ مثلثةُ الشكلِ، طولُ أحدِ أضلاعِها 84 m، وطولُ ضلعٍ آخرَ 110 m، وقياسُ الزاويةِ المحصورةِ بينَهُما 145°، وقدْ أرادَ زراعتَها بالبطاطا، فلَزِمَهُ 0.15 kg منْ درناتِ البطاطا لكلِّ مترٍ مربَّعٍ. كيفَ يستطيعُ المُزارعُ حسابَ كميةِ درناتِ البطاطا اللازمةِ لزراعةِ أرضه؟

تعلَّمْتُ سابقًا كيفيةَ حسابِ مساحةِ المثلثِ بضربِ نصفِ طولِ قاعدتِهِ في ارتفاعِهِ، غيرَ أنَّهُ يتعذَّرُ استعمالُ هذهِ الطريقةِ إذا كانَ الارتفاعُ مجهولًا؛ لذا يُمكِنُ استخدامُ النسبِ المثلثيةِ في إيجادِ قانونٍ آخرَ لحسابِ مساحةِ المثلثِ باستعمالِ أطوالِ أضلاعِهِ وقياساتِ زواياهُ. ففي الشكلِ المجاورِ، نُلاحِظُ أنَّ BD هوَ ارتفاعُ المثلثِ ABC، وأنَّهُ عموديٌّ على القاعدةِ AC.

فإذا كانَ $AC = b$، وَ $BD = h$، فإنَّ مساحةَ هذا المثلثِ هيَ:



$$K = \frac{1}{2} AC \times BD$$
$$= \frac{1}{2} bh$$

ونُلاحِظُ أيضًا منَ المثلثِ BDC ما يأتي:

$\sin C = \frac{h}{a}$	تعريفُ جيبِ الزاويةِ
$h = a \sin C$	بضربِ طرفَيِ المعادلةِ في a
$K = \frac{1}{2} b\, (a \sin C)$	بالتعويضِ عنْ h في قانونِ مساحةِ المثلثِ بـ $a \sin C$
$= \frac{1}{2} ab \sin C$	خصيصتا التجميعِ والإبدالِ

يُمكِنُ رسمُ العمودِ منَ الرأسِ A إلى الضلعِ الذي يقابلُهُ BC، ومنَ الرأسِ C إلى الضلعِ الذي يقابلُهُ AB، لبيانِ أنَّ مساحةَ هذا المثلثِ تساوي $\frac{1}{2} ac \sin B$، وأنَّها تساوي أيضًا $\frac{1}{2} bc \sin A$.

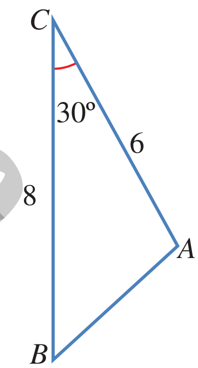
مفهومٌ أساسيٌّ

مساحةُ المثلثِ تساوي نصفَ ناتجِ ضربِ طولَيْ أيِّ ضلعيْنِ فيهِ مضروبًا في جيبِ الزاويةِ المحصورةِ بينَهُما.

$$K = \frac{1}{2} bc \sin A \qquad K = \frac{1}{2} ac \sin B \qquad K = \frac{1}{2} ab \sin C$$

مثال 1

أَجِدُ مساحةَ المثلثِ ABC في الشكلِ المجاورِ.



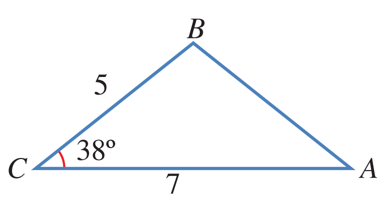
قانونُ مساحةِ المثلثِ $K = \frac{1}{2} ab \sin C$

بالتعويضِ $= \frac{1}{2} \times 8 \times 6 \times \sin 30^\circ$

باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ $= 12 \text{ cm}^2$

أتحقق من فهمي

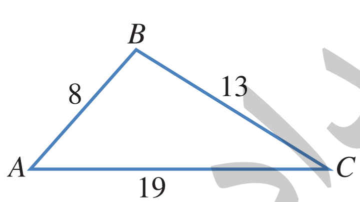
أَجِدُ مساحةَ المثلثِ في الشكلِ المجاورِ.



تعلَّمْتُ في المثالِ السابقِ كيفَ أَجِدُ مساحةَ مثلثٍ عُلِمَ فيه طولا ضلعيْنِ، وقياسُ الزاويةِ المحصورةِ بينَهُما، وسأتعلَّمُ الآنَ كيفيةَ حسابِ مساحةِ مثلثٍ عُلِمَتْ فيهِ أطوالُ أضلاعِهِ الثلاثةِ.

مثال 2

أَجِدُ مساحةَ المثلثِ ABC في الشكلِ المجاورِ.



يتعيَّنُ أولًا إيجادُ قياسِ إحدى الزوايا باستعمالِ قانونِ جيوبِ التمامِ، ثمَّ حسابُ المساحةِ.

إذنْ، أستعملُ قانونَ جيوبِ التمامِ لإيجادِ قياسِ الزاويةِ C.

قانونُ جيوبِ التمامِ $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$

بالتعويضِ $= \frac{13^2 + 19^2 - 8^2}{2 \times 13 \times 19}$

باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ $= 0.9433$

معكوسُ cos ، واستعمالُ الآلةِ الحاسبةِ $C = \cos^{-1} 0.9433 = 19.4^\circ$

أحفظُ القيمةَ الدقيقةَ في ذاكرةِ الآلةِ الحاسبةِ خاصتي.

إرشاد

لتخزينِ قيمةٍ مُحدَّدةٍ لمُتغيِّرٍ ما في ذاكرةِ آلتِكَ الحاسبةِ، اضغطْ علـى زِرِّ *SHIFT*، فزِرِّ *RCL*.

