



الرياضيات

الفصل الدراسي الأول

كتاب الطالب

8

فريق التأليف

الناشر: المركز الوطني لتطوير المناهج

يسر المركز الوطني لتطوير المناهج استقبال آرائكم وملحوظاتكم على هذا الكتاب عن طريق العناوين الآتية:



06-5376262 / 237



06-5376266



P.O.Box: 2088 Amman 11941



@nccdjor



feedback@nccd.gov.jo



www.nccd.gov.jo

المقدمة

انطلاقاً من إيمان المملكة الأردنية الهاشمية الراسخ بأهمية تنمية قدرات الإنسان الأردني، وتسليحه بالعلم والمعرفة؛ سعى المركز الوطني لتطوير المناهج، بالتعاون مع وزارة التربية والتعليم إلى تحديث المناهج الدراسية وتطويرها، لتكون معيّنًا للطلبة على الارتقاء بمستواهم المعرفي، ومجارة أقرانهم في الدول المتقدمة. ولمّا كانت الرياضيات إحدى أهمّ الموادّ الدراسية التي تنمّي لدى الطلبة مهارات التفكير وحلّ المشكلات، فقد أولى المركز هذا المبحث عنايةً كبيرةً، وحرص على إعداد كتب الرياضيات وفق أفضل الطرائق المُتبّعة عالمياً بجهود خبراء أردنيين؛ لضمان انسجامها مع القيم الوطنية الراسخة، وتلبّيتها لاحتياجات أبنائنا الطلبة وزملائنا المعلمين.

روعي في إعداد كتب الرياضيات تقديم المحتوى بصورة سلسلة، ضمن سياقات حياتية شائقة، تزيد رغبة الطلبة في التعلّم، ووظّفت فيها التكنولوجيا لتُسهم في جعل الطلبة أكثر تفاعلاً مع المفاهيم المُقدمة لهم. كما عُنِي بإبراز خطة حلّ المسألة، فأفرد لها دروساً مستقلة تتيح للطلبة التدرّب على أنواع مختلفة من هذه الخطط وتطبيقها في مسائل متنوعة. لقد احتوت الكتب على مشروع لكل وحدة؛ لتعزيز تعلّم الطلبة للمفاهيم والمهارات الواردة فيها وإثرائها. ولأنّ التدرّب المكثّف على حلّ المسائل يُعدّ إحدى أهم طرائق ترسيخ المفاهيم الرياضية وزيادة الطلاقة الإجرائية لدى الطلبة؛ فقد أعدّ كتاب التمارين على نحوٍ يُقدّم للطلبة ورقة عمل في كل درس، تُحلّ بوصفها واجباً منزلياً، أو داخل الغرفة الصفية إن توافر الوقت الكافي. ولأنّنا ندرك جيداً حرص المعلم الأردني على تقديم أفضل ما لديه للطلبة؛ فقد جاء كتاب التمارين أداةً مساعدة تُوفّر عليه جهد إعداد أوراق العمل وطباعتها.

من المعلوم أنّ الأرقام العربية تُستخدم في معظم مصادر تعليم الرياضيات العالمية، ولا سيّما على شبكة الإنترنت، التي أصبحت أداةً تعليميةً مُهمّةً؛ لما تزخر به من صفحات تُقدّم محتوىً تعليمياً تفاعلياً ذا فائدة كبيرة. وحرصاً منا على ألاّ تفوت أبنائنا الطلبة أيّة فرصة، فقد اعتمدنا في هذا الكتاب الأرقام العربية؛ لجسر الهوة بين طلبتنا والمحتوى الرقمي العلمي، الذي ينمو بتسارع في عالم يخطو نحو التعليم الرقمي بوتيرة متسارعة.

ونحن إذ نقدّم هذا الكتاب، نأمل أن تنال إعجاب أبنائنا الطلبة ومعلميهم، وتجعل تعليم الرياضيات وتعلّمها أكثر متعةً وسهولةً، ونعدهم بأن نستمرّ في تحسين هذا الكتاب في ضوء التغذية الراجعة التي تصل إلينا تَباعاً.

المركز الوطني لتطوير المناهج

68	الوحدة 2 تحليل المقادير الجبرية
69	مشروع الوحدة: القطع الجبرية
	الدرس 1 حالات خاصة من ضرب المقادير الجبرية
70	ضرب المقادير الجبرية
77	نشاط مفاهيمي: تحليل المقادير الجبرية
	الدرس 2 التحليل بإخراج العامل المشترك الأكبر
78	العامل المشترك الأكبر
87	الدرس 3 تحليل ثلاثيات الحدود $x^2 + bx + c$
93	الدرس 4 حالات خاصة من التحليل
101	الدرس 5 تبسيط المقادير الجبرية النسبية
108	اختبار الوحدة

6	الوحدة 1 الأعداد الحقيقية
7	مشروع الوحدة: الأعداد الحقيقية في الفن
8	الدرس 1 الجذور التربيعية
13	الدرس 2 الجذور الصماء
22	نشاط مفاهيمي: نظرية فيثاغورس
23	الدرس 3 نظرية فيثاغورس
30	الدرس 4 الأعداد الحقيقية
38	الدرس 5 الأسس النسبية والجذور
44	الدرس 6 ضرب الأسس النسبية وقسمتها
52	الدرس 7 الصيغة العلمية
59	الدرس 8 النسبة المئوية
66	اختبار الوحدة

الوحدة 4 المثلثات المتطابقة 164

مشروع الوحدة: أبني جسرًا 165

الدرس 1 تطابق المثلثات (SSS, SAS, HL) ... 166

الدرس 2 تطابق المثلثات (ASA, AAS) 174

الدرس 3 المثلثات المتطابقة الضلعين

والمثلثات المتطابقة الأضلاع 181

اختبار الوحدة 189

الوحدة 3 المعادلات الخطية بمتغيرين ... 110

مشروع الوحدة: المعادلات الخطية والخريطة ... 111

الدرس 1 المعادلة الخطية بالصورة القياسية 112

الدرس 2 ميل المستقيم 121

الدرس 3 معادلة المستقيم

بصيغة الميل والمقطع 128

الدرس 4 معادلة المستقيم بصيغة الميل ونقطة ... 138

الدرس 5 المستقيمات المتوازية والمتعامدة 145

الدرس 6 تفسير التمثيلات البيانية 152

اختبار الوحدة 162



الأعداد الحقيقية

ما أهمية هذه الوحدة؟

للأعداد الحقيقية تطبيقات حياتية كثيرة، منها قياس الأطوال ونسب التغير في الكميات بدقة. ويمكن أيضًا استعمال الأعداد الحقيقية للتعبير عن الكميات الكبيرة جدًا أو الصغيرة جدًا، مثل قطر الحمض النووي بالصيغة العلمية.



سأتعلم في هذه الوحدة:

- التمييز بين الأعداد النسبية وغير النسبية.
- توظيف نظرية فيثاغورس وعكسها في حل مسائل حياتية.
- تطبيق قوانين الأسس النسبية في تبسيط مقادير أسية.
- حل مسائل حياتية على النسبة المئوية.

تعلمت سابقًا:

- ✓ تبسيط مقادير عديدة تتضمن الأسس الصحيحة بتطبيق أولويات العمليات الحسابية.
- ✓ حل مسائل حياتية باستخدام التناسب والتقسيم التناسبي.
- ✓ حل مسائل على النسبة المئوية تتضمن الخصم أو الضريبة.



مشروع الوحدة: الأعداد الحقيقية في الفن

4 أكمل الجدول الآتي بوضع إشارة (✓) أو (X) في الخانة المناسبة:

العدد	نسبي	غير نسبي	جذر أصم	جذر غير أصم
a				
b				
d				
c				

أستعد ومجموعتي لتنفيذ مشروعنا الخاص الذي نوظف فيه ما نتعلمه في هذه الوحدة حول الأعداد الحقيقية ونظرية فيثاغورس في رسم شكل زخرفي هندسي على الزجاج.



الأدوات اللازمة:

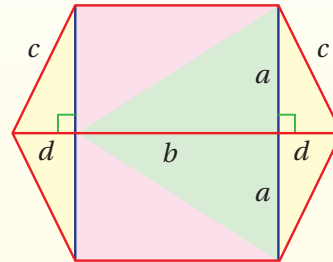
أنبوب تحديد على الزجاج،
فرش للتلوين، ألوان زجاج، لوح زجاجي

خطوات تنفيذ المشروع:

1 أختار مربعين كاملين يشكّل جذراهما بُعدي المستطيل a و b ، ثم أرسّم المستطيلين في الأعلى والأسفل على ورقة.

2 أختار جذرا أصم ليشكّل المسافة d ، وأستخدم خطّ الأعداد لتحديد بدقه. أرسّم الضلعين اللذين طول كل منهما d .

3 أستخدم نظرية فيثاغورس لتحديد طول الوتر c . أستخدم



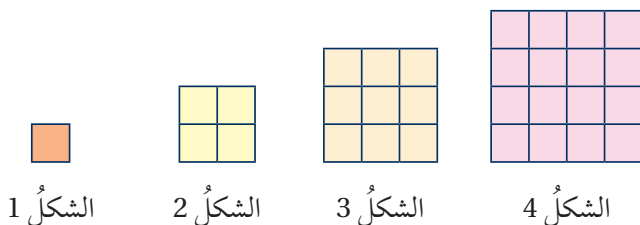
خطّ الأعداد لتحديد c - إذا لزم الأمر - ثم أرسّم الوتر، وأكمل باقي الشكل.

عرض النتائج:

تعرض المجموعات زخارفها على الزجاج وجداولها، وتناقش كيفية اختيار الأطوال.

أستكشف

إذا استمرّ النمط في الشكل الآتي، فما رقم أول شكلٍ يحتوي أكثر من 180 وحدة مربعة؟



الشكل 1

الشكل 2

الشكل 3

الشكل 4

فكرة الدرس

أجد قيمة الجذر التربيعي لعدد، وأستخدمه في حل مسائل حياتية.

المصطلحات

الجذر التربيعي، المربع الكامل، رمز الجذر، المجذور

تسمى الأعداد مثل 1، 4، 9، 16، 25 مربعات كاملة (perfect squares)؛ لأنّ كلّ منها يساوي مربع عدد صحيح ما.

الجذر التربيعي (square root) لعدد ما هو أحد عامليه المتساويين. ولأيّ عدد موجب جذران تربيعيان، أحدهما موجب والآخر سالب. ويسمى الرمز $\sqrt{\quad}$ رمز الجذر (radical sign)، ويستخدم للدلالة على الجذر التربيعي الموجب، ويسمى العدد أسفل الجذر المجذور (radicand).

رمز الجذر



المجذور

لغة الرياضيات

يقرأ الرمز $\pm$ موجباً أو سالباً، ويدلّ على كلا الجذرين التربيعيين للعدد الموجب.

$\sqrt{64}$ ← الجذر التربيعي الموجب للعدد 64

$-\sqrt{64}$ ← الجذر التربيعي السالب للعدد 64

$\pm\sqrt{64}$ ← الجذر التربيعي الموجب أو السالب للعدد 64

مثال 1

أجد كلّاً من الجذور التربيعية الآتية:

1 $\sqrt{36}$

$\sqrt{36} = 6$

أجد الجذر التربيعي الموجب لـ 36 ؛ $6^2 = 36$

2 $\pm\sqrt{1.69}$

$\pm\sqrt{1.69} = \pm 1.3$

أجد الجذرين التربيعيين لـ 1.69 ؛ $(-1.3)^2 = 1.69$

الوحدة 1

3 $-\sqrt{\frac{25}{64}}$

$$= -\sqrt{\left(\frac{5}{8}\right)^2} = -\frac{5}{8}$$

أجدُ الجذرَ التربيعيَّ السالبِ لـ $\frac{25}{64}$ ؛ $\left(-\frac{5}{8}\right)^2 = \frac{25}{64}$

أتحقق من فهمي:



4 $\sqrt{81}$

5 $-\sqrt{1.96}$

6 $\pm\sqrt{\frac{4}{121}}$

يمكنني استخدام تعريف الجذر التربيعي لعدد موجب في حل معادلات تتضمن متغيرات مربعة، فإذا كان $n^2 = c$

فإن $n = \pm\sqrt{c}$

مثال 2

أحلُّ كلاً من المعادلات الآتية، وأتحقق من صحة الحل:

1 $x^2 = 144$

$$x^2 = 144$$

$$x = \pm\sqrt{144}$$

$$x = 12, -12$$

المعادلة الأصلية

تعريف الجذر التربيعي

أجد قيمة الجذر

أتحقق من صحة الحل:

$$(12)^2 \stackrel{?}{=} 144, 144 = 144 \checkmark$$

$$(-12)^2 \stackrel{?}{=} 144, 144 = 144 \checkmark$$

2 $t^2 = \frac{1}{36}$

$$t^2 = \frac{1}{36}$$

$$t = \pm\sqrt{\frac{1}{36}}$$

$$t = \frac{1}{6}, -\frac{1}{6}$$

المعادلة الأصلية

تعريف الجذر التربيعي

أجد قيمة الجذر

أتحقق من صحة الحل:

$$\left(\frac{1}{6}\right)^2 \stackrel{?}{=} \frac{1}{36}, \frac{1}{36} = \frac{1}{36} \checkmark$$

$$\left(-\frac{1}{6}\right)^2 \stackrel{?}{=} \frac{1}{36}, \frac{1}{36} = \frac{1}{36} \checkmark$$

✓ **أتحقق من فهمي:**

3 $y^2 = 2.25$

4 $x^2 = \frac{16}{169}$

يُستعملُ الجذرُ التربيعيُّ الموجبُ عادةً في المواقفِ الحياتية والعملية، أمَّا الجذرُ التربيعيُّ السالبُ فلا معنى له.



مثال 3: من الحياة

أهرام: هرم الشمس ثالث أكبر هرم في العالم، قاعدته مربعة الشكل مساحتها 50625 m^2 ، أجد طول ضلع قاعدته.

الخطوة 1 أكتب المسألة على صورة معادلة:

أفرض أن x طول ضلع قاعدة الهرم، وبما أن القاعدة مربعة الشكل، فإن مساحتها تساوي مربع طول الضلع.

$$A = s^2$$

$$x^2 = 50625$$

مساحة المربع

أعوّض لأنشئ معادلة

الخطوة 2 أبحث عن عاملين متساويين:

لحل المعادلة، أبحث عن عاملين متساويين للعدد 50625، وذلك بتحليله إلى عوامله الأولية:

$$50625 = 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$$

$$= (5 \times 5 \times 3 \times 3) (5 \times 5 \times 3 \times 3)$$

$$= 225 \times 225$$

أحلل العدد إلى عوامله الأولية

الخاصية التجميعية

أضرب

الخطوة 3 أجد طول ضلع قاعدة الهرم:

لإيجاد طول ضلع قاعدة الهرم أحل المعادلة $x^2 = 50625$

$$x^2 = 50625$$

$$x = \pm \sqrt{50625}$$

$$x = 225, -225$$

أكتب المعادلة

تعريف الجذر التربيعي

أجد قيمة الجذر

وبما أن الطول لا يمكن أن يكون سالبًا، إذن، طول ضلع القاعدة هو $\sqrt{50625}$ ويساوي 225 m

الوحدة 1



أتحقق من فهمي:



صورةً مربعة الشكل مساحتها 3136 cm^2 ، أرادت ريمًا وضعها في بروازٍ مربع الشكل طول ضلعه الداخلي 58 cm ، هل يمكنها ذلك؟ أبرّر إجابتي.

أتحرب وأحل المسائل



إرشاد

أستعمل الحقيقة

$$576 = 4 \times 9 \times 16$$

لحل المسألة 3

أتذكر

إيجاد مربع العدد والجزر التربيعي له عملياتان عكسيتان.

إرشاد

لحل المعادلة في المسألة 13، أجد مربع طرفي المعادلة.

أجد كلاً من الجذور التربيعية الآتية:

1 $\sqrt{\frac{49}{169}}$

2 $-\sqrt{2.56}$

3 $\pm\sqrt{576}$

4 $\sqrt{0.0001}$

أجد قيمة كل مما يأتي، مبرراً إجابتي:

5 $(\sqrt{81})^2$

6 $(-\sqrt{0.01})^2$

7 $\frac{\sqrt{100-36}}{\sqrt{16}}$

8 $\sqrt{0.25+1.44}$

9 $\sqrt{2.61-0.36}$

10 $0.4^2 + \sqrt{2.25}$

أحل كلاً من المعادلات الآتية، وأتحقق من صحة الحل:

11 $t^2 = \frac{64}{100}$

12 $y^2 = 0.0144$

13 $\sqrt{y} = \frac{3}{5}$

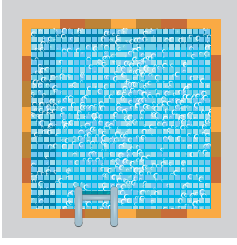


رياضة: تُستعمل العلاقة $l = 0.0625 s^2$ لإيجاد السرعة القصوى للجري s بالمتري لكل ثانية لشخص طول ساقه l سنتيمتراً. أجد أقصى سرعة لشخص طول ساقه 64 cm

14

بناء: بلط بناء أرضية غرفة مربعة الشكل بـ 75 بلاطة بيضاء و 75 بلاطة صفراء و 75 بلاطة بيضاء. ما عدد البلاطات التي تشكّل طول ضلع قاعدة الغرفة؟

15



مسابح: مسبح مربع الشكل، مساحته 169 m^2 ، يحيط به ممر عرضه 1 m . أجد محيط الممر.

16

أضع إشارة $>$ أو $<$ أو $=$ في لأكون عبارة صحيحة:

17 $\sqrt{2.61-0.36}$ 1.6

18 1.3^2 $\sqrt{1.27+1.29}$

19 $\sqrt{0.81}$ 0.9^2

20 $\sqrt{1.24+0.2}$ 1.2

أنماط: أعود إلى فقرة (أستكشف) بداية الدرس، وأحل المسألة.

21

مهارات التفكير العليا

أفكر

ما العلاقة بين عدد المقاعد على طول ضلع المربع الكبير وعدد المقاعد على طول ضلع المربع الصغير؟

22

تبرير: في حفل تخريج للطلبة في إحدى الجامعات، وُرعت المقاعد على 4 أقسام كل منها على شكل مربع فيه العدد نفسه من المقاعد، لتشكل الأقسام الأربعة معًا مربعًا كبيرًا. إذا كان في أحد الأقسام 625 مقعدًا، فما عدد المقاعد الموضوعة على ضلع المربع الكبير؟ أبرر إجابتي.

23

تبرير: هل يمكن إيجاد $\sqrt{-100}$ ؟ أبرر إجابتي.

أفكر

ما العلاقة بين مساحة أرضية المسرح والتكلفة؟

24

تحد: قرر مصمم تغطية أرضية مسرح مربعة الشكل بنوع خاص من الخشب سعر المتر المربع الواحد منه 4 JD، فبلغت التكلفة 1024 JD. أجد طول المسرح.

25

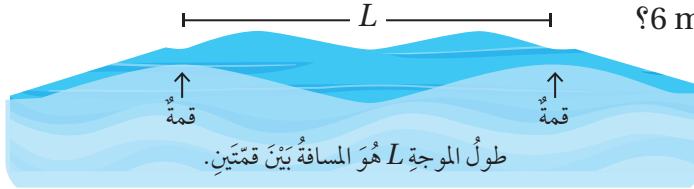
أكتشف الخطأ: يقول مالك: إن $\sqrt{64} = \pm 8$ ؛ لأن $(\pm 8)^2 = 64$. هل ما يقوله مالك صحيح؟ أبرر إجابتي.

26

أكتب: كيف أجد الجذر التربيعي لعدد ما؟

أستكشف

تمثل المعادلة $2\pi s^2 = 9.8 L$ العلاقة بين سرعة سلسلة من الموجات s بالمتري لكل ثانية في المياه العميقة، وطول الموجة L بالأمتار. أجد سرعة سلسلة من الموجات طولها الموجي 6 m؟



فكرة الدرس

أقدر قيمة الجذر التربيعي.

المصطلحات

الجزور الصماء، إنطاق المقام.

الجزور الصماء (surds) هي جذور لا يمكن إيجاد قيمة دقيقة لها، فمثلاً $\sqrt{3}$ جذر أصم لعدم وجود إجابة دقيقة له؛ لأن 3 ليس مربعاً كاملاً، أما $\sqrt{4}$ فيمكن إيجاد قيمة دقيقة له وهي 2؛ لأنه مربع كامل، إذن فهو ليس جذراً أصم. ولكن يمكن تقدير الجذور الصماء باستعمال طرائق عدة منها: خط الأعداد، والآلة الحاسبة.

مثال 1

أقدر قيمة $\sqrt{55}$ لأقرب عدد صحيح.

الطريقة 1: خط الأعداد

الخطوة 1 أجد مربعين كاملين يقع بينهما العدد 55 ويكونان أقرب ما يمكن إليه:

• أكبر مربع كامل أقل من 55 هو 49

• أصغر مربع كامل أكبر من 55 هو 64

إذن، العدد 55 يقع بين المربعين الكاملين 36 و 49، ويمكن التعبير عن هذه الجملة على النحو الآتي:

$$49 < 55 < 64$$

الخطوة 2 أجد الجذر التربيعي لكل عدد:

$$49 < 55 < 64$$

$$\sqrt{49} < \sqrt{55} < \sqrt{64}$$

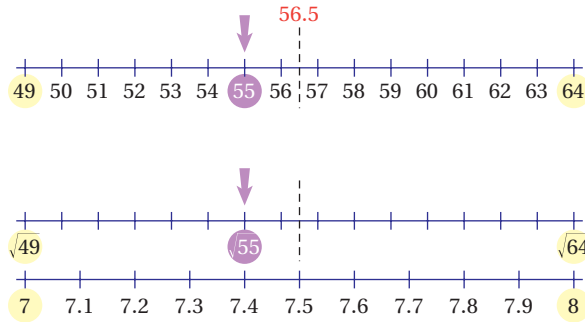
$$7 < \sqrt{55} < 8$$

أكتب المتباينة

أجد الجذر التربيعي لكل عدد

أبسط

الخطوة 3 أستخدم خط الأعداد لتحديد أفضل تقدير:



• أعيّن الجذرين على خط الأعداد.

• أجد منتصف المسافة بين 49 و 64

$$(49 + 64) \div 2 = 56.5$$

• ألاحظ أن 55 أقرب إلى 49 منه إلى 64

إذن، $\sqrt{55}$ أقرب إلى 7 منه إلى 8

لذا فإن أفضل تقدير لـ $\sqrt{55}$ لأقرب عدد صحيح هو 7

الطريقة 2: الآلة الحاسبة

يمكن استعمال الآلة الحاسبة لتقدير $\sqrt{55}$ بالضغط على الأزرار الآتية:



إذن، أفضل تقدير لـ $\sqrt{55}$ لأقرب عدد صحيح هو 7

أتحقق من فهمي:

أقدر قيمة كل جذر تربيعي مما يأتي لأقرب عدد صحيح باستعمال خط الأعداد والآلة الحاسبة:

1 $\sqrt{83}$

2 $\sqrt{125}$

3 $\sqrt{160}$

يكون المقدار الجذري في أبسط صورة حين لا يحتوي:

- جذرًا في المقام.
- مجذورًا أحد عوامله مربع كامل باستثناء العدد 1
- مجذورًا على صورة كسر.

ويمكن تبسيط الجذور التربيعية الصماء باستعمال خواص ضرب الجذور التربيعية وقسمتها.

• مثال:

• بالرموز:

$$\sqrt{a} \times \sqrt{a} = a, a \geq 0$$

$$\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 3$$

$$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}, a \geq 0, b \geq 0$$

$$\sqrt{9 \times 7} = \sqrt{9} \times \sqrt{7} = 3\sqrt{7}$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}, a \geq 0, b > 0$$

$$\sqrt{\frac{11}{4}} = \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{11}}{2}$$

أتعلم

لتبسيط جذر أصم على الصورة $\sqrt{a}, a \geq 0$ ،
أحلل العدد الواقع تحت إشارة الجذر إلى عاملين،
على أن يكون أحدهما أكبر مربع كامل ممكن، ثم
أطبق خاصية ضرب الجذور التربيعية.

وللحصول على مقدار جذري لا يحتوي مقامه جذراً أصم، نضرب
البسط والمقام في هذا الجذر الأصم، وتسمى هذه العملية **إنطاق المقام**
(rationalizing the denominator).

مثال 2

أبسط كلاً مما يأتي:

1 $\sqrt{675}$

$$\begin{aligned}\sqrt{675} &= \sqrt{225 \times 3} \\ &= \sqrt{225} \times \sqrt{3} \\ &= 15\sqrt{3}\end{aligned}$$

أحلل العدد 675 إلى عاملين أحدهما مربع كامل
خاصية ضرب الجذور التربيعية
أبسط

2 $\sqrt{\frac{48}{81}}$

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{48}{81}} &= \frac{\sqrt{48}}{\sqrt{81}} \\ &= \frac{\sqrt{16 \times 3}}{9} \\ &= \frac{\sqrt{16} \times \sqrt{3}}{9} \\ &= \frac{4\sqrt{3}}{9}\end{aligned}$$

خاصية قسمة الجذور التربيعية
أحلل العدد 48 إلى عاملين أحدهما مربع كامل
خاصية ضرب الجذور التربيعية
أبسط

3 $\frac{14}{\sqrt{7}}$

$$\begin{aligned}\frac{14}{\sqrt{7}} &= \frac{14}{\sqrt{7}} \times \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} \\ &= \frac{14\sqrt{7}}{7} \\ &= 2\sqrt{7}\end{aligned}$$

أضربُ كلاً من البسط والمقام في $\sqrt{7}$
خاصية ضرب الجذر في نفسه
أبسطُ

✓ **أتحقق من فهمي:**

4 $\sqrt{192}$

5 $\sqrt{\frac{180}{25}}$

6 $\frac{30}{\sqrt{6}}$

يُستعمل تبسيط الجذور الصماء وتقديرها في كثير من المواقف الحياتية التي لا يمكن إيجاد إجابة دقيقة لها.



مثال 3: من الحياة

زراعة: اشترى سمير 6 أكياس من السماد الطبيعي يكفي الواحد منها لتغطية مساحة مقدارها 156 m^2

أقدر طول ضلع أكبر مربع من الأرض يمكن أن تغطيه هذه الكمية من السماد.

لتقدير طول ضلع أكبر مربع من الأرض يمكن أن تغطيه كمية السماد التي اشتراها سمير، أجد المساحة المربعة التي تغطيها كمية السماد الكلية، وذلك بضرب عدد الأكياس في مساحة ما يغطيه الكيس الواحد.

الخطوة 1 أجد المساحة المربعة التي تغطيها كمية السماد الكلية:

$$6 \times 156 = 936 \quad \text{عدد الأكياس} \times \text{مساحة ما يغطيه الكيس الواحد}$$

إذن، تغطي كمية السماد كلها مساحة مقدارها 936 m^2

الخطوة 2 أجد طول ضلع مربع الأرض الذي تغطيه كمية السماد كلها:

أفرض أن s طول ضلع مربع الأرض الذي مساحته 936 m^2

$$A = s^2$$

$$s = \sqrt{A}$$

مساحة المربع
طول الضلع = الجذر التربيعي
للمساحة

الوحدة 1

اتذكر

إيجاد مربع العدد والجذر التربيعي له عمليتان عكسيتان.

$$= \sqrt{936}$$

$$= \sqrt{36 \times 26}$$

$$= \sqrt{36} \times \sqrt{26}$$

$$= 6\sqrt{26}$$

أعوّض
أحلّل العدد 936 إلى عاملين أحدهما
مربع كامل
خاصية ضرب الجذور التربيعية
أبسط

الخطوة 3 أقدّر طول ضلع المربع:

أستعمل الآلة الحاسبة لتقدير طول ضلع المربع:



إذن، طول ضلع مربع الأرض الذي تكفي لتغطيته كمية السماد التي اشتراها سميّر 31 m^2 تقريبًا.

أتتحقق من فهمي:



جسور: تمثل المعادلة $t = \sqrt{\frac{2d}{9.8}}$ العلاقة بين الزمن t بالثواني والارتفاع الذي سقط منه جسم سقوطًا حرًا d بالأمتار. أجد الزمن اللازم ليصل جسم إلى سطح الأرض سقط من جسر وادي الغفر في محافظة إربد البالغ ارتفاعه عن سطح الأرض 72 m

يمكن جمع الجذور التربيعية الصّماء وطرحها بطريقة مشابهة لجمع الحدود الجبرية وطرحها، بشرط أن يتساوى المجذور في كل منها.

$3\sqrt{5}$, $5\sqrt{3}$ جذران غير متشابهين

$3\sqrt{5}$, $7\sqrt{5}$ جذران متشابهان

مثال 4 أبسط كلاً مما يأتي:

1 $5\sqrt{7} + 2\sqrt{7} - 3\sqrt{7}$

$$5\sqrt{7} + 2\sqrt{7} - 3\sqrt{7} = (5+2-3)\sqrt{7} \\ = 4\sqrt{7}$$

أجمع المعاملات وأطرحها
أبسط

2 $\sqrt{12} - 6\sqrt{3}$

$$\begin{aligned}\sqrt{12} - 6\sqrt{3} &= \sqrt{4 \times 3} - 6 \times \sqrt{3} && \text{أحلّ}\end{aligned}$$

$$= \sqrt{4} \times \sqrt{3} - 6\sqrt{3} \quad \text{خاصية ضرب الجذور التربيعية}$$

$$= 2\sqrt{3} - 6\sqrt{3} \quad \sqrt{4} = 2$$

$$= -4\sqrt{3}$$

3 $\sqrt{20} + \sqrt{45}$

$$\begin{aligned}\sqrt{20} + \sqrt{45} &= \sqrt{4 \times 5} + \sqrt{9 \times 5} && \text{أحلّ}\end{aligned}$$

$$= \sqrt{4} \times \sqrt{5} + \sqrt{9} \times \sqrt{5} \quad \text{خاصية ضرب الجذور التربيعية}$$

$$= 2 \times \sqrt{5} + 3 \times \sqrt{5} \quad \sqrt{4} = 2, \sqrt{9} = 3$$

$$= 5\sqrt{5} \quad \text{أبسط}$$

✓ **أتحقّق من فهمي:**

4 $2\sqrt{3} - 7\sqrt{3} + 3\sqrt{3}$

5 $4\sqrt{98} + 5\sqrt{2}$

6 $\sqrt{243} + \sqrt{48}$

يمكن تبسيط بعض المقادير العددية التي تحوي جذورًا صمّاء وعمليات باستعمال خاصية التوزيع وخواص ضرب الجذور التربيعية وقسمتها.

مثال 5

أبسط كلّ ممّا يأتي:

1 $\sqrt{3}(2 - \sqrt{7})$

$$\begin{aligned}\sqrt{3}(2 - \sqrt{7}) &= 2\sqrt{3} - \sqrt{3}\sqrt{7} && \text{خاصية التوزيع}\end{aligned}$$

$$= 2\sqrt{3} - \sqrt{21} \quad \text{خاصية ضرب الجذور}$$

الوحدة 1

2 $(5 + \sqrt{6})^2$

$$(5 + \sqrt{6})^2 = (5 + \sqrt{6})(5 + \sqrt{6})$$

$$= 25 + 5\sqrt{6} + 5\sqrt{6} + \sqrt{6} \times \sqrt{6}$$

$$= 25 + 5\sqrt{6} + 5\sqrt{6} + 6$$

$$= 31 + 10\sqrt{6}$$

تعريف المربع الكامل

خاصية التوزيع

خاصية ضرب الجذر في نفسه

أبسط

أتحقق من فهمي:



3 $\sqrt{2}(\sqrt{8} - 1)$

4 $(\sqrt{7} - 3)^2$

يمكن استخدام قواعد الجذور في تبسيط حدود ومقادير جبرية تحوي جذورًا تربيعية صماء.

مثال 6

أبسط كلاً مما يأتي:

1 $\sqrt{\frac{8x^3}{50x}}, x > 0$

$$\sqrt{\frac{8x^3}{50x}} = \sqrt{\frac{4x^2}{25}}$$

$$= \frac{\sqrt{4x^2}}{\sqrt{25}}$$

$$= \frac{\sqrt{4} \times \sqrt{x^2}}{5}$$

$$= \frac{2x}{5}$$

أقسم كلاً من البسط والمقام على ع. م. أ بينهما وهو $2x$

خاصية قسمة الجذور التربيعية

خاصية ضرب الجذور التربيعية

أبسط

2 $(3\sqrt{5c})(7\sqrt{15c^2}), c > 0$

$$(3\sqrt{5c})(7\sqrt{15c^2}) = (3\sqrt{5} \times \sqrt{c})(7 \times \sqrt{15} \times \sqrt{c^2})$$

$$= (3\sqrt{5} \times \sqrt{c})(7 \times \sqrt{5} \times \sqrt{3} \times c)$$

$$= (3 \times 7 \times \sqrt{5} \times \sqrt{5} \times \sqrt{3})(c \times \sqrt{c})$$

$$= (3 \times 7 \times 5 \times \sqrt{3})(c \times \sqrt{c})$$

$$= 105c\sqrt{3}\sqrt{c}$$

خاصية ضرب الجذور التربيعية

أبسط

الخاصيتان: التجميعية، والتبديلية

خاصية ضرب الجذر في نفسه

أبسط

أتحقق من فهمي: ✓

3 $\sqrt{\frac{32n}{2n^3}}, n > 0$

4 $(6\sqrt{3xy})(\sqrt{12xy^2}), x, y \geq 0$

أدرب وأحل المسائل

أقدر قيمة كل جذر مما يأتي لأقرب عدد صحيح باستعمال خط الأعداد والآلة الحاسبة:

1 $\sqrt{17}$

2 $\sqrt{44}$

3 $\sqrt{70}$

4 $\sqrt{93}$

أكتب كلاً من المقادير العددية الآتية بأبسط صورة:

5 $\sqrt{405}$

6 $\sqrt{\frac{132}{99}}$

7 $\frac{6}{\sqrt{18}}$

8 $(4 + \sqrt{3})(5 - \sqrt{27})$

9 $4\sqrt{2} - 7\sqrt{2} + \sqrt{2}$

10 $\frac{1}{\sqrt{27}} + \sqrt{81}$

11 $(6 + \sqrt{3})^2$

12 $\sqrt{27} - 43 + 2\sqrt{9}$

13 **فيزياء:** تمثل الصيغة $\frac{375}{\sqrt{c}}$ عدد التذبذبات التي تنتج عن حركة رقاص ساعة (بندول) طوله $\sqrt{c}$ in في الدقيقة، أقدر عدد تذبذبات بندول إذا كانت $c = 45$ in

أبسط كلاً مما يأتي:

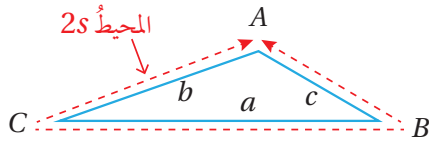
14 $\sqrt{\frac{48y^4}{3y^2}}, y > 0$

15 $\sqrt{800r^4 b^2}, r \geq 0, b \geq 0$

16 $(5\sqrt{18h^2u})(\sqrt{24hu^3}), h \geq 0, u \geq 0$



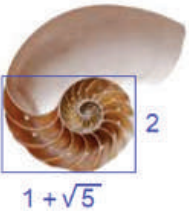
الوحدة 1



مساحة: يمكن حساب مساحة مثلث باستخدام الصيغة $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ حيث a و b و c أطوال أضلاع المثلث و s نصف المحيط.

أجد مساحة مثلث أطوال أضلاعه 6 و 8 و 10

هل المساحة جذر أصم أم لا؟ أبرر إجابتي.



قوقعة: يتكرر وجود المستطيل الذهبي في قوقعة نوتيلوس البحري، إذا علمت أن نسبة طول المستطيل الذهبي إلى عرضه تساوي $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ، فأقدر قيمة هذه النسبة.

معلومة

النسبة الذهبية هي نسبة ثابتة بين كميتين، وتظهر في الطبيعة كثيراً. ويسمى المستطيل الذي تحقق نسبة طوليه إلى عرضه هذه النسبة مستطيلاً ذهبياً.

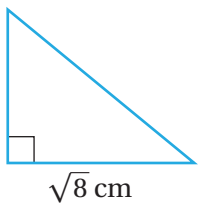
مهارات التفكير العليا

مسألة مفتوحة: إذا كان $\square$ عدداً صحيحاً موجباً أقل من 10، فأجد قيمة $\square$ حيث:

$$2.8 < \sqrt{\square} < 4$$

تحد: أجد الحدين: الأول، والثاني من المتتالية الآتية:

$$\sqrt{5} - 2\sqrt{3}, 3\sqrt{5} - 5\sqrt{3}, 5\sqrt{5} - 8\sqrt{3}$$



تبرير: أجد ارتفاع المثلث المجاور الذي مساحته $4 + \sqrt{2} \text{ cm}^2$ بأبسط صورة، مبرراً إجابتي.

أتذكر

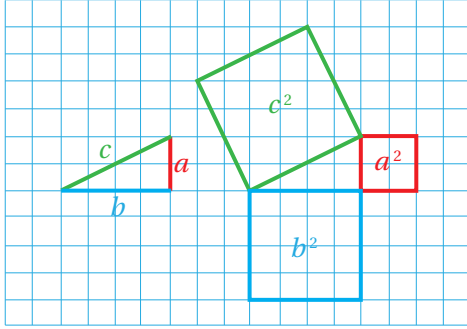
مساحة المثلث $= \frac{1}{2} \times$ القاعدة $\times$ الارتفاع

أكتب: كيف أقدر قيمة الجذر التربيعي لعدد؟



الهدف: استكشف العلاقة بين أطوال أضلاع المثلث القائم الزاوية.

نشاط

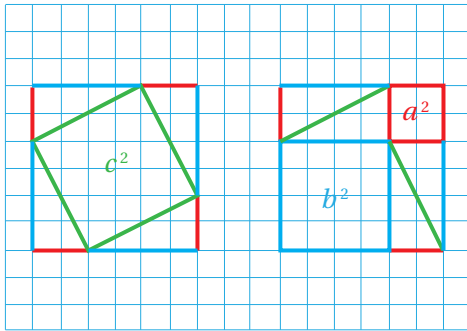


الخطوة 1 أرسم مثلثاً قائم الزاوية:

- أرسم مثلثاً قائم الزاوية على ورقة مربعات، وأسمي أقصر ضلعين a و b والضلع الأطول c .

الخطوة 2 أرسم مربعاً على كل ضلع:

- أرسم مربعاً على كل ضلع من أضلاع المثلث، وأسمي مساحات المربعات الثلاثة: a^2 , b^2 , c^2 .



الخطوة 3 أقص وأعيد الترتيب:

- أقص المربعات الثلاثة.
- أنسخ من المثلث القائم الزاوية ثماني نسخ، ثم أقصها.
- أعيد ترتيب الأشكال لتكوين مربعين متطابقين كبيرين كما في الشكل المجاور.

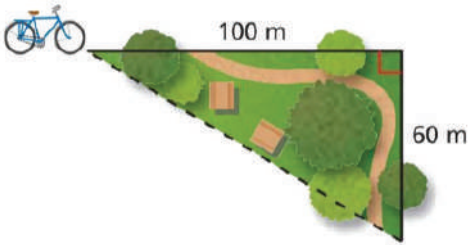
أحل النتائج:

- معتمداً المربعين الكبيرين المتطابقين الناتجين من النشاط؛ أصف العلاقة بين a^2 و b^2 و c^2 .
- أستعمل النتيجة التي توصلت إليها في الفرع السابق لكتابة معادلة تصف العلاقة بين a^2 و b^2 و c^2 .

أفكر:

كيف يمكن استعمال المعادلة التي توصلت إليها في إيجاد طول الضلع الأطول في مثلث قائم الزاوية، إذا كان طولاً ضلعيه الآخرين 8 cm, 6 cm؟

أستكشف



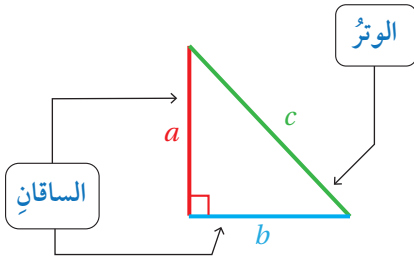
أراد خالد الخروج من الحديقة راكبًا دراجته الهوائية مارًا بالطريق المختصر كما يظهر في الشكل المجاور. ما طول الطريق المختصر؟

فكرة الدرس

أستعمل نظرية فيثاغورس لإيجاد طول ضلع مجهول في مثلث قائم الزاوية.

المصطلحات

نظرية فيثاغورس، الوتر، الساقان، عكس نظرية فيثاغورس

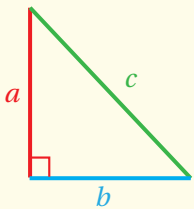


المثلث القائم الزاوية هو مثلث إحدى زواياه قائمة. ويسمى الضلع المقابل للزاوية القائمة **الوتر** (hypotenuse)، وهو الضلع الأطول في المثلث. ويسمى الضلعان الآخران **الساقين** (legs)، وهما الضلعان اللذان يشكلان القائمة.

تصف **نظرية فيثاغورس** (Pythagorean Theorem) العلاقة بين طولَي ضلعي القائمة وطول الوتر في المثلث القائم الزاوية.

نظرية فيثاغورس

مفهوم أساسي



• **بالكلمات:** في المثلث القائم الزاوية مربع طول الوتر يساوي مجموع مربعَي طولَي ساقَيْه.

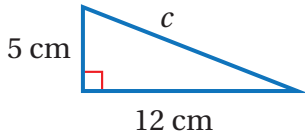
• **بالرموز:** $c^2 = a^2 + b^2$

يمكن استعمال حل المعادلات ونظرية فيثاغورس في إيجاد طول ضلع مجهول في المثلث القائم الزاوية إذا عُلِمَ طول الضلعين الآخرين.

مثال 1

أجد طول الضلع المجهول في كل مثلث قائم الزاوية مما يأتي (أقرب إجابتي لأقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر):

1



$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$5^2 + 12^2 = c^2$$

$$25 + 144 = c^2$$

$$169 = c^2$$

$$c = \pm \sqrt{169}$$

$$= \pm 13$$

نظرية فيثاغورس

أعوض $a = 5, b = 12$

أجد القوى

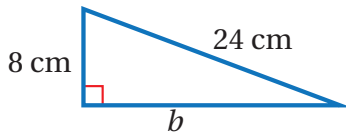
أجمع

تعريف الجذر التربيعي

أبسط

للمعادلة حلان: 13 و -13، وبما أن الطول يجب أن يكون عددًا موجبًا، إذن طول الوتر 13 cm

2



$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$8^2 + b^2 = 24^2$$

$$64 + b^2 = 576$$

$$64 - 64 + b^2 = 576 - 64$$

$$b^2 = 512$$

$$b = \pm \sqrt{512}$$

$$b \approx \pm 22.6$$

نظرية فيثاغورس

أعوض $a = 8, c = 24$

أجد القوى

أطرح 64 من كلا الطرفين

أبسط

تعريف الجذر التربيعي

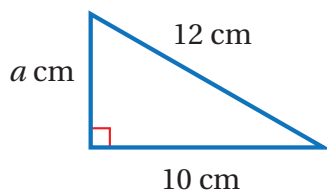
أستعمل الآلة الحاسبة

إذن، طول الضلع المجهول b يساوي 22.6 cm

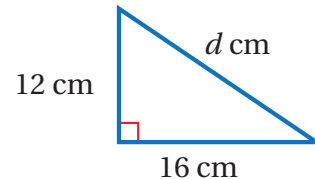
أنتحقق من فهمي:



3



4



الوحدة 1

إنَّ عكسَ نظرية فيثاغورس (Converse of Pythagorean Theorem) صحيحٌ أيضًا، ويُستعملُ لتحديد أنَّ المثلثَ المعطاةَ أطوالَ أضلاعِهِ الثلاثةَ قائمُ الزاوية أم لا.

إذا كان المثلثُ قائمَ الزاوية، فإنَّ $c^2 = a^2 + b^2$

نظرية فيثاغورس:

إذا كان $c^2 = a^2 + b^2$ ، فإنَّ المثلثَ قائمُ الزاوية.

عكسُ نظرية فيثاغورس:

عكسُ نظرية فيثاغورس

مفهومٌ أساسيٌّ

- **بالكلمات:** إذا كان مربعُ طولِ الضلعِ الأطولِ في مثلثٍ يساوي مجموعَ مربعي طولَي الضلعينِ الآخرين، فإنَّ المثلثَ قائمُ الزاوية.
- **بالرموز:** إذا كان $c^2 = a^2 + b^2$ ، فإنَّ المثلثَ قائمُ الزاوية.

مثال 2

أحددُ أنَّ المثلثَ المعطاةَ أطوالَ أضلاعِهِ في كلِّ ممَّا يأتي قائمُ الزاوية أم لا:

1 12, 9, 15

بما أنَّ أطولَ ضلعٍ طوله 15، فأفرضُ أنَّ $c = 15$ ، و $a = 9$ ، و $b = 12$ ، ثمَّ أحددُ أنَّ هذه الأطوالَ تحققُ المعادلةَ $c^2 = a^2 + b^2$ أم لا.

$$c^2 = a^2 + b^2$$

نظرية فيثاغورس

$$15^2 \stackrel{?}{=} 9^2 + 12^2$$

$$a = 9, b = 12, c = 15$$

أعوضُ

$$225 \stackrel{?}{=} 81 + 144$$

أجدُ القوى

$$225 = 225$$

أجمعُ

بما أنَّ $c^2 = a^2 + b^2$ ، إذن، المثلثُ قائمُ الزاوية.

2 3, 5, 6

بما أن أطول ضلع طوله 6، فأفرض أن $c = 6$ ، و $a = 5$ ، و $b = 3$ ، ثم أحدد أن هذه الأطوال تحقق المعادلة $c^2 = a^2 + b^2$ أم لا.

$$c^2 = a^2 + b^2$$

نظرية فيثاغورس

$$6^2 \stackrel{?}{=} 5^2 + 3^2$$

أعوض $a = 5, b = 3, c = 6$

$$36 \stackrel{?}{=} 25 + 9$$

أجد القوى

$$36 \neq 34$$

أبسط

بما أن $c^2 \neq a^2 + b^2$ ، إذن، المثلث ليس قائم الزاوية.

أتحقق من فهمي:



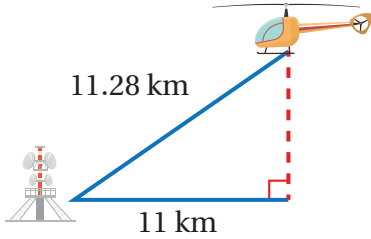
3 12, 5, 13

4 24, 18, 25

يمكن استعمال نظرية فيثاغورس في كثير من التطبيقات الحياتية.



مثال 3: من الحياة



رادار: رصد رادار طائرة مروحية على بُعد 11.28 km منه مثلما يظهر في الشكل المجاور. أجد ارتفاع الطائرة عن سطح الأرض لأقرب جزء من العشرة من الكيلومتر.

أفرض أن a هي ارتفاع الطائرة عن سطح الأرض، ولإيجاد قيمة a أستعمل نظرية فيثاغورس:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

نظرية فيثاغورس

$$11.28^2 = a^2 + 11^2$$

أعوض $c = 11.28, b = 11$

$$127.2384 = a^2 + 121$$

أجد القوى

$$a^2 = 6.2384$$

أطرح 121 من كلا الطرفين

$$a = \pm \sqrt{6.2384}$$

تعريف الجذر التربيعي

$$a \approx \pm 2.5$$

أستعمل الآلة الحاسبة

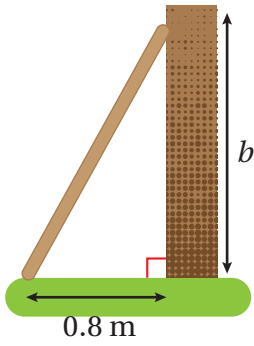
إذن، ارتفاع الطائرة عن سطح الأرض 2.5 km تقريباً.

الوحدة 1

أتحقق من فهمي:



يستند سلم طوله 2 m إلى حائط عمودي، وتبعد قاعدته 0.8 m عن الحائط. أجد ارتفاع أعلى السلم عن الأرض (b).

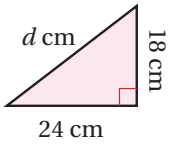


أندرب وأحل المسائل

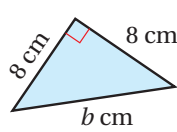


أجد طول الضلع المجهول في كل مثلث قائم الزاوية مما يأتي (أقرب إجابتني لأقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر):

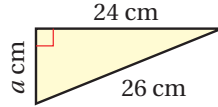
1



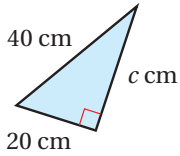
2



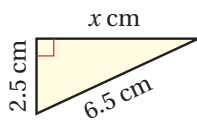
3



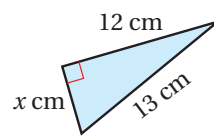
4



5



6



أحدد أن المثلث المعطاة أطوال أضلاعه في كل مما يأتي قائم الزاوية أم لا:

7

3, 4, 6

8

12, 35, 37

9

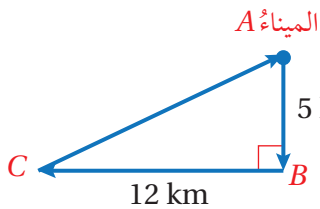
4, 8, 9

10

11, 60, 61

أتذكر

أفرض أن الضلع الأطول هو c عند التعويض في القاعدة $c^2 = a^2 + b^2$



سفن: أبحرت سفينة 5 km من الميناء A باتجاه الجنوب، ثم 12 km باتجاه الغرب، ثم أبحرت مباشرة إلى نقطة البداية كما في الشكل المجاور:

أجد المسافة التي قطعها السفينة.

11

أجد المسافة التي تختصرها السفينة لو أبحرت مباشرة من النقطة A إلى النقطة C ذهاباً وإياباً.

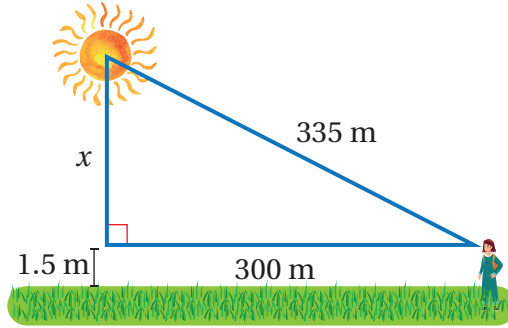
12

إرشاد

عند إيجاد ارتفاع الألعاب النارية عن سطح الأرض آخذ في الحساب طول المشاهد للألعاب النارية.

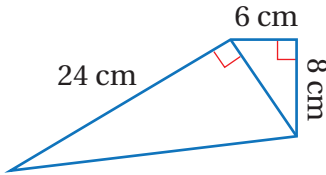
13

ألعاب نارية: رصدت بثينة عرضاً للألعاب النارية على بُعد 335 m مثلما يظهر في الشكل المجاور. أجد ارتفاع الألعاب النارية عن سطح الأرض.



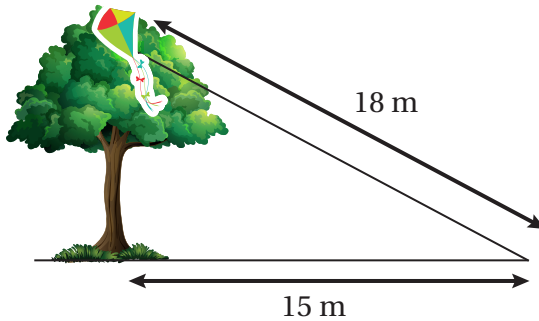
14

أجد محيط الشكل المجاور.



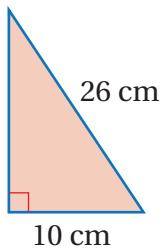
15

علقت طائفة عبدالله الورقية أعلى شجرة، فربط الخيط في وتد على الأرض يبعد 15 m عن قاعدة الشجرة مثلما يظهر في الشكل المجاور. إذا كان طول خيط الطائفة 18 m فأجد ارتفاع الشجرة.



16

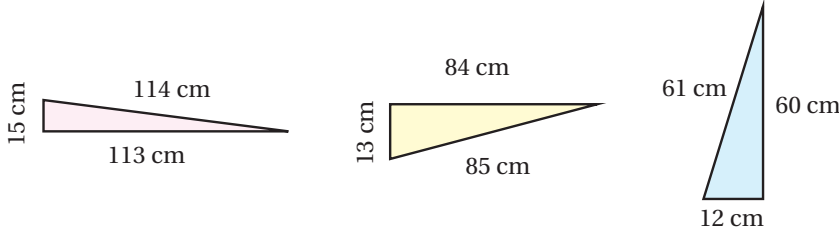
أجد مساحة المثلث المجاور.



17

أعود إلى فقرة (أستكشف) بداية الدرس، وأحل المسألة.

أكتشف المختلف: أي المثلثات الآتية مختلف؟ أبرر إجابتي:



18

مسألة مفتوحة: ثلاثيات فيثاغورس هي مجموعات من ثلاثة أعداد موجبة a و b و c تحقق نظرية فيثاغورس؛ أي تشكل أطوالاً لمثلث قائم الزاوية. مثلاً: 3 و 4 و 5. أجد مجموعتين من ثلاثيات فيثاغورس.

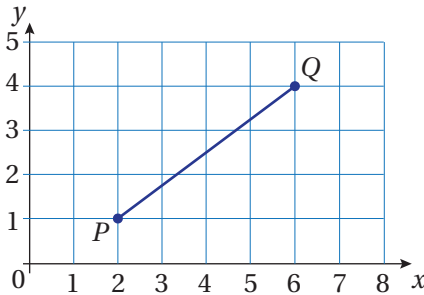
19

أفكر

هل يمكن استعمال التشابه في إيجاد مجموعات أخرى من ثلاثيات فيثاغورس؟

تحذّر: في الشكل المجاور، أجد طول PQ من دون استعمال المسطرة.

20

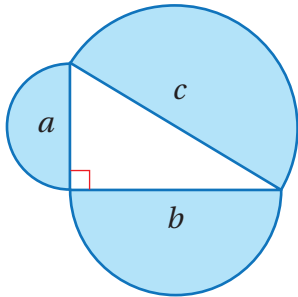


أتذكر

$$A = \pi r^2 \text{ مساحة الدائرة}$$

تبرير: أفرن بين مساحة نصف الدائرة الكبيرة ومساحة نصفَي الدائرتين الصغيرتين، مبرراً إجابتي.

21

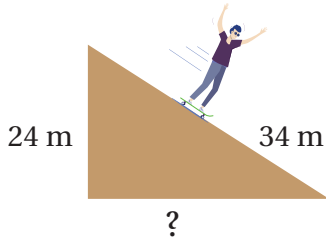


أكتب كيف أجد طول ضلع مجهولاً في مثلث قائم الزاوية باستخدام نظرية فيثاغورس؟

22

أستكشف

بيّن الشكل المجاور منظرًا جانبيًا لمنحدرٍ تزلج في مدينةٍ للألعاب:



1 أجد طول قاعدة المنحدر.

2 هل العدد الذي يمثل طول قاعدة المنحدر عدد نسبي؟ أبرر إجابتي.



فكرة الدرس

أميّز الأعداد النسبية والأعداد غير النسبية.

المصطلحات

العدد غير النسبي، العدد الحقيقي

تعلمت سابقًا أن العدد النسبي عدد يمكن كتابته على صورة $\frac{a}{b}$ حيث a و b عددين صحيحان، $b \neq 0$ ، وأن الأعداد النسبية جميعها عند كتابتها بالصورة العشرية تكون إما منتهية أو دورية، ومن أمثلتها الجذور التربيعية للمربعات الكاملة. ولكن الجذور الصماء مثل $\sqrt{3}$ لا يمكن تصنيفها أعدادًا نسبية؛ لأنه لا يمكن كتابتها على صورة كسرٍ عشريٍّ مُنتهِ أو دوريٍّ. وعند استعمال الآلة الحاسبة لإيجاد قيمة $\sqrt{3}$ تعطي الآلة الحاسبة القيمة الآتية:

$$\sqrt{3} = 1.73205080 \dots \dots$$

وهذا يعني أنه متكررٌ وغير مُنتهِ، ويُسمى هذا النوع من الأعداد **الأعداد غير النسبية** (irrational numbers).

الأعداد غير النسبية

مفهوم أساسي

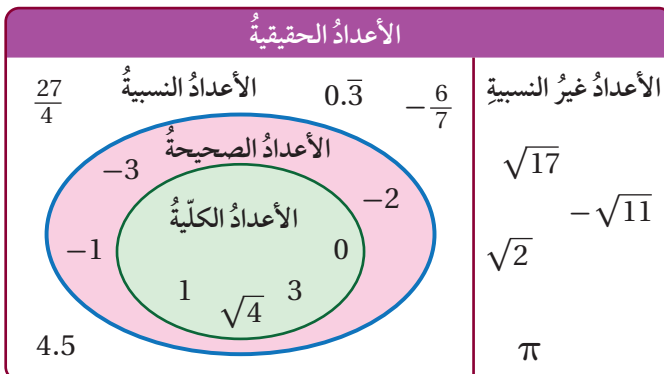
العدد غير النسبي عدد لا يمكن كتابته على صورة $\frac{a}{b}$ حيث a و b عددين صحيحان، $b \neq 0$

• بالكلمات:

$$\sqrt{5} = 2.236067978 \dots \dots$$

• من الأمثلة عليه:

$$\pi = 3.141592654 \dots \dots$$



تُشكّل الأعداد النسبية والأعداد غير النسبية معًا **الأعداد الحقيقية** (real numbers)، ويوضح شكل (فن) المجاور العلاقة بينها.

الوحدة 1

مثال 1

أصنّف الأعداد الحقيقية الآتية أعدادًا نسبيةً أو أعدادًا غير نسبية:

1 $\frac{7}{21}$

بما أن 7 و 21 عددان صحيحان، إذن $\frac{7}{21}$ عدد نسبي.

2 $\sqrt{81}$

بما أن $\sqrt{81} = 9$ ، و 9 عدد كلي، إذن $\sqrt{81}$ عدد نسبي.

3 $-\frac{27}{9}$

بما أن $-\frac{27}{9} = -3$ ، و -3 عدد صحيح، إذن $-\frac{27}{9}$ عدد نسبي.

4 0.5555... ..

بما أن 0.5555... .. كسر عشري دوري وغير منته، إذن هو عدد نسبي.

5 $\sqrt{19}$

بما أن $\sqrt{19} = 4.35889894...$ ، وهو كسر عشري غير دوري وغير منته، إذن هو عدد غير نسبي.

أتحقق من فهمي:



6 $\sqrt{12}$

7 $-\sqrt{64}$

8 0.181818

9 $-3\frac{2}{5}$

تعلمت سابقًا تمثيل الأعداد النسبية على خط الأعداد، ويمكنني أيضًا تمثيل الأعداد غير النسبية على خط الأعداد باستعمال المثلث القائم الزاوية.

مثال 2

أمثل $\sqrt{53}$ على خط الأعداد.

الخطوة 1

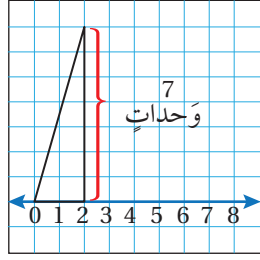
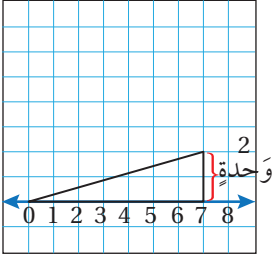
أبحث عن عددين مجموع مربعيهما 53:

$$53 = 49 + 4$$

$$53 = 7^2 + 2^2$$

إذن، طول أحد ساقي المثلث 7 وحدات وطول الآخر 2 وحدة.

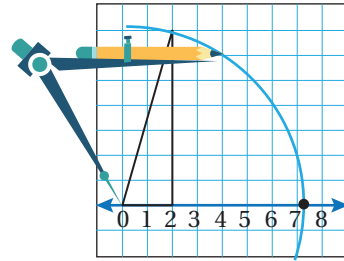
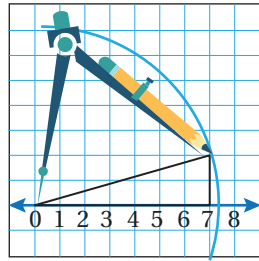
الخطوة 2 أرسم مثلثاً قائم الزاوية:



- أرسم خطاً أعدادٍ على ورقةٍ مربعةٍ.
- أرسم مثلثاً قائم الزاوية طولاً ضلعي القائمة فيه 7 وحداتٍ و 2 وحدةٍ. يمكنُ رسمُ المثلث بطريقتينِ مثلما يظهرُ في الشكلِ المجاورِ.

الخطوة 3 أعيّن $\sqrt{53}$ على خطّ الأعداد:

- أفتحُ الفرجارَ فتحةً مقدارها طولُ وترِ المثلثِ.
- أضعُ رأسَ الفرجارِ على 0، وأرسمُ قوساً يقطعُ خطّ الأعدادِ في النقطةِ B.



أتحققُ من صحة التمثيل:

من التمثيلِ ألاحظُ أنّ $\sqrt{53} \approx 7.3$ ، وهو يتوافقُ مع قيمة $\sqrt{53}$ على الآلة الحاسبة وهي:

$$\sqrt{53} = 7.280109889$$

أتحققُ من فهمي:

أمثلُ كلَّ عددٍ غيرِ نسبيٍّ ممّا يأتي على خطّ الأعداد:

1 $\sqrt{5}$

2 $\sqrt{20}$

3 $\sqrt{45}$

يمكنني المقارنة بين عددين حقيقيين بتحويلهما إلى الصيغة العشرية أولاً؛ لتسهيل المقارنة بينهما. ويمكنني استعمال الآلة الحاسبة في ذلك.

الوحدة 1

مثال 3

أضع إشارة $>$ أو $<$ أو $=$ في $\square$ لأكون عبارة صحيحة في كل مما يأتي:

1 $4\sqrt{3} \square \frac{13}{2}$

الخطوة 2 أفرق بين العددين:

بما أن $6.928203... > 6.5$

إذن $4\sqrt{3} > \frac{13}{2}$

الخطوة 1 أحوّل العددين إلى الصيغة العشرية:

أستعمل الآلة الحاسبة $4\sqrt{3} \approx 6.928203... > 6.5$

أستعمل الآلة الحاسبة $\frac{13}{2} = 6.5$

2 $-\frac{1}{2} \square -\sqrt{2}$

الخطوة 2 أفرق بين العددين:

بما أن $-0.5 > -1.4142...$

إذن $-\frac{1}{2} > -\sqrt{2}$

الخطوة 1 أحوّل العددين إلى الصيغة العشرية:

أستعمل الآلة الحاسبة $-\frac{1}{2} = -0.5$

أستعمل الآلة الحاسبة $-\sqrt{2} \approx -1.4142...$

3 $\frac{5}{2} \square \sqrt{6.25}$

الخطوة 2 أفرق بين العددين:

بما أن $2.5 = 2.5$

إذن $\frac{5}{2} = \sqrt{6.25}$

الخطوة 1 أحوّل العددين إلى الصيغة العشرية:

أستعمل الآلة الحاسبة $\frac{5}{2} = 2.5$

أستعمل الآلة الحاسبة $\sqrt{6.25} = 2.5$

أتحقق من فهمي:



4 $\sqrt{0.5} \square 0.9$

5 $-\sqrt{16} \square -\sqrt{18}$

6 $4.5 \square \sqrt{20.25}$

يمكن ترتيب مجموعة من الأعداد الحقيقية تصاعدياً (من الأصغر إلى الأكبر) أو تنازلياً (من الأكبر إلى الأصغر)، وذلك بتحويل كل منها إلى الصيغة العشرية أولاً؛ لتسهيل المقارنة بينها وترتيبها.

مثال 4

أرتب الأعداد في كل مما يأتي تصاعدياً:

1 $\frac{11}{3}, -\sqrt{3}, \sqrt{10}, -1.\bar{7}$

الخطوة 1 أحول الأعداد إلى الصيغة العشرية:

أحول الأعداد إلى الصيغة العشرية باستعمال الآلة الحاسبة:

$$\begin{aligned}\frac{11}{3} &= 3.666666... \\ -\sqrt{3} &= -1.73205... \\ \sqrt{10} &= 3.1622... \\ -1.\bar{7} &= -1.77777... \end{aligned}$$

أنتعلم

يسهل تحويل الأعداد إلى الصيغة العشرية المقارنة بين الأعداد القريبة من بعضها، مثل $-\sqrt{3}$ و $-1.\bar{7}$

الخطوة 2 أفرن بين الأعداد، ثم أرتبها تصاعدياً:

الترتيب التصاعدي للأعداد هو:

$$-1.\bar{7}, -\sqrt{3}, \sqrt{10}, \frac{11}{3}$$

أتحقق من فهمي:



2 $\frac{5}{3}, \sqrt{3}, -\sqrt{6}, -1.4$

يوجد كثير من التطبيقات الحياتية والعلمية للأعداد الحقيقية.

مثال 5: من الحياة

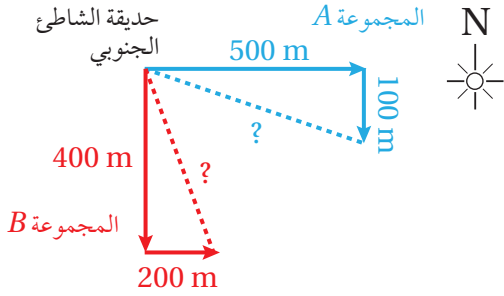


كشافة: زارت مجموعتان من طلبة الكشافة A و B حديقة الشاطئ الجنوبي في العقبة. بدأت المجموعتان السير في اللحظة نفسها، فسارت المجموعة A باتجاه الشرق 500 m ثم 100 m باتجاه الجنوب. وسارت المجموعة B مسافة 400 m باتجاه الجنوب ثم 200 m باتجاه الشرق. أي المجموعتين هي الأقرب إلى حديقة الشاطئ الجنوبي؟

الوحدة 1

الخطوة 1 أرسم شكلاً تقريبياً يمثل المسألة، وأحدد المطلوب:

- أعتدّ الاتجاهات والمسافات الموجودة في المسألة لرسم شكلٍ تقريبيٍّ يمثل المعطيات.
- ألاحظ أنّ الاتجاهات والمسافات لكلِّ مجموعة تصنعان مثلثين قائمي الزاوية.
- لإيجاد أيِّ المجموعتين هي الأقرب إلى الشاطئ الجنوبي، أجد طول وتر كلِّ مثلث، ثمَّ أقرن بين الطولين.



الخطوة 2 أستعمل نظرية فيثاغورس:

- أستعمل نظرية فيثاغورس لأجد بُعد المجموعة A عن حديقة الشاطئ الجنوبي:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

نظرية فيثاغورس

$$c^2 = 500^2 + 100^2$$

أعوّض $a = 500, b = 100$

$$c^2 = 250000 + 10000$$

أجد القوى

$$c^2 = 260000$$

أجمع

$$c = \pm \sqrt{260000}$$

تعريف الجذر التربيعي

$$a \approx \pm 509.9$$

أستعمل الآلة الحاسبة

إذن، بُعد المجموعة A عن حديقة الشاطئ الجنوبي 509.9 m تقريباً.

- أستعمل نظرية فيثاغورس لأجد بُعد المجموعة B عن حديقة الشاطئ الجنوبي:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

نظرية فيثاغورس

$$c^2 = 400^2 + 200^2$$

أعوّض $a = 400, b = 200$

$$c^2 = 160000 + 40000$$

أجد القوى

$$c^2 = 200000$$

أجمع

$$c = \pm \sqrt{200000}$$

تعريف الجذر التربيعي

$$a \approx \pm 447.2$$

أستعمل الآلة الحاسبة

إذن، بُعد المجموعة B عن حديقة الشاطئ الجنوبي 447.2 m تقريباً.

الخطوة 3 أقرن بين المسافتين:

ألاحظ أنّ المجموعة B هي الأقرب إلى الشاطئ الجنوبي من المجموعة A.

أتحقق من فهمي:



جسم الإنسان: تمثل المعادلة $S = \sqrt{\frac{h \times m}{3600}}$ مساحة سطح الإنسان S بالأمتار المربعة حيث h الطول بالسنتيمترات و m الكتلة بالكيلوغرامات. أجد مساحة سطح جسم شاب طوله 180 cm وكتلته 75 kg. أقرب الإجابة لأقرب جزء من عشرة.

أدرب وأحل المسائل

أميز العدد النسبي من غير النسبي في ما يأتي:

- 1 $-\frac{2}{3}$ 2 $\sqrt{20}$ 3 $5.\bar{2}$ 4 $\frac{18}{6}$

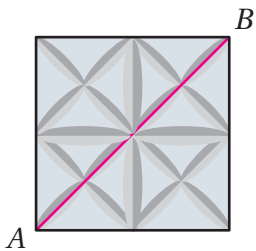
أمثل كل عدد غير نسبي مما يأتي على خط الأعداد:

- 5 $\sqrt{10}$ 6 $\sqrt{97}$ 7 $\sqrt{104}$

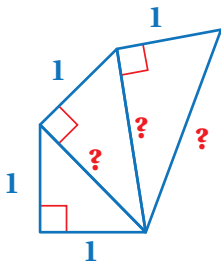
أضع إشارة $>$ أو $<$ أو $=$ في $\square$ لأكون عبارة صحيحة في كل مما يأتي:

- 8 $\sqrt{15} \square 3.9$ 9 $-3.1 \square -\sqrt{9.61}$ 10 $\sqrt{36} \square \frac{20}{3}$

11 أرتب مجموعة الأعداد $\sqrt{30}$, 4, $\frac{21}{4}$, $5.\bar{6}$ تنازلياً.



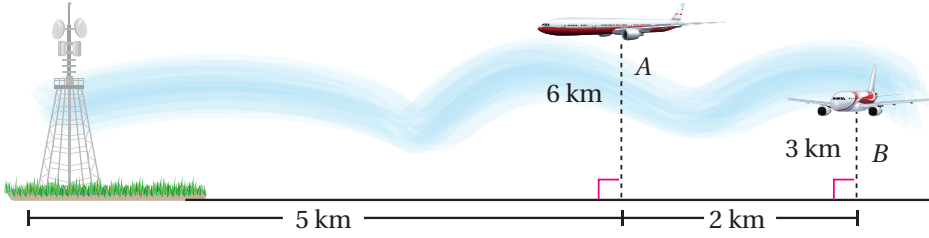
12 بلاط: يبين الشكل المجاور بلاطة من السيراميك مربعة الشكل طول ضلعها 15 cm، أجد طول قطر البلاطة، ثم أحدد أن العدد نسبي أم غير نسبي.



13 أجد أطوال الأضلاع المجهولة في الشكل المجاور.

الوحدة 1

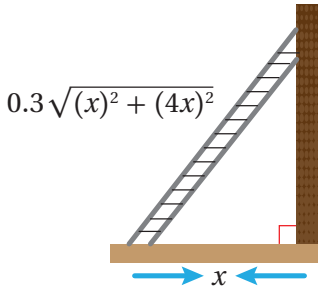
أي الطائرتين في الشكل الآتي أقرب إلى قاعدة البرج؟



إرشاد

استعمل نظرية فيثاغورس في الحل.

14



إجراءات السلامة: لأضع السلم المستند إلى

حائط في وضع آمن، يجب أن يكون طوله $0.3\sqrt{(x)^2 + (4x)^2}$ حيث x بُعد قاعدة السلم عن الحائط بالمتر. إذا كانت قاعدة السلم تبعد عن الحائط 1.5 m، فهل طول السلم عدد نسبي أم غير نسبي؟ أقرب طول السلم لأقرب جزء من عشرة.

15

مهارات التفكير العليا

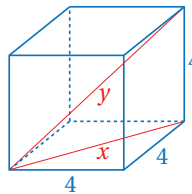
تبرير: أبين أن كل عبارة مما يأتي صحيحة دائماً أم صحيحة أحياناً أم غير صحيحة أبداً، مدعماً إجابتي بأمثلة مناسبة:

الجزور التربيعية للأعداد الموجبة أعداد غير نسبية.

16

العدد الحقيقي عدد نسبي. الأعداد العشرية غير المنتهية أعداد غير نسبية.

17



نحدد: أجد طولي الضلعين المجهولين في الشكل المجاور بأبسط صورة.

19

إرشاد

استعمل الحقيقة (تلتقي أحرف المكعب في زوايا قائمة).

أكتشف الخطأ: نقول سماح: إن $\sqrt{5}$ عدد نسبي؛ لأنه يمكن كتابته على الصورة $\frac{\sqrt{5}}{1}$. هل ما نقوله سماح صحيح؟ أبرر إجابتي.

20

مسألة مفتوحة: أعطي مثلاً على عددين نسبيين يقع بينهما عدداً غير نسبيين.

21

أكتب: كيف أميز الأعداد النسبية من غير النسبية؟

22



أستكشف

تمثل المعادلة $h = 0.4 \times (x)^{\frac{1}{3}}$ العلاقة بين ارتفاع الزرافة (h) بالأمتار وكتلتها x بالكيلوغرامات.

أجد ارتفاع زرافة كتلتها 343 kg

فكرة الدرس

أربط بين الأسس النسبية والجذور، وأحوّل بينهما.

المصطلحات

الأس النسبي، الجذر النوني، دليل الجذر، المجذور.

تعلمت سابقاً الأسس الصحيحة وقوانينها، وسأتعلم في هذا الدرس نوعاً آخر من الأسس تُكتب على صورة كسور تُسمى **الأسس النسبية** (rational exponent).

معلوم أن تربيع عدد موجب وإيجاد جذر مربعه التربيعة عمليتان عكسيتان، فمثلاً:

$$3^2 = 9 \longleftrightarrow \sqrt{9} = 3$$

ومنهُ، فإن العملية العكسية لرفع عدد للأس n هي إيجاد **جذره النوني** (n th root)، ويمكن التعبير عن أي جذر نوني باستعمال الأسس النسبية، فمثلاً يمكننا كتابة $\sqrt{9}$ بطريقة أخرى باستعمال الأسس النسبية هي: $9^{\frac{1}{2}}$ حيث:

$$9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3$$

أتعلم

إذا لم يكن هناك دليل للجذر فهذا يعني أن دليل الجذر 2، وهو يدل على الجذر التربيعي.

وبشكل عام، فإن $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ لأي عدد صحيح n أكبر من 1، حيث يُسمى العدد n الموجود على انحناء الجذر **دليل الجذر** (index) وهو يدل على درجة الجذر.

$$\begin{array}{c} \text{رمز الجذر} \longleftarrow \sqrt[n]{a} \longrightarrow \text{دليل الجذر} \\ \uparrow \\ \text{المجذور} \end{array}$$

الأسُس النسبية: $a^{\frac{1}{n}}$

مفهوم أساسي

لأي عدد حقيقي a ، وأي عدد صحيح n ($n > 1$)، فإن $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ ، إلا إذا كان $a < 0$ و n عدداً زوجياً فإن الجذر النوني غير معرف.

• **بالكلمات:**

$$36^{\frac{1}{2}} = \sqrt{36} = 6, \quad 125^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{125} = 5$$

• **أمثلة:**

الوحدة 1

مثال 1

أكتب الصورة الأسية في صورة جذرية والصورة الجذرية في صورة أسية في كل مما يأتي:

1 $y^{\frac{1}{4}}$

$$y^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{y} \quad \text{تعريف } a^{\frac{1}{n}}$$

2 $\sqrt[6]{w}$

$$\sqrt[6]{w} = w^{\frac{1}{6}} \quad \text{تعريف } a^{\frac{1}{n}}$$

3 $8^{\frac{1}{5}}$

$$8^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{8} \quad \text{تعريف } a^{\frac{1}{n}}$$

4 $\sqrt[7]{-20}$

$$\sqrt[7]{-20} = (-20)^{\frac{1}{7}} \quad \text{تعريف } a^{\frac{1}{n}}$$

أتحقق من فهمي:



5 $c^{\frac{1}{8}}$

6 $\sqrt[9]{x}$

7 $25^{\frac{1}{10}}$

8 $\sqrt[3]{-12}$

بشكل عام، إذا كان $a^{\frac{1}{n}} = b$ ، فإن ذلك يعني أن العامل b ضرب في نفسه n من المرات فكان الناتج a ، ويمكن استعمال هذا المفهوم لإيجاد قيم عبارات عددية من دون استعمال الآلة الحاسبة.

مثال 2

أجد قيمة كل مما يأتي من دون استعمال الآلة الحاسبة:

1 $196^{\frac{1}{2}}$

$$\begin{aligned} 196^{\frac{1}{2}} &= \sqrt{196} \\ &= \sqrt{14 \times 14} \\ &= 14 \end{aligned}$$

تعريف $a^{\frac{1}{n}}$

أعيد كتابة 196 كحاصل ضرب عامل في نفسه
أجد الجذر التربيعي للعدد

2 $(-64)^{\frac{1}{3}}$

$$\begin{aligned} (-64)^{\frac{1}{3}} &= \sqrt[3]{-64} \\ &= \sqrt[3]{-4 \times -4 \times -4} \\ &= -4 \end{aligned}$$

تعريف $a^{\frac{1}{n}}$

أعيد كتابة -64 كحاصل ضرب عامل في نفسه 3 مرات
أجد الجذر الثالث للعدد

3 $729^{\frac{1}{6}}$

$$729^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{729}$$

$$= \sqrt[6]{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3}$$

$$= 3$$

تعريف $a^{\frac{1}{n}}$

أعيد كتابة 729 كحاصل ضرب عامل في نفسه 6 مرات
أجد الجذر السادس للعدد

أتحقق من فهمي:



4 $225^{\frac{1}{2}}$

5 $-243^{\frac{1}{5}}$

6 $128^{\frac{1}{7}}$

يمكن تعميم العلاقة بين الأسس النسبية والجذور كما يأتي:

الأسس النسبية: $a^{\frac{m}{n}}$

مفهوم أساسي



لأي عدد حقيقي a لا يساوي صفراً، وأي عددين صحيحين n, m و $(n > 1)$ فإن
 $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$. إذا كان $a < 0$ و n عدداً زوجياً، فإن الجذر النوني يكون قيمة
 غير معرفة.

• بالكلمات:

$$8^{\frac{2}{3}} = (\sqrt[3]{8})^2 = (2)^2 = 4$$

• مثال:

مثال 3

أكتب الصورة الأسية في صورة جذرية والصورة الجذرية في صورة أسية في كل مما يأتي:

1 $x^{\frac{3}{4}}$

$$x^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{x^3}$$

تعريف $a^{\frac{m}{n}}$

2 $\sqrt[5]{b^2}$

$$\sqrt[5]{b^2} = b^{\frac{2}{5}}$$

تعريف $a^{\frac{m}{n}}$

3 $30^{\frac{5}{6}}$

$$30^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{30^5}$$

تعريف $a^{\frac{m}{n}}$

4 $\sqrt[7]{(-50)^2}$

$$\sqrt[7]{(-50)^2} = (-50)^{\frac{2}{7}}$$

تعريف $a^{\frac{m}{n}}$

أتحقق من فهمي:



5 $d^{\frac{5}{2}}$

6 $\sqrt[4]{b^7}$

7 $18^{\frac{9}{5}}$

8 $\sqrt[3]{(-16)^8}$

الوحدة 1

يمكن استعمال تعريف الأسس النسبية في إيجاد قيم عبارات عددية أسية من دون استعمال الآلة الحاسبة.

مثال 4

أجد قيمة كل مما يأتي من دون استعمال الآلة الحاسبة:

1 $(-8)^{\frac{4}{3}}$

$$\begin{aligned} (-8)^{\frac{4}{3}} &= (\sqrt[3]{-8})^4 \\ &= (-2)^4 \\ &= 16 \end{aligned}$$

تعريف $a^{\frac{m}{n}}$

$$\sqrt[n]{(-8)} = \sqrt[n]{(-2 \times -2 \times -2)} = -2$$

أبسط

أتعلم

إذا كان n عددًا فرديًا فإن:

$$\sqrt[n]{x^n} = x$$

إذا كان n عددًا زوجيًا فإن:

$$\sqrt[n]{x^n} = |x|$$

2 $(\frac{4}{9})^{\frac{5}{2}}$

$$\begin{aligned} (\frac{4}{9})^{\frac{5}{2}} &= (\sqrt{\frac{4}{9}})^5 \\ &= (\frac{2}{3})^5 \\ &= \frac{32}{243} \end{aligned}$$

تعريف $a^{\frac{m}{n}}$

$$\sqrt{\frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{2 \times 2}{3 \times 3}} = \frac{2}{3}$$

أبسط

أتحقق من فهمي:



3 $(32)^{\frac{3}{5}}$

4 $(-\frac{27}{64})^{\frac{2}{3}}$

لأسس النسبية تطبيقات كثيرة في الحياة العملية.

مثال 5: من الحياة



أحياء: وجد علماء الأحياء أن ارتفاع كتف ذكر الفيل الآسيوي h بالسنتيمترات يُعطى بالعلاقة $h = 62.5 \sqrt[3]{t} + 75.8$ ، حيث t عُمر الفيل بالسنوات. أجد ارتفاع كتف فيل عُمره 27 سنة بالأمتار.

بما أن العلاقة تعطي ارتفاع كتف الفيل بالسنتيمترات، إذن، أجد أولاً ارتفاع الكتف بالسنتيمترات، ثم أحوله إلى الأمتار.

الخطوة 1 أجد ارتفاع كتف الفيل بالسنتيمترات:

$$h = 62.5\sqrt[3]{t} + 75.8$$

العلاقة الأصلية

$$= 62.5\sqrt[3]{27} + 75.8$$

أعوض $t = 27$

$$= 62.5(3) + 75.8$$

$$\sqrt[3]{27} = 3$$

$$= 263.3$$

أبسط

إذن، ارتفاع كتف الفيل 263.3 cm

الخطوة 2 أجد ارتفاع كتف الفيل بالأمتار:

بما أن كل 1 m يساوي 100 cm، إذن، ارتفاع كتف الفيل بالأمتار 2.633 m

أتحقق من فهمي:



تكنولوجيا: تصنع شركة شرائح ذاكرة صغيرة لأجهزة تخزين البيانات المتنقلة (USB)، إذا استُعملت الصيغة $c = 84(n)^{\frac{2}{3}} + 910$ لحساب التكلفة c بالدينار لإنتاج n شريحة، فأجد تكلفة إنتاج 125 شريحة ذاكرة.

أكتب الصورة الأسية في صورة جذرية والصورة الجذرية في صورة أسية في كل مما يأتي:

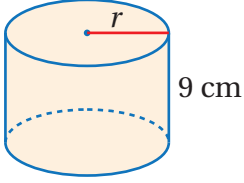
- | | | | |
|---------------------|-------------------|----------------------|-----------------------|
| 1 $p^{\frac{1}{6}}$ | 2 $\sqrt[8]{u}$ | 3 $9^{\frac{1}{4}}$ | 4 $\sqrt[5]{-8}$ |
| 5 $w^{\frac{8}{3}}$ | 6 $\sqrt[6]{v^5}$ | 7 $16^{\frac{3}{4}}$ | 8 $\sqrt[5]{(-35)^9}$ |

أجد قيمة كل مما يأتي من دون استعمال الآلة الحاسبة:

- | | | | |
|-------------------------|------------------------------------|----------------------------------|------------------------------------|
| 9 $32^{\frac{1}{5}}$ | 10 $256^{\frac{1}{4}}$ | 11 $(-125)^{\frac{1}{3}}$ | 12 $81^{\frac{1}{4}}$ |
| 13 $(16)^{\frac{3}{4}}$ | 14 $(-\frac{1}{32})^{\frac{2}{5}}$ | 15 $(\frac{9}{4})^{\frac{5}{2}}$ | 16 $(-\frac{27}{8})^{\frac{5}{3}}$ |

أدرب وأحل المسائل

الوحدة 1



هندسة: أجد طول نصف قطر قاعدة الأسطوانة المجاورة
إذا كان حجمها يساوي 1332 cm^3

أتذكر

يُستعمل القانون

$$V = \pi r^2 h$$

حجم الأسطوانة، حيث h
ارتفاع الأسطوانة، و r طول
نصف قطرها.



تصنع المسامير القياسية التي يتوافق طولها مع نصف
قطرها لتتحمل الطرق وفق المعادلة $l = 54d^{\frac{3}{2}}$ التي تربط
بين طول مسمار قياسي l بالإنشات وطول نصف قطره d
بالإنشات أيضًا. أجد طول مسمار قياسي طول نصف قطره 0.4 in



يمكن تقدير معدل الطاقة التي تستهلكها المخلوقات
الحيّة اعتمادًا على كتلة الجسم باستعمال المعادلة
 $R = 73.3 \sqrt[4]{M^3}$ التي تمثل العلاقة بين معدل الطاقة
المستهلكة يوميًا R بوحدة السرعات الحرارية وكتلة الجسم
 M بالكيلوغرامات. أجد معدل الطاقة التي يستهلكها يوميًا خروف كتلته 30 kg

أعود إلى فقرة (أستكشف) بداية الدرس، وأحل المسألة.

مهارات التفكير العليا

أكتشف الخطأ: أبين الخطأ في الحل المجاور، وأصححه.

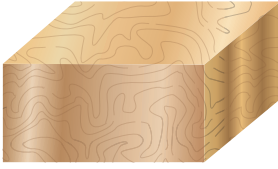
$$\begin{aligned} 27^{2/3} &= (27^{1/3})^2 \\ &= 9^2 \\ &= 81 \end{aligned}$$

تبرير: أجد قيمة $\sqrt{4^3} - \sqrt{4}$ بأبسط صورة، مبررًا إجابتي.