أطبِّقُ قانونَ المساحةِ:

قانونُ مساحةِ المثلثِ $K = \frac{1}{2}ab\sin C$

بالتعويضِ $= \frac{1}{2} \times 13 \times 19 \times \sin 19.4°$

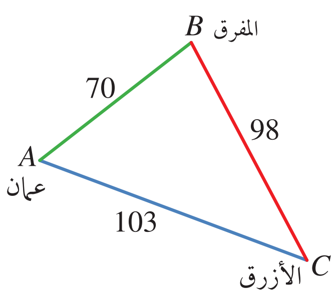
باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ $= 41.0\ cm^2$

أتحقق من فهمي

أَجِدُ مساحةَ المثلثِ DEF، علمًا بأنَّ $DE = 10$ cm، وَ $DF = 12$ cm، وَ $EF = 9$ cm.

مثال 3 من الحياة

المسافةُ بينَ عمّانَ والأزرقِ 103 km، وبينَ عمّانَ والمفرقِ 70 km، وبينَ المفرقِ والأزرقِ 98 km. أَجِدُ مساحةَ المثلثِ الذي تقعُ عندَ رؤوسِهِ هذهِ المدنُ الثلاثُ.



الخطوة 1: يتعيَّنُ إيجادُ قياسِ إحدى الزوايا، ولتكنْ B، باستعمالِ قانونِ جيوبِ التمامِ:

قانونُ جيوبِ التمامِ $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$

بالتعويضِ $= \frac{98^2 + 70^2 - 103^2}{2 \times 98 \times 70}$

باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ $= 0.2839$

معكوسُ جيبِ التمامِ، واستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ $B = \cos^{-1}(0.2839) = 73.5°$

الخطوة 2: يُطبَّقُ قانونُ المساحةِ:

قانونُ مساحةِ المثلثِ $K = \frac{1}{2}ac\sin B$

بالتعويضِ $= \frac{1}{2} \times 98 \times 70 \times \sin 73.5°$

باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ $= 3288.8\ km^2$

أتحقق من فهمي

قطعةُ رخامٍ مثلثةُ الشكلِ، أبعادُها: 50 cm، وَ 85 cm، وَ 70 cm. ما مساحتها؟

التخزينُ في ذاكرةِ الآلةِ الحاسبةِ

أستعملُ الآلةَ الحاسبةَ لإيجادِ قياسِ الزاويةِ C في هذا السؤالِ، ثمَّ أضغطُ على الأزرارِ بالترتيبِ منَ اليسارِ، SHIFT → RCL → A فتُحفَظُ الزاويةُ في الذاكرةِ. ولاستعمالِها في حسابِ مساحةِ المثلثِ، أُدخِلُ: $\frac{1}{2} \times 13 \times 19 \times$ ثمَّ أضغطُ على الأزرارِ: sin → ALPHA → A → =، فتظهرُ النتيجةُ 40.99476606 التي تُقرَّبُ إلى 41.0

أتدرب وأحل المسائل

أَجِدُ مساحةَ كلٍّ منَ المثلثاتِ الآتيةِ:

1 المثلثُ ABC الذي فيهِ $BC = 7$ cm ، وَ $AC = 8$ cm ، وقياسُ الزاويةِ ACB فيهِ 59° .

2 المثلثُ ABC الذي قياسُ الزاويةِ BAC فيهِ 85° ، وَ $AC = 6.7$ cm ، وَ $AB = 8$ cm .

3 المثلثُ PQR الذي فيهِ $QR = 27$ cm ، وَ $PR = 19$ cm ، وقياسُ الزاويةِ QRP فيهِ 109° .

4 المثلثُ XYZ الذي فيهِ $XY = 231$ cm ، وَ $XZ = 191$ cm ، وقياسُ الزاويةِ XYZ فيهِ 73° .

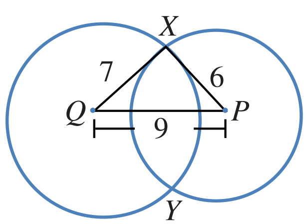
5 المثلثُ LMN الذي فيهِ $LN = 63$ cm ، وَ $LM = 39$ cm ، وقياسُ الزاويةِ NLM فيهِ 85° .

6 إذا كانَتْ مساحةُ المثلثِ ABC هيَ $27\ cm^2$ ، وَ $BC = 14$ cm ، وقياسُ الزاويةِ BCA فيهِ 115°، فما طولُ AC؟

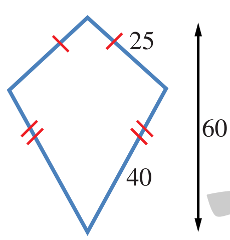
7 إذا كانَتْ مســاحةُ المثلثِ LMN هيَ $133\ cm^2$ ، وَ $LM = 16$ cm ، وَ $MN = 21$ cm ، والزاويةُ LMN حادَّةً، فما قياسُ كلٍّ منَ الزاويتيْنِ: LMN ، وَ MNL؟

9 لوحةٌ على شكلِ مثلثٍ، أطوالُ أضلاعِهِ: 60 cm ، وَ 70 cm، وَ 80 cm. أَجِدُ مساحةَ اللوحةِ.

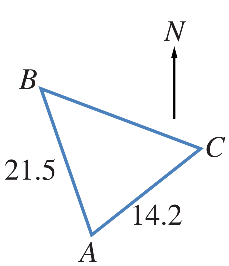
10 دائرتــانِ، مركزُ إحداهما P ومركزُ الأُخــرى Q ، وطولُ نصفِ قُطْرِ احداهما 6 cm وَ الأخرى 7 cm. إذا تقاطعَتا في النقطتيْنِ X وَ Y، وكانَ $PQ = 9$ cm، فما مســاحةُ المثلثِ PXQ؟



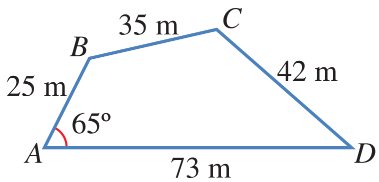
11 **طائرة ورقية:** صنعَ ســليمٌ طائرةً ورقيةً كما في الشــكلِ المجاورِ. أَجِدُ مســاحةَ المادَّةِ اللازمةِ لصنعِ الطائرةِ.