مسألة مفتوحة: أجد عبارتين مختلفتين على صورة $x^{\frac{1}{n}}$ بحيث تكون أبسط صورة
لهما $2x^3$

أكتب كيف أحوّل بين الأسس النسبية والجدور؟

أستكشف



يُبين الشكل المجاور صندوقًا خشبيًا مصممًا على شكل متوازي مستطيلات طوله $x^{\frac{1}{2}}$ وعرضه $x^{\frac{1}{3}}$ وارتفاعه $x^{\frac{1}{4}}$ ، كيف أجد حجم الصندوق بدلالة المتغير x ؟

فكرة الدرس

استعمال ضرب الأسس النسبية وقسمتها في إيجاد قيم مقادير تحتوي أسسًا نسبية وتبسيطها.

تعلمت سابقًا مجموعة من قوانين الأسس الصحيحة:

قوانين الأسس الصحيحة

مراجعة المفهوم

إذا كانت a و b و n و m أعدادًا صحيحة، فإن:

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

ضرب القوى

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \quad a \neq 0$$

قسمة القوى

$$(a^m)^n = a^{m \times n}$$

قوة القوة

$$(ab)^n = a^n b^n$$

قوة ناتج الضرب

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, \quad b \neq 0$$

قوة ناتج القسمة

$$a^0 = 1, \quad a \neq 0$$

الأسس الصفري

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \quad a \neq 0$$

الأسس السالبة

يظهر في بعض الأحيان قانون ناتج القسمة على الصورة $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}$ الذي يمكن كتابته باستعمال قوة موجبة على الصورة $\left(\frac{b}{a}\right)^n$. وبصورة عامة، لأي عددين a و b حيث $a, b \neq 0$ و n عدد صحيح فإن:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

تنطبق جميع قوانين الأسس أعلاه على الأسس النسبية، ويمكن استعمالها لإيجاد قيمة مقدار عددي يحوي أسسًا نسبية.

أجد قيمة كل مما يأتي في أبسط صورة:

أفكر

هل يمكن حل
المسألة 2 بطريقة
أخرى؟

1 $64^{\frac{1}{5}} \times 2^{\frac{4}{5}}$

$$\begin{aligned} 64^{\frac{1}{5}} \times 2^{\frac{4}{5}} &= (2^6)^{\frac{1}{5}} \times 2^{\frac{4}{5}} \\ &= (2)^{\frac{6}{5}} \times 2^{\frac{4}{5}} \\ &= (2)^{\frac{6}{5} + \frac{4}{5}} \\ &= (2)^{\frac{10}{5}} \\ &= 2^2 = 4 \end{aligned}$$

$$64 = 2^6$$

قاعدة قوة القوة

قاعدة ضرب القوى

أجمع

أبسط

2 $\sqrt[3]{125 \times 5^6}$

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{125 \times 5^6} &= (125 \times 5^6)^{\frac{1}{3}} \\ &= (5^3 \times 5^6)^{\frac{1}{3}} \\ &= (5^9)^{\frac{1}{3}} \\ &= 5^3 \\ &= 125 \end{aligned}$$

تعريف الأس النسبية

$$125 = 5^3$$

قاعدة ضرب القوى

قاعدة قوة القوة

أبسط

3 $\frac{\sqrt[8]{81}}{\sqrt[4]{3}}$

$$\begin{aligned} &= \frac{81^{\frac{1}{8}}}{3^{\frac{1}{4}}} \\ &= \frac{(3^4)^{\frac{1}{8}}}{3^{\frac{1}{4}}} \\ &= \frac{(3)^{\frac{4}{8}}}{3^{\frac{1}{4}}} \\ &= \frac{(3)^{\frac{1}{2}}}{3^{\frac{1}{4}}} = (3)^{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}} \\ &= (3)^{\frac{1}{4}} \\ &= \sqrt[4]{3} \end{aligned}$$

تعريف الأس النسبية

$$81 = 3^4$$

قاعدة قوة القوة

قاعدة قسمة القوى

أبسط

الصورة الجذرية

أفكر

يلزم توحيد
المقامات قبل طرح
الأسس النسبية.

4 $\left(\frac{8}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}$

$$\left(\frac{8}{27}\right)^{-\frac{2}{3}} = \left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$= \frac{27^{\frac{2}{3}}}{8^{\frac{2}{3}}}$$

$$= \frac{((3)^3)^{\frac{2}{3}}}{((2)^3)^{\frac{2}{3}}}$$

$$= \frac{3^2}{2^2}$$

$$= \frac{9}{4}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n \text{ قاعدة }^n$$

قاعدة قوة ناتج القسمة

$$27 = 3^3, 8 = 2^3$$

قاعدة قوة القوة

أبسط

التذكّر

يمكن استعمال تعريف الأسس النسبية لحل المسألة 4 حيث:

$$27^{\frac{2}{3}} = (\sqrt[3]{27})^2 = 3^2 = 9$$

$$8^{\frac{2}{3}} = (\sqrt[3]{8})^2 = 2^2 = 4$$

✓ **أتحقّق من فهمي:**

5 $32^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{4}{3}}$

6 $\sqrt[4]{81 \times 2^4}$

7 $\frac{\sqrt[5]{243}}{\sqrt[3]{9}}$

8 $\left(\frac{16}{81}\right)^{-\frac{5}{4}}$

تكون العبارة الأسية في أبسط صورة إذا كانت الأسس النسبية موجبة وبأبسط صورة في كل من البسط والمقام، ولا يظهر الأساس الواحد أكثر من مرّة، وللحصول على ذلك استعمل قوانين الأسس عند تبسيط المقادير الأسية النسبية.

العبارات الأسية في أبسط صورة

مفهوم أساسي

تكون العبارات الأسية في أبسط صورة إذا:

- ظهر الأساس مرّة واحدة وكانت الأسس جميعها موجبة.
- لم تتضمن العبارة قوة القوى.
- كانت الكسور والجذور جميعها في أبسط صورة.

أبسط كلاً من العبارات الآتية مفترضاً أنَّ أيّاً من المتغيرات لا يساوي صفراً:

1 $y^{-\frac{2}{3}} \times y^{\frac{5}{3}}$

$$\begin{aligned} y^{-\frac{2}{3}} \times y^{\frac{5}{3}} &= y^{-\frac{2}{3} + \frac{5}{3}} \\ &= y^{\frac{3}{3}} \\ &= y \end{aligned}$$

قاعدة ضرب القوى

أجمع الأسس

أبسط

2 $\frac{(w)^{-\frac{7}{2}}}{w^{-3}}$

$$\begin{aligned} \frac{(w)^{-\frac{7}{2}}}{w^{-3}} &= (w)^{-\frac{7}{2}} \times w^3 \\ &= (w)^{-\frac{7}{2} + 3} \\ &= (w)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{w^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

قاعدة الأسس السالبة

قاعدة ضرب القوى

أبسط

قاعدة الأسس السالبة

3 $(b^{\frac{3}{7}})^7$

$$\begin{aligned} (b^{\frac{3}{7}})^7 &= b^{\frac{3}{7} \times 7} \\ &= b^3 \end{aligned}$$

قاعدة قوة القوة

أبسط

أتحقق من فهمي:



4 $x^{\frac{4}{5}} \times x^{-\frac{9}{5}}$

5 $\frac{(u)^{-\frac{7}{2}}}{u^{-4}}$

6 $(d^{-\frac{2}{3}})^6$

يعني تبسيط العبارات الجذرية جعل دليل الجذر أقل ما يمكن، وذلك باستعمال قوانين الأسس النسبية أولاً لتسهيل عملية التبسيط، ثم إعادة كتابة الناتج في الصورة الجذرية إن أمكن. عند تبسيط عبارات جذرية في مسألة تحوي جذراً زوجياً لمتغير مرفوع لأس زوجي: إذا كان الناتج أساً فردياً، فيتعين أخذ القيمة المطلقة للناتج؛ لضمان أن الإجابة ليست عدداً سالباً.

أكتب كلاً ممّا يأتي بأبسط صورةٍ مفترضاً أنّ أيّاً من المتغيرات لا يساوي صفراً:

1 $\sqrt[6]{8y^3}$

$$\begin{aligned}\sqrt[6]{8y^3} &= (8y^3)^{\frac{1}{6}} \\ &= ((2y)^3)^{\frac{1}{6}} \\ &= (2y)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{2y}\end{aligned}$$

تعريف الأسس النسبية

قاعدة قوة ناتج الضرب

قاعدة قوة القوة

الصيغة الجذرية

أنت تعلم

يمكن تطبيق قوانين الأسس أيضاً من دون تحويل المقدار الجذري إلى أس.

2 $\sqrt[5]{32p^{20}}$

$$\begin{aligned}\sqrt[5]{32p^{20}} &= (32p^{20})^{\frac{1}{5}} \\ &= (32)^{\frac{1}{5}} \times (p^{20})^{\frac{1}{5}} \\ &= (2^5)^{\frac{1}{5}} \times (p^{20})^{\frac{1}{5}} \\ &= 2p^4\end{aligned}$$

تعريف الأسس النسبية

قاعدة قوة ناتج الضرب

$$32 = 2^5$$

قاعدة قوة القوة

3 $\sqrt[4]{\frac{x^2}{y^8}}$

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{\frac{x^2}{y^8}} &= \frac{\sqrt[4]{x^2}}{\sqrt[4]{y^8}} \\ &= \frac{\sqrt[4]{x^4}}{\sqrt[4]{(y^2)^4}} \\ &= \frac{|x|}{y^2}\end{aligned}$$

قاعدة ناتج القسمة

قاعدة قوة القوة

أبسط

إرشاد

ألاحظ أنّ الجذر في المسألة 3 زوجي؛ لذا تعيّن أخذ القيمة المطلقة للناتج في البسط؛ لأنّ أسّه فرديّ، أمّا أسّ المقام زوجي؛ لذا ظهر من دون قيمة مطلقة.

4 $\sqrt{\frac{x}{y^4}}$

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{x}{y^4}} &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y^4}} \\ &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{(y^2)^2 \times y}} \\ &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{(y^2)^2} \times \sqrt{y}} \\ &= \frac{\sqrt{x}}{y^2 \times \sqrt{y}} \\ &= \frac{\sqrt{x}}{y^2 \times \sqrt{y}} \times \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{y}} \\ &= \frac{\sqrt{x} \times \sqrt{y}}{y^3}\end{aligned}$$

قاعدة ناتج القسمة

قاعدة قوة القوة

قاعدة ناتج الضرب

أبسط

أنطق المقام

$$\sqrt{y} \times \sqrt{y} = y$$

أنت تكرر

تكون العبارة الجذرية التربيعية في أبسط صورة حين لا يظهر جذر في مقام الكسر؛ لذا أنطق المقام.

أتحقق من فهمي:



8 $\sqrt{\frac{a^9}{b^7}}$

7 $\sqrt{18w^7}$

6 $\sqrt[3]{64z^{12}}$

5 $\sqrt[4]{36h^2}$

يمكنُ توظيفُ قوانينِ ضربِ الأسسِ النسبيةِ وقسمتها في مواقفَ حياتيةٍ متنوعةٍ.

مثال 4: من الحياة



يمكنُ حسابُ مساحةِ سطحِ الحيواناتِ الثدييةِ بالصيغةِ $S = 9.75 m^{\frac{2}{3}}$ حيثُ S مساحةُ السطحِ بالسنتيمترِ المربعِ، و m كتلةُ الحيوانِ بالغرامِ. أجدُ مساحةَ سطحِ أرنبٍ كتلتهُ 3.4×10^3 غرامًا، وأقربُ الإجابةِ لأقربِ عددٍ صحيحٍ.

لإيجادِ مساحةِ سطحِ الأرنبِ أعوضُ كتلتهُ في المعادلةِ:

$$S = km^{\frac{2}{3}}$$

الصيغةُ الأصليةُ

$$S = 9.75 \times (3.4 \times 10^3)^{\frac{2}{3}}$$

$$k = 9.75, m = 3.4 \times 10^3 \text{ أعوضُ}$$

$$= 9.75 \times 3.4^{\frac{2}{3}} \times (10^3)^{\frac{2}{3}}$$

قاعدةُ ضربِ القوى

$$= 9.75 \times 3.4^{\frac{2}{3}} \times 10^2$$

قاعدةُ قوةِ القوةِ

$$9.75 \times 3.4 \times 10^2 = 2204.570003 \text{ أستعملُ الآلةَ الحاسبةَ}$$

إذن، مساحةُ سطحِ الأرنبِ 2205 cm^2 تقريبًا.

أتحقق من فهمي:



تمثلُ المعادلةُ $A = (4\pi)^{\frac{1}{3}} (3V)^{\frac{2}{3}}$ مساحةَ سطحِ كرةٍ بالوحداتِ المربعةِ، شُكِّلَتْ مِنْ مجموعةٍ مِنَ الكراتِ الصغيرةِ حجمُ الواحدةِ منها V وحدةٍ مكعبةٍ. أجدُ مساحةَ السطحِ الخارجيِّ لكرةٍ كبيرةٍ إذا كانَ حجمُ الكرةِ الصغيرةِ 9 وحداتٍ مكعبةٍ.

أُتدَرَّبُ وأحل المسائل

أجد قيمة كلِّ ممَّا يأتي في أبسط صورة:

1 $25^{\frac{2}{3}} \times 5^{\frac{2}{3}}$

2 $\sqrt[6]{64 \times 3^{12}}$

3 $\frac{9^{\frac{5}{2}}}{27^{\frac{2}{3}}}$

4 $\frac{\sqrt[3]{216}}{36^{-\frac{3}{2}}}$

5 $\left(\frac{25}{64}\right)^{-\frac{3}{2}}$

6 $\left(\frac{2187}{128}\right)^{-\frac{5}{7}}$

أتذكرُ

يمكنُ حلُّ المسائلِ مِنْ 1-6 بأكثرَ مِنْ طريقةٍ.

أبسطُ كلاً مِنْ العباراتِ الأسية الآتية مفترضاً أنَّ أيًّا مِنْ المتغيرات لا يساوي صفراً:

7 $p^{-\frac{3}{4}} \times p^{\frac{11}{4}}$

8 $\frac{(m)^{-\frac{8}{3}}}{u^{-3}}$

9 $y^6(y^{\frac{3}{2}})^{-2}$

10 $\frac{1}{n^2} y^{-2} (n^{\frac{5}{3}})^6$

11 $\frac{w^2 \times (w)^{-\frac{9}{2}}}{w^{-3}}$

12 $d^{-\frac{1}{2}} \times p^{-\frac{1}{2}}$

أكتبُ كلاً ممَّا يأتي بأبسط صورة مفترضاً أنَّ أيًّا مِنْ المتغيرات لا يساوي صفراً:

13 $\sqrt{169h^6}$

14 $\sqrt[4]{81z^{12}}$

15 $\sqrt{18w^7 y^2}$

16 $\sqrt[5]{32z^3}$

17 $\sqrt[3]{\frac{64m^2}{m^{-4}}}$

18 $\sqrt[3]{b} \times \sqrt[3]{b} \times \sqrt[3]{b}$



أعاصيرُ: يستعملُ العلماءُ المعادلةَ $s = \sqrt{9.8d}$

لتقدير سرعة موج البحر s بالمتري لكلِّ ثانية في أثناء إعصارٍ تسونامي، حيثُ d عمقُ الماء بالمتار. أقدِّر سرعة الموجة حينَ يكونُ عمقُ الماء 4000 m/s

أعودُ إلى فقرة (أستكشف) بدايةً الدرس، وأجدُ:

حجم الصندوق بدلالة x .

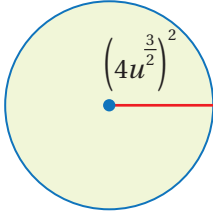
مساحة سطح الصندوق إذا كانت $x = 4096$

معلومة

تسونامي هُو مجموعةٌ مِنَ الأمواج الكبيرة جداً تنتجُ مِنْ تحركِ كمّية هائلةٍ مِنَ مياه المحيطات بفعلِ الظواهر المفاجئة، مثل الزلازل.

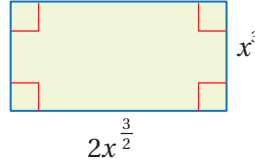
الوحدة 1

22



أجد مساحة كل شكل مما يأتي:

23



مهارات التفكير العليا

تحذّر: أثبت أن $\sqrt[4]{x^2} = \sqrt{x}$

24

مسألة مفتوحة: أكتب 4 مقادير مكافئة للمقدار $(x^{2/3})^3$

25

أكتشف الخطأ: أبين الخطأ في الحل الآتي، وأصحّحه:

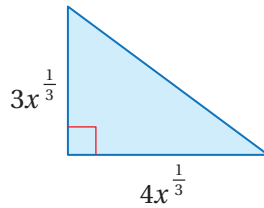
26

X

$$\begin{aligned} \sqrt[6]{\frac{64h^{12}}{g^6}} &= \frac{\sqrt[6]{64h^{12}}}{\sqrt[6]{g^6}} \\ &= \frac{\sqrt[6]{2^6 \cdot (h^2)^6}}{\sqrt[6]{g^6}} \\ &= \frac{2h^2}{g} \end{aligned}$$

تحذّر: أجد محيط المثلث في الشكل المجاور.

27



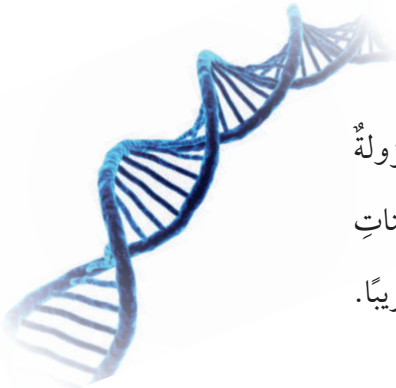
أفكر

كيف أجد طول الضلع الثالث في المثلث لأجد المحيط؟

أكتب: كيف أستخدم قوانين الأسس النسبية في إيجاد قيم مقادير تحتوي أسسًا

28

نسبية وتبسيطها؟



أستكشفُ

الأحماض النووية (DNA) هي جزيئات مسؤولة عن تخزين المعلومات الوراثية في الكائنات الحية، ويبلغ قطرها 0.000000002 m تقريباً. كيف أقرأ قطر الحمض النووي؟



فكرة الدرس

أكتب الأعداد الكلية والعشرية بالصيغة العلمية، وأجري عمليتي الضرب والقسم عليها.

المصطلحات

الصيغة العلمية

أذكر

تسمى الصيغة التي تكتب بها الأعداد من دون استخدام الأسس الصيغة القياسية.

الصيغة العلمية (scientific notation) هي طريقة لكتابة الأعداد الكبيرة جداً أو الصغيرة جداً على صورة حاصل ضرب عددين أحدهما أكبر من أو يساوي 1 وأقل من 10، والآخر أحد قوى العدد 10

الصيغة العلمية

مفهوم أساسي

• **بالكلمات:** يُكتب العدد بالصيغة العلمية على الصورة $a \times 10^n$ ، حيث $1 \leq a < 10$ ، n عدد صحيح.

• **أمثلة:** 6.35×10^4 ، 1.9×10^{-3} ، 2×10^8

مثال 1

أكتب كل عدد في ما يأتي بالصيغة العلمية:

1 12300000

الخطوة 1 أحرك الفاصلة العشرية:

أحرك الفاصلة العشرية إلى اليسار حتى ينتج عدد أكبر من أو يساوي 1 وأقل من 10:

12300000.

1.23

أحرك الفاصلة العشرية 7 منازل إلى اليسار

أحذف الأصفار الإضافية

إذن، العدد بعد تحريك الفاصلة 1.23

الوحدة 1

الخطوة 2 أحدد قوة العدد 10

بما أن الفاصلة العشرية تحركت 7 منازل إلى اليسار؛ فإن $n = 7$

إذن، قوة العدد 10 هي 10^7

الخطوة 3 أضرب العددين الناتجين من الخطوتين 1 و 2

$$12300000 = 1.23 \times 10^7$$

2 0.000729

الخطوة 1 أحرك الفاصلة العشرية:

أحرك الفاصلة العشرية إلى اليمين حتى ينتج عدد أكبر من أو يساوي 1 وأقل من 10:

$$\begin{array}{r} 0.000729 \\ \text{~~~~~} \\ 7.29 \end{array}$$

أحرك الفاصلة العشرية 4 منازل إلى اليمين

أحذف الأصفار الإضافية

إذن، العدد بعد تحريك الفاصلة 7.29

الخطوة 2 أحدد قوة العدد 10

بما أن الفاصلة العشرية تحركت 4 منازل لليمين؛ فإن $n = -4$

إذن، قوة العدد 10 هي 10^{-4}

الخطوة 3 أضرب العددين الناتجين من الخطوتين 1 و 2

$$0.000729 = 7.29 \times 10^{-4}$$

أتحقق من فهمي: 

3 7864

4 4277.38

5 0.00000874

6 0.002

ويمكننا أيضًا تحويل الأعداد من الصيغة العلمية إلى الصيغة القياسية.

مثال 2

أكتب كل عددٍ ممّا يأتي بالصيغة القياسية:

1 7.51×10^5

الخطوة 1 أسّ العدد 10 وإشارته لتحديد عدد المنازل العشرية التي أحرك الفاصلة العشرية بعدها واتجاه الحركة:

أسّ العدد 10 هو 5، إذن $n = 5$ ، وبما أن $n > 0$ ، إذن أحرك الفاصلة العشرية 5 منازل لليمين.

الخطوة 2 أحرك الفاصلة العشرية:

$$7.51 \times 10^5 \longrightarrow 751000$$

إذن، العدد 7.51×10^5 بالصيغة القياسية هو 751000

2 6.8×10^{-8}

الخطوة 1 أسّ العدد 10 وإشارته لتحديد عدد المنازل العشرية التي أحرك الفاصلة العشرية بعدها واتجاه الحركة:

أسّ العدد 10 هو -8، إذن $n = -8$ ، وبما أن $n < 0$ ، إذن أحرك الفاصلة العشرية 8 منازل لليسار.

الخطوة 2 أحرك الفاصلة العشرية:

$$6.8 \times 10^{-8} \longrightarrow 0.000000068$$

إذن، العدد 6.8×10^{-8} بالصيغة القياسية هو 0.000000068

✓ **أتحقق من فهمي:**

3 6.432×10^6

4 3.45×10^{-2}

5 7×10^{-4}

6 8×10^3

يمكن مقارنة الأعداد المكتوبة بالصيغة العلمية وترتيبها، وذلك بمقارنة أسس العدد 10 أولاً، ثم مقارنة الجزء العشري.

أرتب الأعداد في كلِّ ممَّا يأتي تصاعديًّا:

1 3.9×10^6 , 4.2×10^5 , 3.8×10^6

الخطوة 2 أقرن الجزء العشري:

الأكبر $\rightarrow 3.9 \times 10^6$
 3.8×10^6

بما أن $3.9 > 3.8$
إذن، 3.9×10^6 هو الأكبر.

الخطوة 1 أقرن بين أسس العدد 10:

3.9×10^6

الأصغر $\rightarrow 4.2 \times 10^5$

3.8×10^6

بما أن $10^5 < 10^6$
إذن 4.2×10^5 هو الأصغر.

إذن، الترتيب التصاعدي هو:

4.2×10^5 , 3.8×10^6 , 3.9×10^6

أتحقق من فهمي:



2 7.8×10^{-3} , 7.9×10^{-3} , 5.6×10^{-4}

يمكن استعمال الصيغة العلمية لتبسيط ناتج ضرب الأعداد الكبيرة جدًا والصغيرة جدًا.

أجد ناتج كلِّ ممَّا يأتي:

1 $(3.4 \times 10^{-4})(6 \times 10^7)$

$$\begin{aligned} & (3.4 \times 10^{-4})(6 \times 10^7) \\ &= (3.4 \times 6)(10^{-4} \times 10^7) \\ &= 20.4 \times 10^3 \\ &= (2.04 \times 10^1) \times 10^3 \\ &= 2.04 \times 10^4 \end{aligned}$$

الخاصيتان: التجميعية، والتبديلية

قاعدة ضرب القوى

$20.4 = 2.04 \times 10^1$

قاعدة ضرب القوى

2 $(6.561 \times 10^{-4}) \div (7.29 \times 10^7)$

$$\begin{aligned} & \frac{(6.561 \times 10^{-4})}{(7.29 \times 10^7)} \\ &= \left(\frac{6.561}{7.29} \right) \left(\frac{10^{-4}}{10^7} \right) \\ &= 0.9 \times 10^{-11} \\ &= (9 \times 10^{-1}) \times 10^{-11} \\ &= 9 \times 10^{-12} \end{aligned}$$

الخاصيتان: التجميعية، والتبديلية

قاعدة قسمة القوى

$$0.9 = 9 \times 10^{-1}$$

قاعدة ضرب القوى

أتحقق من فهمي:

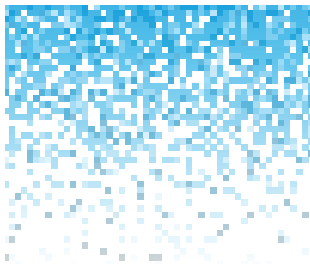


3 $(5.6 \times 10^{11})(2.8 \times 10^{-14})$

4 $(1.305 \times 10^5) \div (1.45 \times 10^8)$

تُستعمل الصيغة العلمية في كثير من المواقف الحياتية.

مثال 5: من الحياة



البكسل هو أصغر عنصر يمكن رؤيته في الصورة الرقمية على الشاشات، وهو على شكل مستطيل طوله 2×10^{-2} cm وعرضه 7×10^{-3} cm أجد مساحة البكسل بالصيغتين: العلمية، والقياسية.

$$\begin{aligned} A &= l \times w & \text{قانون مساحة المستطيل الذي طوله } l \text{ وعرضه } w \\ A &= (2 \times 10^{-2}) (7 \times 10^{-3}) & \text{أعوض } l = 2 \times 10^{-2} \text{ و } w = 7 \times 10^{-3} \\ &= (2 \times 7) (10^{-2} \times 10^{-3}) & \text{الخاصيتان: التبديلية، والتجميعية} \\ &= 14 \times 10^{-5} & \text{قاعدة ضرب القوى} \\ &= (1.4 \times 10^1) \times 10^{-5} & 14 = 1.4 \times 10^1 \\ &= 1.4 \times 10^{-4} & \text{قاعدة ضرب القوى} \\ &= 0.00014 & \text{الصيغة القياسية} \end{aligned}$$

إذن، مساحة البكسل بالصيغة العلمية 1.4×10^{-4} ، وبالصيغة القياسية 0.00014

الوحدة 1



أتحقق من فهمي:



يحتوي جسم الإنسان البالغ 20 000 000 000 000 خلية دم حمراء تقريباً
وكتلة الخلية الواحدة 1 g 0.000 000 000
أكتب كلاً من هذين العددين بالصيغة العلمية، ثم أجد كتلة خلايا الدم الحمراء
جميعها لدى الإنسان البالغ.

أتحرب وأحل المسائل

أكتب كل عدد مما يأتي بالصيغة العلمية:

1 250

2 20 780 000 000

3 56.0045

4 0.00076

أكتب كل عدد مما يأتي بالصيغة القياسية:

5 2.46×10^2

6 8.97×10^5

7 5.67×10^{-4}

8 2.0789×10^{-2}

أرتب الأعداد الآتية تصاعدياً:

6.25×10^{-1} , 2.8×10^5 , 4.5×10^5 , 2.07×10^{-2} , 6.3×10^{-1}

أجد ناتج كل مما يأتي:

10 $(7.3 \times 10^{-3})(4 \times 10^2)$

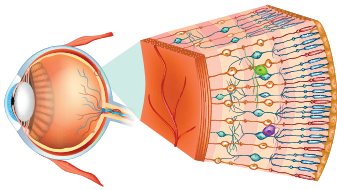
11 $(2 \times 10^{-2})^3$

12 $(4.8 \times 10^4) \div (3 \times 10^4)$

13 $\sqrt{(36 \times 10^{-4})}$

معلومة

تعمل الشبكة على تحويل الأشعة الضوئية إلى نبضات عصبية (كهروكيميائية) تُنقل عبر العصب البصري إلى مراكز الدماغ العليا لتحويلها إلى صور للأشياء المرئية.



تشرح: تحتوي شبكة العين خلايا مستقبلية للضوء وحساسة له تُسمى عصياً ومخاريط، إذ يبلغ عدد العصي في الشبكة 120000000، وعدد المخاريط 6000000، أكتب كلاً من هذين العددين بالصيغة العلمية.

معلومة

عُثُّ الغبارِ كائناتٌ مجهريةٌ تتواجدُ في معظمِ الأليافِ الطبيعيةِ والصناعيةِ.



معلومة

الولفية هي أصغرُ النباتاتِ المُزهرة في العالم، وتتكاثرُ بسرعةٍ كبيرةٍ خلالَ وقتٍ قصيرٍ جداً ليتحولَ سطحُ الماءِ إلى ما يشبه المرجَ الأخضرِ.



مهاراتُ التفكيرِ العليا

15

كائناتٌ مجهريةٌ: يبلغُ طولُ عُثَّةِ الغبارِ 0.00042 m وعرضُها 0.00028 m، وتحتوي الوسادةُ الواحدةُ ما يقاربُ 2000000 عُثَّةَ غبارٍ. أكتبُ هذه الأعدادَ بالصيغةِ العلميةِ.

16

يُبينُ الجدولُ الآتي أبعادَ بعضِ الكواكبِ عَنِ الشمسِ، أرْتبُ هذه الأبعادَ تنازلياً.

بُعدُ الكوكبِ عَنِ الشمسِ						
المشتري	الزُّهرة	عطاردُ	نبتونُ	المريخُ	الأرضُ	الكوكبُ
4.84×10^8	6.7×10^7	3.6×10^7	2.8×10^9	1.42×10^8	9.3×10^7	البعدُ بالأميال

17

كثافةٌ سكانيةٌ: تُحسَبُ الكثافةُ السكانيةُ لمنطقةٍ ما بقسمةِ عددِ السكانِ على مساحةِ هذه المنطقةِ. في شهرِ آبٍ مِنْ عامِ 2020 كَانَ عددُ سكانِ الأرضِ 7.8×10^9 نسمةً. إذا كَانَتْ مساحةُ سطحِ اليابسةِ على الأرضِ $1.438 \times 10^9 \text{ km}^2$ ، فأجدُ الكثافةَ السكانيةَ لسكانِ الأرضِ على اليابسةِ.

18

نباتاتٌ: تبلغُ كتلةُ اللفيةِ (Wolffian globose) $1.5 \times 10^{-4} \text{ g}$ إذا احتوتَ ملعقةٌ صغيرةٌ 5×10^3 نبتةً ولفيةً على الأقل، فأجدُ كتلةَ هذه الكميةِ.

19

تبريرٌ: أيُّهما أكبرُ: 1000^{10} ، أم 10^{1000} ؟ أبرِّرْ إجابتي.

20

أكتشفُ الخطأ: حلَّ كُلٌّ مِنْ سَعْدٍ وَهَدَى مسألةَ قسمةٍ مكتوبةً بالصيغةِ العلميةِ على النحوِ الآتي:

هَدَى
$\frac{3.12 \times 10^{-4}}{6 \times 10^8} = 0.52 \times 10^{-12}$
$= 5.2 \times 10^{-11}$

سَعْدٌ
$\frac{3.12 \times 10^{-4}}{6 \times 10^8} = 0.52 \times 10^{-12}$
$= 5.2 \times 10^{-13}$

مَنْ مِنْهُمَا حَلُّهُ صحيحٌ؟ أبرِّرْ إجابتي.

21

مسألةٌ مفتوحةٌ: أكتبُ عددينِ بالصيغةِ العلميةِ ناتجَ ضربِهما 7.2×10^5 ، ثُمَّ عددينِ بالصيغةِ العلميةِ ناتجَ قسَمَتِهما 7.2×10^5

22

أكتبُ كيفَ أكتبُ الأعدادَ الكليَّةَ والعشريةَ بالصيغةِ العلميةِ؟

أستكشف



في عام 2018 أنتج الأردن 21 ألف طن من زيت الزيتون، وفي عام 2019 أنتج 119% مما أنتج عام 2018. ما معنى النسبة 119%؟ وكَم أنتج الأردن من الزيت عام 2019؟

فكرة الدرس

أحل مسائل على النسبة المئوية.

المصطلحات

النسبة المئوية للتغير، نسبة الزيادة المئوية، نسبة النقصان المئوية، النسبة المئوية العكسية

أتذكر

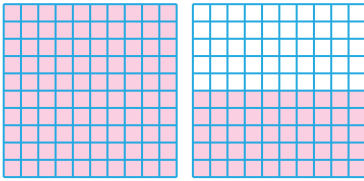
لإيجاد النسبة المئوية من كمية، أحول النسبة المئوية إلى كسر أو كسر عشري، ثم أضرب الكسر الناتج في الكمية.

تعلمت سابقاً بعض تطبيقات النسبة المئوية، ومنها: إيجاد نسبة من كمية معينة، وإيجاد سعر سلعة بعد إضافة ضريبة المبيعات أو سعرها بعد خصم نسبة معينة. وسأتعلم في هذا الدرس تطبيقات أخرى على النسبة المئوية. النسبة المئوية هي نسبة تقارن عدداً بـ 100، فإذا كان العدد أكبر من 100، فإن النسبة المئوية تكون أكبر من 100%، أما إذا كان العدد الذي أقرن به أقل من 1، فإن النسبة المئوية تكون أقل من 1%.

أجد قيمة كل مما يأتي:

مثال 1

1 150% من 5



150%

$$\begin{aligned} 150\% \times 5 \\ = 1.5 \times 5 \\ = 7.5 \end{aligned}$$

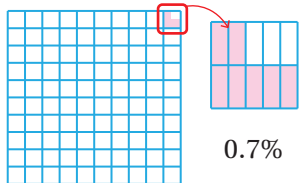
أتعلم

150% تعني 100% + 50%

أضرب النسبة المئوية في العدد
أحول النسبة المئوية إلى كسر عشري
أضرب

إذن 150% من 5 تساوي 7.5

2 0.7% من 2000



0.7%

$$\begin{aligned} 0.7\% \times 2000 \\ = 0.007 \times 2000 \\ = 14 \end{aligned}$$

أتعلم

0.7% هي نسبة كسرية بين 0% و 1%

أضرب النسبة المئوية في العدد
أحول النسبة المئوية إلى كسر عشري
أضرب

إذن 0.7% من 2000 تساوي 14

أتحقق من فهمي:



4 0.1% من 5000

3 350% من 10

تعدُّ النسبة المئوية للزيادة أو النسبة المئوية للنقصان في كمية ما من التطبيقات المهمة على النسبة المئوية.

مثال 2: من الحياة



أفكر

هل يمكن إيجاد راتب فاطمة بعد الزيادة بطريقة أخرى؟

1 تتقاضى فاطمة راتباً شهرياً قدره JD 750، كم يصبح هذا الراتب إذا زاد بنسبة 12%؟

إنَّ زيادةَ الراتبِ بنسبة 12% تكافئُ نسبةَ 100% الأصلية مضافاً إليها 12%، وهذا يعني أنَّ المجموعَ الكليَّ للنسبِ 112%، ومن ثَمَّ، فإنه يمكن إيجاد راتبِ فاطمة بعد الزيادة بضربِ الراتبِ القديم في 112%

$$\begin{aligned} 112\% \times 750 \\ = 1.12 \times 750 \\ = 840 \end{aligned}$$

أضربُ النسبة المئوية في الكمية الأصلية
أحولُ النسبة المئوية إلى كسرٍ عشريٍّ
أضربُ

إذن، راتبُ فاطمة بعد الزيادة JD 840



أفكر

هل يمكن إيجاد سعرِ السيارة بعد النقصانِ بطريقة أخرى؟

2 اشترى كريمُ سيارةً بمبلغ JD 6500 العام الماضي، كم يصبحُ السعرُ إذا انخفضَ سعرُ السيارة هذا العام بنسبة 15%؟

إنَّ انخفاضَ سعرِ السيارة بنسبة 15% يكافئُ نسبةَ 100% الأصلية مطروحاً منها 15%، وهذا يمثلُ 85% من السعرِ الأصليِّ؛ لذا يمكنُ إيجادَ سعرِ السيارة بعدَ الانخفاضِ بضربِ سعرِها القديم في 85%

$$\begin{aligned} 85\% \times 6500 \\ = 0.85 \times 6500 \\ = 5525 \end{aligned}$$

أضربُ النسبة المئوية في الكمية الأصلية
أحولُ النسبة المئوية إلى كسرٍ عشريٍّ
أضربُ

إذن، سعرُ السيارة هذا العام JD 5525

أتحقق من فهمي:



- 3 ازداد طول نبتة بنسبة 25% مما كان عليه طولها قبل أسبوع. أجد طول النبتة الآن إذا كان طولها في الأسبوع السابق 40 cm
- 4 قرّرت إدارة أحد المصانع تخفيض عدد عمّالها بتسريح 30% منهم. إذا كان عدد العمال في المصنع 416 عاملاً، فكّم عاملاً سيبقى في المصنع؟

النسبة المئوية للتغير (percentage change) (pc) هي النسبة المئوية لمقدار التغير من الكمية الأصلية، ويمكن أن تكون النسبة المئوية للتغير نسبة زيادة مئوية (percentage increase) أو نسبة نقصان مئوية (percentage decrease)

النسبة المئوية للتغير

مفهوم أساسي



• **بالكلمات:** النسبة المئوية للتغير هي النسبة المئوية بين التغير في كمية ما والكمية الأصلية.

$$100\% \times \frac{\text{مقدار التغير}}{\text{الكمية الأصلية}} = (\text{النسبة المئوية للتغير})$$

مثال 3: من الحياة



- 1 باع محلّ للإلكترونيات 80 آلة حاسبة في شهر أيلول، و104 آلات حاسبة في شهر تشرين الأول. أجد النسبة المئوية للتغير في عدد الآلات الحاسبة المباعة من شهر أيلول إلى شهر تشرين الأول.



الخطوة 1 أجد مقدار التغير:

ألاحظ أن التغير زيادة؛ لذا أطرح الكمية الأصلية من الكمية الجديدة لأجد مقدار التغير.

$$104 - 80 = 24 \text{ مقدار التغير يساوي}$$

الخطوة 2 أجد النسبة المئوية للتغير:

$$\text{نسبة التغير المئوية} = \frac{\text{مقدار التغير}}{\text{الكمية الأصلية}} \times 100\% = (\text{النسبة المئوية للتغير})$$

$$= \frac{24}{80} \times 100\% \quad \text{أعوّض مقدار التغير = 24، الكمية الأصلية = 80}$$

$$= \frac{3}{10} \times 100\% \quad \text{أبسط}$$

$$= 30\% \quad \text{أضرب}$$

إذن، زادت المبيعات من شهر أيلول إلى شهر تشرين الأول بنسبة 30%



2 إذا كانت كتلة عمر 95 kg قبل اتباعه نظامًا غذائيًا متوازنًا، وأصبحت كتلته الآن 78 kg، فأجد النسبة المئوية للتغير في كتلة عمر. أقرب إجابتني لأقرب عدد صحيح.

الخطوة 1 أجد مقدار التغير:

الاحظ أن التغير نقصان؛ لذا أ طرح الكمية الجديدة من الكمية الأصلية لأجد مقدار التغير.

$$\text{مقدار التغير يساوي } 95 - 78 = 17$$

الخطوة 2 أجد النسبة المئوية للتغير:

$$\text{نسبة التغير المئوية} = \frac{\text{مقدار التغير}}{\text{الكمية الأصلية}} \times 100\% = (\text{النسبة المئوية للتغير})$$

$$= \frac{17}{95} \times 100\% \quad \text{أعوّض مقدار التغير = 17، الكمية الأصلية = 95}$$

$$\approx 18\% \quad \text{أستعمل الآلة الحاسبة}$$

إذن، خسر عمر 18% من كتلته الأصلية.

✓ أتتحقق من فهمي:

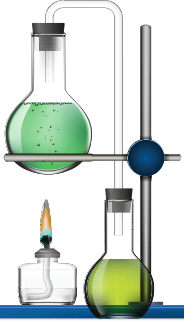
3 اشترى معاذ زهورًا بقيمة JD 240 وباعها بسعر JD 300. أجد النسبة المئوية لربح معاذ.

4 اشترت فرح كاميرا بقيمة JD 119 بعد التخفيض، إذا كان سعر الكاميرا قبل التخفيض JD 140، فأجد النسبة المئوية للخصم الذي حصلت عليه فرح.

الوحدة 1

من التطبيقات المهمة على النسبة المئوية أسئلة **النسبة المئوية العكسية** (Reverse percentage)، التي تتطلب الحل بشكل عكسي بدءاً من الكمية النهائية للحصول على الكمية الأصلية.

مثال 4: من الحياة



أفكر

لِمَ نقسم على نسبة
التغير المئوية عند
إيجاد الكمية الأصلية؟

1 في إحدى التجارب الكيميائية سُخِّنَ سائل لرفع درجة حرارته بنسبة 16% لتصبح 80°C ،
أجد درجة حرارة السائل قبل الزيادة.

بما أن درجة الحرارة زادت بنسبة 16%، إذن، النسبة المئوية بعد الزيادة 116%

$$\begin{aligned} & \text{أقسم الكمية بعد التغير على النسبة المئوية بعد الزيادة} \\ & = \frac{80}{116\%} \\ & = \frac{80}{1.16} \\ & \approx 69 \end{aligned}$$

إذن، درجة حرارة السائل قبل الزيادة 69°C تقريباً.



2 أعلن متجر للتلاجات عن خصم نسبته 20%. إذا كان سعر ثلاجة بعد الخصم JD 600، فأجد
سعرها قبل الخصم.

بما أن سعر الثلاجة نقص بنسبة 20%، إذن، النسبة المئوية بعد النقصان تساوي 80%

$$\begin{aligned} & \text{أقسم الكمية بعد التغير على النسبة المئوية بعد النقصان} \\ & = \frac{600}{80\%} \\ & = \frac{600}{0.80} \\ & = 750 \end{aligned}$$

إذن، سعر الثلاجة قبل الخصم JD 750

✓ **أتحقق من فهمي:**

3 زاد سعر سيارة بنسبة 6% ليصبح JD 9116. أجد سعرها قبل الزيادة.

4 في موسم التزيلات، بلغ سعر شاشة تلفاز JD 500. إذا كانت نسبة الخصم 7%، فأجد ثمن الشاشة قبل الخصم.

أجد قيمة كل مما يأتي:

- 1 300% من 2000 2 0.14 من 40 3 250% من 400



4 ماء: يزيد حجم الماء عند تجمّده بنسبة 10%. أجد حجم 750 mL من الماء بعد التجمّد.

5 خفّضت شركة عدد عمّالها بنسبة 5% فأصبح 228 عاملاً. أجد عدد عمال الشركة الأصلي.

6 سيارات: زادت شركة للسيارات سعر سيارة رياضية من JD 23000 إلى JD 25000. أجد النسبة المئوية للزيادة في سعر السيارة، مقرباً إجابتي لأقرب جزء من عشرة.



7 راتب: يتقاضى طبّاخ JD 1431 شهرياً بعد زيادة على راتبه بنسبة 8%. أجد راتب الطبّاخ قبل الزيادة.

8 اشترى أحمد كرسيّاً دواًراً وباعه بمبلغ JD 63. إذا كانت نسبة خسارته فيه 55%، فما الثمن الأصلي للكرسي؟



9 بطارية: تفقد بطارية هاتفٍ شحنها الكامل بعد 20 ساعة. إذا كانت النسخة المطوّرة من البطارية تستمر 30 دقيقة إضافية، فأجد النسبة المئوية للزيادة في زمن عمل البطارية.

	الاختبار A	الاختبار B
عمران	12	17
نادية	14	20

10 اختبارات: خضع عمران ونادية لاختبارين لهما النهاية العظمى نفسها، وكانت نتائجهما مثلما يظهر في الجدول. من منهما كانت النسبة المئوية للزيادة في

علاماته أكبر من الاختبار A إلى الاختبار B؟ أبين خطوات الحل.

الوحدة 1

معدّل التنفّس: يُقاسُ معدّل التنفّس عند الإنسان بعدد الأنفاس التي يأخذها في الدقيقة الواحدة، ويعتمد ذلك على عدة عوامل، منها: عمر الشخص، وحالته الصحية، والجهد الذي يبذله. إذا كان معدّل تنفّس لؤي 20 مرة في الدقيقة، فأجب عما يأتي:

11 أجد عدد مرات تنفّس لؤي إذا أصبحت 180% ممّا كانت عليه؛ نتيجة ممارسة إحدى الرياضات.

12 نتيجة لممارسة لؤي رياضة أشدّ أصبح معدّل تنفّسه 120% من عدد مرات الرياضة الأول، أجد عدد مرات تنفّسه الجديد.

13 أعود إلى فقرة (استكشف) بداية الدرس، وأحلّ المسألة.

مهارات التفكير العليا

14 **تحلّل:** إذا كانت 38% من القوارير البلاستيكية التي يُنتجها مصنع زرقاء اللون، والقوارير المتبقية وعددها 7750 قارورة لونها بنيّ؛ فأجد عدد القوارير الزرقاء التي يُنتجها المصنّع.

15 **تبرير:** صمّمت جمانة مزهريتين فخاريتين وباعتهما بالسعر الموضّح في الشكل المجاور. تقول جمانة إنّ نسبة ربحها في المزهرية الأولى أكبر من نسبة ربحها في المزهرية الثانية. هلّ ما تقوله جمانة صحيح؟ أبرّر إجابتي.



16 **أكتب:** كيف أجد النسبة المئوية للتغير؟ وبِمَ أفسّر معنى النسبة التي تزيد على 100%؟

اختبار الوحدة

أختار رمز الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

1 قيمة $\sqrt{2500}$ تساوي:

a) 25 b) -50

c) 50 d) ± 50

2 قيمة $\sqrt{1.44} - 4.2$ تساوي:

a) 3 b) -3

c) 7.8 d) -5.4

3 أفضل تقدير للعدد $8 - \sqrt{40}$ هو:

a) 4 b) -16 c) 1 d) 2

4 قيمة $\sqrt{2} \times \sqrt{32}$ تساوي:

a) 6 b) 8 c) 64 d) 16

5 مثلث قائم الزاوية متطابق الضلعين طول وتره

$\sqrt{72}$ cm. أجد طول كل من ضلعي القائمة:

a) 36 cm b) $3\sqrt{2}$ cm

c) 6 cm d) 18 cm

6 يمكن أن تكون أطوال أضلاع مثلث قائم الزاوية:

a) 6, 8, 11 b) $\sqrt{10}$, 4, 5

c) $6, 2\sqrt{3}, 4\sqrt{3}$ d) 5, 12, 14

7 أجد الأعداد الآتية عدد غير نسبي:

a) $\sqrt{12}$ b) $\sqrt{6.25}$

c) $3\frac{1}{5}$ d) -2

8 قيمة $\sqrt[3]{64x^6}$ تساوي:

a) $8x^2$ b) $8x^3$ c) $4x^3$ d) $4x^2$

9 أبسط صورة للمقدار $\frac{u^{\frac{7}{4}} \times u^{\frac{3}{4}}}{u^{\frac{1}{2}}}$ هي:

a) u^2 b) u^3 c) $u^{\frac{1}{2}}$ d) u

10 تبلغ سرعة الصوت 1236 km/h، وتكتب بالصيغة العلمية:

a) 1.236×10^4 b) 1.236×10^{-3}

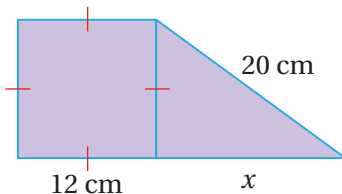
c) 1.236×10^3 d) 12.36×10^2

11 ناتج القسمة $(3 \times 10^{-2}) \div (5 \times 10^{-6})$ هو:

a) 0.6×10^3 b) 6×10^4

c) 6×10^{-3} d) 6×10^3

12 أجد طول الضلع المجهول في الشكل الآتي:



تدريب على الاختبارات الدولية

21 أبسط صورة للمقدار $\frac{6}{\sqrt{12}}$ هي:

- a) $\sqrt{3}$ b) $\frac{\sqrt{12}}{2}$
c) $2\sqrt{3}$ d) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

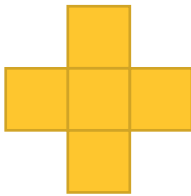
22 ناتج $(5.2 \times 10^6)(3.4 \times 10^7)$ بالصيغة العلمية هو:

- a) 1.768×10^{14} b) 17.68×10^{13}
c) 8.6×10^{13} d) 1.768×10^{42}

23 واحد مما يأتي يكافئ $(8y)^{\frac{4}{3}}$

- a) $\sqrt[4]{16y^3}$ b) $\sqrt[3]{8y^4}$
c) $16\sqrt[3]{y^4}$ d) $8\sqrt[4]{y^3}$

24 هندسة: يتكوّن الشكل المجاور من 5 مربعات متطابقة مساحته كلّ منها 25 وحدة، أجد محيط الشكل.

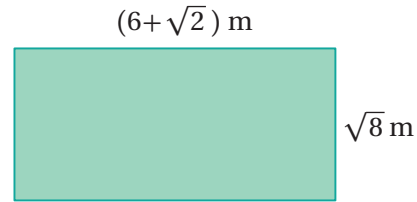


25 تُشير سجلات قسم الولادة في أحد المستشفيات إلى وجود 50 مولوداً 56% منهم إناث. إذا زاد عدد المواليد الإناث 7، فأجد النسبة المئوية لهذه الزيادة.

أميز العدد النسبي من غير النسبي في ما يأتي:

- 13 $-\sqrt{36}$ 14 $\sqrt{50}$

15 أجد مساحة المستطيل الآتي بأبسط صورة:



16 أرتب مجموعة الأعداد π , 5, $4.\bar{6}$, $5\frac{1}{4}$, $\sqrt{24}$ تصاعدياً.

17 أبسط المقدار $\frac{\sqrt[3]{343}}{\sqrt{28}}$

18 أكتب المقدار $\frac{p^{\frac{2}{3}}}{p^{-\frac{4}{3}}}$ بأبسط صورة.

19 يبلغ طول حشرة الماء 0.01981 cm، وطول حشرة السوس 0.09652 cm. أكتب العددين بالصيغة العلمية، ثم أحدد أي الحشرتين أطول، مبيّناً خطوات الحل.



20 باع متجر بذلة رجالية بمبلغ JD 150، وبربح مقداره 30% أجد سعر التكلفة. أقرب إجابتي لأقرب جزء من عشرة.

تحليل المقادير الجبرية

ما أهمية هذه الوحدة؟

يُستعمل تحليل المقادير الجبرية في كثير من التطبيقات الحياتية والعلمية، فمثلاً يكتب المهندسون المعماريون النسبة بين مساحة جدران الغرفة وحجمها على صورة مقدار جبري نسبي، ثم يستعملون التحليل لتبسيطه وإيجاد أقل قيمة له؛ بهدف تقليل تكلفة تدفئة الغرفة في فصل الشتاء.



سأتعلم في هذه الوحدة:

- حالات خاصة من ضرب المقادير الجبرية.
- تحليل مقادير جبرية بإخراج العامل المشترك الأكبر وتجميع الحدود.
- تحليل الفرق بين مربعين، وتحليل ثلاثي حدود على صورة $x^2 \pm bx \pm c$
- كتابة مقادير جبرية نسبية بأبسط صورة.

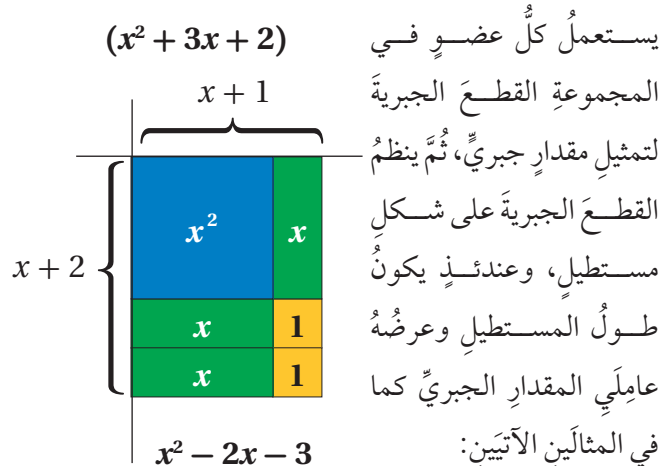
تعلمت سابقاً:

- ✓ إجراء العمليات الحسابية على الحدود والمقادير الجبرية، وكتابتها بأبسط صورة.
- ✓ تبسيط مقادير عديدة تتضمن أسساً باستخدام أولويات العمليات الحسابية.
- ✓ توظيف الأسس والمقادير الجبرية في حل مسائل حياتية.

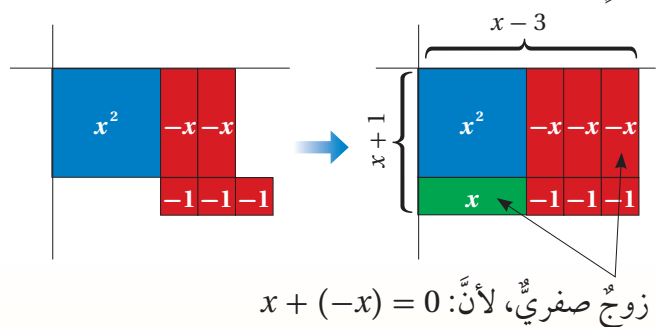


مشروع الوحدة: القطع الجبرية

أستعمل القطع الجبرية لتمثيل مقادير جبرية وتحليلها:



يحتاج تمثيل بعض المقادير الجبرية باستعمال القطع الجبرية إلى إضافة أزواج صفرية مثل $(1 + -1 = 0)$ لإكمال تشكيل المستطيل:



عرض النتائج:

- يجب إعداد القطع الجبرية قبل البدء بدراسة الوحدة؛ لأنها ستستخدم لحل بعض المسائل في دروس الوحدة.
- يختار كل فرد في المجموعة مقداراً جبرياً، ويمثله باستعمال القطع الجبرية، ثم يحلله.
- يعرض كل فرد في المجموعة أمام زملائه في الصف كيفية تحليل المقدار الجبري الذي اختاره باستعمال القطع الجبرية.

أستعد زملائي لتنفيذ مشروعي الخاص الذي سأصنع فيه قطعاً جبرية، وأستعملها في تحليل المقادير الجبرية.

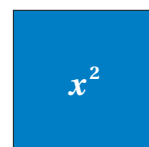
الأدوات اللازمة:

أوراق مقواة متعددة الألوان.

خطوات تنفيذ المشروع:

أصنع القطع الجبرية

- أقص 5 مربعات من الورقة الزرقاء بمقاس $10 \text{ cm} \times 10 \text{ cm}$ ، وأكتب (x^2) على كل منها.

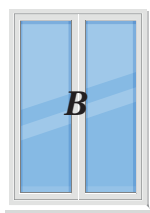
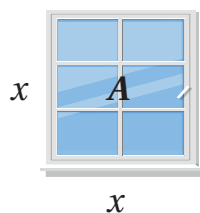


- أقص 10 مستطيلات من الورقة الخضراء بمقاس $3 \text{ cm} \times 10 \text{ cm}$ ، وأكتب (x) على كل منها، وأقص 10 مستطيلات

بالمقاس نفسه من الورقة الحمراء، وأكتب $(-x)$ على كل منها.

- أقص 15 مربعاً من الورقة الصفراء بمقاس $3 \text{ cm} \times 3 \text{ cm}$ ، وأكتب (1) على كل منها، وأقص 15 مربعاً بالمقاس نفسه من الورقة الحمراء، وأكتب (-1) على كل منها.





$x + 2$

$x - 2$

أستكشف

أي النافذتين مساحتها أكبر؟

فكرة الدرس

أتعرف قواعد إيجاد مربع مجموع حدين ومجموع حدين في الفرق بينهما.

تعلّمت سابقاً إيجاد مربع مجموع حدين على الصورة $(a + b)^2$ عن طريق إيجاد حاصل الضرب $(a + b)(a + b)$ ، ويمكن أيضاً استعمال القطع الجبرية لتمثيل $(a + b)^2$ لأي قيمتين a و b كما يأتي:

$$(a+b)^2 = \begin{array}{|c|c|} \hline a & b \\ \hline a & a^2 \\ \hline b & ab \\ \hline \end{array} = a^2 + ab + ab + b^2$$

$$(a+b)^2 = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

إذن، ضرب مجموع حدين في نفسه (مربع مجموع حدين) يتبع قاعدة ثابتة يمكن استعمالها لتسهيل عملية الضرب.

مربع مجموع حدين

مفهوم أساسي

• **بالكلمات:** مربع $(a + b)$ يساوي مربع a مضافاً إليه مثلي حاصل ضرب a في b مضافاً إليه مربع b .

• **بالرموز:** $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

مثال 1

أجد ناتج الضرب في كل مما يأتي:

1 $(3k + 5)^2$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(3k + 5)^2 = (3k)^2 + (2 \times 3k \times 5) + (5)^2$$

$$= 9k^2 + 30k + 25$$

قانون مربع مجموع حدين

$$a = 3k, b = 5$$

أبسط

الوحدة 2

2 $(y^2 + 3)^2$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(y^2 + 3)^2 = (y^2)^2 + (2 \times y^2 \times 3) + 3^2$$

$$= y^4 + 6y^2 + 9$$

قانون مربع مجموع حدين

$$a = y^2, b = 3$$

أبسط

أتحقق من فهمي:



3 $(2c + 10)^2$

4 $(d^2 + 4)^2$

توجد أيضًا قاعدة لإيجاد $(a-b)^2$ ، ويمكن إيجادها بكتابة $(a-b)$ على صورة $a + (-b)$ ثم استعمال قاعدة $(a+b)^2$ لإيجاد هذه القاعدة:

$$(a-b)^2 = [a + (-b)]^2 = (a)^2 + 2(a)(-b) + (b)^2$$

$$= a^2 - 2ab + b^2$$

مربع مجموع حدين

أبسط

مربع الفرق بين حدين

مفهوم أساسي



• **بالكلمات:** مربع $(a-b)$ يساوي مربع a مطروحًا منه مثنى حاصل ضرب a في b مضافًا إليه مربع b .

• **بالرموز:** $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

مثال 2 أجد ناتج الضرب في كلٍّ مما يأتي:

1 $(2h - z)^2$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(2h-z)^2 = (2h)^2 - (2 \times 2h \times z) + (z)^2$$

$$= 4h^2 - 4hz + z^2$$

قانون مربع الفرق بين حدين

$$a = 2h, b = z$$

أبسط

2 $(6-5y^3)^2$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(6-5y^3)^2 = (6)^2 - (2 \times 6 \times 5y^3) + (5y^3)^2$$

$$= 36 - 60y^3 + 25y^6$$

قانون مربع الفرق بين حدين

$$a = 6, b = 5y^3$$

أبسط

✓ **أتحقّق من فهمي:**

3 $(7t^2 - 1)^2$

4 $(x^3 - 4y^2)^2$

يتبع ناتج ضرب مجموع حدين في الفرق بينهما $(a-b)(a+b)$ قاعدة ثابتة يمكن اكتشافها واستعمالها في إيجاد ناتج الضرب بسهولة:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cc} & \begin{array}{c} a+(-b) \\ \hline a \quad -b \end{array} \\ \begin{array}{c} a+b \\ \hline a \quad b \end{array} & \begin{array}{cc} a^2 & -ab \\ ab & -b^2 \end{array} \end{array} = \begin{array}{c} a^2 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{c} 0 \\ \hline \begin{array}{cc} -ab & ab \end{array} \end{array} + \begin{array}{c} -b^2 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{c} a^2 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{c} -b^2 \\ \hline \end{array}
 \end{array}$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 + (-ab) + ab + (-b^2) = a^2 + (-b^2)$$

ضرب مجموع حدين في الفرق بينهما

مفهوم أساسي

• **بالكلمات:** ناتج ضرب $(a-b)(a+b)$ يساوي مربع a مطروحاً منه مربع b .

• **بالرموز:** $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

مثال 3 أجد ناتج كل مما يأتي:

1 $(2c + 3)(2c - 3)$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

$$(2c+3)(2c-3) = (2c)^2 - 3^2$$

$$= 4c^2 - 9$$

قانون ضرب مجموع حدين في الفرق بينهما

$$a = 2c, b = 3$$

أبسط

2 $(4x^2 + d^5)(4x^2 - d^5)$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

$$(4x^2 + d^5)(4x^2 - d^5) = (4x^2)^2 - (d^5)^2$$

$$= 16x^4 - d^{10}$$

قانون مربع مجموع حدين

$$a = 4x^2, b = d^5$$

أبسط

الوحدة 2

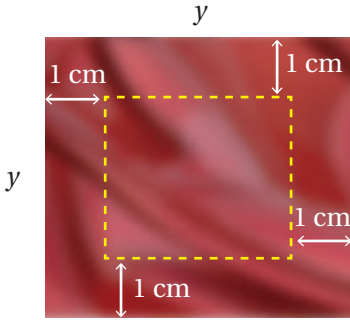
أتحقق من فهمي:

3 $(6w + d^4)(6w - d^4)$

4 $(x^3 + 3h^7)(x^3 - 3h^7)$

تُستعملُ قوانينُ (مربع مجموع حدّين) و(مربع الفرق بين حدّين) و(مجموع حدّين في الفرق بينهما) في كثيرٍ من التطبيقات الحياتية والعلمية.

مثال 4: من الحياة



خياطة: قطعة قماشٍ مربعة الشكل طول ضلعها (y) سنتيمترًا، إذا قُصَّ شريطٌ عرضه 1 cm بمحاذاة حوافها الأربع، فأجد المساحة المتبقية من قطعة القماش بدلالة y .

الخطوة 1 أحدد طول ضلع قطعة القماش المتبقية بعد القص:

طول قطعة القماش الأصلية (y) سنتيمترًا قُصَّ منها 1 cm بمحاذاة حوافها الأربع. إذن، أصبح طول الضلع $(y-2)$ سنتيمترًا.

الخطوة 2 أحسب المساحة:

$$\begin{aligned} A &= s^2 \\ &= (y-2)^2 \\ (a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \\ (y-2)^2 &= y^2 - (2 \times y \times 2) + 2^2 \\ &= y^2 - 4y + 4 \end{aligned}$$

قانون مساحة المربع

$$s = y - 2$$

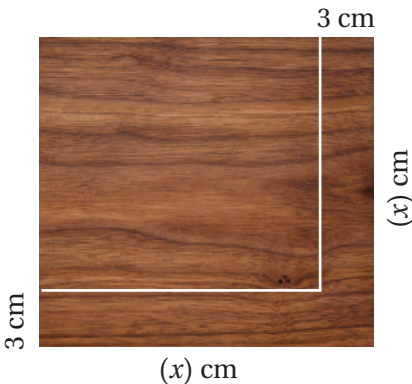
قانون مربع الفرق بين حدّين

$$a = y, b = 2$$

أبسط

إذن، المساحة المتبقية من القماش بدلالة y هي $(y^2 - 4y + 4) \text{ cm}$

أتحقق من فهمي:



نجارة: يبيّن الشكل المجاور أبعاد لوح خشبيّ مربع الشكل طول ضلعه x سنتيمترًا. إذا قُصَّ شريطٌ عرضه 3 cm من حافتي اللوح مثلما يظهر في الشكل، فأحسب مساحة المربع من اللوح بدلالة x .

يمكنُ استعمالُ قواعدِ ضربِ المقاديرِ الجبريةِ لإجراءِ بعضِ الحساباتِ الذهنيةِ بسهولةٍ.

مثال 5

أستعملُ الحسابَ الذهنيَّ لأجدَ ناتجَ كلِّ ممَّا يأتي:

1 71^2

$$71^2 = (70 + 1)^2$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(70 + 1)^2 = 70^2 + (2 \times 70 \times 1) + 1^2$$

$$= 4900 + 140 + 1$$

$$= 5041$$

أكتبُ 71^2 على صورةٍ مربعٍ مجموعٍ حدَّينِ

قانونُ مربعٍ مجموعٍ حدَّينِ

أعوِّضُ $a = 70, b = 1$

أضربُ

أجمعُ

إذن، $71^2 = 5041$

أتحقَّقُ من فهمي:



2 52^2

3 63^2

أُتدربُ

وأحلُّ المسائلَ



أجدُ ناتجَ كلِّ ممَّا يأتي:

1 $(w+2)^2$

2 $(x - 11)^2$

3 $(z + y)^2$

4 $(-4m^3 - 5y)^2$

5 $(w^2 - 7)(w^2 - 7)$

6 $(y^2 + 4h^2)^2$

7 $(5a + 4)(5a - 4)$

8 $(3x - 2w)(3x + 2w)$

9 $(12y + 10)(12y - 10)$

10 $(2 + 3t^2)(2 - 3t^2)$

11 $(4s + 5r^2)(4s - 5r^2)$

12 $(x^2 + 7y^4)(x^2 - 7y^4)$

الوحدة 2



هندسة: بركة سباحة مستطيلة الشكل، طولها بالمتر $(3x + 6)$ وعرضها $(3x - 6)$ ، أجد مساحتها بدلالة x وبأبسط صورة.

13

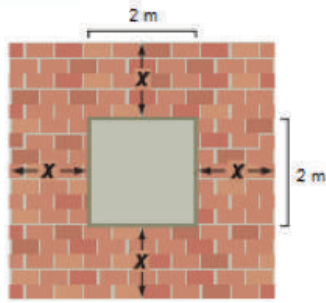


حساب ذهني: أستمع الحساب الذهني لأجد ناتج كل مما يأتي:

14 88^2

15 403^2

16 37^2



17 يبين الشكل المجاور جدارًا مربع الشكل تتوسطه نافذة. أعبر عن مساحة الجدار بدلالة x بطريقتين مختلفتين.

17

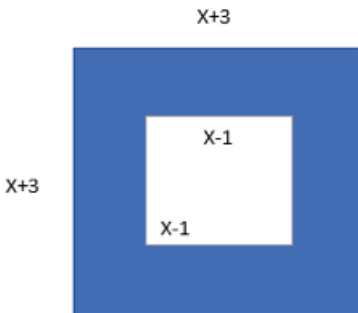
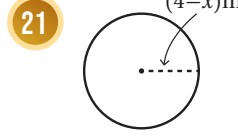
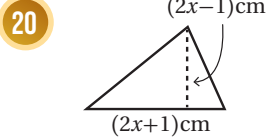
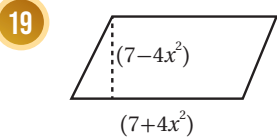
معلومة

تتمدد معظم المواد بالحرارة وتقلص بالبرودة، إلا أن الماء يخالف هذه القاعدة، إذ إنه يتمدد بالبرودة ويتقلص بالحرارة.

18

علوم: لوحة معدنية مربعة الشكل، طول ضلعها بالسنتيمتر (w) ، إذا تعرضت للحرارة فتمددت وازداد طول ضلعها بمقدار 0.02 cm ، أجد مساحة اللوحة بعد التمدد بدلالة w .

قياس: أجد مساحة كل شكل مما يأتي بدلالة x :



هندسة: أكتب المقدار الجبري الذي يعبر عن مساحة الجزء المظلل في الشكل المجاور في أبسط صورة.

22

أتذكر

مساحة الدائرة (A)
تساوي $A = r^2 \pi$
حيث r نصف القطر.

23 **أكتشف المختلف:** أحدى العبارة المختلفة عن بقية العبارات:

$$x^2 - 10x + 25$$

$$x^2 + 6x + 18$$

$$x^2 + 8x + 16$$

$$x^2 + 2x + 1$$

مهارات التفكير العليا

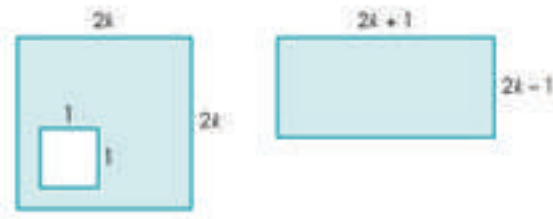
24 **تحذ:** بسطت ساجدة مقداراً جبرياً على صورة مربع الفرق بين حدين، هل يمكنني إيجاد الحد المفقود في حلها؟

$$4x^2 \quad - \quad 24x \quad + \quad ?$$

25 **تحذ:** هل توجد قاعدة لحساب $(x - y)^3$ ؟

إرشاد

لحل هذا السؤال، أكتب المقدار بصورة ضرب مكرر.



26 **تبرير:** أبين أن مساحة الجزء المظلل في كل من الشكلين المجاورين متساوية أم غير متساوية. أبرر إجابتني.

27 **اكتشف الخطأ:** قام سالم بتبسيط مقدار جبري على النحو الآتي. أكتشف الخطأ في اجابة سالم وأصححه.

$$\times \quad (3x-4)^2 = 9x^2 - 12x + 16$$

28 **أكتب:** أكتب فقرة أبين فيها كيف أجد مربع مجموع حدين.



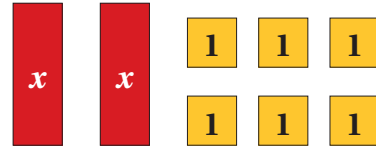
الهدف: أحلّ مقدارًا جبريًا معطًى على صورة $ax + b$ أو $x^2 + bx$ باستعمال القطع الجبرية.

نشاط 1

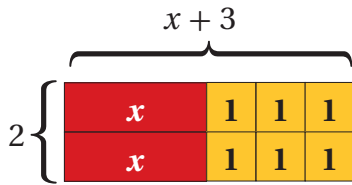
أستعمل القطع الجبرية لتحليل المقدار $2x + 6$

الخطوة 1 أمثل المقدار $2x + 6$ باستعمال

قطع جبرية:



الخطوة 2 أرتب القطع الجبرية على هيئة مستطيل.
ألاحظ أن طول المستطيل $(x+3)$ وعرضه (2) ومساحته $(2x+6)$.



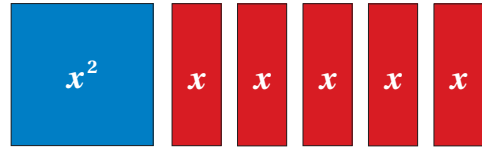
إذن، $(x + 3)(2) = (2x + 6)$

نشاط 2

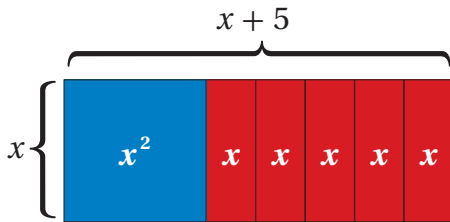
أستخدم القطع الجبرية لتحليل المقدار $x^2 + 5x$

الخطوة 1 أستخدم القطع الجبرية لتمثيل

المقدار $x^2 + 5x$



الخطوة 2 أرتب القطع الجبرية على هيئة مستطيل.
ألاحظ أن طول المستطيل $(x + 5)$ وعرضه (x) ومساحته $(x^2 + 5x)$



إذن، $x(x + 5) = (x^2 + 5x)$

أستخدم القطع الجبرية لتحليل كل مقدار جبري مما يأتي:

أَتَدَرِّبُ:

1 $5x + 5$

2 $2x + 8$

3 $x^2 + 7x$

4 $x^2 + 4x$



أستكشفُ

شاشة تلفزيون مستطيلة الشكل،
مساحتها $2x^2 + 60x$ سنتيمترًا
مربعًا، وعرضها $2x$ سنتيمترًا، ما
طولها بدلالة x ؟

فكرة الدرس

أحلل مقادير جبرية بإخراج العامل
المشترك الأكبر.

المصطلحات

الصورة التحليلية، التحليل، التجميع.

كتابة الحد الجبري بالصورة التحليلية (factored form) تعني كتابته على صورة حاصل ضرب أعداد أولية ومتغيرات كل
منها مرفوع للأس 1 ، وعند كتابة الحد الجبري بالصورة التحليلية فإننا نقول إنه حُلِّل تحليلًا كاملاً.

$$18x^3 = 2 \times 3 \times 3 \times x \times x \times x$$

مكتوب بالصورة التحليلية
(تحليل كامل)

$$18x^3 = 6 \times 3 \times x \times x^2$$

ليس مكتوبًا بالصورة التحليلية
(ليس تحليلًا كاملاً)

تعلمت سابقاً أن العامل المشترك الأكبر (ع.م.أ) لعددين أو أكثر يساوي ناتج ضرب العوامل الأولية المشتركة بينها، ويمكن
أيضاً إيجاد العامل المشترك الأكبر لحددين جبريين أو أكثر بطريقة مشابهة.

مثال 1

أجد العامل المشترك الأكبر للحددين الجبريين في كل مما يأتي:

1 $12y^2, 18y$

$$12y^2 = \textcircled{3} \times 2 \times \textcircled{2} \times \textcircled{y} \times y$$

$$18y = \textcircled{3} \times 3 \times \textcircled{2} \times \textcircled{y}$$

أكتب كل حد بالصورة التحليلية

ثم أحدد العوامل الأولية المشتركة

إذن، العامل المشترك الأكبر للحددين الجبريين $12y^2, 18y$ هو: $3 \times 2 \times y = 6y$

الوحدة 2

2 $20z^2 d, 10z^5 dc$

$$20z^2 d = 5 \times 2 \times 2 \times z \times z \times d$$

أكتب كل حد بالصورة التحليلية

$$10z^5 dc = 5 \times 2 \times z \times z \times z \times z \times z \times d \times c$$

ثم أحدد العوامل الأولية المشتركة

إذن، العامل المشترك الأكبر للحددين الجبريين $20z^2 d, 10z^5 dc$ يساوي $5 \times 2 \times z \times z \times d = 10z^2 d$

أتحقق من فهمي:



3 $14b^2 c, 21c^3$

4 $2y3x^5, 3y^5 x^3$

أتذكر

يحتوي المقدار الجبري
حدًا جبريًا أو أكثر.

تعلمت سابقًا استعمال خاصية التوزيع لضرب حد جبري في مقدار جبري:

$$3x(x + 8) = 3x(x) + 3x(8)$$

$$= 3x^2 + 24x$$

يمكن عكس خطوات هذه العملية لإعادة كتابة أي مقدار جبري على صورة حاصل ضرب حد جبري في مقدار جبري:

$$3x^2 + 24x = 3x(x) + 3x(8)$$

$$= 3x(x + 8)$$

تحليل (factoring) المقدار الجبري بإخراج العامل المشترك الأكبر لحدوده تعني تحليله تحليلًا كاملاً باستعمال عملية عكسية لعملية التوزيع (خاصية التوزيع).

$$4y(3y + 4)$$

تحليل كامل

$$2y(6y + 8)$$

ليس تحليلًا كاملاً؛ لأن $(6y + 8)$ يمكن
تحليلها على صورة $2(3y + 4)$

مثال 2

أحلل كل مقدار جبري مما يأتي تحليلًا كاملاً:

1 $6x + 18$

الخطوة 1 أجد العامل المشترك الأكبر للحددين $6x$ و 18 :

$$6x = \underbrace{2}_{\text{أحمر}} \times \underbrace{3}_{\text{أخضر}} \times x$$

$$18 = \underbrace{2}_{\text{أحمر}} \times \underbrace{3}_{\text{أخضر}} \times 3$$

أحلل كل حد إلى عوامله الأولية

وأحدد العوامل الأولية المشتركة

إذن، العامل المشترك الأكبر هو: $2 \times 3 = 6$

الخطوة 2 أكتب كل حد على صورة ناتج ضرب العامل المشترك الأكبر في بقية العوامل، ثم أخرج العامل

المشترك الأكبر خارج القوس.

$$6x + 18 = 6(x) + 6(3)$$

$$= 6(x + 3)$$

أعيد كتابة كل حد باستعمال العامل المشترك الأكبر

أخرج العامل المشترك الأكبر خارج القوس

إذن، $6x + 18 = 6(x + 3)$

2 $6b^2k + 8b^5k^3 + 12k^2$

الخطوة 1 أجد العامل المشترك الأكبر للحدود التي يتكوّن منها المقدار الجبري:

$$6b^2k = \underbrace{2}_{\text{أحمر}} \times 3 \times b \times b \times \underbrace{k}_{\text{أخضر}}$$

$$8b^5k^3 = \underbrace{2}_{\text{أحمر}} \times 2 \times 2 \times b \times b \times b \times b \times b \times \underbrace{k}_{\text{أخضر}} \times k \times k$$

$$12k^2 = \underbrace{2}_{\text{أحمر}} \times 2 \times 3 \times \underbrace{k}_{\text{أخضر}} \times k$$

أحلل كل حد إلى عوامله الأولية

إذن، العامل المشترك الأكبر هو: $2 \times k = 2k$

الخطوة 2 أكتب كل حد على صورة ناتج ضرب العامل المشترك الأكبر في بقية العوامل، ثم أخرج العامل

المشترك الأكبر خارج القوس.

$$6b^2k + 8b^5k^3 + 12k^2 = 2k(3b^2) + 2k(4b^5k^2) + 2k(6k)$$

$$= 2k(3b^2 + 4b^5k^2 + 6k)$$

أعيد كتابة كل حد باستعمال العامل المشترك الأكبر

أخرج العامل المشترك الأكبر خارج القوس

إذن، $6b^2k + 8b^5k^3 + 12k^2 = 2k(3b^2 + 4b^5k^2 + 6k)$

الوحدة 2

أتدقق من فهمي:



3 $20y + 12$

4 $7d^2 - 5d$

5 $3r^2 c^3 + 6r^5 + 21r^7$

6 $2 - 16x + 8y$

يمكن أيضًا تحليل بعض المقادير الجبرية التي تحتوي أربعة حدودٍ جبريةٍ أو أكثر باستعمال طريقة التجميع (grouping)، وذلك بتجميع الحدود التي توجد عوامل مشتركة بينها، ويمكن أن تكون هذه العوامل المشتركة مقادير جبرية (ليست حدودًا فحسب).

التحليل بتجميع الحدود

مفهوم أساسي



- **بالكلمات:** يمكن تحليل المقدار الجبري بالتجميع إذا تحققت فيه الشروط الآتية جميعها:
 - إذا احتوى أربعة حدودٍ أو أكثر.
 - إذا احتوى عوامل مشتركة بين الحدود يمكن تجميعها معًا.
 - إذا احتوى عاملين مشتركين متساويين أو أحدهما نظيرًا جمعياً (معكوس) للآخر.

$$\begin{aligned} ax + bx + ay + by &= (ax + bx) + (ay + by) \\ &= x(a + b) + y(a + b) \\ &= (a + b)(x + y) \end{aligned}$$

• **بالرموز:**

مثال 3

أحل كل مقدار جبري مما يأتي تحليلًا كاملاً:

1 $5ab + 10a + 7b + 14$

$$\begin{aligned} 5ab + 10a + 7b + 14 &= (5ab + 10a) + (7b + 14) \\ &= 5a(b + 2) + 7(b + 2) \\ &= (b + 2)(5a + 7) \end{aligned}$$

أجمع الحدود ذات العوامل المشتركة

أحل كل تجميع بإخراج العامل المشترك الأكبر

أخرج $(b + 2)$ عاملاً مشتركاً

2 $6m^3 - 12mn + m^2n - 2n^2$

$$6m^3 - 12mn + m^2n - 2n^2 = (6m^3 - 12mn) + (m^2n - 2n^2)$$

$$= 6m(m^2 - 2n) + n(m^2 - 2n)$$

$$= (m^2 - 2n)(6m + n)$$

أُجْمِعُ الحدودَ ذاتِ العواملِ المشتركةِ

أحلُّ كلِّ تجميعٍ بإخراجِ العاملِ المشتركِ الأكبرِ

أخرجُ $(m^2 - 2n)$ عاملاً مشتركاً

أتحقق من فهمي:



3 $x^3 + 2x^2 + 3x + 6$

4 $4s^2 - s + 12st - 3t$

عند تحليل المقادير الجبرية، ألاحظ أحياناً وجود معكوس بعض العوامل، فمثلاً $(3-x)$ هو معكوس $(x-3)$ لأنَّ

$$(3-x) = -1(x-3)$$

مثال 4

أحلُّ كلِّ مقدارٍ جبريٍّ ممَّا يأتي تحليلاً كاملاً:

1 $2m(7m - 3) + 4(3 - 7m)$

$$2m(7m-3) + 4(3-7m) = 2m(7m-3) + 4(-1)(7m-3)$$

$$= 2m(7m-3) - 4(7m-3)$$

$$= (7m-3)(2m-4)$$

أكتبُ $(3-7m)$ بصورة $-1(7m-3)$

أضربُ: $4(-1) = -4$

أخرجُ $7m-3$ عاملاً مشتركاً

2 $15x - 5xy + 6y^2 - 18y$

$$15x - 5xy + 6y^2 - 18y = (15x - 5xy) + (6y^2 - 18y)$$

$$= 5x(3-y) + 6y(y-3)$$

$$= 5x(3-y) + 6y(-1)(3-y)$$

$$= (3-y)(5x-6y)$$

أُجْمِعُ الحدودَ ذاتِ العواملِ المشتركةِ

أحلُّ كلِّ تجميعٍ بإخراجِ العاملِ المشتركِ الأكبرِ

أكتبُ $(y-3)$ بصورة $-1(3-y)$

أخرجُ $3-y$

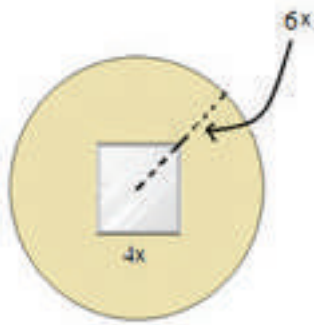
أتحقق من فهمي:

3 $a(r-t) + m(t-r)$

4 $2t - 14st + 7st^2 - t^2$

يُستعمل تحليل المقادير الجبرية في كثير من التطبيقات الحياتية والعلمية.

مثال 5: من الحياة



نجارة: يبين الشكل المجاور لوحًا خشبيًا دائري الشكل طول نصف قطره $6x$ سنتيمترًا، تتوسطه مرآة مربعة طول ضلعها x مترًا. أكتب مقدارًا جبريًا يمثل مساحة المنطقة الظاهرة من اللوح الخشبي بدلالة x ، وأحلل المقدار تحليلًا كاملاً.

الخطوة 1 أجد مساحة المنطقة الظاهرة من اللوح الخشبي:

$$A_1 = r^2 \pi$$

قانون مساحة الدائرة

$$= (6x)^2 \pi = 36\pi x^2$$

بتعويض $r = 6x$

$$A_2 = s^2$$

قانون مساحة المربع

$$= (4x)^2 = 16x^2$$

بتعويض $s = 4x$

$$A = A_1 - A_2$$

مساحة المنطقة الظاهرة من اللوح الخشبي

$$= 36\pi x^2 - 16x^2$$

بالتعويض

إذن، مساحة المنطقة الظاهرة من اللوح الخشبي تساوي $36\pi x^2 - 16x^2$ سنتيمترًا مربعًا.

الخطوة 2 أحلل المقدار $81\pi x^2 - 16x^2$ تحليلًا كاملاً:

$$36\pi x^2 = 2 \times 3 \times 2 \times 3 \times \pi \times x \times x$$

أحلل كل حد إلى عوامله الأولية

$$16x^2 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times x \times x$$

وأحدد العوامل الأولية المشتركة

إذن، العامل المشترك الأكبر هو: $2 \times 2 \times x \times x = 4x^2$

$$36\pi x^2 - 16x^2 = 4x^2 (9\pi) - 4x^2 (4)$$

أعيد كتابة كل حد باستعمال العامل المشترك الأكبر

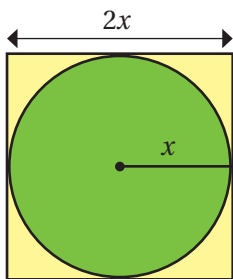
$$= 4x^2 (9\pi - 4)$$

أخرج العامل المشترك الأكبر خارج القوس

$$36\pi x^2 - 16x^2 = 4x^2 (9\pi - 4)$$



أتتحقق من فهمي:



يبيّن الشكل المجاور قطعة أرضٍ مربعة الشكل، يتوسطها حوض قمح دائري الشكل يُروى بمرشّ دوّار. أكتب مقداراً جبرياً يمثل مساحة المنطقة غير المزروعة بالقمح بدلالة x ، وأحلّ المقدار تحليلًا كاملاً.

أُتدرب وأحل المسائل

أجد العامل المشترك الأكبر للحدّين الجبريين في كلٍّ ممّا يأتي:

1 $12a, 16ab$

2 $8a, 12b$

3 $10x^6 y^3, 45x y^7$

4 $12d^2 w^2 r^5, 4w^3 d^{10}$

5 $n^3 s^5 r^5, 6ns^3 r^7$

6 $5k^8 w^3 h^2, 11k^2 h^4$

أحلّ كلَّ مقدارٍ جبريٍّ ممّا يأتي تحليلًا كاملاً:

7 $6r^2 - 10r$

8 $ab^2 - 2ab$

9 $12n^2 m - 8nm^3$

10 $15wx - 10wy^2$

11 $4t^2 + 2t - 12tu$

12 $12p + 24q - 6$

أحلّ كلَّ مقدارٍ جبريٍّ ممّا يأتي تحليلًا كاملاً:

13 $y - 2y^2 - 18y + 9$

14 $48ab - 90a + 32b - 60$



15 **طاقة بديلة:** ركب أحمد خلايا شمسية على سطح منزله؛

لاستغلال طاقة الشمس في توليد الكهرباء، فإذا علمتُ

أنَّ مساحة اللوح الشمسيّ $6y(y-4) + 10(4-y)$

وحدة مربعة، وطولُه $(4-y)$ ، فأجد عرضه بدلالة y .

أكمل التحليل في كلٍّ ممّا يأتي:

16 $12y - 32 = \dots (3y - 8)$

17 $18c - 6 = \dots (\dots - 1)$

18 $t^2 + t = \dots (\dots + 1)$

19 $2a^2 + ab = \dots (2a + \dots)$

الوحدة 2



حواسيب: حافظة أقراص مدمجة مربعة الشكل، طول ضلعها $(2x)$ ، فإذا كان نصف قطر القرص المدمج (x) ، فأكتب مقدارًا جبريًا يمثل المساحة السوداء المحيطة بالقرص في الشكل المجاور، وأحلله تحليلًا كاملاً.

20

معلومة

تُطلى واجهة القرص المدمج التي تخزن البيانات بطبقة رقيقة من الألمنيوم النقي، وتُستعمل أشعة الليزر في تسجيل البيانات عليها.