12 **متنزه وطني:** يرادُ إنشــاءُ مُتنزَّهٍ وطنيٍّ على قطعةِ الأرضِ مثلثةِ الشــكلِ ABC . إذا كانَتِ النقطــةُ B في اتجاهِ 324° منَ النقطةِ A ، والنقطةُ C فــي اتجاهِ 042° منَ النقطةِ A ، فما مساحةُ المُتنزَّهِ؟



حقول: يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ أبعادَ حقلٍ رباعيِّ الأضلاعِ:



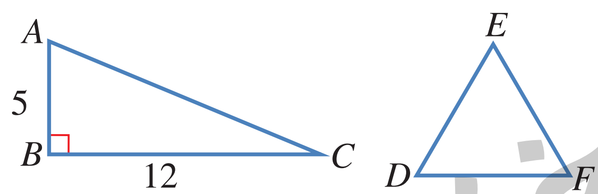
13 أُثبِتُ أنَّ طولَ BD هوَ 66 m ، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ مترٍ.

14 أَجِدُ قياسَ الزاويةِ C.

15 أحسُبُ مساحةَ الحقلِ.

16 أحُلُّ المسألةَ الواردةَ في بدايةِ الدرسِ.

17 المثلثُ ABC قائمُ الزاويةِ، والمثلثُ DEF مُتطابِقُ الأضلاعِ لهما المحيطُ نفسُهُ. أَجِدُ مساحةَ المثلثِ DEF.



17 **جغرافيا:** برمودا منطقةٌ مثلثةُ الشــكلِ تقعُ في الجزءِ الغربيِّ منَ المحيطِ الأطلســيِّ، رؤوسُها مدينةُ ميامي، وبرمودا، وسان خوان، وقدْ شــهدَ مثلثُ برمودا وقوعَ عددٍ منْ حوادثِ اختفاءِ السفنِ والطائراتِ. إذا كانَتِ المسافةُ بينَ ميامي وسان خوان 1674 km تقريبًا، وبينَ ميامي وبرمودا نحوَ 1645 km، وبينَ سان خوان وبرمودا قرابةَ 1544 km، فما مساحةُ مثلثِ برمودا منْ دونِ اعتبارٍ لتقوُّسِ الأرضِ؟

مهاراتُ التفكيرِ العليا

18 **تحدٍّ:** أَجِدُ مســاحةَ المثلثِ ABC الذي قياسُ الزاويةِ A فيهِ 70º، وقياسُ الزاويــةِ B فيهِ 60º، وطولُ الضلعِ AB فيهِ 4 cm.

19 **أكتشــف الخطأ:** ABC مثلث فيه $BC = 8\text{cm}$، $AB = 9\text{cm}$، وقياس الزاوية A يســاوي 30º . حسبت نور مساحته لأقرب عشر فكان حلها كالآتي:

$$K = \frac{1}{2} \times 8 \times 9 \sin 30^\circ$$
$$= 18 \text{ cm}^2$$

أكتشف الخطأ الذي وقعت فيه نور وأصوبه.

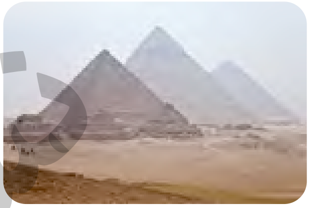
الدرس 5

حَلُّ مسائلَ ثلاثيةِ الأبعادِ

Solving Problems in Three Dimensions

فكرةُ الدرسِ إيجادُ أطوالٍ وقياساتٍ وزوايا مجهولةٍ في أشكالٍ ثلاثيةِ الأبعادِ باستعمالِ نظريةِ فيثاغورسْ والنسبِ المثلثيةِ.

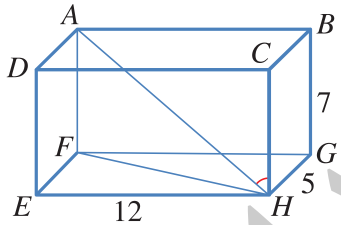
سؤالُ اليومِ شُيِّدَ الهرمُ الأكبرُ في مدينةِ الجيزةِ بمصرَ عامَ 2500 قبلَ الميلادِ، وتُمثِّلُ قاعدتُهُ مربَّعًا طولُ ضلعِهِ 232.6 m، وطولُ الضلعِ الواصلِ بينَ قمَّةِ الهرمِ وأيٍّ منْ رؤوسِ المربَّعِ 221.2 m. أَجِدُ ارتفاعَ هذا الهرمِ.



تشتملُ المسائلُ ثلاثيةُ الأبعادِ (في الفضاءِ) على ثلاثةِ مستوياتٍ؛ أفقيٍّ، ورأسيٍّ، ومائلٍ. ويتطلَّبُ حَلُّ هذهِ المسائلِ رسمَ مُخطَّطٍ يُوضِّحُ المسألةَ، ويُمثِّلُ المعلوماتِ المعطاةَ فيها، ثمَّ البحثَ عنْ مثلثاتٍ قائمةِ الزاويةِ فيها. وإذا لمْ توجدْ هذهِ المثلثاتُ، فإنَّنا نرسمُ بعضَها، بحيثُ تكونُ بعضُ عناصرِها معلومةً، فضلًا عنْ تحديدِ العنصرِ المطلوبِ إيجادُهُ فيها؛ على أنْ نرسمَ كلًّا منْها بمنأى عنِ المُخطَّطِ المذكورِ آنفًا، ليسهلَ علينْا معرفةُ العلاقةِ التي نستخدمُها في الحَلِّ.

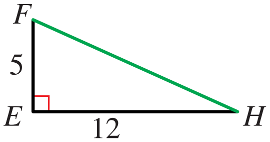
مثال 1

يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ متوازي مستطيلاتٍ. أَجِدُ قياسَ الزاويةِ AHF، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقربِ منزلةٍ عشريةٍ واحدةٍ.



المثلثُ AFH قائمُ الزاويةِ في F، ومعلومٌ فيهِ طولُ AF؛ لذا يجبُ معرفةُ عنصرٍ آخرَ لإيجادِ القياسِ المطلوبِ.