21

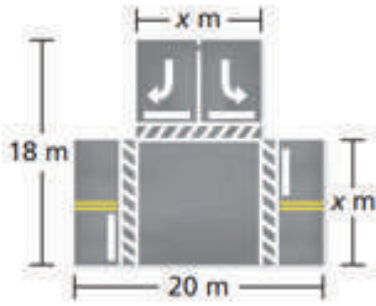
هندسة: يمثل المقدار الجبري $2\pi r^2 + 2\pi rh$ مساحة سطح أسطوانة حيث r نصف قطر القاعدة و h الارتفاع. أحل هذا المقدار الجبري تحليلًا كاملاً.

22

أجهزة: أعود إلى فقرة (استكشف)، وأحل المسألة.

23

مرور: يظهر في الشكل المجاور تقاطع مروري أعيد تعييده. أكتب مقدارًا جبريًا يمثل مساحة المنطقة التي أعيد تعييدها، وأحلله تحليلًا كاملاً.



مهارات التفكير العليا

24

أكتشف الخطأ: يقول كل من خالد وسلمان ومثنى إنه حلل المقدار الجبري تحليلًا كاملاً على النحو الآتي:

مثنى	سلمان	خالد
$18h^2 + 45h = 3h(6h + 15)$	$2a^2 - 3a = a(2^2 - 3)$	$4g + 6 = 4(g + 2)$

أكتشف الخطأ في حل كل منهم، وأصححه.

تحد: أستخدم الحدود الجبرية المعطاة لأكمل كلاً مما يأتي:

$$2g \quad 3g \quad 4g \quad 15g \quad 24g \quad 6g^2 \quad 5 \quad 3 \quad 18$$

25

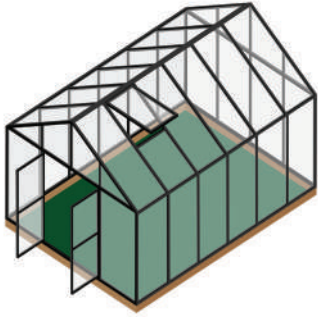
$$\dots + \dots = \dots (\dots + \dots)$$

26

$$\dots - \dots = 6 (\dots - \dots)$$

27

أكتب: أكتب فقرةً أبين فيها كيفية تحليل مقدار جبري بطريقة التجميع.



أستكشف

لدى عمران بيت زجاجي للزراعة يغطي منطقة مستطيلة الشكل، مساحتها $x^2 + 5x + 6$ متراً مربعاً وطولها $(x + 2)$ متراً. ما عرض المنطقة التي يغطيها البيت الزجاجي؟

فكرة الدرس

أحلل ثلاثيات حدود على صورة $x^2 + bx + c$

عند ضرب مقدارين جبريين، فإن كلا منهما يكون عاملاً لنتائج الضرب؛ لذا يمكن اتباع خطوات عكسية لعملية الضرب لتحليل بعض المقادير الجبرية.

$$\begin{aligned}(x + 2)(x + 3) &= x^2 + 3x + 2x + 2 \times 3 \\ &= x^2 + (3 + 2)x + 2 \times 3 \\ &= x^2 + (5)x + 6\end{aligned}$$

خاصية التوزيع

بتجميع الحدين المشابهين

بالتبسيط

ألاحظ النمط الآتي في عملية الضرب السابقة:

$$\begin{aligned}(x + 2)(x + 3) &= x^2 + (3 + 2)x + (2 \cdot 3) \\ (x + m)(x + n) &= x^2 + (n + m)x + mn \\ &= x^2 + \underbrace{(m + n)}_{bx} x + \underbrace{mn}_c \\ x^2 + bx + c\end{aligned}$$

$$b = m + n \text{ and } c = mn$$

ألاحظ أن معامل الحد الأوسط يساوي مجموع m و n ، وأن الحد الأخير يساوي ناتج ضرب m و n .

ويمكن استعمال هذا النمط لتحليل بعض المقادير الجبرية على صورة $x^2 + bx + c$

تحليل ثلاثية الحدود $x^2 + bx + c$

مفهوم أساسي

• **بالكلمات:** لتحليل ثلاثية حدود على صورة $x^2 + bx + c$ أجد عددين صحيحين m و n مجموعهما يساوي (b) ، وحاصل ضربهما يساوي (c) ، ثم أكتب $x^2 + bx + c$ على صورة $(x + m)(x + n)$.

• **بالرموز:** $x^2 + bx + c = (x + m)(x + n)$ حيث $m + n = b$ ، $m \times n = c$

الوحدة 2

إذا كانت إشارة c موجبة فيكون m و n الإشارة نفسها. ويعتمد تحديد إشارة كل من m و n (موجبة أو سالبة) على إشارة b ، فإذا كانت إشارة b موجبة فإن إشارتهما موجبة، وإذا كانت إشارة b سالبة، فإن إشارتهما سالبة.

مثال 1

$$x^2 + 7x + 12$$

بما أن $c = 12$ ، $b = 7$ فيجب إيجاد عددين موجبين مجموعهما 7 وحاصل ضربهما 12
أنشئ جدولاً، وأنظم فيه أزواج عوامل العدد 12 الموجبة، وأحدد العاملين اللذين مجموعهما 7

أزواج عوامل العدد 12	1, 12	2, 6	3, 4
مجموع العاملين	13	8	7

العاملان الصحيحان

$$x^2 + 7x + 12 = (x + m)(x + n)$$

اكتب القاعدة

$$= (x + 3)(x + 4)$$

$$m = 3, n = 4$$

أنتحق: أتحقق من صحة التحليل بضرب العاملين:

$$(x + 3)(x + 4) = x^2 + 4x + 3x + 12$$

خاصية التوزيع

$$= x^2 + 7x + 12 \quad \checkmark$$

بالتبسيط

أنتحق من فهمي: 

1 $x^2 + 11x + 10$

2 $x^2 + 9x + 14$

إذا كانت b سالبة، و c موجبة في ثلاثي الحدود $x^2 + bx + c$ ، فإن لكل من m و n إشارة سالبة.

مثال 2

أحلل $x^2 - 10x + 16$

في ثلاثي الحدود المُعطى $c = 16$, $b = -10$ ، وهذا يعني أن $m + n$ سالبة و nm موجبة. إذن، يجب أن تكون إشارة كل من n و m سالبة. أنشئ جدولاً، وأنظم فيه أزواج عوامل العدد 16 السالبة، وأحدد زوج العوامل الذي مجموعهُ -10

العاملان الصحيحان

أزواج عوامل العدد 16 السالبة	-1, -16	-2, -8	-4, -4
مجموع العاملين	-17	-10	-8

$$\begin{aligned} x^2 - 10x + 16 &= (x + m)(x + n) \\ &= (x - 2)(x - 8) \end{aligned}$$

أكتب القاعدة

$$m = -2, n = -8 \text{ أعرّض}$$

أنتحق: أنتحق من صحة التحليل بضرب العاملين:

$$\begin{aligned} (x - 2)(x - 8) &= x^2 - 2x - 8x + 16 \\ &= x^2 - 10x + 16 \quad \checkmark \end{aligned}$$

خاصية التوزيع

بالتبسيط

أنتحق من فهمي: 

1 $y^2 - 5y + 6$

2 $x^2 - 11x + 30$

إذا كانت إشارة c سالبة في ثلاثي الحدود $x^2 + bx + c$ ، فإن لكل من m و n إشارتين مختلفتين.

مثال 3

أحلل $x^2 + x - 20$

في ثلاثي الحدود المُعطى $c = -20$, $b = 1$ ، وهذا يعني أن إشارة $m + n$ موجبة وإشارة nm سالبة. إذن، يجب أن تكون إشارة n أو m سالبة، وليس كليهما. أنشئ قائمة منظمة من أزواج عوامل العدد 20 مختلفة الإشارة، وأحدد زوج العوامل الذي مجموعهُ 1

العاملان الصحيحان

أزواج عوامل العدد (-20) مختلفة الإشارة	1, -20	-1, 20	2, -10	-2, 10	4, -5	-4, 5
مجموع العاملين	-19	19	-8	8	-1	1

الوحدة 2

$$x^2 + x - 20 = (x + m)(x + n) \\ = (x - 4)(x + 5)$$

أكتب القاعدة

$$m = -4, n = 5 \text{ أعوض}$$

أتحقق: أتحقق من صحة التحليل بضرب العاملين:

$$(x - 4)(x + 5) = x^2 + 5x - 4x - 20 \\ = x^2 + x - 20 \quad \checkmark$$

خاصية التوزيع
بالتبسيط

أتحقق من فهمي:



1 $x^2 + 2x - 8$

2 $x^2 - x - 42$

يُستعمل التحليل لإيجاد مقدار جبري يمثل طول أو عرض مستطيل مساحته معطاة على صورة ثلاثي حدود $x^2 + bx + c$ ، حيث يمثل الطول والعرض عاملَي ثلاثي الحدود.



مثال 4: من الحياة



يمثل ثلاثي الحدود $x^2 + 9x + 18$ مساحة مرآة مستطيلة الشكل بالمتر المربع. إذا كان عرض المرآة $x + 3$ مترًا، فأجد كلاً من طولها ومحيطها بدلالة x .

الخطوة 1 أجد طول المرآة بدلالة x :

يمثل عرض المرآة $(x + 3)$ أحد عاملَي $x^2 + 9x + 18$ إذن $m = 3$

أبحث عن قيمة n التي ناتج ضربها في 3 يساوي 18 وناتج جمعها إلى العدد 3 يساوي 6

إذن، $n = 6$ ، والمقدار الجبري الذي يمثل طول المرآة هو $(x + 6)$

الخطوة 2 أجد محيط المرآة بدلالة x :

$$P = 2l + 2w$$

$$= 2(x + 6) + 2(x + 3)$$

$$= 2x + 12 + 2x + 6$$

$$= 4x + 18$$

قانون محيط المستطيل

أعوض: $l = (x + 6), w = (x + 3)$

خاصية التوزيع

أجمع الحدود المتشابهة

إذن، محيط المرآة يساوي $4x + 18$ مترًا.



أتحقق من فهمي:



يمثل ثلاثي الحدود $x^2 - 25x + 100$ مساحة باب مستطيل الشكل بالمتري المربع. إذا كان عرض الباب $x-5$ ، فأجد كلاً من طولهِ ومحيطهِ بدلالة x .

أدرب وأحل المسائل



أحل كل ما يأتي:

- | | | |
|---------------------|---------------------|---------------------|
| 1 $x^2 + 2x - 24$ | 2 $y^2 + 3y - 10$ | 3 $x^2 + 29x + 100$ |
| 4 $w^2 - 6w + 8$ | 5 $-10q + q^2 - 21$ | 6 $y^2 + 20y + 100$ |
| 7 $a^2 + 5a + 6$ | 8 $w^2 - 9w - 10$ | 9 $x^2 + x - 30$ |
| 10 $13y - 30 + y^2$ | 11 $w^2 + 11w + 18$ | 12 $t^2 - t - 90$ |
| 13 $f^2 + 22f + 21$ | 14 $h^2 - h - 72$ | 15 $m^2 - 18m + 81$ |

يمثل كل ثلاثي حدودٍ مما يأتي مساحةً مستطيلٍ بالمتري المربع. أجد مقدارين جبريين يمثلان طولاً وعرضاً ممكنين لكل مستطيل.

- | | | |
|-------------------|-------------------|--------------------|
| 16 $x^2 + x - 72$ | 17 $x^2 - 8x - 9$ | 18 $x^2 + 2x - 48$ |
|-------------------|-------------------|--------------------|

أحل كل ما يأتي:

- | | | |
|----------------------------|-----------------------|------------------------|
| 19 $3x^3y + 18x^2y - 21xy$ | 20 $2x^3 - 2x^2 - 4x$ | 21 $2x^3 - 4x^2 - 6x$ |
| 22 $5x^3y - 35x^2y + 50xy$ | 23 $3x^3 - 6x^2 - 6x$ | 24 $4x^3 - 8x^2 - 12x$ |

إرشاد

أولاً: أخرج العامل المشترك الأكبر للحدود الثلاثة، ثم أحل.

الوحدة 2



صحة: تقوم مؤسسة الحسين للسرطان بحملة توعية بأهمية الفحص المبكر للسرطان، عن طريق لوحات إعلانية مستطيلة الشكل على الطرقات.

إذا كانت مساحة إحدى هذه اللوحات $(x^2 + 14x + 48)$ متراً مربعاً وعرضها $(x + 6)$ متراً، فأجد طول اللوحة ومحيطها بدلالة (x) .



ورق صحي: علبة ورق صحي على شكل متوازي مستطيلات، حجمه $x^3 + 5x^2 + 4x$ سنتيمتراً مكعباً. أجد قياساً ممكناً لكل من طول العلبة وعرضها وارتفاعها بدلالة x .

تبرير: أجد القيم الممكنة للعدد الصحيح m في كل مما يأتي، بحيث يكون ثلاثي الحدود قابلاً للتحليل، ثم أحلله:

27 $x^2 + mx - 15$

28 $x^2 - 7x + m$

تحذ: أحلل المقدار $(x - 3)^2 - 2(x - 3) - 8$

x^2	
	6

تحذ: في الشكل المجاور مستطيل بُعده $x + a$, $x + b$ ، قُسم إلى أربعة أجزاء مساحة اثنين منها x^2 و 6 وحدات مربعة، أبين أنه توجد قيمتان ممكنتان لكل من a و b .

أكتشف الخطأ: حلل كل من آدم وماريا العبارة $y^2 + 6y - 16$ على النحو الآتي:

ماريا
 $y^2 + 6y - 16 = (y + 2)(y - 8)$

آدم
 $y^2 + 6y - 16 = (y - 2)(y + 8)$

من منهما إجابتُهُ صحيحة؟ أبرر إجابتي.

أكتب: كيف أجد قيمة كل من m و n عند تحليل $y^2 - 3y - 4$ على صورة

$(y + m)(y + n)$ ؟

إرشاد

مؤسسة الحسين للسرطان هي أكبر مؤسسة مجتمعية في الأردن مكرسة لمكافحة مرض السرطان، وتتضمن مهامها: جمع التبرعات، وحشد الجهود لمكافحة السرطان، وتنفيذ برامج الوقاية منه، والكشف المبكر عنه.

مهارات التفكير العليا

إرشاد

يمكنني فك الأقواس ثم التحليل، ويمكنني أيضاً فرض أن $y = x - 3$ وإتمام الحل.



أستكشف

يُستعمل المقدار الجبري
 $\frac{1}{2} du^2 - \frac{1}{2} dv^2$ لحساب

الفرق بين قيمتي الضغط الجوي فوق جناح الطائرة وأسفله، حيث d هي كثافة الهواء و v سرعة الهواء فوق الجناح و u سرعة الهواء أسفله. أحل هذا المقدار الجبري تحليلًا كاملاً.



فكرة الدرس

- أحل مقداراً جبرياً يمثل فرقاً بين مربعين.
- أحل مربعاً كاملاً ثلاثي الحدود.

المصطلحات

مربع كامل ثلاثي الحدود.

تحليل

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

تبسيط

تعلمت سابقاً كيفية ضرب مقدارين جبريين على صورة $(a-b)(a+b)$ ، حيث يكون الناتج دائماً فرقاً بين مربعين على صورة $a^2 - b^2$. ولتحليل الفرق بين مربعين يمكن اتباع خطوات عكسية لعملية ضرب مجموع حدين في الفرق بينهما.

الفرق بين مربعين

مفهوم أساسي

- **بالكلمات:** الفرق بين مربعي حدين يساوي ناتج ضرب مجموع الحدين في الفرق بينهما.

• **بالرموز:** $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

مثال 1 أحل كلاً مما يأتي:

1 $x^2 - 25$

$$\begin{aligned} x^2 - 25 &= x^2 - 5^2 \\ &= (x - 5)(x + 5) \end{aligned}$$

أكتب المقدار على صورة $a^2 - b^2$
 أحل الفرق بين مربعين

2 $4y^2 - 9z^2$

$$\begin{aligned} 4y^2 - 9z^2 &= (2y)^2 - (3z)^2 \\ &= (2y - 3z)(2y + 3z) \end{aligned}$$

أكتب المقدار على صورة $a^2 - b^2$
 أحل الفرق بين مربعين

الوحدة 2

أتحقق من فهمي:



3 $x^2 - 64$

4 $100y^2 - 36$

5 $81d^2 - 49r^2$

6 $0.64c^2 - 1$

يحتاج تحليل بعض المقادير الجبرية إلى إجراء خطوتين، مثل إخراج العامل المشترك الأكبر للحدود جميعها، ثم تحليل ما تبقى من المقدار باستعمال قاعدة تحليل الفرق بين مربعين.

مثال 2

أحل كلًا مما يأتي

1 $27xy^3 - 3xy$

$$\begin{aligned} 27xy^3 - 3xy &= 3xy(9y^2 - 1) \\ &= 3xy(3y - 1)(3y + 1) \end{aligned}$$

أحل بإخراج العامل المشترك الأكبر
أحل المقدار $9y^2 - 1$ كفرق بين مربعين

2 $y^4 - 1$

$$\begin{aligned} y^4 - 1 &= (y^2)^2 - (1)^2 \\ &= (y^2 - 1)(y^2 + 1) \\ &= (y - 1)(y + 1)(y^2 + 1) \end{aligned}$$

أكتب المقدار على صورة $a^2 - b^2$
أحل الفرق بين مربعين
أحل المقدار $y^2 - 1$ كفرق بين مربعين

3 $2b^3 - 18 + ab^2 - 9a$

$$\begin{aligned} 2b^3 - 18 + ab^2 - 9a &= (2b^3 - 18) + (ab^2 - 9a) \\ &= 2(b^3 - 9) + a(b^2 - 9) \\ &= (b^2 - 9)(2 + a) \\ &= (b - 3)(b + 3)(2 + a) \end{aligned}$$

أجمع الحدود ذات العامل المشترك
أحل كل تجميع بإخراج العامل المشترك
أخرج المقدار $(b^2 - 9)$ عاملاً مشتركاً
أحل المقدار $(b^2 - 9)$ كفرق بين مربعين

أتحقق من فهمي:



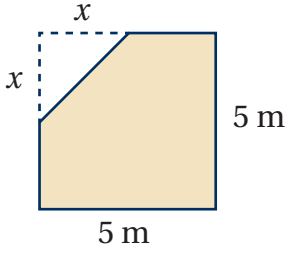
4 $b^4 - c^4$

5 $6w^3 - 24w$

6 $4m^4 - 9m^2 + 8m^2k - 18k$



مثال 3: من الحياة



هندسة معمارية: يبين الشكل المجاور مخطط غرفة جلوس في منزل رغد. أكتب مقداراً جبرياً يمثل مساحة الغرفة، ثم أحله.

مساحة الغرفة تساوي ناتج طرح مساحة المثلث من مساحة المربع.

الخطوة 1 أكتب مقداراً جبرياً يمثل مساحة الغرفة:

$$A_1 = s^2$$

$$= (5)^2 = 25$$

$$A_2 = \frac{1}{2}bh$$

$$= \frac{1}{2}x^2$$

$$A = A_2 - A_1$$

$$= 25 - \frac{1}{2}x^2$$

قانون مساحة المربع

بتعويض $s = 5$

قانون مساحة المثلث

بتعويض $b = x, h = x$

مساحة الغرفة

بالتعويض

إذن، مساحة الغرفة تساوي $25 - \frac{1}{2}x^2$ متراً مربعاً.

الخطوة 2 أحل المقدار $25 - \frac{1}{2}x^2$

$$25 - \frac{1}{2}x^2 = 5^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}x\right)^2$$

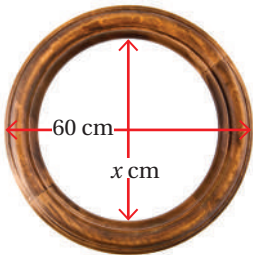
$$= \left(5 - \frac{1}{\sqrt{2}}x\right)\left(5 + \frac{1}{\sqrt{2}}x\right)$$

أكتب المقدار على صورة $a^2 - b^2$

أحل الفرق بين مربعين

$$\text{إذن، } 25 - \frac{1}{2}x^2 = \left(5 - \frac{1}{\sqrt{2}}x\right)\left(5 + \frac{1}{\sqrt{2}}x\right)$$

أتحقق من فهمي:



أعمال فنية: صنع مراد إطار صورة دائري الشكل. أكتب مقداراً جبرياً يمثل مساحة الإطار الخشبي، ثم أحله.

الوحدة 2

تعلمتُ سابقاً أنَّ أعداداً مثل 25, 49, 64 تسمى مربعاتٍ كاملة؛ لأنَّ كلَّ منها يساوي ناتج ضرب عددٍ في نفسه:

$$25 = 5 \times 5 = 5^2$$

$$49 = 7 \times 7 = 7^2$$

$$64 = 8 \times 8 = 8^2$$

ويعدُّ المقدارُ الجبريُّ الذي على صورة $(a + b)^2$ مربعاً كاملاً أيضاً؛ لأنَّه يساوي ناتج ضرب $(a + b)$ في نفسه. وتعلمتُ في الدرس الأول من هذه الوحدة أنَّ تبسيط $(a + b)^2$ و $(a - b)^2$ يتبع قاعدة ثابتة، وأنَّ النتيجة تكون دائماً مقداراً جبرياً يحتوي ثلاثة حدودٍ كما يأتي:

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b)$$

$$= a^2 + ab + ab + b^2$$

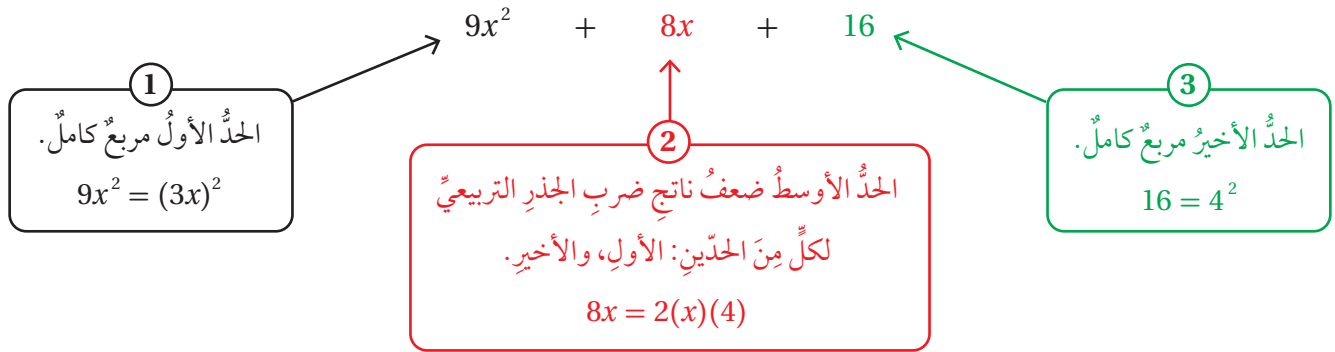
$$= a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = (a - b)(a - b)$$

$$= a^2 - ab - ab + b^2$$

$$= a^2 - 2ab + b^2$$

يسمى ناتج الضرب في كلِّ من الحالتين أعلاه **مربعاً كاملاً ثلاثي الحدود** (perfect-square trinomial)؛ لأنَّه ينتج من ضرب مقدارٍ جبريٍّ في نفسه، ويمكنُ بطريقةٍ عكسية تحليل أيِّ ثلاثي حدودٍ على صورة $a^2 + 2ab + b^2$ إن كان يمثل مربعاً كاملاً إذا حقق الشروط الثلاثة الآتية:



تحليل المربع الكامل الثلاثي الحدود

مفهوم أساسي

• **بالرموز:** $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2 = (a + b)(a + b)$

$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2 = (a - b)(a - b)$

• **مثال:** $x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2 = (x + 5)(x + 5)$

$x^2 - 8x + 16 = (x - 4)^2 = (x - 4)(x - 4)$

أحدد أن كل ثلاثية حدودٍ ممّا يأتي تمثل مربعاً كاملاً أم لا، وإذا كانت تمثله فأحلّها:

1 $x^2 + 6x + 9$

• هل الحدّ الأول مربع كامل؟ نعم

• هل الحدّ الأوسط يساوي $2 \times x \times 3$ ؟ نعم؛ لأنّ $6x = 2(x)(3)$

• هل الحدّ الأخير مربع كامل؟ نعم؛ لأنّ $9 = 3^2$

بما أن الشروط جميعها متحققة، فإنّ $x^2 + 6x + 9$ تشكّل مربعاً كاملاً.

$$\begin{aligned} x^2 + 6x + 9 &= (x)^2 + 2(x)(3) + (3)^2 && \text{أكتب بصورة } a^2 + 2ab + b^2 \\ &= (x + 3)^2 = (x + 3)(x + 3) && \text{أحلّ} \end{aligned}$$

2 $x^2 + 2x + 16$

• هل الحدّ الأول مربع كامل؟ نعم

• هل الحدّ الأوسط يساوي $2 \times x \times 4$ ؟ نعم؛ لأنّ $2x \neq 2(x)(4)$

• هل الحدّ الأخير مربع كامل؟ نعم؛ لأنّ $16 = 4^2$

بما أن الشرط الثاني غير متحقّق، فإنّ $x^2 + 2x + 16$ ليست مربعاً كاملاً، ولا يمكن تحليله.

أتحقّق من فهمي:



3 $x^2 - 24x + 144$

4 $x^2 - 10x + 36$

5 $x^2 + \frac{2}{5}x + \frac{1}{25}$

حين لا تُساوي قيمة العامل المشترك الأكبر لحدود المقدار الجبري 1، فإنّ من الأسهل البدء بإخراج العامل المشترك الأكبر، ثم اختيار طريقة التحليل المناسبة بحسب الترتيب المبين في الجدول أدناه.

الوحدة 2

تحليل المقادير الجبرية

ملخص المفهوم



طريقة التحليل	عدد الحدود الجبرية
إخراج العامل المشترك الأكبر	2 أو أكثر
الفرق بين مربعين	2
$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$ $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$	3
$x^2 + bx + c = (a+m)(a+n)$ $m + n = b$ and $mn = c$	
$ax + bx + ay + by = x(a+b) + y(a+b)$ $= (a+b)(x+y)$	4 أو أكثر

أدرب وأحل المسائل



أحل كل ما يأتي:

1 $u^2 - 64$

2 $\frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{25}$

3 $0.36y^2 - 1$

4 $v^2 - 5$

5 $a^2 - w^2 z^2$

6 $-16y^2 + 49$

أحل كل ما يأتي:

7 $ab^2 - 100a$

8 $x - x^3$

9 $4m^4 - 9m^2 + 6m - 1$

10 $-4bx^2 - 9y^2 + bd^2 + 25$

أحدد أن كل ثلاثية حدود مما يأتي تمثل مربعاً كاملاً أم لا، وإذا كانت تمثله فأحلها:

11 $w^2 - 18w + 81$

12 $x^2 + 2x - 1$

13 $y^2 + 8y + 16$

14 $9x^2 - 30x + 10$

أتذكر

أتذكر أن:

$$a^2 - b^2 = -b^2 + a^2$$

معلومة

درجة الانصهار هي درجة الحرارة التي تتحول عندها المادة من الحالة الصلبة إلى الحالة السائلة، ودرجة انصهار النحاس 1085°C



أحلل كلاً مما يأتي:

15 $9x^2 - 3x - 20$

17 $9t^3 + 66t^2 - 48t$

19 $20n^2 + 34n + 6$

21 $18y^2 - 48y + 32$

23 $45c^2 - 32cd$

25 $5a^2 + 7a + 6b^2 - 4b$

16 $50g^2 + 40g + 8$

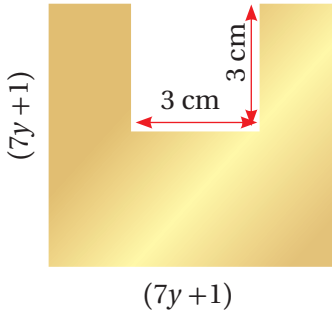
18 $4a^2 - 36b^2$

20 $5y^2 - 90$

22 $90g + 27g^2 - 75$

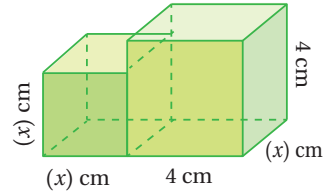
24 $4a^3 + 3a^2b^2 + 8a + 6b^2$

26 $x^2y^2 - y^2 - x^2 + x^2z^2$



نحاس: يبين الشكل المجاور صفيحة من النحاس قبل صهرها وتحويلها إلى مستطيل له المساحة نفسها، أجد قياسين ممكنين لطول المستطيل وعرضه بدلالة y .

يبيّن الشكل المجاور مخططاً لمستودع تخزين متجاورين. أكتب مقداراً جبرياً يمثل الفرق بين حجمي المستودعين، ثم أحله.



تحد: مثلث قائم الزاوية مساحته $9y^2 - 16$ وحدة مربعة. أجد قياسين ممكنين لطول قاعدته وارتفاعه بدلالة y .

أكتشف الخطأ: حل إبراهيم المقدار

$$n^2 - 64 = n^2 - 8^2$$



$$= (n-8)^2$$

$n^2 - 64$ تحليلاً كاملاً على النحو الآتي:

هل إجابته صحيحة؟ أبرر إجابتي.

تبرير: أصف طريقتين لتبسيط $(2x-5)^2 - (x-4)^2$ ، وأبين أي الطريقتين أسهل، مبرراً إجابتي.

أكتب: أكتب طريقة تحليل فرق بين مربعين.

أستكشف



يمثل المقدار الجبري $x^3 + 5x^2 + 4x$ حجم حجر بناء عازل للحرارة بالسنتيمتر المكعب. إذا كانت مساحة قاعدة الحجر $x^2 + x$ سنتيمتراً مربعاً، فأجد ارتفاعه بدلالة x .

فكرة الدرس

أكتب مقادير جبرية نسبية في أبسط صورة.

المصطلحات

المقدار الجبري النسبي.

المقدار الجبري النسبي (rational expression) هو كسر بسطه ومقامه مقداران جبريان.

$$\frac{(x^2 + 2x + 1)}{(x + 1)}$$

$$\frac{6xy^4}{5y}$$

$$\frac{3a - 2}{a^2 + 6a + 8}$$

مقادير جبرية نسبية

يكون المقدار الجبري النسبي في أبسط صورة إذا كان العامل المشترك الأكبر لكل من بسطه ومقامه يساوي 1

مثال 1

أكتب كلاً مما يأتي في أبسط صورة:

1 $\frac{-5x^2 y^3}{20x^4 y}$

$$\frac{-5x^2 y^3}{20x^4 y} = \frac{(5x^2 y)(-y^2)}{(5x^2 y)(4x^2 y)}$$

العامل المشترك الأكبر للبسط والمقام يساوي $(5x^2 y)$

$$\frac{-5x^2 y^3}{20x^4 y} = \frac{\cancel{(5x^2 y)}(-y^2)}{\cancel{(5x^2 y)}(4x^2 y)}$$

أقسم كلاً من البسط والمقام على $(5x^2 y)$

$$= \frac{-y^2}{4x^2 y}$$

أبسط

أتحقق من فهمي:

2 $\frac{35yz^2}{14y^2z}$

3 $\frac{14a^3 b^2}{42ab^3}$

يمكن استعمال طرائق التحليل التي تعلمتها في الدروس السابقة لاختصار أيّ عوامل مشتركة لكلّ من بسط المقدار الجبري النسبي ومقامه.

مثال 2

أكتب كلّ ممّا يأتي في أبسط صورة:

1 $\frac{6x + 12}{6}$

$$\frac{6x + 12}{6} = \frac{6(x + 2)}{6}$$

$$= (x + 2)$$

أخرج العدد (6) عاملاً مشتركاً لحدود البسط

أقسم كلّاً من البسط والمقام على (6)

2 $\frac{2x^2 + 2x}{2x}$

$$\frac{2x^2 + 2x}{2x} = \frac{2x(x + 1)}{2x}$$

$$= \frac{\cancel{2x}(x + 1)}{\cancel{2x}} = x + 1$$

أخرج (2x) عاملاً مشتركاً لحدود البسط

أقسم البسط والمقام على (2x)

3 $\frac{x - 1}{x^3 - x^2}$

$$\frac{x - 1}{x^3 - x^2} = \frac{x - 1}{x^2(x - 1)}$$

$$= \frac{\cancel{(x - 1)}}{x^2\cancel{(x - 1)}} = \frac{1}{x^2}$$

أحلل المقام

أقسم كلّاً من البسط والمقام على (x-1)

أتحقق من فهمي: 

4 $\frac{2x + 2}{2}$

5 $\frac{16x^2 + 8x}{2x + 1}$

6 $\frac{x - 2x^2}{8 - 16x}$

يمكن استعمال طريقة التجميع - التي تعلمتها سابقاً - في هذه الوحدة لتحليل بسط المقدار الجبري النسبي أو مقامه أو كليهما واختصار أيّ عوامل مشتركة لهما. وعند تحليل بسط المقدار الجبري النسبي ومقامه ألاحظ أحياناً وجود معكوس بعض العوامل، فمثلاً (6-x) هو معكوس (x-6)؛ لأنّ (x-6) = -1(x-6)؛ لذا أكتب $\frac{(6-x)}{(x-6)}$ على صورة $\frac{-1(x-6)}{(x-6)}$

الوحدة 2

مثال 3

أكتب كلاً مما يأتي في أبسط صورة:

$$1 \quad \frac{5xy - 10x + 2y - 4}{2 - y}$$

$$\frac{5xy - 10x + 2y - 4}{2 - y} = \frac{(5xy - 10x) + (2y - 4)}{2 - y}$$

$$= \frac{5x(y-2) + 2(y-2)}{2 - y}$$

$$= \frac{(y-2)(5x+2)}{(2-y)}$$

$$= \frac{(y-2)(5x+2)}{-(y-2)}$$

$$= \frac{\cancel{(y-2)}(5x+2)}{-\cancel{(y-2)}} = -(5x+2)$$

أجمع الحدود ذات العامل المشترك

أحل كل تجميع بإخراج العامل المشترك الأكبر

أخرج $y-2$ عاملاً مشتركاً لحدود البسط

أكتب $(2-y)$ على صورة $-(y-2)$

أقسم كلاً من البسط والمقام على $(y-2)$

أنتحقق من فهمي:



$$2 \quad \frac{2ab - 6b + 6 + 2a}{a - 3}$$

$$3 \quad \frac{5h - 3g}{3g^2 - 5gh + 3g - 5h}$$

تحتوي بعض المقادير الجبرية النسبية ثلاثيات حدود على الصورة $x^2 - bx + c$ أو مقادير جبرية على صورة فرق بين مربعين، ويمكن استعمال طرائق التحليل التي تعلمتها في الدروس السابقة لتحليل هذه المقادير الجبرية، واختصار أي عوامل مشتركة لكل من بسط المقادير الجبرية النسبية ومقامه.

مثال 4

أكتب كلاً مما يأتي في أبسط صورة:

$$1 \quad \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}$$

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} = \frac{(x-2)(x-1)}{x - 2}$$

$$= \frac{\cancel{(x-2)}(x-1)}{\cancel{x-2}} = x - 1$$

أحل ثلاثية الحدود

أقسم كلاً من البسط والمقام على $(x-2)$

2 $\frac{x^2 + 6x + 8}{x^2 - 16}$

$$\frac{x^2 + 6x + 8}{x^2 - 16} = \frac{(x+2)(x+4)}{(x-4)(x+4)}$$

$$= \frac{(x+2)\cancel{(x+4)}}{(x-4)\cancel{(x+4)}} = \frac{x+2}{x-4}$$

أحلّ ثلاثيّة الحدود في البسط والفرق بين المربعين في المقام

أقسم كلّاً من البسط والمقام على $(x + 4)$

3 $\frac{x^2 + 10x + 25}{x^2 + 5x}$

$$\frac{x^2 + 10x + 25}{x^2 + 5x} = \frac{(x+5)^2}{x^2 + 5x}$$

أحلّ ثلاثيّة الحدود في البسط

$$= \frac{(x+5)^2}{x^2 + 5x}$$

أخرج x عاملاً مشتركاً لحدود المقام

$$= \frac{(x+5)(x+5)}{x(x+5)}$$

أقسم كلّاً من البسط والمقام على $(x + 5)$

$$= \frac{(x+5)\cancel{(x+5)}}{x\cancel{(x+5)}} = \frac{x+5}{x}$$

أتحقق من فهمي:



4 $\frac{x^2 - 12x + 36}{x - 6}$

5 $\frac{x^2 + 9x + 8}{x^2 - 64}$

6 $\frac{x^2 + 8x + 16}{2x + 8}$

يُستعمل تبسيط المقادير الجبرية النسبية في كثير من التطبيقات العلمية والهندسية.



مثال 5: من الحياة



تحفظ عائشة ألعابها في صندوق حجمه $x^3 + 11x^2 + 10x$ سنتيمتراً مكعباً وارتفاعه $(x + 1)$ سنتيمتراً. أجد مساحة قاعدة الصندوق بدلالة x

حجم الصندوق V يساوي مساحة القاعدة B مضروباً في الارتفاع h . إذن، مساحة القاعدة تساوي ناتج قسمة الحجم على الارتفاع.

الوحدة 2

$$B = \frac{V}{h}$$

$$= \frac{x^3 + 11x^2 + 10x}{(x+1)}$$

$$= \frac{x(x^2 + 11x + 10)}{(x+1)}$$

$$= \frac{x(x+10)(x+1)}{(x+1)}$$

$$= x(x+10)$$

قانون مساحة القاعدة

أعوض

أخرج (x) عاملاً مشتركاً لحدود البسط

أحلل ثلاثة الحدود التي داخل القوس

أبسط

إذن، مساحة قاعدة الصندوق $B = x(x+10)$



أتدقق من فهمي:



مخروط مثلجات حجمه $w^3 - 49w$ سنتيمتراً مكعباً، ومساحة قاعدته $w(w+7)$ سنتيمتراً مربعاً، أجد ارتفاعه بدلالة x .

أكتب كلاً مما يأتي في أبسط صورة:

أدرب وأحل المسائل

1 $\frac{64qr^2s}{16q^2rs}$

2 $\frac{9x^2yz}{24xyz^2}$

3 $\frac{24a^3b^4c^7}{6a^6x^2}$

4 $\frac{x^2+3x}{2x+6}$

5 $\frac{y^2+yz-y-z}{y+z}$

6 $\frac{n^2-9}{n^2-5n+6}$

7 $\frac{x^2-x-30}{x^2-36}$

8 $\frac{w^4-1}{1-w^2}$

9 $\frac{4x^2-8x+4}{x^2-7x+6}$

10 $\frac{x^2+9x+20}{x^2+2x-8}$

11 $\frac{4x^3-12x^2+8x}{6x^3+6x^2+36x}$

12 $\frac{x^2-81}{2x-18}$

13 $\frac{4x^2-1}{4x+2}$

14 $\frac{x^2+2x-3}{x^2+8x+15}$

15 $\frac{6x+4}{9x^2-4}$



انتخابات: صندوق اقتراع على هيئة متوازي مستطيلات، حجمه $x^3 - 8x^2 + 15x$ سنتيمتراً مكعباً، ومساحته قاعدته $x^2 - 3x$ سنتيمتراً مربعاً، أجد ارتفاع الصندوق.

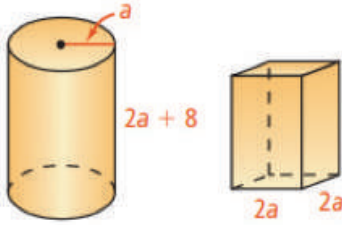
16

معلومة

تأسست الهيئة المستقلة للانتخاب عام 2012 بوصفها جهة مستقلة تُعنى بإدارة العملية الانتخابية في المملكة الأردنية الهاشمية والإشراف عليها.

هندسة: المستطيل A طوله $2x + 6$ وعرضه $3x$ ، والمستطيل B طوله $x + 2$ ومساحته تزيد بمقدار 12 وحدة مربعة على مساحة المستطيل A . أكتب مقداراً جبرياً في أبسط صورة يمثل عرض المستطيل B .

17



قياس: يظهر في الشكل المجاور عبوتاً معلبتاً غذائية لهما الحجم نفسه.

أجد ارتفاع العبوة التي على شكل متوازي مستطيلات بدلالة a .

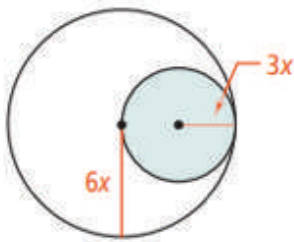
18

مواليد: يمثل المقدار الجبري $x^2 - 9$ عدد المواليد الذكور في إحدى المستشفيات، ويمثل المقدار الجبري $x^2 - 6x + 9$ عدد المواليد الإناث. أكتب نسبة المواليد الذكور إلى المواليد الإناث في أبسط صورة.

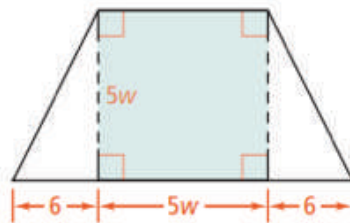
19

هندسة: أكتب في أبسط صورة نسبة مساحة المنطقة المظللة إلى مساحة المنطقة التي تحيط بها في كل مما يأتي:

20



21



تحدّ: كتبتُ سوسن المقدار الجبري النسبي المجاور بأبسط صورة، ثمّ انسكب بعض القهوة على أجزاء من الحلّ، هل يمكن تحديد المقدار الجبري الأصلي؟

$$\frac{4x}{2} = \frac{4x}{2(x-3)} = 2x$$

تحدّ: مقدار جبري نسبي على صورة $\frac{x^2 + bx - c}{x^2 + d}$ ، وعند كتابته في أبسط صورة يصبح $\frac{x-7}{(x+2)}$ ، هل يمكن تحديد قيمة كل من b, c, d ؟

أكتشف الخطأ: بسّط خالد المقدار $\frac{x^2 - x - 2}{x^2 + x - 6}$ على النحو الآتي:

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + x - 6} &= \frac{-x-1}{x+3} = \frac{x+1}{x+3} \end{aligned}$$

فقال المعلم: إنّ النتيجة النهائية صحيحة، لكنّ طريقة الحل خاطئة. أكتشف الخطأ في طريقة الحل.