الخطوة 1: إيجادُ طولِ FH منَ المثلثِ قائمِ الزاويةِ FEH ؛ المرسوم وحدَهُ جانبًا:

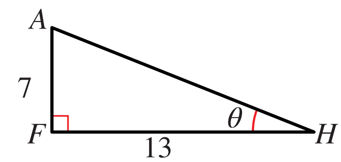


$$(FH)^2 = (EF)^2 + (EH)^2$$ نظريةُ فيثاغورسْ

$$= 5^2 + 12^2$$ بالتعويضِ

$$(FH)^2 = 169$$ بالتبسيطِ

$$FH = \sqrt{169} = 13$$ بحسابِ الجذرِ التربيعيِّ للطرفيْنِ



الخطوة 2: رسمُ المثلثِ AFH وحدَهُ، ثمَّ استعمالُ الظلِّ (tan) لإيجادِ قياسِ الزاويةِ AFH:

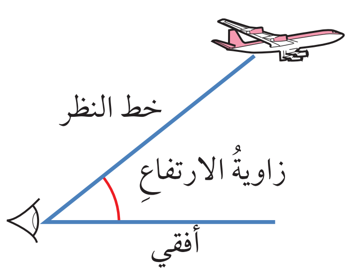
$$\tan\theta = \frac{7}{13} = 0.5384$$

$$\theta = \tan^{-1}(0.5384) = 28.3^\circ$$ بالتقريبِ إلى منزلةٍ عشريةٍ واحدةٍ

أتحقق من فهمي

أَجِدُ BE، وقياسَ الزاويةِ EBG في المثالِ السابقِ.

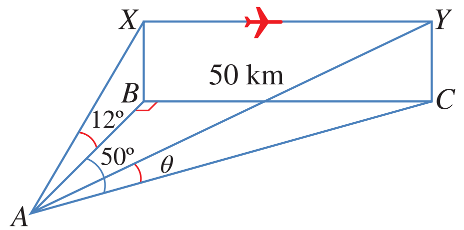
عندما أنظرُ إلى طائرةٍ في السماءِ، فإنَّ الزاويةَ المحصورةَ بينَ الخطِّ الواصلِ بينَ عيني والطائرةِ وخطِّ نظري أفقيًّا تُسمّى **زاويةَ الارتفاعِ**. وإذا وقفْتُ على تلَّةٍ ساحليةٍ، ثمَّ نظرْتُ إلى قاربٍ أسفلَ منّي، فإنَّ الزاويةَ المحصورةَ بينَ الخطِّ الواصلِ بينَ عيني والقاربِ وخطِّ نظري أفقيًّا تُسمّى **زاويةَ الانخفاضِ**. ولهاتيْنِ الزاويتيْنِ أهميةٌ كبيرةٌ عندَ حَلِّ المسائلِ الحياتيةِ باستعمالِ النسبِ المثلثيةِ.



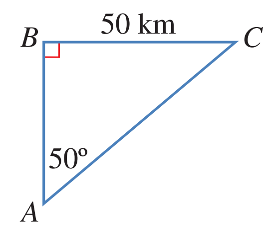
مثال 2 من الحياة

تقعُ النقاطُ A، وَ B، وَ C في مستوًى أفقيٍّ واحدٍ على الأرضِ، وتقعُ النقطةُ C على بُعْدِ 50 km شرقيَّ النقطةِ B التي تقعُ شماليَّ النقطةِ A، وتقعُ النقطةُ C في اتجاهِ 50° منَ النقطةِ A. رُصِدَتْ منَ النقطةِ A حركةُ طائرةٍ في موقعيْنِ مختلفيْنِ؛ الأولُ: عندما كانَتْ فوقَ النقطةِ B مباشرةً، وكانَتْ زاويةُ ارتفاعِها 12°. والثاني: عندما كانَتْ فوقَ النقطةِ C. أَجِدُ زاويةَ ارتفاعِ الطائرةِ عندما كانَتْ فوقَ النقطةِ C.

الخطوة 1: أرسمُ مُخطَّطًا يُمثِّلُ المعلوماتِ المعطاةَ:



الخطوة 2: أرسمُ المثلثَ قائمَ الزاويةِ ABC، ثمَّ أستخدمُهُ في إيجادِ AB، وَ AC:



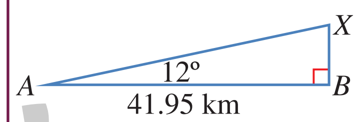
$\tan 50^\circ = \frac{50}{AB}$ تعريفُ ظلِّ الزاويةِ

$AB = \frac{50}{\tan 50^\circ} = 41.95 \text{ km}$ باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ

$\sin 50^\circ = \frac{50}{AC}$ تعريفُ جيبِ الزاويةِ

$AC = \frac{50}{\sin 50^\circ} = 65.27 \text{ km}$ باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ

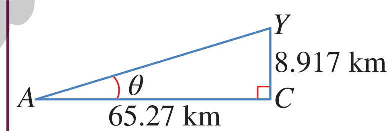
الخطوة 3: أرسمُ المثلثَ قائمَ الزاويةِ ABX ، ثمَّ أستخدمُهُ في إيجادِ BX، ومنْهُ يُمكِنُ إيجادُ CY، فهما متساويانِ؛ لأنَّ الشكلَ $BXYC$ مستطيلٌ:



$\tan 12^\circ = \frac{BX}{41.95}$ تعريفُ ظلِّ الزاويةِ

$BX = 41.95 \tan 12^\circ = 8.917 \text{ km}$ باستعمالِ الآلةِ الحاسبة

الخطوة 4: أستعملُ المثلثَ قائمَ الزاويةِ ACY لإيجادِ زاويةِ الارتفاعِ θ:



$\tan \theta = \frac{8.917}{65.27} = 0.1366$ تعريفُ ظلِّ الزاويةِ

$\theta = \tan^{-1} 0.1366 = 7.8^\circ$ معكوسُ الظلِّ

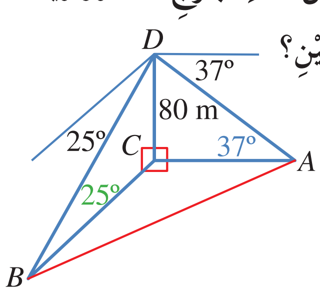
إذنْ، زاويــةُ ارتفاعِ الطائرةِ عندما كانت فوقَ النقطةِ C، تســاوي 7.8°، مُقرَّبةً إلى منزلةٍ عشــريةٍ واحدةٍ.