تحدّ: أكتب المقدار الجبري الآتي في أبسط صورة:

$$\frac{m^2 - n^2}{m^2 + 11mn + 10n^2}$$

اختبار الوحدة

أختار رمز الإجابة الصحيحة في كل مما يأتي:

1 $(2x-4)(2x+4) =$

a) $2x^2-16$ b) $4x^2-16$

c) $4x^2+16$ d) $4x-16$

2 مربع طول ضلعه $x-6$ وحدة مربعة، فتكون مساحته:

a) $x^2-12x+36$ b) x^2-36

c) $x^2+12x-36$ d) x^2+36

3 المقدار الجبري الذي يمثل مربعًا كاملاً هو:

a) $y^2+26y+25$ b) $y^2-8y-16$

c) $y^2-8x+16$ d) y^2-25

4 قيمة b التي تجعل المقدار $x^2+bx+144$ مربعًا كاملاً هي:

a) 12 b) -12

c) 24 d) -24

5 تحليل المقدار $4x^2y-4y$ إلى عوامله الأولية تحليلًا كاملاً:

a) $4y(x-1)(x+1)$ b) $4y(x^2-1)$

c) $(2x-2)(2x+2)$ d) $(x-1)(x+1)$

6

قطعة أرض مستطيلة الشكل، مساحتها $x^2+3x-10$ وحدة مربعة، إذا كان أحد أبعادها $x+5$ ، فإن بُعدها الآخر هو:

a) $x-2$ b) $x+2$

c) $x-5$ d) $x+10$

7 $\frac{x^2-36}{6-x}$

a) $-x-6$ b) $x-6$

c) $x+6$ d) $6-x$

8 $w^4-1 =$

a) $(w-1)(w+1)$ b) $(w-1)(w+1)(w^2+1)$

c) $(w-1)(w^3+1)$ d) $(w-1)(w^2+2w+1)$

9 يقبل المقدار الجبري x^2-100 القسمة من دون باقي على:

a) $x-10$ b) $x-5$

c) $x-100$ d) $x+100$

أكتب كلاً مما يأتي بأبسط صورة:

10 $(2x-7)(2x+7)$ 11 $(6y-3x)(6y-3x)$

12 $(x-4)^2$ 13 $(3d+6)^2$

أكتب كلاً ممّا يأتي في أبسط صورة:

26 $\frac{5x+15}{x^2+10x+21}$

27 $\frac{2x^2+6x+4}{3x^2+9x+6}$

تدريب على الاختبارات الدولية

28 أيّ الآتيّة عاملانٍ لثلاثيّ الحدود x^2+x-42 ؟

a) $(x-7)(x-6)$ b) $(x-7)(x+6)$

c) $(x+7)(x-6)$ d) $(x+7)(x+6)$

29 عند كتابة المقدار الجبريّ $(2x+5)(2x-5)$ في أبسط صورة ينتج:

a) $4x^2-20x-25$ b) $4x^2+20x+25$

c) $4x^2-25$ d) $2x^2-5$

30 إذا كان n عدداً صحيحاً موجباً، فإنّ حاصل ضرب عددٍ سابقٍ في عددٍ لاحقٍ له يُعطى بالعلاقة:

a) n^2-1 b) n^2+1

c) n^2-2 d) $(n+1)^2$

31 إذا كان $a-b=3$, $a^2-b^2=33$ ، فأجد قيمة $a+b$:

a) 14 b) 30 c) 11 d) 36

أحلّ كلّ مقدارٍ جبريّ ممّا يأتي تحليلًا كاملاً:

14 $3yw^2-12y+2w^2-8$

15 $x^2-10x+25$

16 $9y^2-4$



17 يبيّن الشكل المجاور مهبطاً

للطائرات العمودية في إحدى

المستشفيات، فإذا كان نصف

قطر الدائرة الصغرى يقلُّ 8 أمتار عن نصف قطر

الدائرة الكبرى، فأكتب مقداراً جبريّاً يمثل الفرق بين

مساحتي الدائرتين، ثمّ أحلله تحليلًا كاملاً.

18 **كرة قدم:** ملعب كرة قدم مساحته $x^2-28x-29$

متراً مربعاً، وعرضه $x-1$ متراً، أجد محيطه بدلالة x .

أحلّ كلاً من المقدارين الجبريين الآتيّة تحليلًا كاملاً:

19 $4s^2-s+12st-3t$

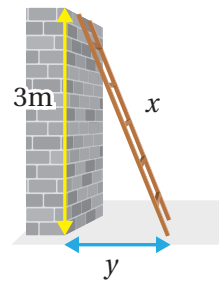
20 $6m^3-12mn+m^2n-2n^2$

21 $x^2-18x+72$

22 $3x^2-48$

23 $100-(x+9y)^2$

24 $3x^2-15x+18$



25 يستند سلم إلى حائط كما في

الشكل المجاور. إذا كان طول

السلم x وارتفاع الحائط 3m،

فأجد المقدار الجبريّ الذي

يمثل مربع المسافة الأفقية بين

الحائط والسلم، ثمّ أحلله.

المعادلات الخطية بمتغيرين

ما أهمية هذه الوحدة؟

تُستعمل المعادلات الخطية في نمذجة المواقف العلمية والحياتية، ويقدم لنا مفهوم ميل مُنحني المعادلة الخطية تفسيراً لكيفية تغيّر كمية بالنسبة إلى كمية أخرى، مثل تحديد شدة انحدار الطرق بإيجاد نسبة تغيّر الارتفاع إلى المسافة الأفقية المقطوعة. وذلك لتنبيه السائقين على الحذر عند القيادة في الطرق الشديدة الانحدار، مثل طريق وادي الموجب جنوب الأردن.



سأتعلّم في هذه الوحدة:

- إيجاد ميل الخطّ المستقيم.
- إيجاد معادلة الخطّ المستقيم بطرق مختلفة.
- العلاقة بين ميلَي مستقيمين متوازيين ومتعامدين.

تعلمت سابقاً:

- ✓ التعبير عن الاقتران الخطّي بطرق مختلفة.
- ✓ تمثيل الاقتران الخطّي بيانياً.
- ✓ تمثيل التناسب الطردي بيانياً أو في جدول.



 أَسْتَعِدُّ وَزُمُلَائِي لِتَنْفِيزِ مَشْرُوعِنَا الْخَاصِّ الَّذِي سَنُوظِّفُ فِيهِ مَا نَعْلَمُهُ فِي هَذِهِ الْوَحْدَةِ عَنْ تَمَثِيلِ الْمَعَادِلِ الْخَطِيئَةِ بِمَتَغَيِّرَيْنِ.

4 أكرّر الخطوة السابقة لإدراج مؤشر للتحكم في قيمة المقطع y ، وأستعمل الرمز b بدلاً من الرمز a .

1 أبحثُ معَ أفرادِ مجموعتي في شبكةِ الإنترنت عنَ خريطةِ المملكةِ الأردنيّةِ الهاشميّةِ، ثمَّ أحفظُها على جهازِ الحاسوبِ.

2 أَسْتَعْمَلُ بِرَمْجِيَّةٍ جَيَّوَجِيرَا لِمُتَشَبِّهِاتٍ مُعَادَلَاتٍ خَطِيئَةٍ تُرَبِّطُ
بَعْضَ الْمُحَافَظَاتِ الْأُرْدُنِيَّةِ إِحْدَاهَا بِالْأُخْرَى مِنْ خِلَالِ
الْخُطُواتِ الْآتِيَةِ:

● **أَنْقُرْ** على أيقونة  من شريط الأدوات، ثمَّ اختار صورة خريطة الأردن.

● أعدلُ موقعَ صورةِ الخريطةِ، وأختارُ مقاسًا مناسبًا لها
بتحريكِ النقطتين A و B اللتين تظهران عليها.

3 لإدراج مؤشرٍ للتحكُّمِ في قيمةِ المِئَلِ اتَّبِعُ الإجراءاتِ الآتيةَ:

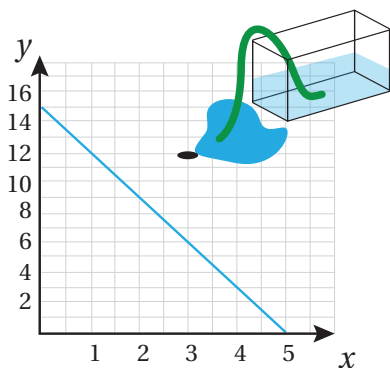
من شریط

الأدوات، ثم انقر
على الموقع الذي
أريدّه في الشاشة
ليظهر مربع حوار.



111

أستكشف



يُبين التمثيل البياني المجاور العلاقة بين كمية الماء المتبقية في حوض بالترات والزمن المنقضي بالدقائق منذ بدء تصريف الماء من الحوض.

1 ما كمية الماء التي كانت في الحوض عند بدء التصريف؟

2 كم دقيقة يحتاج إليها تصريف الحوض من الماء تصريفًا كاملاً؟

فكرة الدرس

- أتعرف الصيغة القياسية للمعادلة الخطية.
- أمثل المعادلة الخطية بيانياً.

المصطلحات

الصورة القياسية، الحد الثابت، المقطع x ، المقطع y

المعادلة الخطية هي المعادلة التي يمكن كتابتها على الصورة $Ax + By = C$ ، وتسمى **الصورة القياسية** (standard form) للمعادلة الخطية.

الصورة القياسية للمعادلة الخطية

مفهوم أساسي

- **بالكلمات** الصورة القياسية للمعادلة الخطية هي:

$$Ax + By = C$$

حيث $A \geq 0$ ، ولا تكون قيمتا A و B معاً صفراً، حيث A, B, C أعداد صحيحة، العامل المشترك الأكبر لها 1.

مثال 1

أحدد ما إذا كانت كل معادلة مما يأتي خطية أم لا، وإذا كانت كذلك أكتبها على الصورة القياسية.

1 $y = 6 - 5x$

أعيد كتابة المعادلة على أن يكون كلا المتغيرين في الطرف نفسه من المعادلة.

$$y = 6 - 5x$$

المعادلة الأصلية

$$y + 5x = 6 - 5x + 5x$$

أضيف $5x$ إلى طرفي المعادلة

$$5x + y = 6$$

أبسط

المعادلة $5x + y = 6$ معادلة خطية بالصورة القياسية، حيث $A = 5, B = 1, C = 6$.

الوحدة 3

2 $3xy - 4x = 7$

بما أن الحد $3xy$ فيه متغيران، فإنه لا يمكن كتابة المعادلة على الصورة $Ax + By = C$ ، إذن فالمعادلة ليست خطية.

3 $4x - 8y = 12$

بما أن العامل المشترك الأكبر للأعداد 4 و 8 و 12 ليس 1، فإن المعادلة ليست مكتوبة على الصورة القياسية. وليكتابتها بالصورة القياسية؛ أقسم كل طرف على ع. م. أ.

$$4x - 8y = 12$$

المعادلة الأصلية

$$4(x - 2y) = 12$$

أجد (ع. م. أ) وهو 4

$$\frac{4(x - 2y)}{4} = \frac{12}{4}$$

أقسم طرفي المعادلة على 4

$$x - 2y = 3$$

أبسط

إذن، فالمعادلة $x - 2y = 3$ خطية مكتوبة بالصورة القياسية، حيث $A = 1, B = -2, C = 3$.

4 $\frac{7}{5}x = -4$

لتحويل معاملات المعادلة إلى أعداد صحيحة، أضرب طرفي المعادلة في 5.

$$\frac{7}{5}x = -4$$

المعادلة الأصلية

$$5 \times \left(\frac{7}{5}\right)x = 5(-4)$$

أضرب طرفي المعادلة في 5

$$7x = -20$$

أبسط

ويمكن كتابة المعادلة $7x = -20$ بالصورة القياسية وهي: $7x + 0y = -20$

إذن، فالمعادلة خطية بالصورة القياسية، حيث $A = 7, B = 0, C = -20$

أتحقق من فهمي: 

5 $2x = 1 - 3y$

6 $x^2 - 8y = 3$

7 $\frac{1}{5}y = 2$

التمثيل البياني للمعادلة الخطية هو مستقيم يمر في الأزواج المرتبة جميعها التي تمثل حلولاً للمعادلة، وأي زوج مرتب يقع على هذا المستقيم يمثل حلاً للمعادلة.

أفكر

حلُّ المعادلة الخطية هو الزوج المرتب الذي ينتج عن تعويضه في المعادلة عبارة صحيحة.

يمكن تمثيل المعادلة بإنشاء جدول قيم، وذلك باختيار قيم للمتغير x وتعويضها في المعادلة لإيجاد قيم y المقابلة لها، ثم تمثيل الأزواج المرتبة الناتجة في المستوى الإحداثي.

مثال 2

1 أمثل المعادلة $2x - y = 1$ بيانيًا.

الخطوة 1 أكتب المعادلة بدلالة y لتسهيل عملية إيجاد قيم y المقابلة لقيم x .

$$2x - y = 1$$

$$2x - y - 2x = 1 - 2x$$

$$\frac{-y}{-1} = \frac{1-2x}{-1}$$

$$y = 2x - 1$$

المعادلة الأصلية

أطرح $2x$ من كلا الطرفين

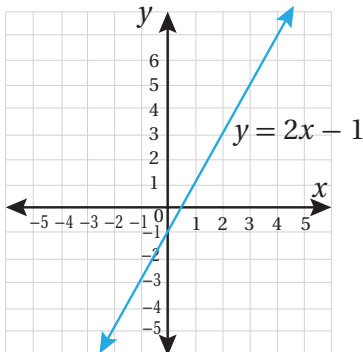
أقسم طرفي المعادلة على -1

أبسط

الخطوة 2 أنشئ جدول قيم.

أختار قيمًا للمتغير x ، ثم أعوضها في المعادلة لأجد قيم y المقابلة لها.

x	$2x - 1$	y	(x, y)
-2	$2(-2) - 1$	-5	$(-2, -5)$
-1	$2(-1) - 1$	-3	$(-1, -3)$
0	$2(0) - 1$	-1	$(0, -1)$
1	$2(1) - 1$	1	$(1, 1)$
2	$2(2) - 1$	3	$(2, 3)$



الخطوة 3 أمثل الأزواج المرتبة في المستوى الإحداثي، ثم أرسم مستقيمًا يمرُّ بها جميعًا.

أتعلم

عند تمثيل المعادلة بيانيًا، أستخدم الأسهم لتوضيح أن المستقيم غير منتهٍ.

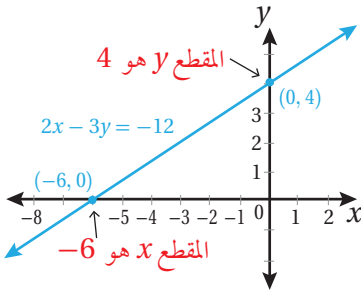
الوحدة 3

أتحقق من فهمي:



2 أمثل المعادلة $y = 3x$ بيانيًا.

3 أمثل المعادلة $2y - 4x = 6$ بيانيًا.



بما أنه يمكن تمثيل المستقيم بنقطتين، فإنَّ أسهل طريقة لتمثيل المعادلة الخطية هي إيجاد نقطتي تقاطع المستقيم مع المحورين الإحداثيين.

يُسمَّى الإحداثي x للنقطة التي يقطع عندها المستقيم المحور x **المقطع x** (x-intercept)، ويُسمَّى الإحداثي y للنقطة التي يقطع عندها المستقيم المحور y **المقطع y** (y-intercept).

مثال 3

أمثل كل معادلة مما يأتي بيانيًا باستعمال المقطع x والمقطع y :

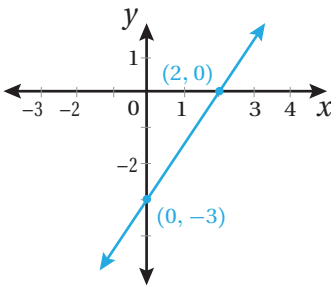
1 $3x - 2y = 6$

الخطوة 1 أجد المقطع x والمقطع y .

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= 6 && \text{المعادلة الأصلية} \\ 3(0) - 2y &= 6 && \text{أعوّض } x = 0 \\ -2y &= \frac{6}{-2} && \text{أقسم كلا الطرفين على -2} \\ y &= -3 && \text{أبسط} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= 6 && \text{المعادلة الأصلية} \\ 3x - 2(0) &= 6 && \text{أعوّض } y = 0 \\ \frac{3x}{3} &= \frac{6}{3} && \text{أقسم كلا الطرفين على 3} \\ x &= 2 && \text{أبسط} \end{aligned}$$

إذن، فالمقطع x هو 2، والمقطع y هو -3.



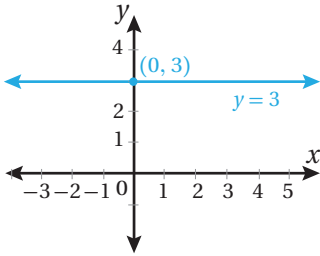
الخطوة 2 أمثل نقطتي تقاطع المستقيم مع المحورين الإحداثيين في المستوى الإحداثي، ثم أرسم مستقيمًا يصل بين النقطتين.

بما أن المقطع x هو 2، فإنَّ المستقيم يقطع المحور x في النقطة $(2, 0)$ ، وبما أن المقطع y هو -3، فإنَّ المستقيم يقطع المحور y في النقطة $(0, -3)$ ، أمثل النقطتين في المستوى الإحداثي، ثم أرسم خطًا مستقيمًا يصل بينهما.

2 $y = 3$

الخطوة 1 أكتب المعادلة على الصورة القياسية.

المعادلة الأصلية $y = 3$
الصورة القياسية للمعادلة $0x + 1y = 3$



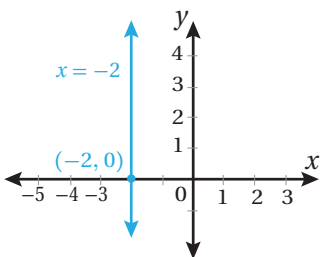
الخطوة 2 أجد المقطع x والمقطع y .

ألاحظ أن المقطع y هو 3، ولا يوجد مقطع x ، وألاحظ أيضًا أن قيمة $y = 3$ لأي قيمة x ؛ لذا فإن التمثيل البياني للمعادلة $y = 3$ هو مستقيم أفقي يقطع المحور y في النقطة $(0, 3)$.

3 $x = -2$

الخطوة 1 أكتب المعادلة على الصورة القياسية.

المعادلة الأصلية $x = -2$
الصورة القياسية للمعادلة $1x + 0y = -2$



الخطوة 2 أجد المقطع x والمقطع y .

ألاحظ أن المقطع x هو -2، ولا يوجد مقطع y ، وألاحظ أيضًا أن قيمة $x = -2$ لأي قيمة y ؛ لذا فإن التمثيل البياني للمعادلة $x = -2$ هو مستقيم رأسي يقطع المحور x في النقطة $(-2, 0)$.

أنتحقق من فهمي: ✓

4 $4x - y = 1$

5 $y = -7$

6 $x = 5$

الوحدة 3

مثال 4: من الحياة

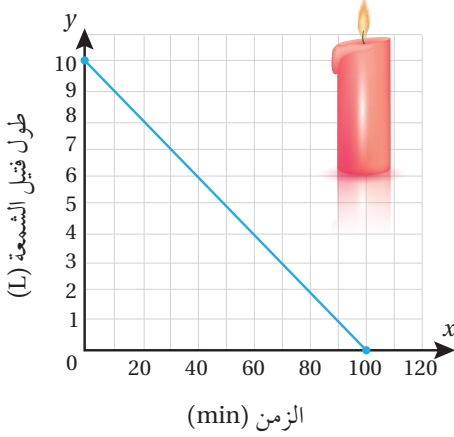


شمعة: يبين التمثيل البياني المجاور العلاقة بين طول فتيل شمعة بالاستتيمرات و الزمن بالدقائق منذ بدء إشعاله.

أجد المقطع x والمقطع y للعلاقة.

قيمة $x = 100$ عندما قيمة $y = 0$ المقطع x هو 100

قيمة $y = 10$ عندما قيمة $x = 0$ المقطع y هو 10



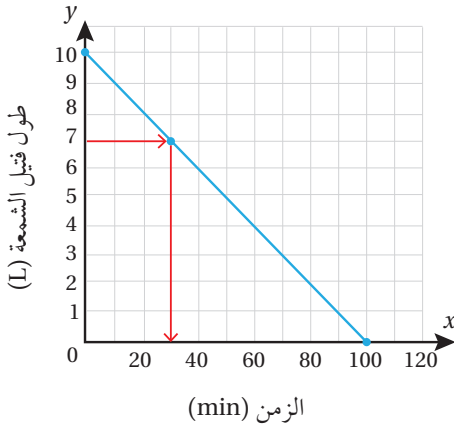
أصف مدلول كل من المقطعين في هذه الحالة.

المقطع y يساوي 10 ويعني أن طول فتيل الشمعة 10 cm عند إشعاله، المقطع x يساوي 100 ، وهذا يعني أن فتيل الشمعة احترقَ احتراقاً كاملاً بعد 100 دقيقة، ولم يبقَ منه شيء.

بعد كم دقيقة يكون طول فتيل الشمعة 7 cm؟

أحدد 7 cm على المحور y ، ثم أحدد النقطة التي تقابلها على المستقيم، وأحدد الإحداثي x للنقطة وهو 30.

إذن، يكون طول فتيل الشمعة 7 cm بعد 30 دقيقة من إشعاله.



أتحقق من فهمي:

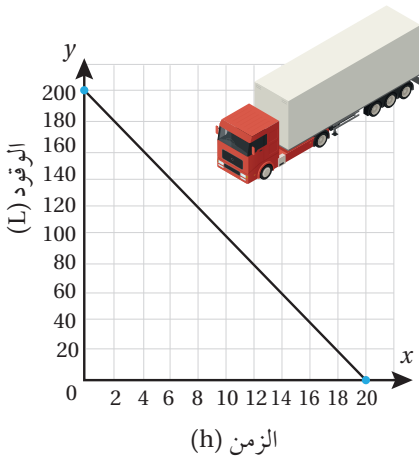


وقود: يبين التمثيل البياني المجاور العلاقة بين عدد لترات الوقود المتبقية في خزان شاحنة وعدد ساعات قيادتها.

أجد المقطع x والمقطع y للعلاقة.

أصف مدلول كل من المقطعين في هذه الحالة.

بعد كم ساعة قيادة يبقى في خزان الشاحنة 100 L من الوقود.



أحدّد ما إذا كانت كلُّ معادلةٍ ممّا يأتي خطيّة أم لا، وإذا كانت كذلك أكتبها على الصورة القياسية:

1 $2x = 7y$

2 $y = 1 - x^2$

3 $9xy + 11x = 6$

أحدّد ما إذا كانت كلُّ معادلةٍ ممّا يأتي خطيّة أم لا، وإذا كانت كذلك أكتبها على الصورة القياسية:

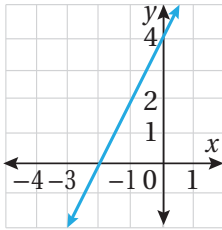
4 $y = -1$

5 $y - x = 8$

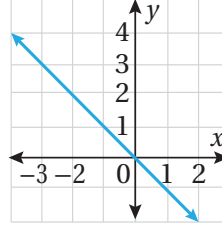
6 $3x + 2y = 15$

أجد المقطع x والمقطع y لكل معادلةٍ ممّا يأتي:

7



8



أمثل كل معادلةٍ ممّا يأتي بيانياً باستعمال المقطع x والمقطع y :

9 $x = 4y - 6$

10 $x + 6 = 0$

11 $\frac{4x}{3} = \frac{3y}{4} + 1$



رحلة: ملأ رامي خزان سيارته بالوقود استعداداً لرحلة إلى مدينة العقبة. والمعادلة $y = 18 - 2x$ تعطي كمية

الوقود بالترات المتبقية في خزان السيارة بعد قيادتها x ساعة.

أجد المقطع x والمقطع y للمعادلة المُعطاة، ثمّ أستعمل المقطعين لتمثيل المعادلة بيانياً.

12

الوحدة 3

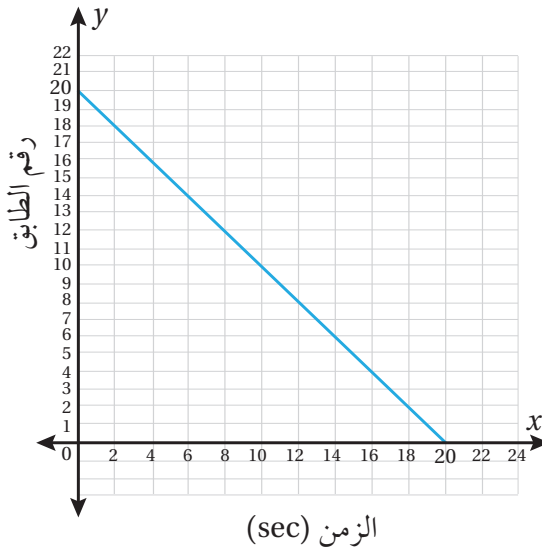
أصف مدلول كل من المقطعين في هذه الحالة.

13

بعد كم ساعة من قيادة السيارة يتبقى $\frac{1}{4}$ الوقود في الخزان؟

14

بناية: يبين التمثيل البياني المجاور العلاقة بين رقم الطابق في أحد الأبراج التجارية والزمن الذي يقضيه الراكب بالثواني في المصعد حتى يصل إلى هذا الطابق. فإذا علمت أن رقم الطابق الأرضي 0، أجب عن كل مما يأتي:



من أي طابق صعد الراكب إلى المصعد؟

15

بعد كم ثانية وصل الراكب إلى الطابق الأرضي.

16

بعد كم ثانية وصل الراكب إلى الطابق الثامن.

17

هندسة: محيط المستطيل في الشكل المجاور 12 cm .

أكتب معادلة بالصورة القياسية تمثل محيط المستطيل.

18

أجد المقطع x والمقطع y للتمثيل البياني لمعادلة محيط المستطيل.

19

أمثل المعادلة بيانياً.

20

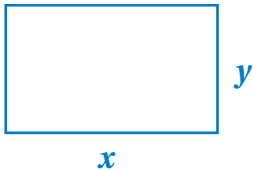
أجد ثلاثة أزواج مرتبة تمثل أبعاد المستطيل، على أن تكون قيم x و y أعداداً كلية.

21

أتذكر

الأعداد الكلية:

0, 1, 2, 3, 4, 5, ...



إرشاد

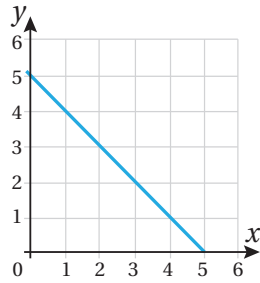
كلُّ مربعٍ في المستوى
الإحداثيِّ يمثِّل وحدةً
مربعةً واحدةً.

22

أكتشف الخطأ: يقول أحمد إنَّ المعادلة $y = 4x + 1$ يمكنُ كتابتها بالصورة القياسية على الشكل $4x - y = 1$. أكتشف الخطأ الذي وقع فيه أحمد وأصحِّحه.

23

تحدِّ: يبيِّن التمثيل البياني المجاور المستقيم $x + y = 5$.



أرسمُ مستقيماً على الصورة $x = a$ ، ومستقيماً على الصورة $y = b$ ، على أن تكون المساحة بين المستقيمتين الثلاثة 4.5 وحدة مربعة.

24

تبرير: أستخدمُ الأعداد في البطاقات المجاورة لملء المعادلة الآتية، على أن يكون المقطع x للتمثيل البياني للمعادلة يساوي -10 والمقطع y يساوي 5 ، مُبرِّراً إجابتي.

-10 -3 1 5 6

$$\boxed{} x + \boxed{} y = 30$$

25

تبرير: أمثِّل المعادلات $x = 5$, $x = 2$, $y = -2$, $y = 1$ في المستوى الإحداثيِّ نفسه، ثمَّ أحدد الشكل الهندسي المغلق الناتج عن المستقيمتين. أبرِّر إجابتي.

26

أكتب: كيف أكتبُ معادلةً خطيةً بالصورة القياسية.

أستكشف



تُستعملُ إشارتا المرور المجاورتان لتنبية السائقين على مقدار انحدار الطريق، وذلك بإيجاد نسبة الارتفاع أو الهبوط إلى كل 100 m أفقيًا. فما الفرق بين الإشارتين؟

فكرة الدرس

أجد ميل المستقيم.

المصطلحات

ميل المستقيم، التغير الرأسي، التغير الأفقي، معدل التغير.

ميل المستقيم (slope of a line) هو مصطلح يُستعمل لوصف مقدار انحدار المستقيم. فالميل هو نسبة **التغير الرأسي** (rise) إلى **التغير الأفقي** (run).

$$\frac{\text{التغير الرأسي}}{\text{التغير الأفقي}} = \text{الميل}$$

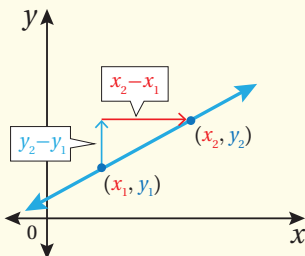
ولإيجاد ميل المستقيم غير الرأسي في المستوى الإحداثي يمكننا إيجاد نسبة التغير في الإحداثي y (التغير الرأسي) إلى التغير في الإحداثي x (التغير الأفقي) بين أي نقطتين على المستقيم.

ميل المستقيم

مفهوم أساسي

• **بالكلمات:** ميل المستقيم غير الرأسي هو نسبة التغير الرأسي إلى التغير الأفقي.

• **بالرموز:** يمكن إيجاد الميل (m) للمستقيم الرأسي المار بالنقطتين (x_1, y_1) و (x_2, y_2) على النحو الآتي:

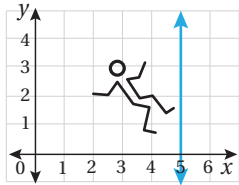


$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

التغير في y ←
التغير في x ←

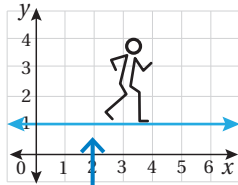
يمكن أن يكون ميل المستقيم سالباً أو موجباً أو صفراً أو غير مُعرَّفٍ كما يظهر في التمثيلات البيانية أدناه. للمقارنة بين ميل المستقيمات المختلفة أتخيل نفسي أسير على كل منحني من اليسار إلى اليمين:

الميل غير مُعرَّفٍ



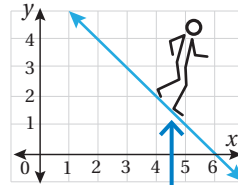
مستقيم عمودي

الميل صفر



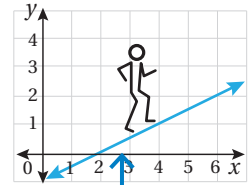
مستقيم أفقي

الميل سالب



ينحدر المستقيم إلى الأسفل عند التحرك من اليسار إلى اليمين

الميل موجب

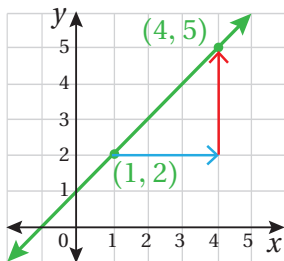


يرتفع المستقيم إلى الأعلى عند التحرك من اليسار إلى اليمين

مثال 1

أجد ميل المستقيم المارّ بكلّ نقطتين ممّا يأتي:

1 (1, 2), (4, 5)



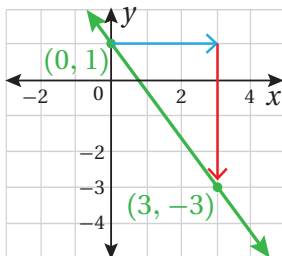
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5 - 2}{4 - 1} = \frac{3}{3} = 1$$

صيغة الميل

أعوّض عن (x_1, y_1) بـ (1, 2) وعن (x_2, y_2) بـ (4, 5) أبسط

إذن، ميل المستقيم هو 1

2 (0, 1), (3, -3)



$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-3 - 1}{3 - 0} = -\frac{4}{3}$$

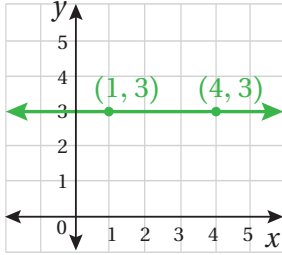
صيغة الميل

أعوّض عن (x_1, y_1) بـ (0, 1) وعن (x_2, y_2) بـ (3, -3) أبسط

إذن، ميل المستقيم هو $-\frac{4}{3}$

الوحدة 3

3 (1, 3), (4, 3)



$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{3 - 3}{4 - 1}$$

$$= \frac{0}{3} = 0$$

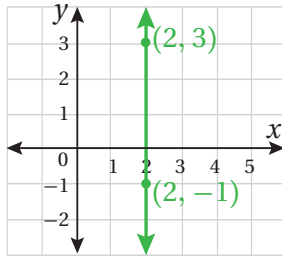
صيغة الميل

أعوّض عن (x_1, y_1) بـ (1, 3)
وعن (x_2, y_2) بـ (4, 3)

أبسط

إذن، ميل المستقيم هو 0

4 (2, 3), (2, -1)



$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{3 - (-1)}{2 - 2}$$

$$= \frac{4}{0}$$

صيغة الميل

أعوّض عن (x_1, y_1) بـ (2, 3)
وعن (x_2, y_2) بـ (2, -1)

أبسط

إذن، ميل هذا المستقيم غير مُعرّف.

أتحقّق من فهمي:



5 (-1, 2), (3, 5)

6 (-1, -2), (-4, 1)

7 (1, 2), (-3, 2)

8 (1, 5), (1, -4)

إذا عُلِمَ ميل المستقيم وإحداثيّتا نقطةٍ عليه، فيمكن إيجاد الإحداثيّ المجهول لأيّ نقطةٍ أخرى على المستقيم.

مثال 2

1 أجد قيمة s التي تجعل ميل المستقيم المارّ بالنقطتين $(-2, 1)$ و $(3, s)$ يساوي $\frac{3}{5}$

أفترض أن النقطة $(-2, 1)$ هي (x_1, y_1) ، والنقطة $(3, s)$ هي (x_2, y_2)

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{صيغة الميل}$$

$$\frac{3}{5} = \frac{s - 1}{3 - (-2)} \quad \text{أعوّض } y_2 = s, y_1 = 1, x_2 = 3, x_1 = -2$$

$$\frac{3}{5} = \frac{s - 1}{5} \quad \text{أبسّط}$$

$$5(s - 1) = 3 \times 5 \quad \text{خاصية الضرب التبادلي}$$

$$5s - 5 = 15 \quad \text{خاصية التوزيع}$$

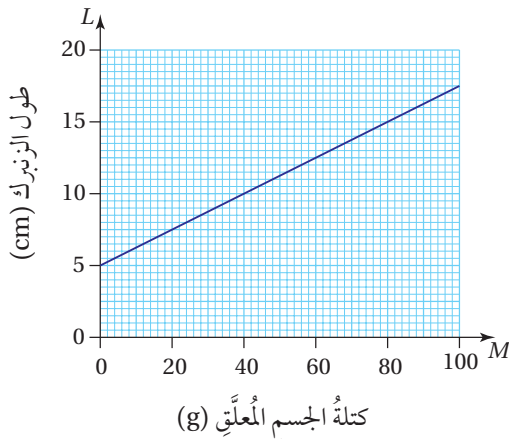
$$5s = 20 \quad \text{أجمع 5 لكلا الطرفين}$$

$$s = 4 \quad \text{أقسم طرفي المعادلة على 5}$$

✓ **أنتحق من فهمي:**

2 أجد قيمة k التي تجعل ميل المستقيم المارّ بالنقطتين $(3, 1)$ و $(k, 2)$ يساوي $-\frac{1}{6}$

معدل التغير (rate of change) هو نسبة تصف مقدار تغير كمية بالنسبة إلى تغير كمية أخرى، ويمكننا استعمال ميل المستقيم الذي يمثل العلاقة بين هاتين الكميتين لتفسير معنى معدل التغير في المسائل الحياتية.



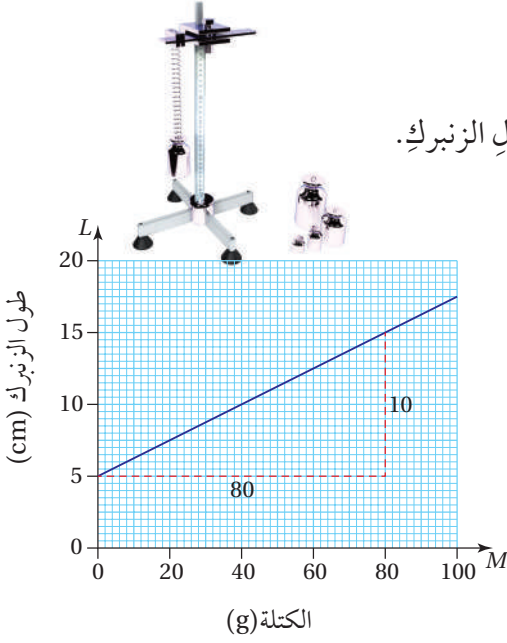
مثال 3: من الحياة

يبين التمثيل البياني المجاور طول زنبرك l بالسنتيمترات، عند تعليق جسم كتلته m غرام به.

1 أجد طول الزنبرك قبل تعليق أي كتلة به.

طول الزنبرك قبل تعليق أي كتلة به 5 cm، وهي القيمة التي تقابل الكتلة 0 g في التمثيل.

الوحدة 3



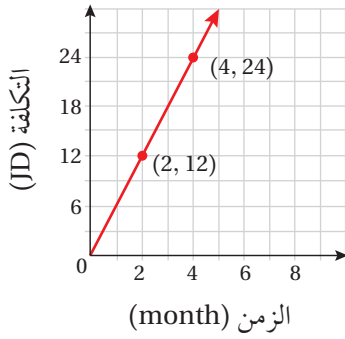
2 أجد معدل تغير طول الزنبرك بالنسبة إلى كتلته، ثم أبين ماذا يمثل.

لإيجاد معدل التغير أجد ميل المستقيم الذي يمثل العلاقة بين الكتلة وطول الزنبرك.

أستعمل النقطتين (0, 5) و (80, 15) لإيجاد ميل المستقيم.

$$\begin{aligned}
 m &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} && \text{صيغة الميل} \\
 &= \frac{15 - 5}{80 - 0} && \text{أعوّض عن } (x_1, y_1) = (0, 5) \\
 &&& \text{وعن } (x_2, y_2) = (80, 15) \\
 &= \frac{10}{80} = \frac{1}{8} && \text{أبسط}
 \end{aligned}$$

إذن، ميل المستقيم هو $\frac{1}{8}$ ، وهو يمثل معدل التغير في طول الزنبرك لكل غرام من الكتلة، حيث إن طول الزنبرك يزداد بمقدار $\frac{1}{8}$ cm لكل غرام يُضاف إليه.



أتحقق من فهمي:

يبين التمثيل البياني المجاور متوسط تكلفة تشغيل ثلاجة (بالدينار) أشهر عدة.

3 أجد تكلفة تشغيل الثلاجة مدة 3 أشهر.

4 أجد معدل تغير تكلفة تشغيل الثلاجة بالنسبة إلى الزمن، ثم أوضح ماذا يمثل.

أتحرب وأحل المسائل

أتذكر

أراعي الترتيب عند تعويض إحداثيات الزوجين المرتبين في

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

1 (3, 3), (5, 7)

2 (6, 1), (4, 3)

3 (-2, -6), (-2, 6)

4 (5, -7), (0, -7)

5 (-1, 0), (0, -5)

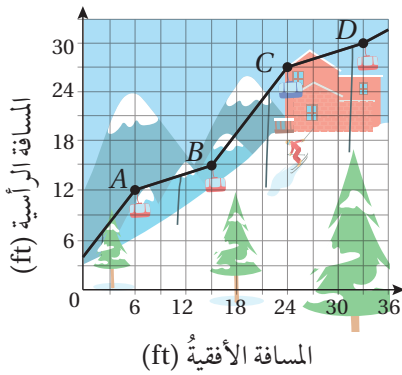
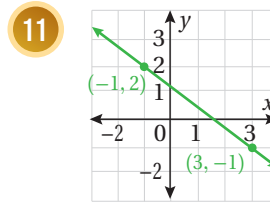
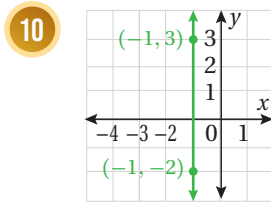
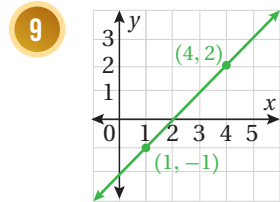
6 (4, 1), (12, 8)

أجد قيمة s التي تجعل ميل المستقيم (m) المارّ بكلّ نقطتين ممّا يأتي على نحو ما هو مُعطى:

7 $(6, -2), (s, -6), m = 4$

8 $(9, s), (6, 3), m = -\frac{1}{3}$

أحدّد ما إذا كان ميل كلّ مستقيم ممّا يأتي سالباً أم موجباً أم صفراً أم غير معرّف، ثمّ أجده:



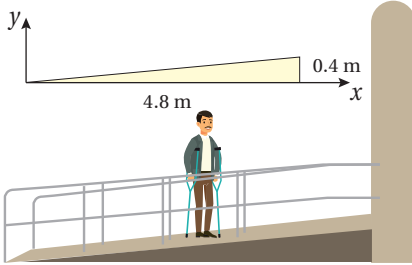
تزلج: يبيّن التمثيل البياني المجاور المنظر الجانبي لمصعد تزلج.

أجد ميل كلّ من: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$

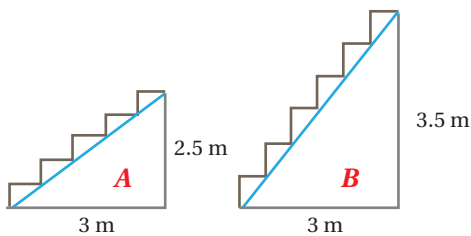
أي جزء من مصعد التزلج يُعدّ الأشدّ انحداراً؟ أبرّر إجابتي.

أتعلّم

كلّما زادت القيمة المطلقة للميل، كان المستقيم أشدّ انحداراً.

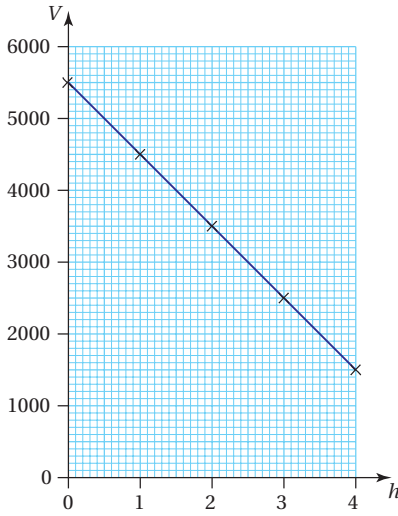


منحدرات: تنصّ قوانين البناء المتعلقة بمنحدرات وصول الأشخاص ذوي الإعاقة الحركية إلى الأبنية على أنّ كلّ ارتفاع رأسيّ بمقدار 0.4 m يتطلب مساراً أفقيّاً طوله 4.8 m. أجد ميل هذا المنحدر.



درج: يبيّن الشكل المجاور درجين مُصمّمين للدخول إلى أحد المباني. فأَيّ الدرجين اختار صعوده للدخول إلى المبنى. أبرّر إجابتي.

الوحدة 3



طائرة: يبين التمثيل البياني المجاور كمية الوقود V باللترات في خزان طائرة بعد h ساعة.

16 ما كمية الوقود في خزان الطائرة عند انطلاقها؟

17 ما كمية الوقود في الخزان بعد مرور 3.5 h؟

18 أجد معدل تغير كمية الوقود في الخزان بالنسبة إلى الزمن، ثم أبين ماذا يمثل.

مهارات التفكير العليا

19 **أكتشف الخطأ:** أوجد مهند ميل المستقيم المارّ بالنقطتين $(0, 2)$, $(5, 4)$ ، وكان حلّه على النحو الآتي:

$$\times \quad m = \frac{2 - 4}{5 - 0} = -\frac{2}{5}$$

أبين الخطأ الذي وقع فيه مهند وأصحّحه.

20 **تبرير:** هل تقع النقاط $A(1, 3)$, $B(4, 2)$, $C(-2, 4)$ على المستقيم نفسه؟ أبرر إجابتي.

21 **مسألة مفتوحة:** أجد نقطتين تقعان على مستقيم ميله -9 .

22 **أكتب:** كيف أجد ميل مستقيم مارّ بنقطتين؟

إرشاد

أوظف الميل في تبرير إجابتي.

أستكشف



يبلغ متوسط درجة الحرارة على سطح الأرض 20°C تقريباً. وترتفع درجة الحرارة تحت سطح القشرة الأرضية بمعدل 25°C لكل كيلومتر من العمق. أكتب معادلةً بمتغيرين تمثل درجة الحرارة لكل كيلومتر تحت سطح الأرض.

فكرة الدرس

أكتب معادلة المستقيم بصيغة الميل والمقطع، وأمثلها بيانياً.

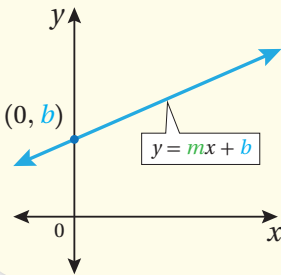
المصطلحات

صيغة الميل والمقطع

تعلمت سابقاً كيفية إيجاد الميل والمقطعين الإحداثيين للمستقيم. ويمكنني استعمال الميل والمقطع y لكتابة معادلة أي مستقيم بصيغة الميل والمقطع (slope-intercept form).

صيغة الميل والمقطع

مفهوم أساسي



• **بالكلمات:** صيغة الميل والمقطع للمعادلة الخطية هي: $y = mx + b$ ، حيث m ميل المستقيم، و b المقطع y له.

• **بالرموز:** $y = mx + b$

الميل

المقطع y

مثال 1

1 أكتب معادلة المستقيم الذي ميله $\frac{4}{5}$ والمقطع y له -7 بصيغة الميل والمقطع.

أعوّض الميل والمقطع y في صيغة الميل والمقطع

$$y = mx + b$$

$$y = \frac{4}{5}x + (-7)$$

$$y = \frac{4}{5}x - 7$$

صيغة الميل والمقطع

$$m = \frac{4}{5}, b = -7$$

أبسط

إذن، معادلة المستقيم $y = \frac{4}{5}x - 7$

2 أجدُ معادلةَ المستقيم المارَّ بالنقطة (1, 5) وميله 2 بصيغة الميل والمقطع.

الخطوة 1 أستخدم الميل وإحداثيات النقطة لإيجاد قيمة b

$$\begin{aligned} y &= mx + b && \text{صيغة الميل والمقطع} \\ 5 &= 2(1) + b && \text{أعوّض } m = 2, y = 5, x = 1 \\ 5 &= 2 + b && \text{أبسط} \\ 5 - 2 &= 2 + b - 2 && \text{أطرح 2 من كلا الطرفين} \\ 3 &= b && \text{أبسط} \end{aligned}$$

الخطوة 2 أعوّض الميل والمقطع y في صيغة الميل والمقطع.

$$\begin{aligned} y &= mx + b && \text{صيغة الميل والمقطع} \\ y &= 2x + 3 && \text{أعوّض } m = 2, b = 3 \end{aligned}$$

إذن، معادلة المستقيم $y = 2x + 3$

3 أكتب معادلةَ المستقيم المارَّ بالنقطتين (2, 1) و (5, -8) بصيغة الميل والمقطع.

الخطوة 1 أستخدم النقطتين في إيجاد الميل.

$$\begin{aligned} m &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} && \text{صيغة الميل} \\ &= \frac{-8 - 1}{5 - 2} && \text{أعوّض عن } (x_1, y_1) \text{ بـ } (2, 1) \\ &= \frac{-9}{3} = -3 && \text{وعن } (x_2, y_2) \text{ بـ } (5, -8) \\ &&& \text{أبسط} \end{aligned}$$

إذن، الميل -3

الخطوة 2 أستخدم الميل وإحداثيات إحدى النقطتين لإيجاد قيمة b

$$\begin{aligned} y &= mx + b && \text{صيغة الميل والمقطع} \\ 1 &= -3(2) + b && \text{أعوّض } m = -3, y = 1, x = 2 \\ 1 &= -6 + b && \text{أبسط} \\ 1 + 6 &= -6 + b + 6 && \text{أجمع 6 إلى الطرفين} \\ 7 &= b && \text{أبسط} \end{aligned}$$

إذن، فالمقطع y هو 7

الخطوة 3 أعوض الميل والمقطع y في صيغة الميل والمقطع.

$$y = mx + b \quad \text{صيغة الميل والمقطع}$$

$$y = -3x + 7 \quad \text{أعوض } m = -3, b = 7$$

$$y = -3x + 7 \quad \text{إذن، معادلة المستقيم}$$

أتحقق من فهمي:

4 أكتب معادلة المستقيم الذي ميله 5 والمقطع y له -2 بصيغة الميل والمقطع.

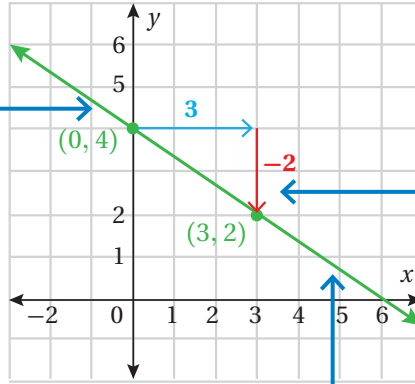
5 أجد معادلة المستقيم المارّ بالنقطة $(-1, 0)$ وميله $\frac{1}{3}$ بصيغة الميل والمقطع.

6 أكتب معادلة المستقيم المارّ بالنقطتين $(0, -4)$ و $(-2, 6)$ بصيغة الميل والمقطع.

يمكن استعمال الميل والمقطع y من المعادلة الخطية المكتوبة بصيغة الميل والمقطع لتمثيل المستقيم.

مثال 2

1 أمثل المعادلة $y = -\frac{2}{3}x + 4$ بيانيًا باستعمال الميل والمقطع y .



الخطوة 1

المقطع y هو 4، إذن أعيّن النقطة $(0, 4)$ في المستوى الإحداثي.

الخطوة 2

أستعمل الميل $-\frac{2}{3}$ لتحديد نقطة أخرى في المستوى. أبدأ من النقطة $(0, 4)$ ، وأتحرك 3 وحدات لليمين، ثم وحدتين للأسفل.

الخطوة 3

أرسم مستقيماً يمرّ بالنقطتين.

الوحدة 3

أتحقق من فهمي:



2 $y = 2x + 1$

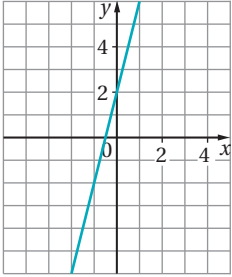
3 $y = x - 4$

4 $y = 3 - x$

تعلمت سابقاً كيفية تمثيل معادلة خطية مكتوبة بصيغة الميل والمقطع، وبالعكس يُمكنني كتابة معادلة مستقيم بصيغة الميل والمقطع عرّف تمثيلها البياني.

مثال 3

1 أكتب معادلة المستقيم المُمثَّلة بيانياً في الشكل المجاور بصيغة الميل والمقطع:



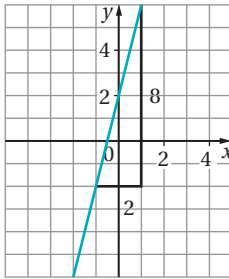
الخطوة 2 أجد الميل

أختار نقطتين على المستقيم، وأجد مقدار التغير الرأسي والتغير الأفقي بينهما.
عدد الخطوات الأفقية: 2

عدد الخطوات الرأسية: 8

$$\frac{\text{التغير الرأسي}}{\text{التغير الأفقي}} = \text{الميل}$$

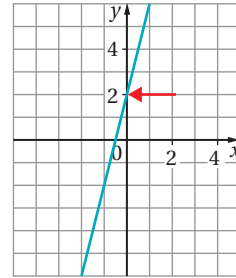
$$m = \frac{8}{2} = 4$$



الخطوة 1 أجد أين قطع المستقيم

المحور y ؛ لأجد المقطع y

ألاحظ أن المستقيم قطع المحور y عند 2،
إذن، فالمقطع y هو 2



الخطوة 3 أكتب معادلة

أعوّض الميل والمقطع y في صيغة الميل والمقطع.

صيغة الميل والمقطع

أعوّض $m = 4$, $b = 2$

$y = mx + b$

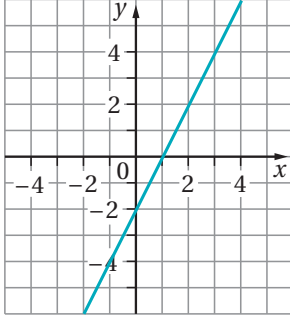
$y = 4x + 2$

إذن، معادلة المستقيم $y = 4x + 2$

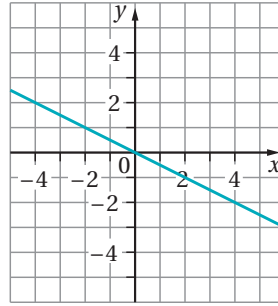
✓ **أتتحقق من فهمي:**

أكتب معادلة المستقيم الممثل بيانياً في كل شكل مما يأتي بصيغة الميل والمقطع:

2



3



غالباً ما يمثل المقطع y القيمة الابتدائية في المسائل الحياتية التي يتم نمذجتها بمعادلة خطية، ويمثل الميل معدل التغير الثابت.

مثال 4: من الحياة



بطارية: إذا كانت النسبة المئوية لطاقة بطارية جهاز حاسوبٍ محمولٍ مشحونةٍ شحناً تاماً (بالصيغة العشرية) 1.00 ، وبعد تشغيل الجهاز تبدأ طاقة البطارية بالتناقص بنسبة 0.2 كل ساعة.

أهـمـكـر

لماذا عُبِّرَ عن نسبة التناقص في طاقة البطارية بـ -0.2 في المعادلة؟

1 أكتب معادلة خطية بمتغيرين لإيجاد نسبة الطاقة المتبقية في البطارية بعد مرور ساعاتٍ عدّة على تشغيل جهاز الحاسوب. افرض أن x هي عدد ساعات تشغيل الحاسوب، و y هي نسبة الطاقة المتبقية في البطارية.

نسبة الطاقة المتبقية



y

نسبة التناقص في الطاقة



-0.2

عدد ساعات التشغيل



x

نسبة الطاقة عند بداية التشغيل



1

$$y = -0.2 \times x + 1$$

2 أصف ما يمثل المقطع y والميل في المسألة.

المقطع y يساوي 1، وهو يمثل نسبة الطاقة بداية التشغيل بالصيغة العشرية، وتعني أن البطارية مشحونة بنسبة 100%، أما الميل فيمثل نسبة التناقص في طاقة البطارية كل ساعة (وهي نسبة ثابتة).

3 أجد المقطع x للمعادلة، ثم أصف ما يمثل في المسألة.

لإيجاد المقطع x ، أعوض $y = 0$ ، ثم أحل المعادلة لأجد قيمة x .

$$y = -0.2x + 1$$

$$0 = -0.2x + 1$$

$$0 - 1 = -0.2x + 1 - 1$$

$$\frac{-0.2x}{-0.2} = \frac{-1}{-0.2}$$

$$x = 5$$

المعادلة الأصلية

أعوض $y = 0$

أطرح 1 من كلا الطرفين

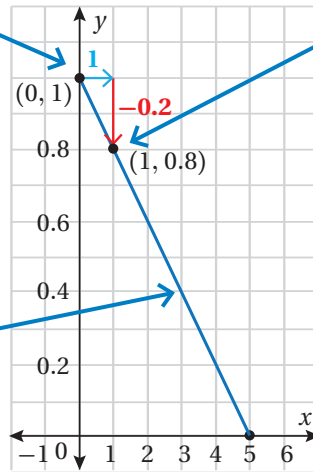
أقسم طرفي المعادلة على -0.2

أبسط

إذن، فالمقطع x هو 5، وهو يدل على أن البطارية ستفقد شحنها كلياً بعد 5 ساعات من تشغيل جهاز الحاسوب.

4 أمثل المعادلة بيانياً باستعمال الميل والمقطع y .

الخطوة 1
المقطع y هو 1. أعيّن النقطة $(0, 1)$ في المستوى الإحداثي.



الخطوة 2
أستعمل الميل لتعيين نقطة أخرى على المستقيم في المستوى الإحداثي.

الخطوة 3
أرسم خطاً يمر بالنقطتين.

أهـمـكـم

لماذا مُثلت المعادلة في الربع الأول فقط من المستوى الإحداثي؟

5 بعد كم ساعة تكون نسبة الطاقة في البطارية 0.75؟

$$y = -0.2x + 1$$

$$0.75 = -0.2x + 1$$

$$0.75 - 1 = -0.2x + 1 - 1$$

$$\frac{-0.2x}{-0.2} = \frac{-0.25}{-0.2}$$

$$x = 1.25$$

المعادلة الأصلية

$$y = 0.75$$

أطرح 1 من كلا الطرفين

أقسم طرفي المعادلة على -0.2

أبسط

إذن، ستكون نسبة الطاقة في البطارية 0.75 بعد ساعة وربع.



✓ **أتحقق من فهمي:**

اشترائك هاتف: تدفع فرح اشتراكاً شهرياً لهاتفها قيمته 5 دنانير، وتدفع قرشين عن كل دقيقة تتحدث فيها بالهاتف.

1 أكتب معادلة خطية بمتغيرين لإيجاد تكلفة ما تدفعه فرح عند تحديثها عدداً من الدقائق خلال الشهر.

2 أصف ما يمثله المقطع y والميل في المسألة. 3 أجد المقطع x للمعادلة، ثم أصف ما يمثله في المسألة.

4 أمثل المعادلة بيانياً باستعمال الميل والمقطع y .

يمكن استعمال التمثيل البياني للمعادلة في متغيرين لحل المعادلة الخطية بمتغير واحد المرتبطة بها.

مثال 5

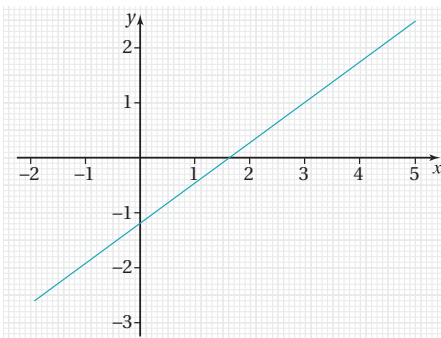
يبين الشكل المجاور التمثيل البياني للمعادلة $y = 0.73x - 1.15$.
أستعمل التمثيل البياني لأجد حل كل معادلة مما يأتي:

1 $0.73x - 1.15 = 0$

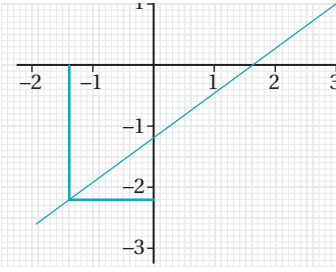
بما أن المعادلة $y = 0.73x - 1.15$ ، فإن $0.73x - 1.15 = 0$ عندما تكون قيمة y تساوي صفراً، ويقطع عندها المستقيم الممثل للمعادلة المحور x .

ومن قراءة التمثيل البياني أجد أن $x = 1.6$

إذن، حل المعادلة هو $x = 1.6$

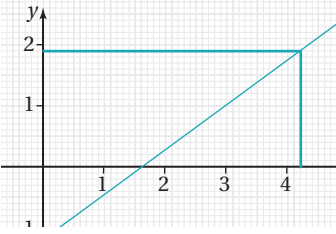


الوحدة 3



2 $0.73x - 1.15 = -2.2$

لحل المعادلة أجد -2.2 على المحور y ، ثم أحدد النقطة التي تقابلها على الخط المستقيم، وأحدد الإحداثي x للنقطة وهو -1.4
إذن، حل المعادلة $x = -1.4$

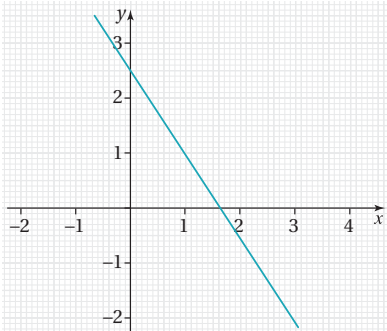


3 $0.73x - 3.05 = 0$

بما أن المعادلة $0.73x - 3.05 = 0$ ، فهي ناتجة عن $0.73x - 1.15 - 1.9 = 0$ ،
وعليه فإنه يمكن كتابة المعادلة على الصورة:

$$0.73x - 1.15 = 1.9$$

ولحل المعادلة أجد 1.9 على المحور y ، ثم أحدد النقطة التي تقابلها على المستقيم، وأحدد الإحداثي x للنقطة وهو 4.2 .
إذن، حل المعادلة $x = 4.2$



أتحقق من فهمي:

يبيّن الشكل المجاور التمثيل البياني للمعادلة $y = 2.45 - 1.37x$. أستخدم التمثيل البياني لأجد حل كل معادلة مما يأتي:

1 $2.45 - 1.37x = 0$

2 $2.45 - 1.37x = 3$

3 $2.45 = 1.37x - 0.5$

أتحارب
وأحل المسائل



أفكر

هل يمكن كتابة معادلة المستقيم الرأسي بصيغة الميل والمقطع؟

- 1 أكتب معادلة المستقيم الذي ميله 1 والمقطع y له -1 بصيغة الميل والمقطع.
- 2 أجد معادلة المستقيم المارّ بنقطة الأصل وميله 4 بصيغة الميل والمقطع.
- 3 أكتب معادلة المستقيم المارّ بالنقطتين $(-2, 4)$ و $(3, -1)$ بصيغة الميل والمقطع.
- 4 أكتب معادلة المستقيم الأفقي الذي يقطع المحور y في النقطة $(0, -5)$ بصيغة الميل والمقطع.

أمثل كل معادلة ممّا يأتي بيانياً باستعمال الميل والمقطع y :

5 $y = 3x + 4$

6 $y = 2x - 5$

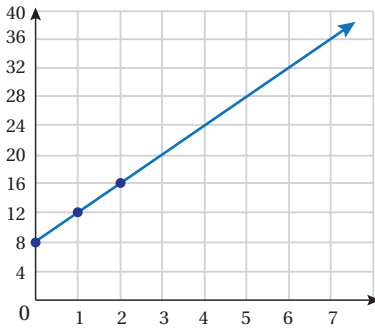
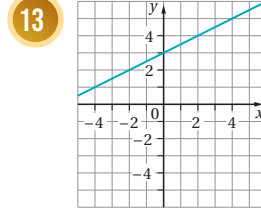
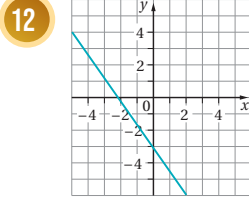
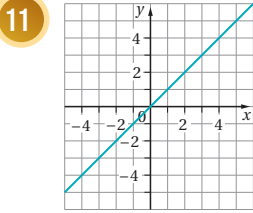
7 $y = \frac{x}{2} - 3$

8 $y = 3x + 5$

9 $y = \frac{x}{3} + 4$

10 $y = 4 - x$

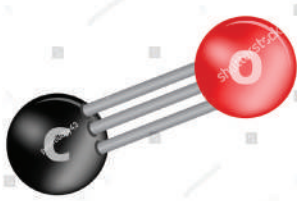
أكتب معادلة المستقيم المُمثل بيانياً في كل ممّا يأتي بصيغة الميل والمقطع:



أشجار: يبيّن التمثيل البياني المجاور العلاقة بين طول نبتة موز بالإنش والزمن بالأيام منذ زراعتها.

كم كان طول الشجرة عند زراعتها؟

أكتب معادلة خطية بمتغيرين تمثل مقدار نمو شجرة الموز بعد مرور أيام عدّة.



بيئة: تتناقص انبعاثات أول أكسيد الكربون في جميع أنحاء العالم بنحو 2.6 مليون طنّ متريّ كلّ عام. ففي عام 1991 بلغت انبعاثات أول أكسيد الكربون 79 مليون طنّ متريّ. أكتب معادلة خطية بمتغيرين تمثل العلاقة بين انبعاثات أول أكسيد الكربون والزمن. (إرشاد: افترض أنّ $x = 91$ تدلّ على العام 1991).

علوم الأرض: أعود إلى فقرة (أستكشف) بداية الدرس، وأحلّ المسألة.

معلومة

شجرة الموز هي في الحقيقة ليست شجرة، بل هي عشب عملاقة تقف مثل الأشجار وتُشابه النخيل الإستوائي، وتُعدّ أطول عشب على وجه الأرض.

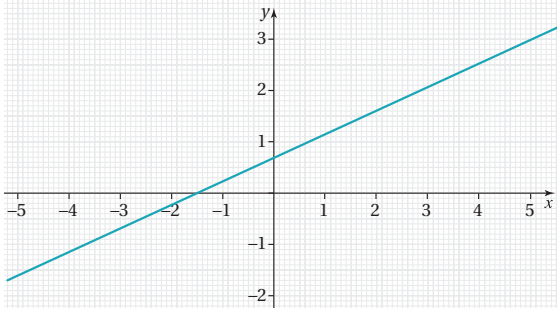


معلومة

أحد مصادر الحرارة الجوفية للكرة الأرضية هو تقلص الكرة الأرضية تحت فعل الجاذبية عند نشأتها من الغبار الكوني.

الوحدة 3

يبيّن الشكل المجاور التمثيل البياني للمعادلة $2.7y + 1.9x = 4.42$. أستخدم التمثيل البياني لأجد حل كل معادلة مما يأتي:



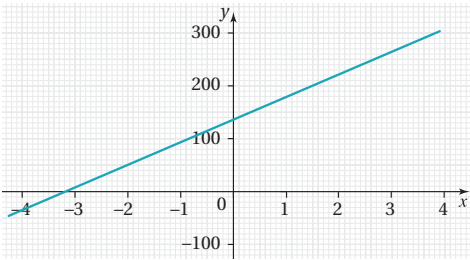
18 $1.9x = 4.42$

19 $2.7y = 4.42$

20 $2.7 + 1.9x = 4.42$

21 $2.7y + 3.8 = 4.42$

مهارات التفكير العليا



22 **تبرير:** يبيّن الشكل المجاور التمثيل البياني للمعادلة $y = 43.8x + 136.2$. أستخدم التمثيل البياني لأجد حل المعادلة $438x + 1362 = 1500$ ، مبرراً إجابتي.

23 **أكتشف المختلف:** أي المعادلات الآتية مختلفة؟ أبرر إجابتي.

$2x + 3y = 12$

$y = 4 - \frac{2}{3}x$

$6y = -4x + 24$

$3x - 2y = 12$

$x = 6 - 1.5y$

24 **نحد:** أجد قيمة a في المعادلة $2y + ax = -5$ ، علماً أن ميل المعادلة $\frac{5}{2}$.

25 **أكتب:** كيف أكتب معادلة مستقيم بصيغة الميل والمقطع علم ميله والمقطع y له.

أستكشف



تمثل المعادلة $y - 60.81 = 5.74(x - 5)$ العلاقة بين طول الأرنى y سنتيمتر، وطول ساعدها x سنتيمتر.

1 أجد ميل المستقيم الذي يمثل المعادلة.

2 اكتشف علماء الآثار هيكلًا عظميًا غير كامل لأرنى بساعد طوله 23 cm. أجد طول الهيكل العظمي.

فكرة الدرس

أكتب معادلة المستقيم بصيغة الميل ونقطة وأمثلها بيانيًا.

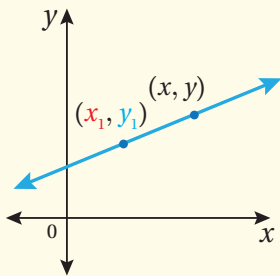
المصطلحات

صيغة الميل ونقطة.

تعلمت في الدرس السابق كتابة معادلة مستقيم بصيغة الميل والمقطع y ، وسأتعلم في هذا الدرس كتابة معادلة مستقيم بصيغة الميل ونقطة (point - slope form) إذا علمت ميل المستقيم وإحداثيات نقطة يمر بها.

صيغة الميل ونقطة

مفهوم أساسي



• **بالكلمات:** صيغة الميل ونقطة للمعادلة الخطية هي: $y - y_1 = m(x - x_1)$ حيث m ميل المستقيم، و (x_1, y_1) نقطة مُعطاة.

• **بالرموز:**

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

الميل

نقطة مُعطاة

مثال 1

1 أكتب معادلة المستقيم المارّ بالنقطة $(-3, 6)$ وميله -5 بصيغة الميل ونقطة.

أعوّض الميل والنقطة المُعطاة في صيغة الميل ونقطة.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

صيغة الميل ونقطة

$$y - 6 = -5(x - (-3))$$

$$m = -5, (x_1, y_1) = (-3, 6)$$

أبسط

$$y - 6 = -5(x + 3)$$

إذن، معادلة المستقيم $y - 6 = -5(x + 3)$

الوحدة 3

2 أكتب معادلة المستقيم المارّ بالنقطتين $(-3, 5)$ و $(9, 21)$ بصيغة الميل ونقطة.

الخطوة 1 أستمّل النقطتين في إيجاد الميل.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{صيغة الميل}$$

$$= \frac{21 - 5}{9 - (-3)} \quad \text{أعوّض عن } (x_1, y_1) \text{ بـ } (-3, 5) \text{ وعن } (x_2, y_2) \text{ بـ } (9, 21)$$

$$= \frac{16}{12} = \frac{4}{3} \quad \text{أبسّط}$$

إذن، الميل $\frac{4}{3}$

الخطوة 2 أعوّض الميل وإحداثيات إحدى النقطتين في صيغة الميل ونقطة.

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad \text{صيغة الميل ونقطة}$$

$$y - 21 = \frac{4}{3}(x - 9) \quad \text{أعوّض } m = \frac{4}{3}, (x_1, y_1) = (9, 21)$$

إذن، معادلة المستقيم $y - 21 = \frac{4}{3}(x - 9)$

✓ **أتحقّق من فهمي:**

3 أكتب معادلة المستقيم المارّ بالنقطة $(8, -4)$ وميله $\frac{2}{3}$ بصيغة الميل ونقطة.

4 أكتب معادلة المستقيم المارّ بالنقطتين $(7, 2)$ و $(1, -8)$ بصيغة الميل ونقطة.

يمكن استعمال الميل والنقطة المُعطاة من المعادلة الخطيّة المكتوبة بصيغة الميل ونقطة لتمثيل المستقيم.

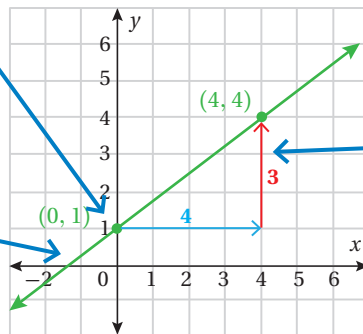
مثال 2

1 أمثّل المعادلة $y - 1 = \frac{3}{4}x$ بيانيًا باستعمال الميل ونقطة.

يمكن إعادة كتابة المعادلة على الصورة: $y - 1 = \frac{3}{4}(x - 0)$ ، وعليه فإنّ الميل $\frac{3}{4}$ والنقطة $(0, 1)$.

الخطوة 1 أعيّن النقطة $(0, 1)$ في المستوى الإحداثي.

الخطوة 3 أرسم مستقيمًا يمرّ بالنقطتين.



الخطوة 2 أستمّل الميل $\frac{3}{4}$ لتحديد نقطة أخرى على المستقيم في المستوى الإحداثي. أبدأ من النقطة $(0, 1)$ ، وأتحرك 4 وحدات نحو اليمين ثم 3 وحدات إلى الأعلى.

✓ **أتتحقق من فهمي:**

أمثل كل معادلة مما يأتي بيانياً باستعمال الميل ونقطة:

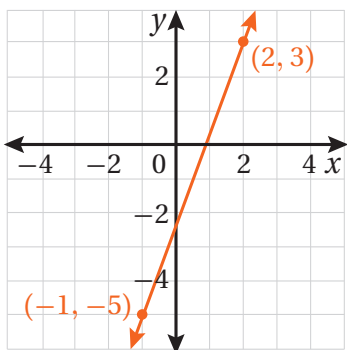
2 $y + 7 = -\frac{4}{5}(x - 4)$

3 $y - 5 = -3(x + 1)$

4 $y - 4 = 2(x - 3)$

تعلمت في المثال السابق كيفية التمثيل البياني لمعادلة خطية مكتوبة بصورة الميل ونقطة، وبالعكس يمكن كتابة معادلة مستقيم بصيغة الميل ونقطة إذا عُرِفَ تمثيلها البياني.

مثال 3



1 أكتب معادلة المستقيم المُمثل بيانياً في الشكل المجاور بصيغة الميل ونقطة:

الخطوة 1 أجد الميل.

أختار نقطتين على المستقيم وأجد الميل.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3 - (-5)}{2 - (-1)} = \frac{8}{3}$$

صيغة الميل

أعوّض عن (x_1, y_1) بـ $(-1, -5)$ وعن (x_2, y_2) بـ $(2, 3)$

أبسّط

الخطوة 2 أعوّض في صيغة الميل ونقطة.

أعوّض الميل وإحداثيات إحدى النقطتين في صيغة الميل ونقطة.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

صيغة الميل ونقطة

$$y - 3 = \frac{8}{3}(x - 2)$$

$$m = \frac{8}{3}, (x_1, y_1) = (2, 3)$$

إذن، معادلة المستقيم $y - 3 = \frac{8}{3}(x - 2)$

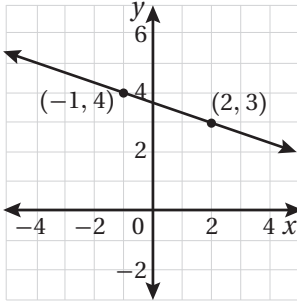
الوحدة 3

أتحقق من فهمي:

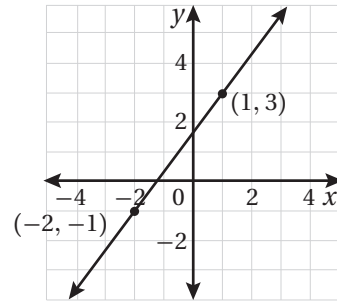


أكتب معادلة المستقيم المُمثل بيانياً في كلٍّ مما يأتي بصيغة الميل ونقطة:

2



3



يمكن كتابة معادلة خطية لنمذجة بيانات مُمثّلة في جدول، إذا كان معدل التغير نفسه بين الأزواج المرتبة المتتالية فيه، ويكون معدل التغير في هذه الحالة هو الميل.

مثال 4: من الحياة



ضغط الماء: يبين الجدول المجاور العلاقة بين ضغط الماء والعمق.

1 أبين أن العلاقة بين ضغط الماء والعمق خطية.

أجد معدل التغير بين الأزواج المرتبة المتتالية في الجدول.

العمق (m)	الضغط (atm)
0	1
10	2
40	5
50	4

أتعلم

يُقاس ضغط الماء بوحدة
الأتوموسفير (atm)

العمق (m)	الضغط (atm)
0	1
10	2
40	5
50	4

$$\frac{1}{10} = 0.1, \quad \frac{3}{30} = 0.1, \quad \frac{1}{10} = 0.1$$

إذن، العلاقة بين ضغط الماء والعمق خطية، ومعدل التغير هو 0.1 (atm) لكل متر.

2 أكتب معادلةً خطيةً بمتغيرين بصيغة الميل ونقطة لإيجاد ضغط الماء عند أي عمق. يمثل معدل التغير 0.1 الميل.

أعوّض الميل وإحداثيات أي نقطة في الجدول في صيغة الميل والنقطة.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

صيغة الميل ونقطة

$$y - 5 = 0.1(x - 40)$$

$$m = 0.1, (x_1, y_1) = (40, 5)$$

إذن، معادلة المستقيم $y - 5 = 0.1(x - 40)$

الارتفاع (m)	الزمن (s)
640	10
590	30
490	70
440	90

منطاد: يبين الجدول المجاور العلاقة بين ارتفاع منطاد هواء ساخن والزمن.

3 أبين أن العلاقة بين ارتفاع المنطاد والزمن خطية.

4 أكتب معادلةً خطيةً بمتغيرين بصيغة الميل ونقطة يمكن استعمالها لإيجاد ارتفاع المنطاد عند أي لحظة.

أدرب وأحل المسائل

أكتب معادلة المستقيم المارّ بالنقطة المُعطاة والمعلوم ميله m في كلٍّ مما يأتي بصيغة الميل ونقطة:

1 $(4, -3), m = \frac{3}{4}$

2 $(-2, -7), m = -5$

3 $(0, 4), m = -1$

أكتب معادلة المستقيم المارّ بكلّ نقطتين مما يأتي بصيغة الميل ونقطة:

4 $(3, 7), (-3, 5)$

5 $(-1, 8), (9, -6)$

6 $(-1, 6), (-3, 10)$

أمثل كل معادلة مما يأتي بياناً باستعمال الميل ونقطة:

7 $y + 3 = 2(x - 1)$

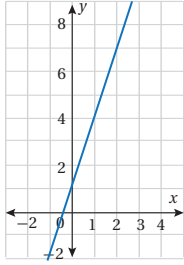
8 $y - 1 = -3(x + 2)$

9 $y - 2 = \frac{4}{9}(x - 3)$

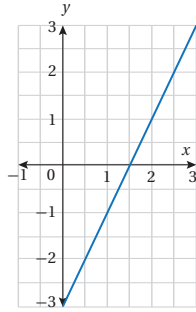
الوحدة 3

أكتب بصيغة الميل ونقطة معادلة المستقيم الممثل بيانياً في كل مما يأتي:

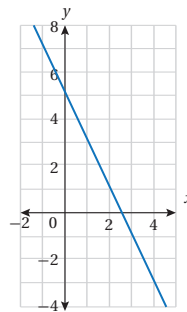
10



11



12



جبر: إذا كان ميل المستقيم المارّ بالنقطتين $(-1, p)$, $(3p, -5)$ يساوي $-\frac{4}{5}$ ، فأجد قيمة الثابت p .

13

معلومة

ذكر البعوض لا يقترب من الإنسان بل يتغذى على رحيق الأزهار والورود، أما الإنسان، فهي التي تهاجم الإنسان وتلسعه لامتصاص دمه.



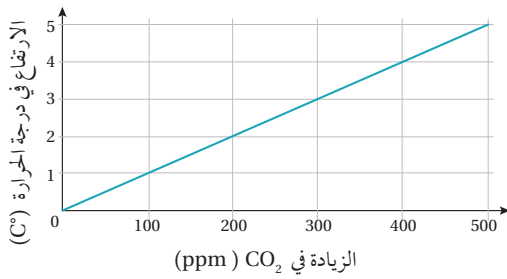
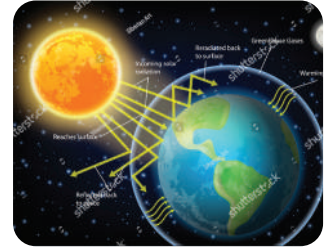
بعوض: تمثل المعادلة $N - 50 = 2(t - 10)$ عدد البعوض N (بالآلاف) في مستنقع صغير بعد t يوماً من بداية شهر حزيران.

أمثل المعادلة بيانياً، حيث $t \geq 0$.

14

بعد كم يوم من بداية الشهر يكون عدد البعوض في المستنقع 46000؟

15



بيئة: التمثيل البياني المجاور للتنبؤ بالعلاقة بين زيادة ثاني أكسيد الكربون في الغلاف الجويّ بالأجزاء من مليون (ppm) وارتفاع متوسط درجة الحرارة في العالم.

إذا زاد CO_2 بمقدار 360 ppm، فما الارتفاع المتوقع في درجة الحرارة؟

16

ارتفعت درجة الحرارة بين عامي 1980 م و 2000 بمقدار 0.4°C أجد مقدار الزيادة في كمية ثاني أكسيد الكربون.

17

أكتب معادلة خطية بمتغيرين لإيجاد مقدار الارتفاع في درجة الحرارة عند أي ارتفاع في كمية CO_2 في الغلاف الجويّ.

18

معلومة

يعدّ ثاني أكسيد الكربون أهم غازات الدفيئة المنبعثة من الأنشطة البشرية، ويبقى هذا الغاز في الغلاف الجويّ عشرات آلاف السنين يحبس الحرارة الناتجة من الإشعاع الشمسي، ويدفع نحو تغير المناخ.



الزمن (year)	محيط الشجرة (in)
1	2
2	4
3	6
4	8

أشجار: يبين الجدول المجاور العلاقة بين محيط جذع شجرة والزمن.

أبين أن العلاقة بين محيط جذع الشجرة والزمن خطية.

أتنبأ بمحيط الشجرة بعد 10 سنوات.

معلومة

بعض الأشجار التي قُطعت جذعها لديها القدرة على جذب النيتروجين من الجو وتسميد المنطقة المحيطة بها، ويُعد النيتروجين سماداً مغذياً جداً للأشجار.

أكتب معادلة خطية بمتغيرين لإيجاد محيط الشجرة في أي سنة.

مهارات التفكير العليا

تبرير: أوجد كل من باسم ولين معادلة المستقيم المارّ بالنقطتين $(1, 6)$, $(-2, -6)$ على النحو الآتي:

لين
$y + 6 = 4(x + 2)$

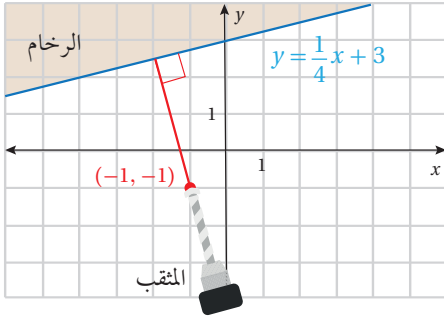
باسم
$y - 6 = 4(x - 1)$

هل إجابة كل منهما صحيحة؟ أبرر إجابتي.

تبرير: كيف سيتغير التمثيل البياني للمعادلة $y - 12 = 8(x - 2)$ ، إذا تغيرت إشارات الطرح في المعادلة إلى إشاراتي جمع؟ أبرر إجابتي دون اللجوء إلى تمثيل المعادلة بيانياً.

تبرير: أجد معادلة المستقيم المارّ بالنقطتين $(5, 5)$, $(9, 1)$ بصيغة الميل والمقطع، ثم أبين أن المقطع x يساوي 10 مبرراً إجابتي.

أكتب: كيف أكتب معادلة مستقيم إذا علم ميله ونقطة يمر بها؟

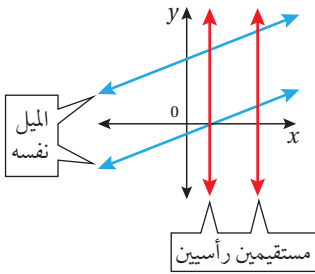


أستكشف

يُوصَلُ رأسُ مِثْقَبِ الرُّخَامِ بالحاسوب؛
لتحديد إحداثيات نقطة الثقب والعمق
الذي يجب أن يبلغه المِثْقَب.

أفترض أن رأس المِثْقَب عند النقطة

$(-1, -1)$ ، أكتب معادلة المستقيم المارّ برأس المِثْقَب والعموديّ على
السطح الذي يجب أن يصل إليه الحفّر والذي معادلته $y = \frac{1}{4}x + 3$.



يُسمّى المستقيمان الواقعان في المستوى نفسه ولا يقطع أحدهما الآخر **مستقيمين متوازيين** (parallel lines)، ويكون لهما الميل نفسه. والمستقيمات الرأسية جميعها متوازية.

مثال 1

1 أكتب معادلة المستقيم المارّ بالنقطة $(-2, 5)$ والموازي للمستقيم $y = \frac{3}{2}x - 7$ بصيغة الميل والمقطع.

الخطوة 1 أجد ميل المستقيم المُعطى.

ميل المستقيم $y = \frac{3}{2}x - 7$ هو $\frac{3}{2}$

الخطوة 2 أكتب معادلة المستقيم بصيغة الميل والمقطع للمستقيم باستعمال الميل والنقطة المُعطاة.

أبدأ بصيغة الميل ونقطة $y - y_1 = m(x - x_1)$

أعوّض $m = \frac{3}{2}$ ، $(x_1, y_1) = (-2, 5)$ $y - 5 = \frac{3}{2}(x - (-2))$

أبسّط $y - 5 = \frac{3}{2}(x + 2)$

خاصية التوزيع $y - 5 = \frac{3}{2}x + 3$

أجمع 5 إلى الطرفين $y - 5 + 5 = \frac{3}{2}x + 3 + 5$

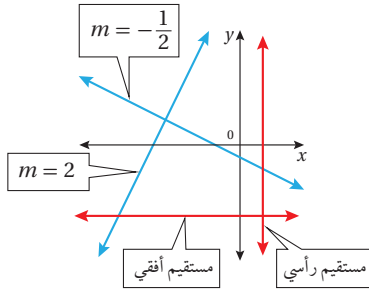
أبسّط $y = \frac{3}{2}x + 8$

✓ اتحقق من فهمي:

أكتب معادلة المستقيم المارّ بالنقطة $(-3, -1)$ والموازي للمستقيم $y = 2x + 5$ بصيغة الميل والمقطع.

أنا أعلم

$$\frac{3}{4} \text{ معكوس مقلوب } \frac{4}{3} \text{ لأن: } \frac{3}{4} \times -\frac{3}{4} = -1$$



يُسمَّى المستقيمان اللذان يتقاطعان مُكوِّنين زوايا قوائم **مستقيمين متعامدين** (perpendicular lines). ويكون ميل أحدهما **معكوس مقلوب** (opposite reciprocals) ميل الآخر، وهذا يعني أن حاصل ضرب ميليهما يساوي -1 والمستقيمتان الرأسية والأفقية متعامدة.

مثال 2

أكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة المستقيم المارّ بالنقطة $(4, 0)$ والعمودي على المستقيم $4y = -8x + 1$.

الخطوة 1 أجد ميل المستقيم المُعطى.

لإيجاد ميل المستقيم المُعطى أحتاج إلى كتابة المعادلة بصورة الميل والمقطع.

$$4y = -8x + 1$$

المستقيم المُعطى

$$\frac{4y}{4} = \frac{-8x}{4} + \frac{1}{4}$$

أقسم طرفي المعادلة على 4

$$y = -2x + \frac{1}{4}$$

أبسط

ميل المستقيم $y = -2x + \frac{1}{4}$ هو -2

الخطوة 2 أجد ميل المستقيم العمودي على المستقيم المُعطى.

ميل المستقيم العمودي على المستقيم المُعطى يساوي معكوس مقلوب العدد -2 ؛ أي $\frac{1}{2}$.

الخطوة 3 أكتب بصيغة الميل ونقطة معادلة المستقيم بصيغة الميل ونقطة.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

أبدأ بصيغة الميل ونقطة

$$y - 0 = \frac{1}{2}(x - 4)$$

أعوّض $m = -2$, $(x_1, y_1) = (4, 0)$

$$y = \frac{1}{2}(x - 4)$$

أبسط

$$y = \frac{1}{2}x - 2$$

خاصية التوزيع

أتحقق من فهمي:



أكتب معادلة المستقيم المارّ بالنقطة (1, 8) والمُعَامِد للمستقيم $3y - 9x = 12$ بصيغة الميل والمقطع.