أتحقق من فهمي

رصدَ أحمدُ قمَّةَ مئذنةٍ منْ نقطةٍ على الأرضِ تقعُ جنوبَ المئذنةِ، فكانَتْ زاويةُ ارتفاعِها **38.4°**، ثمَّ سارَ شرقًا مسافةَ **85 m**، ورصدَ قمَّةَ المئذنةِ مرَّةً أُخرى، فكانَتْ زاويةُ ارتفاعِها **44.6°**. أَجِدُ ارتفاعَ المئذنةِ عنِ الأرضِ.

مثال 3 من الحياة

رُصِدَتِ الشــجرةُ A فــي اتجــاهِ الشــرقِ مــنْ قمَّــةِ بــرجٍ يرتفــعُ 80 m، وكذلــكَ الشــجرةُ B فــي اتجــاهِ الجنــوبِ. إذا كانَــتْ زاويــةُ انخفــاضِ الشــجرةِ A مــنْ قمَّــةِ البــرجِ 37°، وزاويــةُ انخفاضِ الشجرةِ B منْ قمَّتِهِ 25°، فما المسافةُ بينَ هاتيْنِ الشجرتيْنِ؟

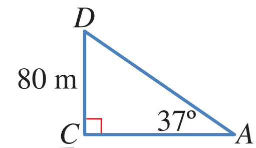


الخطوة 1: أرســمُ مُخطَّطًا، علمًا بأنَّ البــرجَ DC يصنعُ زاويةً قائمــةً مــعَ الأرضِ، وأنَّ اتجــاهَ كلٍّ منَ الشــرقِ والجنوبِ يصنعانِ معًا زاويةً قائمةً.

بما أنَّ زاويةَ انخفاضِ الشجرةِ A هيَ 37°، فإنَّ الزاويةَ DAC هيَ 37°، وبما أنَّ زاويةَ انخفاضِ الشجرةِ B هيَ 25°، فإنَّ الزاويةَ DBC هيَ 25° .

الخطوة 2: أستعملُ المثلثَ قائمَ الزاويةِ ABC لإيجادِ AB، وهذا يُحتِّمُ معرفةَ AC، وَ BC.

الخطوة 3: أرسمُ المثلثَ ADC . ولإيجادِ AC، أستعملُ ظلَّ الزاويةِ 37°:

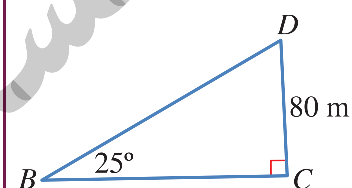


$\tan 37^\circ = \dfrac{80}{AC}$ تعريفُ ظلِّ الزاويةِ

$AC = \dfrac{80}{\tan 37^\circ}$ بالتبسيطِ

$AC = 106.2 \text{ m}$ باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ

الخطوة 4: أرسمُ المثلثَ BCD. ولإيجادِ BC، أستعملُ ظلَّ الزاويةِ 25°:

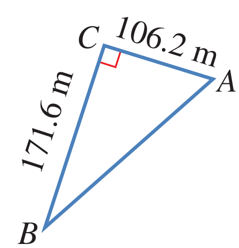


$\tan 25^\circ = \dfrac{80}{BC}$ تعريفُ ظلِّ الزاويةِ

$BC = \dfrac{80}{\tan 25^\circ}$ بالتبسيطِ

$BC = 171.6 \text{ m}$ باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ

الخطوة 5: أستخدمُ نظريةَ فيثاغورسْ في المثلثِ ACB لإيجادِ AB:



$(AB)^2 = (AC)^2 + (BC)^2$ نظريةُ فيثاغورسْ

$= (106.2)^2 + (171.6)^2 = 40725$ بالتعويضِ

$AB = \sqrt{40725} = 201.8$ بأخذِ الجذرِ التربيعيِّ

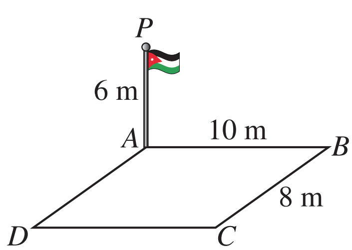
إذنْ، المسافةُ بينَ الشجرتيْنِ هيَ 201.8 m، مُقرَّبةً إلى أقربِ منزلةٍ عشريةٍ واحدةٍ.

أتحقق من فهمي

أبحرَتِ السفينتانِ A وَ B منَ الميناءِ P في اتجاهيْنِ مُتعامِديْنِ. وقدْ رصدَتْ طائرةٌ عموديةٌ تُحلِّقُ فوقَ الميناءِ هاتيْنِ السفينتيْنِ في اللحظةِ نفسِها، فكانَتْ زاويةُ انخفاضِ السفينةِ A هيَ 40°، وزاويةُ انخفاضِ السفينةِ B هيَ 54°. إذا كانَ ارتفاعُ الطائرةِ عنْ سطحِ البحرِ 600 m، فما المسافةُ بينَ السفينتيْنِ لحظةَ رصدِهِما؟

أتدرب وأحل المسائل

1 **ساريةُ العلمِ:** نُصِبَتْ ساريةُ عَلَمٍ عموديًّا عندَ رُكنِ ساحةٍ مستطيلةِ الشكلِ $ABCD$. أَجِدُ زاويةَ ارتفاعِ قمَّةِ الساريةِ P منَ النقطةِ C.



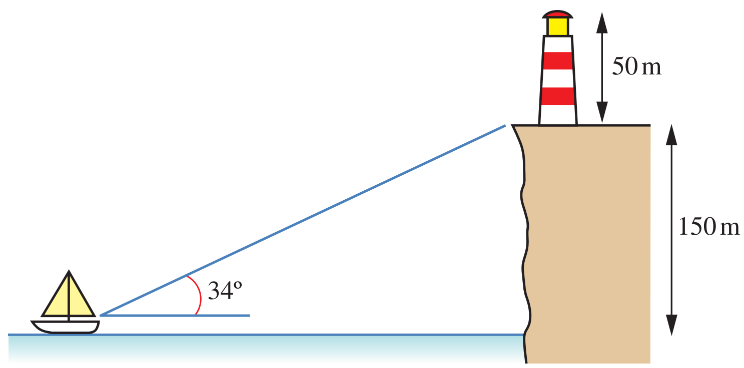
يُمثِّلُ الشــكلُ المجاورُ هرمًا قاعدتُهُ $ABCD$ مســتطيلةُ الشــكلِ، بُعداهــا: **20 cm**، وَ **15 cm**. إذا كانَ طولُ كلٍّ منَ الأحرفِ الواصلةِ بينَ قمَّةِ الهرمِ ورؤوسِ القاعدةِ **24 cm**، وكانَتِ القمَّةُ V تقعُ رأسيًّا فوقَ مركزِ القاعدةِ المستطيلةِ، فأَجِدُ:

2 طولَ القُطْرِ AC.

3 قياسَ الزاويةِ VAC.

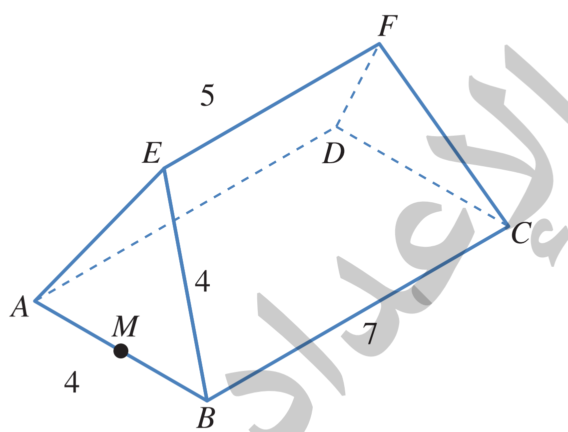
4 ارتفاعَ الهرمِ.

5 **منارة:** شاهدَ صيّادٌ منْ قاربِهِ قاعدةَ مَنارةٍ على حافةٍ صخريةٍ بزاويةِ ارتفاعُ قياسِــها $34°$. إذا كانَ ارتفاعُ قاعدةِ المَنارةِ عنْ مســتوى عينَيِ الصيّادِ 150 m، فكمْ يبعدُ الصيّادُ عنْ هذهِ القاعدةِ؟



6 إذا كانَ ارتفــاعُ المَنــارةِ 50 m، فما زاويةُ ارتفاعِ نظرِ الصيّادِ نحوَ قمَّةِ المَنارةِ؟

يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ ســقفَ بنايةٍ، قاعدتُهُ المستطيلُ الأفقيُّ $ABCD$، الذي بُعداه: **7 m**، وَ **4 m**. وتُمثِّلُ نهايتا السقفِ مثلثيْنِ متطابقَيِ الأضلاعِ، في حينِ يُمثِّلُ كلٌّ منْ جانبَيِ الســقفِ شــبهَ منحرفٍ متطابقَ الساقيْنِ. إذا كانَ طولُ الحافةِ العلويةِ EF هوَ **5 m**، فأَجِدُ:

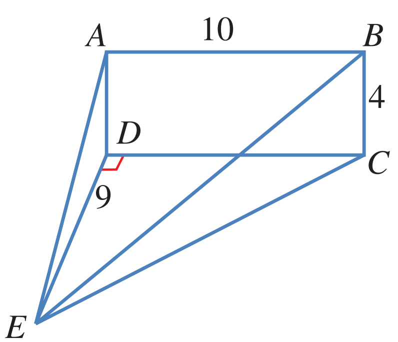


7 طولَ EM، حيثُ M نقطةُ منتصفِ AB.

8 قياسَ الزاويةِ EBC.

9 قياسَ الزاويةِ بينَ EM والقاعدةِ $ABCD$.

$ABCD$ **مســتطيلٌ رأســيٌّ، وَ** EDC **مثلثٌ أفقــيٌّ. إذا كانَ قياسُ الزاويةِ** CDE **هــوَ** $90°$**، وَ** $AB = 10$ **cm، وَ** $BC = 4$ **cm، وَ** $ED = 9$ **cm، فأَجِدُ:**

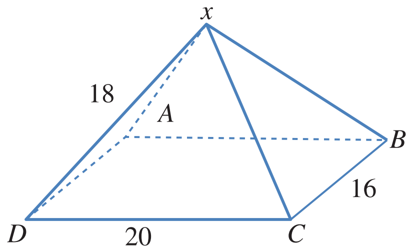


10 قياسَ الزاويةِ AED.

11 قياسَ الزاويةِ DEC.

12 طولَ EC.

13 قياسَ الزاويةِ BEC.

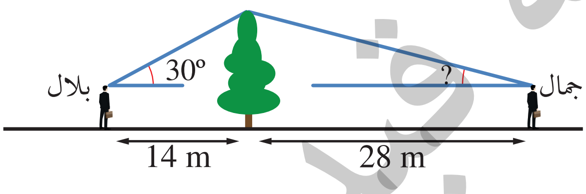


14 يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ الهرمَ $XABCD$ والذي قاعدته مستطيلةُ الشكلِ. أَجِدُ قياسَ الزاويةِ بينَ الحافةِ XD وقُطْرِ القاعدةِ DB.

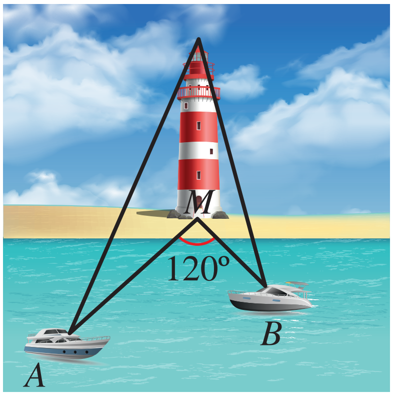
15 أَحُلُّ المسألةَ الواردةَ في بدايةِ الدرسِ.

مهارات التفكير العليا

16 **أكتشفُ الخطأَ:** يقف بلال على بُعْدِ 14 m شرقيَّ شجرةٍ، زاويةُ ارتفاعِ قمَّتِها بالنسبةِ إليْه 30°، ويقف جمال على بُعْدِ 28 m غربيَّ الشجرةِ، وهو يرى أنَّ زاويةَ ارتفاعِ قمَّةِ الشجرةِ بالنسبةِ إليْه يجبُ أنْ تكونَ 15°؛ لأنَّها تبعدُ عنِ الشجرةِ نصفَ المسافةِ التي يبعدها بلال. هلْ رأيُ جمال صحيحٌ؟ إذا لمْ يكنْ رأيُه صحيحًا، فما زاويةُ الارتفاعِ؟



18 **تحدٍّ:** رُصِدَ القاربانِ A وَ B في البحرِ منْ قمَّةِ مَنارةٍ على الشاطئِ ارتفاعُها 44 m في اللحظةِ نفسِها، فكانَتْ زاويةُ انخفاضِ القاربِ A هيَ 53°، وزاويةُ انخفاضِ القاربِ B هيَ 37°، وقياسُ الزاويةِ AMB هوَ 120°، حيثُ M قاعدةُ المَنارةِ. أَجِدُ المسافةَ بينَ القاربيْنِ.



أَضعُ دائرةً حولَ رمزِ الإجابةِ الصحيحةِ في ما يأتي:

1 يُمكِنُ حَلُّ المثلثِ إذا عُلِمَتْ جميعُ زواياهُ باستعمالِ:

a) قانونِ الجيوبِ. **b)** قانونِ جيوبِ التمام.

c) قانونَيِ الجيوبِ وجيوبِ التمامِ معًا. **d)** لا يُمكِنُ حَلُّ المثلثِ في هذهِ الحالةِ.

2 يُمكِنُ حَلُّ المثلثِ إذا عُلِمَتْ جميعُ أضلاعِهِ باستعمالِ:

a) قانونِ الجيوبِ. **b)** قانونِ جيوبِ التمام.

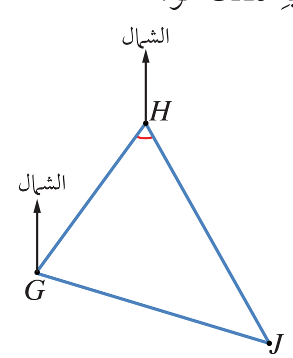
c) قانونَيِ الجيوبِ وجيوبِ التمامِ معًا. **d)** لا يُمكِنُ حَلُّ المثلثِ في هذهِ الحالةِ.

3 إذا كانَ اتجـاهُ النقطةِ R منَ النقطـةِ Z هوَ $070°$، فإنَّ اتجاهَ النقطةِ Z منَ النقطةِ R هوَ:

a) $070°$ **b)** $110°$

c) $250°$ **d)** $290°$

4 إذا كانَ اتجـاهُ النقطـةِ H منَ النقطـةِ G في الآتي هوَ $045°$، واتجاهُ النقطةِ J منَ النقطـةِ H هوَ $164°$، فإنَّ قياسَ الزاويةِ GHJ هوَ:



a) $16°$ **b)** $045°$

c) $29°$ **d)** $61°$

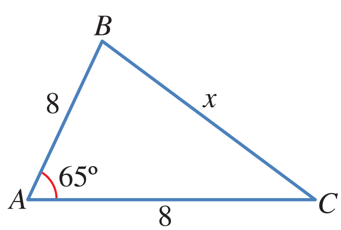
5 إحدى الصيغِ الآتيةِ تُستعمَلُ لإيجادِ مساحةِ المثلثِ ABC:

a) $\frac{1}{2}bc\sin C$ **b)** $\frac{1}{2}ab\sin B$

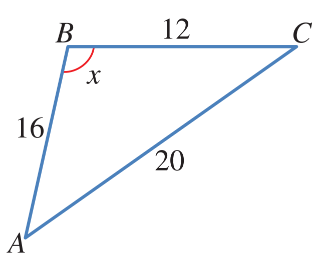
c) $\frac{1}{2}ab\sin A$ **d)** $\frac{1}{2}ab\sin C$

أَجِدُ قيمةَ x في كلٍّ منَ المثلثاتِ الآتيةِ:

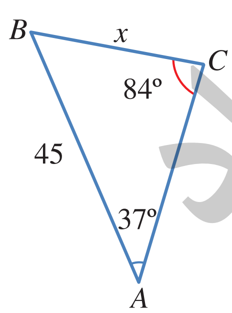
6



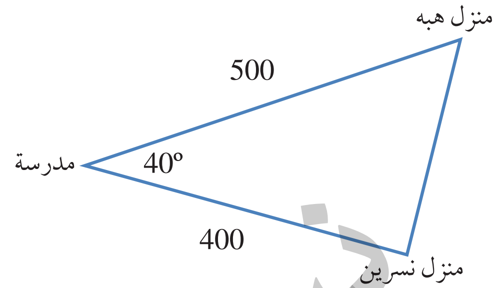
7



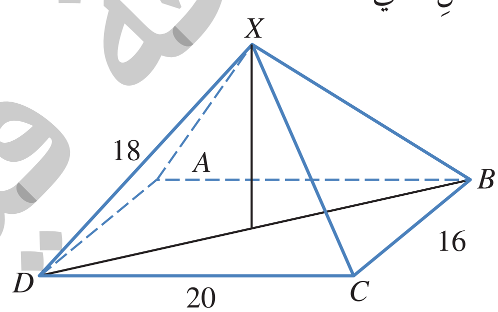
8



9 يبعدُ منزلُ نسـرينَ عنِ المدرسةِ مسافةَ 400 m، ويبعدُ منزلُ هبةَ عنِ المدرسـةِ نفسِها مسافةَ 500 m، كما في الشكلِ الآتي. أَجِدُ المسافةَ بينَ منزلَيْهِما.

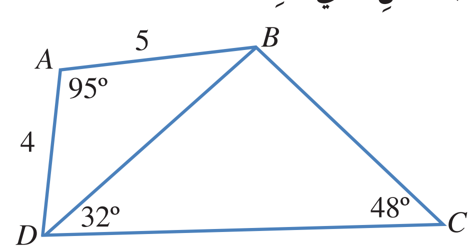


10 أَجِـدُ قياسَ الزاويةِ بينَ الحافـةِ XD وقاعدةِ الهرمِ في الشكلِ الآتي.



11 إذا كانَتْ مسـاحةُ المثلثِ PQR هيَ $68\ cm^2$، وكانَ $PQ = 18\ cm, RQ = 15\ cm$، فمـا قيـاسُ الزاويةِ الحادَّةِ PQR؟

مستعينًا بالشكلِ الآتي، أَجِدُ:



12 طولَ DB.

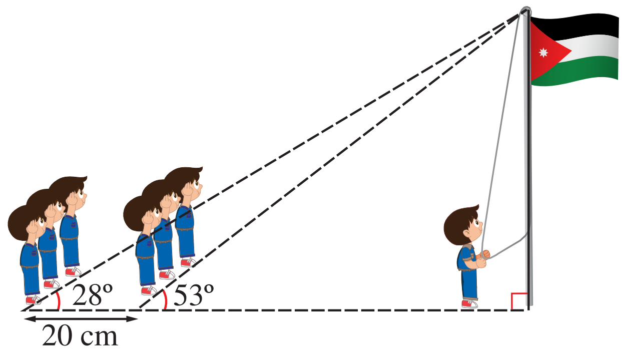
13 قياسَ الزاويةِ DBC .

14 طولَ CD.

15 مساحةَ الشكلِ الرباعيِّ $ABCD$.

11 **موانئ:** أبحرَتْ سـفينةٌ مـنَ الميناءِ P باتجـاهِ الغربِ مسـافةَ 16 km، ثـمَّ تحوَّلَـتْ إلى اتجـاهِ الجنوبِ، وقطعَتْ مسـافةَ 9 km حتّى وصلَتِ الميناءَ S. أَجِدُ اتجاهَ الميناءِ S منَ الميناءِ P.

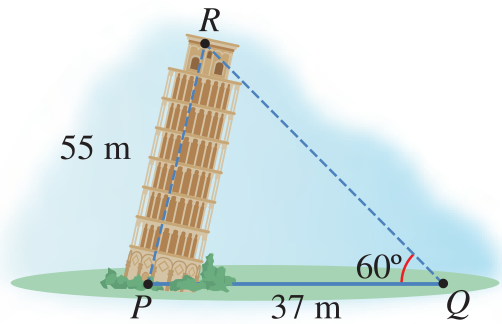
12 **تحية العلم:** وقفَ طلبةُ الكشّـافةِ في مدرسـةِ صفّينَ أمامَ ساريةِ العلمِ في الطابورِ الصباحيِّ كما في الشكلِ الآتي:



أَجِدُ ارتفاعَ ساريةِ العلمِ.

13 **عواصف بحرية:** أبحرَتْ سـفينةٌ منَ الميناءِ A بسرعةِ 28 km/h مُتوجِّهـةً إلى الميناءِ B على بُعْدِ 1100 km شرقَ الميناءِ A. ولتجنُّبِ العواصفِ الشديدةِ التي هبَّتْ عندَ انطلاقِ السفينةِ؛ فقدْ سلكَ القبطانُ مسارًا ينحرفُ 20° جنوبًا عنْ خطِّ الملاحةِ المباشـرِ بيـنَ الميناءيْنِ حتّى هدأَتِ العواصفُ بعدَ إبحارٍ اسـتمرَّ 10 ساعاتٍ. كم تبعدُ السـفينةُ عنِ الميـناءِ B بعدَ هـذهِ المدَّةِ منَ الإبحارِ؟ ما قياسُ الزاويةِ الذي سيجعلُ السفينةَ تتوجَّهُ مباشرةً إلى الميناءِ B؟

برجُ بيزا: طولُ برجِ بيزا المائلِ نحـوَ 55 m، وزاويةُ ارتفاعِ أعلى البرجِ منْ نقطةٍ على بُعْدِ 37 m هيَ 60° كما في الشكلِ المجاورِ. أَجِدُ:

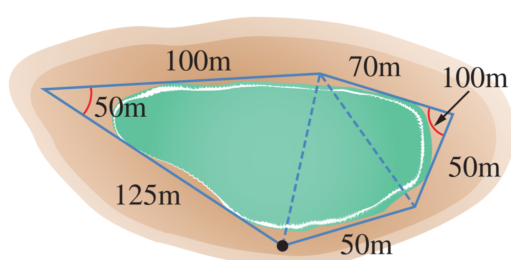


14 قياسَ الزاويةِ RPQ.

15 ارتفاعَ قمةِ البرجِ R عنِ الأرضِ.

16 **ملاحة بحرية**: انطلقَ قاربٌ منَ النقطةِ A منَ الميناءِ نحو سفينةٍ متوقفةٍ في عُرْضِ البحرِ باتجاهِ 030°، وتبعدُ مسافةَ 2 km عنْ نقطةِ الانطلاقِ A، ثمَّ تحرَّكَ القاربُ إلى النقطةِ B التي تقعُ باتجاهِ 000° عنْ نقطةِ الانطلاقِ A، وكانَتِ المسافةُ بينَهُما 3 km. أَجِدُ بُعْدَ السفينةِ عنِ النقطةِ B.

19 **زراعةٌ**: لتقديرِ مساحةِ حقلٍ منَ القمحِ، رسمَ خالدٌ مُضلَّعًا خماسيًّا حولَهُ، ثمَّ حدَّدَ قياساتِهِ المُبيَّنَةَ في الشكلِ الآتي. ما مساحةُ الحقلِ التقريبيةُ؟



20 **ملاحةٌ بحريةٌ**: تبعدُ سفينةٌ عنْ قاعدةِ مَنارةٍ مسافةَ 80 km، وقدْ رصدَ قبطانُ السفينةِ قمَّةَ المنارةِ، فكانَتْ في اتجاهِ 060°، ثمَّ سارَتِ السفينةُ بخطٍّ مستقيمٍ في اتجاهِ الشرقِ، فوجدَ أنَّ اتجاهَ المَنارةِ هوَ 045°. أَجِدُ المسافةَ التي قطعَتْها السفينةُ.

أسئلةٌ من الاختبارات المعيارية

21 **بقع النفط**: تبعد شاحنة نفط 65 km عن اليابسة، تسرب منها بقعة من النفط وانتشرت كما يوضح الشكل الآتي.

أقدر مساحة بقعة النفط بوحدة (km^2) مبينًا طريقة الحل. (إرشاد: الإجابة تقع بين العددين 2200، 3300).