يمكن تحديد ما إذا كان المستقيمان متوازيين أو متعامدين أو غير ذلك من خلال الميل.

مثال 3

1 أحدد ما إذا كان المستقيمان $-3x + 4y = 32$ و $y - 1 = \frac{3}{4}(x + 2)$ متوازيين أو متعامدين أو غير ذلك.

الخطوة 1 أجد ميل كل مستقيم.

أعيد كتابة معادلة المستقيم $-3x + 4y = 32$ بصورة الميل والمقطع.

$$-3x + 4y = 32$$

$$-3x + 4y + 3x = 32 + 3x$$

$$\frac{4y}{4} = \frac{3x}{4} + \frac{32}{4}$$

$$y = \frac{3}{4}x + 8$$

المستقيم المُعطى

أجمع $-3x$ إلى كلا الطرفين

أقسم طرفي المعادلة على 4

أبسط

إذن، ميل المستقيم $-3x + 4y = 32$ يساوي $\frac{3}{4}$ ، وميل المستقيم $y - 1 = \frac{3}{4}(x + 2)$ يساوي $\frac{3}{4}$

وبما أن ميلًا المستقيمين متساويين، إذن، فالمستقيمان متوازيان.

2 أحدد ما إذا كان المستقيمان $\overleftrightarrow{AB}$ و $\overleftrightarrow{CD}$ متوازيين أو متعامدين أو غير ذلك، حيث $A(1, 1), B(-1, -5), C(3, 2), D(6, 1)$

الخطوة 1 أجد ميل كل مستقيم.

• ميل المستقيم $\overleftrightarrow{AB}$

صيغة الميل

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{-5 - 1}{-1 - 1}$$

$$= \frac{-6}{-2} = 3$$

أعوّض عن (x_1, y_1) بـ $(1, 1)$ وعن (x_2, y_2) بـ $(-1, -5)$

أبسط

• مِيلُ المستقيم $\overleftrightarrow{CD}$

صيغة الميل

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{1 - 2}{6 - 3}$$

$$= -\frac{1}{3}$$

أعوّض عن (x_1, y_1) بـ $(3, 2)$ وعن (x_2, y_2) بـ $(6, 1)$

أبسط

الخطوة 2 أحدد العلاقة بين المستقيمين.

الميلان غير متساويين، إذن، فالمستقيمان غير متوازيين. ولتحديد ما إذا كان المستقيمان متعامدين أجد حاصل ضرب ميليهما.

$$-3 \times \frac{1}{3} = -1$$

بما أن حاصل ضرب ميلَي المستقيمين $\overleftrightarrow{AB}$ و $\overleftrightarrow{CD}$ يساوي -1 ، إذن، فالمستقيمان متعامدان.

أتحقق من فهمي:

3 أحدد ما إذا كان المستقيمان $2x + y = 7$ و $y - 2x = 3$ متوازيين أو متعامدين أو غير ذلك.

4 أحدد ما إذا كان المستقيمان $\overleftrightarrow{AB}$ و $\overleftrightarrow{CD}$ متوازيين أو متعامدين أو غير ذلك، حيث $A(3, 6)$, $B(-9, 2)$, $C(5, 4)$, $D(2, 3)$

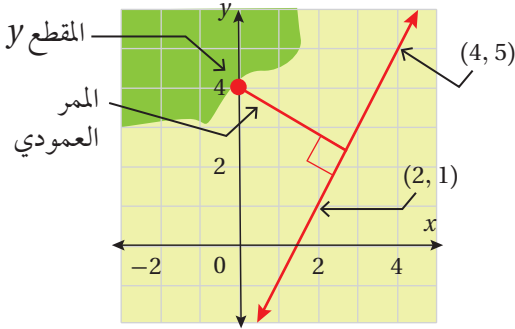
يمكن كتابة معادلة أي مستقيم يمر بنقطة معلومة يوازي أو يعامد مستقيماً معلوماً في كثير من التطبيقات الحياتية.

مثال 4: من الحياة



عمارة: ترغب إحدى البلديات بربط مدخل الحديقة العامة بمسار الجري داخل الحديقة من خلال ممر عمودي على المسار. معتمداً الشكل المجاور الذي يمثل مخطط الحديقة، أجد معادلة المستقيم الذي يمثل الممر.

الوحدة 3



الخطوة 1

أجد ميل المستقيم الذي يمثل مسار الجري.
تقع النقطتان (2, 1) و (4, 5) على مسار الجري، إذن، يمكن من خلالهما إيجاد ميل المستقيم الذي يمثل المسار.

صيغة الميل

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{5 - 1}{4 - 2}$$

$$= \frac{4}{2} = 2$$

أعوّض عن (x_1, y_1) بـ (2, 1)

وعن (x_2, y_2) بـ (4, 5)

أبسط

الخطوة 2

أجد ميل المستقيم الذي يمثل معادلة الممر.
بما أن الممر عمودياً على مسار الجري، إذن، أجد مقلوب معكوس ميل المسار.
بما أن ميل مسار الجري يساوي 2، فإن مقلوب معكوسه $-\frac{1}{2}$

الخطوة 3

أجد معادلة المستقيم الذي يمثل الممر.
بما أن المستقيم الذي يمثل الممر يقطع المحور y في النقطة (0, 4)، إذن، فإن المقطع y له يساوي 4، وعليه فإن معادلة الممر هي:

$$y = -\frac{1}{2}x + 4$$

أتحقق من فهمي:

في المثال السابق، تخطط البلدية لإنشاء مسار ركض آخر داخل الحديقة مواز لمسار الركض الأول ويمر في مدخل الحديقة. أجد معادلة المستقيم الذي يمثل مسار الركض الجديد.

أتحارب
وأحل المسائل

أكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة المستقيم المار بالنقطة المُعطاة والموازي للمستقيم المُعطاة معادلته في كل مما يأتي:

1 $(-1, 5), y = \frac{1}{2}x - 10$

2 $(2, -7), 2y = 5x - 3$

3 $(4, 8), x + 4y - 9 = 0$

4 $(9, 3), 2x - 7y + 1 = 0$

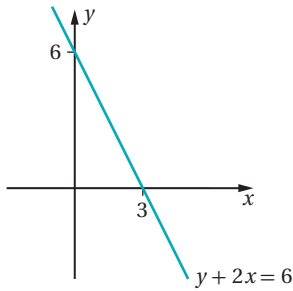
أكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة المستقيم المارّ بالنقطة المُعطاة والمُعَامِد للمستقيم المُعطاة معادلته في كلِّ ممّا يأتي:

5 $(2, -7), y = x - 2$

6 $(-5, -4), y = \frac{1}{2}x + 1$

7 $(2, 2), 3y = -2x + 6$

8 $(-3, 0), 3x - 4y = -4$



يبيّن الشكل المجاور التمثيل البياني للمستقيم الذي معادلته $y + 2x = 6$

أبيّن أنّ النقطة $(1, 4)$ تقع على المستقيم.

أجد ميل المستقيم.

أكتب معادلة المستقيم بصيغة الميل ونقطة.

أجد معادلة المستقيم المارّ بنقطة الأصل والموازي لهذا المستقيم بصيغة الميل والمقطع.

$3x + 5y = 7$
 $6x + 3y = 7$
 $3y - 5x = 7$
 $8x - 4y = 7$
 $4y + 2x = 7$

يحتوي الصندوق المجاور على زوجين من المستقيمات المتعامدة. فأَيُّ المستقيمات مختلف؟ أبرّر إجابتي.

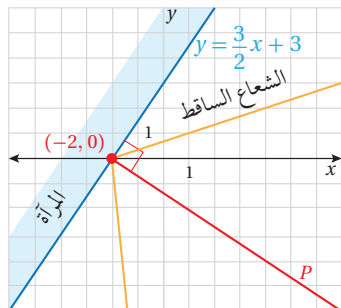
أحدّد ما إذا كان المستقيمان $\overleftrightarrow{AB}$ و $\overleftrightarrow{CD}$ متوازيين أو متعامدين أو غير ذلك في كلِّ ممّا يأتي:

14 $A(8, -2), B(4, -1), C(3, 11), D(-2, -9)$

15 $A(8, 4), B(4, 3), C(4, -9), D(2, -1)$

16 $A(1, 5), B(4, 4), C(9, -1), (-6, -5)$

17 $A(4, 2), B(-3, 1), C(6, 0), D(-10, 8)$



أشعة: تمثّل المعادلة $y = \frac{3}{2}x + 3$ سطح مرآة، وتمثّل النقطة $(-2, 0)$ نقطة التقاء الشعاع الساقط مع المرآة. أجد معادلة العمود المُقام على المرآة P.

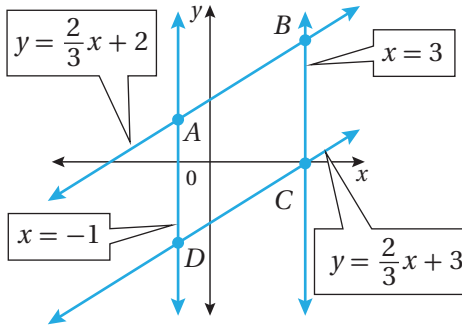
أتذكّر

زاوية سقوط الشعاع تساوي زاوية انعكاسه.

الوحدة 3

أتذكر

متوازي الأضلاع شكلٌ رباعيٌّ فيه كلُّ ضلعين متقابلين متوازيان.



أستعمل الميل لتحديد ما إذا كان الشكل الرباعي $ABCD$ المبيّن في التمثيل البياني المجاور يمثل متوازي أضلاع.

19

مهارات التفكير العليا

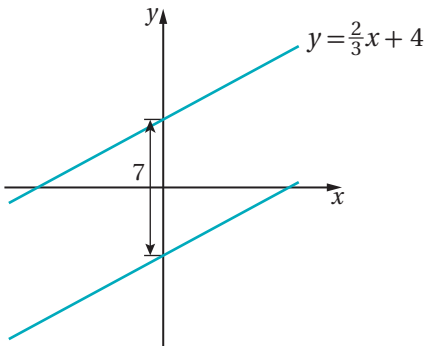
تبرير: تمثل النقاط $A(5, 10)$, $B(1, 5)$, $C(6, 1)$ ثلاثة رؤوسٍ لمتوازي الأضلاع $ABCD$

أجد معادلة المستقيم المارّ بالنقطتين A و C .

20

أجد إحداثيي نقطتين مُحتملتين للرأس الرابع D لمتوازي الأضلاع، مبرّرًا إجابتي.

21



تبرير: يبيّن الشكل المجاور التمثيل البياني لمستقيمين متوازيين في المستوى الإحداثي. أجد معادلة المستقيم السفلي، وأبرّر إجابتي.

22

تحديد: أجد قيمة a التي تجعل المستقيمين $y = ax + 5$ و $2y = (a+4)x - 1$ متوازيين.

23

أكتب: كيف يمكن تحديد ما إذا كان مستقيمان في المستوى الإحداثي متوازيين أو متعامدين أو غير ذلك؟

24



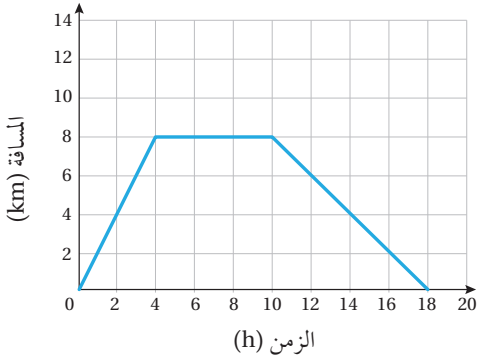
فكرة الدرس

أفسر الرسوم البيانية للمواقف الحياتية.

المصطلحات

منحنيات التحويل، منحني المسافة - الزمن

أستكشف

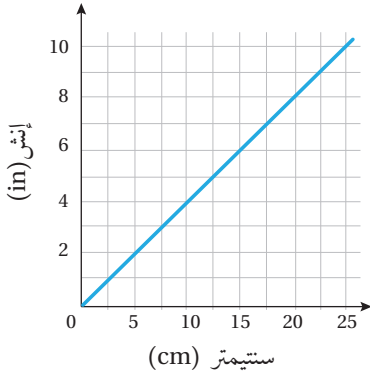


يبيّن الشكل المجاور التمثيل البياني للعلاقة بين المسافة التي قطعها السيارة والزمن.

- 1 كم ساعة استمرت رحلة السيارة؟
- 2 ما المدة الزمنية التي توقفتها السيارة في أثناء الرحلة؟

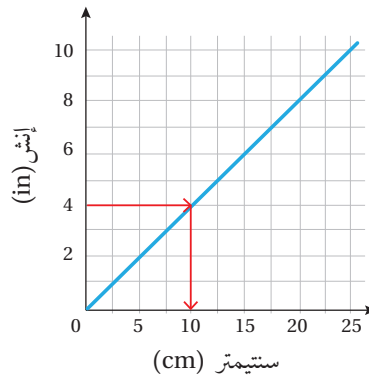
تعلمت سابقاً التحويل بين وحدات القياس المختلفة باستعمال علاقة خطية تربط بينها، وسأتعلم اليوم كيفية قراءة وتفسير **منحنيات التحويل (conversion graphs)**، وهي منحنيات تُستعمل لتمثيل العلاقات بين وحدات القياس المختلفة والتحويل بينها.

مثال 1



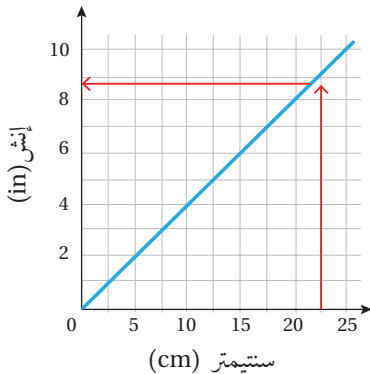
يبيّن منحني التحويل المجاور العلاقة بين السنتيمتر (cm) والإنش (in).
أستعمل التمثيل البياني للإجابة عن كل مما يأتي:

- 1 أحوّل 4 in إلى وحدة السنتيمتر.



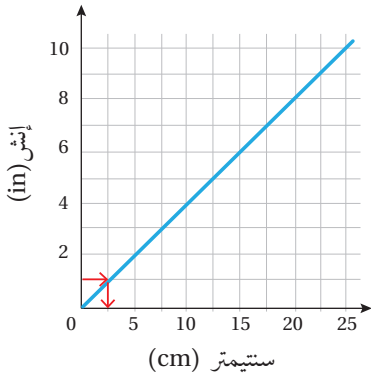
ألاحظ من التمثيل البياني أن 4 in تقابل 10 cm تقريباً.

- 2 أحوّل 22 cm إلى وحدة الإنش.



ألاحظ من التمثيل البياني أن 22 cm تقابل 8.7 in تقريباً.

الوحدة 3



3 أُبَيِّنُ كَيْفَ أَسْتَعْمَلُ الْمُنْحَنِي الْمُعْطَى لِتَحْوِيلِ 18 in إِلَى سَنْتِمِترَاتٍ.

بما أن 18 in غير موجودة على التمثيل البياني، لذا أتَّبِعُ الخُطواتِ الآتية للتحويل:

الخطوة 1 أجد كم سنتيمترا في الإنش الواحد.

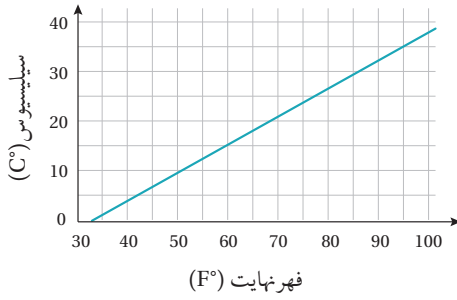
ألاحظ من التمثيل البياني أن كل 1 in يقابل 2.5 cm تقريبا.

الخطوة 2 أضرب 18 in في 2.5

$$18 \times 2.5 = 45$$

إذن، 18 in تساوي 45 cm

✓ أتتحقق من فهمي:



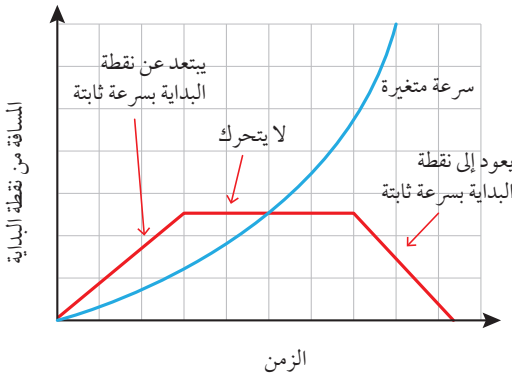
يبيِّن مُنْحَنِي التَّحْوِيلِ المُجاوِرُ العَلاقَةَ بَينَ وَحدَتَي قِياسِ درجَاتِ الحَرارةِ الفهرنهايت والسليسيوس. أَسْتَعْمَلُ التَّمثِيلَ البَيَانِيَّ لِلإِجابَةِ عَن كُلِّ مِمَّا يَأْتِي:

4 أحوِّل 35° C إلى وَحدةِ الفهرنهايت.

5 أحوِّل 50° F إلى وَحدةِ السليسيوس.

6 إذا كانت درجة حرارة تجمد الماء 0° C، فما درجة الحرارة المقابلة لها بالفهرنهايت؟

يكون من الصعب في بعض الأحيان وصف حركة جسم خلال مدّة زمنية محدّدة بالكلمات؛ لذلك تُسْتَعْمَلُ المُنْحَنِيَّاتُ لتمثيل تلك الحركة بوضوح. يُسْتَعْمَلُ مُنْحَنِي **المسافة-الزمن** (distance–time graph) لتمثيل المسافة التي قطعها جسم متحرك خلال مدّة زمنية معينة (بين نقطتين زمنيتين).



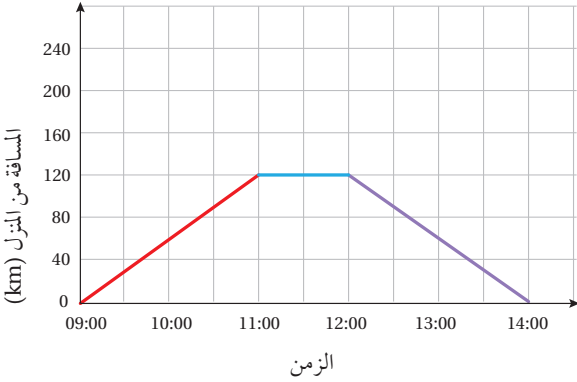
يبيِّن الشكْلُ المُجاوِرُ كَيْفَ يُمْكِنُ لَشَكْلِ المُنْحَنِ أَنْ يَصِفَ سُرْعَةَ الجسم، حيثُ تَظْهَرُ المِساْفَةُ على المَحْوَرِ الرَأْسِيِّ والزَمَنُ على المَحْوَرِ الأفقيِّ.

ويمكن إيجاد سرعة الجسم (S) بقسمة التغير في المسافة ($y_2 - y_1$) على التغير في الزمن ($x_2 - x_1$) إذن:

$$S = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

ألاحظ أن صيغة السرعة تشبه صيغة الميل، إذن سرعة الجسم تساوي ميل مُنْحَنِ المسافة - الزمن.

مثال 2: من الحياة



يُبين التمثيل البياني المجاور رحلة أحمد بسيارته من منزله إلى مطار الملكة علياء ليقبل بها أخاه العائد من السفر، حيث مكث بعض الوقت في المطار انتظاراً لوصول أخيه، ثم عاداً معاً إلى المنزل.

1 في أي ساعة غادر أحمد منزله؟

غادر أحمد منزله الساعة 9:00 عندما بدأ التمثيل البياني الحركة من المستوى الأفقي.

2 ما المسافة بين منزل أحمد ومطار الملكة علياء؟

أصبح منحنى المسافة - الزمن بين الساعة 11:00 والساعة 12:00 أفقياً، ما يعني أن المسافة بين أحمد ومنزله لا تتغير في هذه الفترة، إذن يكون أحمد عندها وصل إلى المطار، وهذا يدل على أن المطار يبعد عن منزل أحمد 120 km.

3 كم أمضى أحمد من الوقت في المطار؟

تقع القطعة الأفقية من المنحنى بين الساعة 11:00 والساعة 12:00 وطولها يساوي الزمن الذي أمضاه أحمد في المطار. إذن، أمضى أحمد ساعة واحدة في المطار.

4 أجد سرعة السيارة في المدة الزمنية: 9:00-11:00.

لأجد سرعة السيارة في المدة الزمنية 9:00-11:00 ؛ يتطلب أن أجد ميل المستقيم في هذه المدة.

$$\begin{aligned}
 m &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} && \text{صيغة الميل} \\
 &= \frac{120 - 0}{11 - 9} && \text{أعوّض عن } (x_1, y_1) \text{ بـ } (9, 0) \\
 &&& \text{وعن } (x_2, y_2) \text{ بـ } (11, 120) \\
 &= \frac{120}{2} = 60 && \text{أبسط}
 \end{aligned}$$

بما أن ميل المستقيم هو 60، إذن سرعة السيارة في المدة الزمنية 9:00 - 11:00 تساوي 60 km/h.

أنت تعلم

الوقت بصيغة الـ 24 ساعة هو نظام يبدأ فيه اليوم من منتصف الليل إلى منتصف الليل الذي يليه خلال دورة واحدة مكونة من الـ 24 ساعة اليومية.

الوحدة 3

أَتَعَلَّمُ

أُعبّر عن 12:30 عند التعويض في القانون بـ 12.5 .

أَهْكُلُ

ماذا تمثل المدة الزمنية ما بين الساعة 12 والساعة 12:30؟

5 أجد سرعة السيارة في المدة الزمنية 12:00–14:00، ثم أبين ماذا تمثل.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

صيغة الميل

$$= \frac{0 - 120}{14 - 12}$$

$$= \frac{-120}{2} = -60$$

أعوّض عن (x_1, y_1) بـ $(12, 120)$ وعن (x_2, y_2) بـ $(14, 0)$

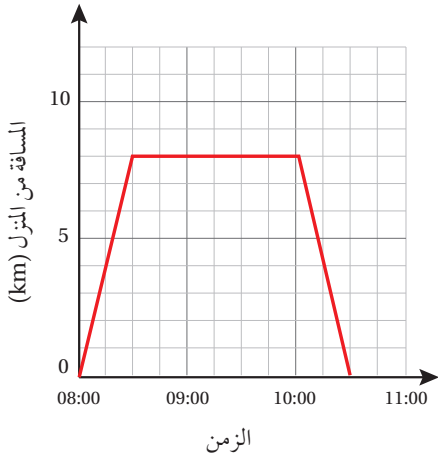
أبسّط

بما أن ميل المستقيم هو -60؛ فإن القيمة السالبة للميل تعني أن أحمد بدأ بالعودة إلى المنزل الساعة 12:00 بسرعة ثابتة مقدارها 60 km/h، ووصل إلى منزله الساعة 14:00

أتحقق من فهمي:



يبين التمثيل البياني المجاور رحلة خالد على دراجته من منزله إلى المكتبة، حيث أمضى بعض الوقت فيها، ثم عاد بدراجته إلى المنزل.



6 في أي ساعة غادر خالد منزله؟

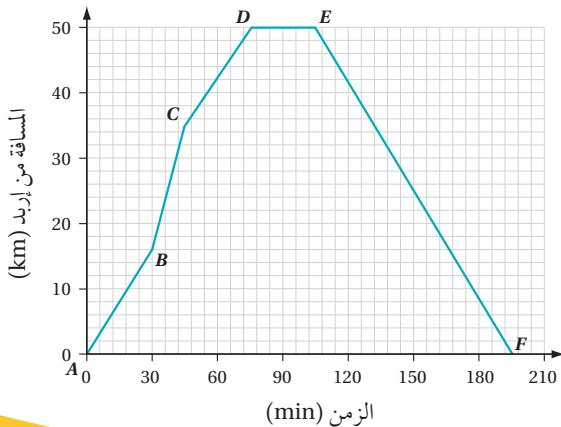
7 ما المسافة بين منزل خالد والمكتبة؟

8 كم أمضى خالد من الوقت في المكتبة؟

9 أجد سرعة خالد في المدة الزمنية 10:00–10:30، ثم أبين ماذا تمثل.

يُظهر مُنحنى المسافة - الزمن في المثال السابق المسافة التي يقطعها جسم متحرك بين أوقات مختلفة من ساعات اليوم. وتوجد أيضًا مُنحنيات تُظهر المسافة التي يقطعها الجسم المتحرك بعد مرور مدة زمنية محددة من لحظة انطلاقه على نحو ما هو موضح في المثال الآتي.

مثال 3



يمثل مُنحنى المسافة - الزمن رحلة حافلة نقلت ركابًا من مدينة إربد إلى مدينة المفرق، حيث توقف سائق الحافلة في الموقف مدة من الزمن لتحميل الركاب، ثم عاد إلى مدينة إربد.

1 ما المسافة بين إربد والمفرق؟

أصبح مُنحني المسافة - الزمن بعد ما يقارب 75 دقيقة أفقيًا، ما يعني أن المسافة بين إربد والمفرق لا تتغير، إذن تكون عندها الحافلة وصلت إلى مدينة المفرق، وهذا يدل على أن مدينة إربد تبعد عن مدينة المفرق 50 km .

2 ما المدة الزمنية التي انتظرها سائق الحافلة في الموقف لتحميل الركاب؟

بما أن المُنحني أفقيًا بين 75 دقيقة و 105 دقائق من انطلاق الحافلة من إربد إلى المفرق، فهذا يعني أن الحافلة توقفت 30 دقيقة في المفرق لتحميل الركاب.

3 ما زمن الرحلة كلها؟

ألاحظ من المُنحني أن زمن الرحلة كلها 195 دقيقة، أي 3 ساعات وربع.

4 ماذا يمكننا القول عما يتعلق برحلة الحافلة من النقطة E إلى النقطة F؟

بدأت الحافلة بالعودة من مدينة المفرق إلى مدينة إربد بين هاتين النقطتين، واستغرقت رحلة العودة 90 دقيقة.

5 أحسب سرعة الحافلة في المدة من C إلى D .

لأجد سرعة السيارة في المدة من C إلى D ؛ يتطلب أن أجد ميل المستقيم في كل مدة.

$$\begin{aligned} m &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} && \text{صيغة الميل} \\ &= \frac{50 - 35}{75 - 45} && \text{أعوّض عن } (x_1, y_1) \text{ بـ } (45, 35) \text{ وعن } (x_2, y_2) \text{ بـ } (75, 50) \\ &= \frac{15 \text{ km}}{30 \text{ min}} && \text{أبسط} \end{aligned}$$

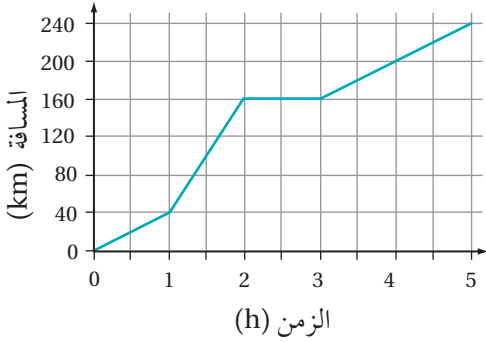
وبما أن الحافلة قطعت 15 km في 30 min، إذن يمكنني إيجاد سرعة الحافلة في الساعة الواحدة.

$$\begin{aligned} \frac{15 \text{ km}}{30 \text{ min}} &= && \text{المسافة التي قطعتها الحافلة في 30 دقيقة} \\ &= \frac{15 \times 2 \text{ km}}{30 \times 2 \text{ min}} && \text{أضرب في 3 لتحويل سرعة الحافلة بوحدة الكيلومتر لكل ساعة} \\ &= \frac{30 \text{ km}}{60 \text{ min}} && \text{أبسط} \\ &= \frac{30 \text{ km}}{1 \text{ h}} && \text{كل 60 min تساوي 1 ساعة واحدة} \end{aligned}$$

إذن، سرعة الحافلة من C إلى D 30 km/h

الوحدة 3

أتحقق من فهمي:



يبيّن التمثيل البيانيّ المجاورُ رحلةً بهاءَ بسيارته من مدينة الكرك متّجّهاً إلى عمله في مدينة العقبة عبر طريق الغور الأردنيّ.

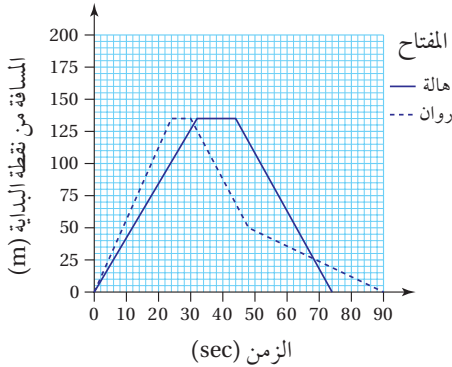
6 ما المسافة بين مدينة عمّان ومدينة العقبة؟

7 ما المدة الزمنية التي استغرقها لأخذ استراحة؟

8 أحسب سرعة السيارة في الجزء الأخير من الرحلة.

9 إذا وصل بهاء مدينة العقبة الساعة 1 p.m. ، ففي أي ساعة انطلق من مدينة الكرك؟

تعلّمت في الأمثلة السابقة قراءة وتفسير التمثيل البيانيّ لمنحنى واحد، ولكن تُظهر بعض التمثيلات أكثر من منحنى في التمثيل البيانيّ نفسه، مثل منحنى المسافة - الزمن لأكثر من شخص، وعندئذ نكون في حاجة إلى المقارنة بين المنحنيين.

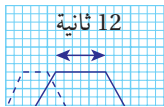


مثال 4

يبيّن التمثيل البيانيّ المجاورُ سباقاً بين روان وهالة، حيث ركّضتا إلى نهاية الطريق المجاور لمنزلهما، وأخذت كلُّ منهما استراحة قصيرة، ثم عادتا ركّضاً إلى نقطة البداية، وفي طريق العودة التوى كاحل روان.

1 أيُّهما أنهت السباق بوقتٍ أقصر روان أم هالة؟ ولماذا؟

أنهت هالة السباق أولاً، حيث يظهر من التمثيل البيانيّ أنّ منحنى هالة وصل إلى المحور الأفقيّ قبل منحنى روان، حيث أنهت هالة السباق في 75 sec، في حين أنهت روان السباق في 90 sec.



2 ما مقدار الوقت الذي استراحت فيه هالة؟

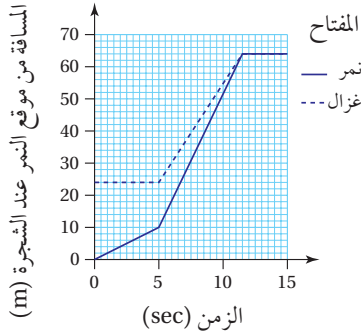
استراحت هالة مدة 12 sec على نحو ما يظهر في الشكل المجاور.

3 بعد كم ثانية من بدء السباق التوى كاحل روان؟

التوى كاحل روان بعد 48 sec، وذلك لأن سرعتها قلّت فجأة عند الثانية 48، ويظهر ذلك في التمثيل البيانيّ، حيث قلّ ميل المنحنى بعد الثانية 48.

أَتَعَلَّمُ

أقرأ مقياس الرسم للتمثيل البياني جيداً وألاحظ أن كل مربع صغير يمثل ثانيتين.



4 ماذا حدث بعد 68 ثانية من بدء السباق؟

ألاحظ أن المنحنيين تقاطعا في الثانية 68، وهذا يدل على أن هالة وروان كانتا على البعد نفسه من نقطة البداية / النهاية في تلك اللحظة.

أتحقق من فهمي:

رصد نمر غزالاً عندما كان أسفل شجرة، ثم بدأ النمر بمطاردة الغزال حتى اصطاده. يبين التمثيل البياني المجاور المطاردة بين النمر والغزال.

5 كم كانت المسافة بين الغزال والنمر عند بدء المطاردة؟

6 كم ثانية استمر النمر في رصد الغزال؟

7 ماذا فعل الغزال بين الثانية 0 والثانية 5؟

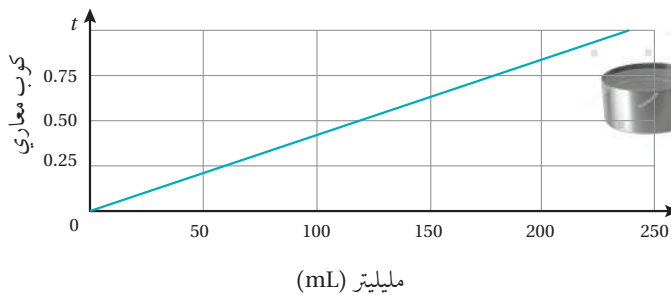
8 كم ثانية ركض الغزال قبل أن يصطاده النمر؟

9 كيف أستدل من التمثيل البياني أن النمر أسرع من الغزال؟

أَتَدْرِبُ



يبيّن منحنى التحويل المجاور العلاقة بين المليلتر ووحدة الكوب المعياري الذي يُستعمل لقياس الكميات في الطبخ.

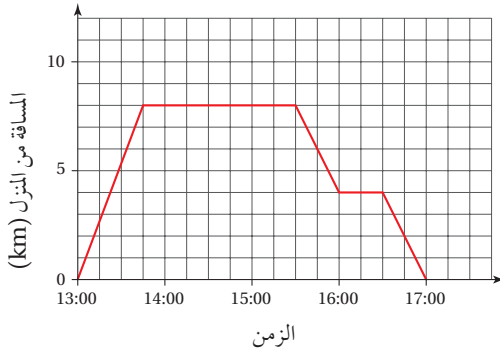


1 كم مليلتراً من السائل يقابل الكوب المعياري الواحد؟

2 كم كوباً معيارياً يقابل 150 mL؟

3 كم مليلتراً من السائل تحتاج إليه وصفة تتطلب كوباً ونصفاً.

الوحدة 3



يبين التمثيل البياني المجاور رحلة زيد على دراجته من منزله إلى المركز الثقافي، وفي طريق عودته إلى المنزل توقف عند أحد المحال التجارية.

4 في أي ساعة غادر زيد المنزل؟

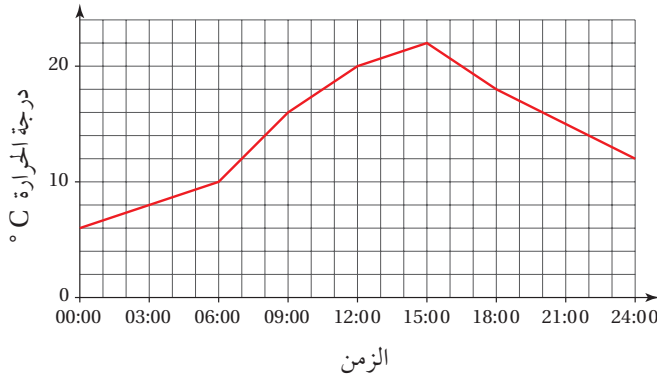
5 كم يبعد المركز الثقافي عن منزل زيد؟

6 كم يبعد المحل التجاري عن منزل زيد؟

7 كم أمضى زيد من الوقت في المركز الثقافي؟

8 أجد سرعة زيد في المدة الزمنية 16:00 – 15:30، ثم أبين ماذا تمثل.

يبين المنحنى المجاور درجات الحرارة في مدينة عجلون في أحد أيام شهر آذار.



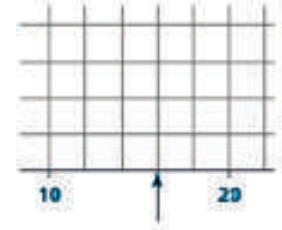
9 ما درجة الحرارة عند الساعة 3:00؟

10 ما مقدار الارتفاع في درجة الحرارة بين الساعة 6:00 والساعة 9:00؟

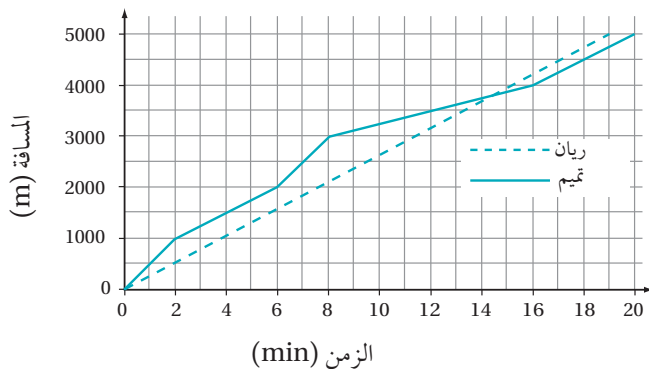
11 هل ارتفعت درجة الحرارة بمقدار أكبر بين الساعة 3:00 والساعة 6:00، أم بين الساعة 6:00 والساعة 9:00؟ أبرر إجابتي.

أتذكر

عندما أقرأ التمثيل البياني أحدد مقياس الرسم أولاً لمعرفة ما يمثله كل مربع في المستوى الإحداثي، ويمكن التحقق من ذلك بالعد. فمثلاً يشير السهم في الشكل أدناه إلى العدد 16



شارك كلٌّ من تميم وريان في سباق 5000 m للجري. ويبيّن الشكل المجاور العلاقة بين المسافة التي قطعها كلٌّ منهما والزمن الذي استغرقه في أثناء السباق.

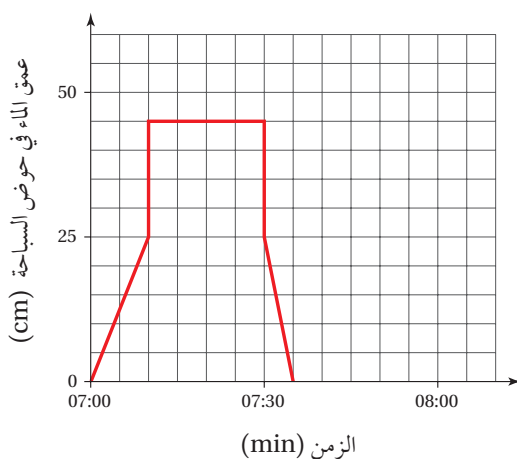


12 أيُّهما ركّض بسرعة ثابتة تميم أم ريان؟ أبرّر إجابتي

13 أجد سرعة ريان خلال السباق.

14 مَنْ فاز بالسباق ريان أم تميم؟ أبرّر إجابتي.

ملأ كمال حوض استحمام بالماء، وعندما أصبح فيه كمية مناسبة من الماء نزل فيه مدة زمنية معينة، ثم خرج وأفرغ الحوض من الماء. يبيّن التمثيل البياني المجاور عمق الماء في الحوض خلال هذه المدة.



15 ما عمق الماء في الحوض قبل نزول كمال فيه.

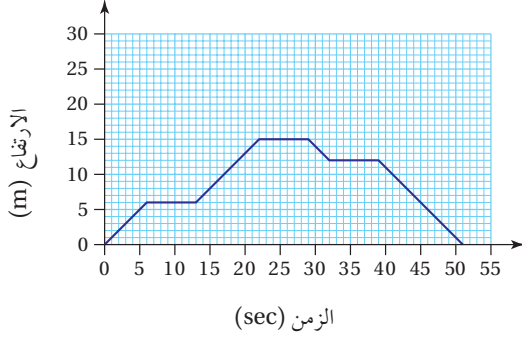
16 ما عمق الماء في الحوض عندما نزل كمال فيه.

17 كم دقيقة أمضى كمال في الحوض؟

الوحدة 3

مهارات التفكير العليا

تحدّ: يعمل مصعدان في فندقٍ مكوّن من 10 طوابق ارتفاع كلّ طابق 3 m، ويتحرّك المصعدان دائماً بالسرعة نفسها، وعندما يتوقف أيّ منهما في أيّ طابق فإنّه يتوقّف مدّة 7 sec.



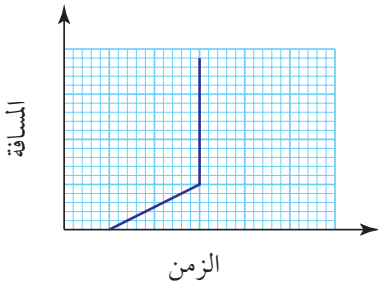
أصف رحلة المصعد الأول
المبينة في التمثيل البياني
المجاور.

18

في الوقت نفسه الذي تحرّك فيه

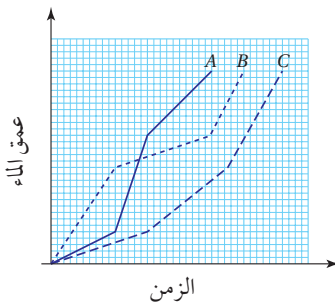
19

المصعد الأول من الطابق الأول، بدأ المصعد الثاني الحركة من الطابق العاشر، حيث هبط إلى الطابق الثاني ثمّ صعد إلى الطابق الرابع، ثم صعد إلى الطابق السادس، أرسم رحلة المصعد الثاني على المنحنى البياني نفسه.

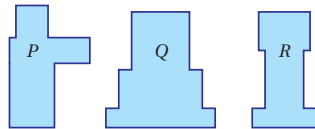


تبرير: لماذا لا يمكن أن يكون أيّ جزء من منحنى المسافة - الزمن رأسياً على نحو ما هو مبين في الشكل المجاور؟ أبرّر إجابتي.

20



تبرير: يتدفّق الماء بمعدّل ثابت ومتساوٍ في ثلاثة أنابيب تتصل بالأوعية R و P و Q المبيّنة أدناه لملئها، ويوضّح التمثيل البياني المجاور عمق الماء في كلّ وعاء مع مرور الزمن.



أصل المنحنيات A و B و C بالوعاء المناسب لكلّ منها، مبرّراً إجابتي.

21

أكتب: ماذا تعني القطعة المستقيمة الأفقية في منحنى المسافة - الزمن؟

22

اختبار الوحدة

أختار رمز الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

1 ميل المستقيم المارّ بالنقطتين $(5, -4)$ و $(5, -10)$:

(a) موجب (b) سالب

(c) صفر (d) غير مُعرّف

2 ميل المستقيم المارّ بالنقطة $(0, 0)$ هو 2، فأى النقاط الآتية تقع أيضًا على المستقيم:

(a) $(-4, 2)$ (b) $(2, 4)$

(c) $(-2, 4)$ (d) $(2, -4)$

3 المقطع y للتمثيل البياني للمعادلة $5x + 2y = 30$ هو:

(a) -15 (b) -6

(c) 6 (d) 15

4 المقطع x للتمثيل البياني للمعادلة $y = 4x + 32$ هو:

(a) -32 (b) -8 (c) 8 (d) 32

5 أي المعادلات الآتية تمثل مستقيمًا ميله $\frac{1}{3}$ ويمرّ بالنقطة $(-2, 1)$ ؟

(a) $y = \frac{1}{3}x + 1$ (b) $y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$

(c) $y = \frac{1}{3}x - \frac{5}{3}$ (d) $y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$

6 أي المعادلات الآتية تمثل مستقيمًا له أكبر ميل؟

(a) $y = 3x$ (b) $y = x + 12$

(c) $y = 5x - 1$ (d) $y = 8x + 4$

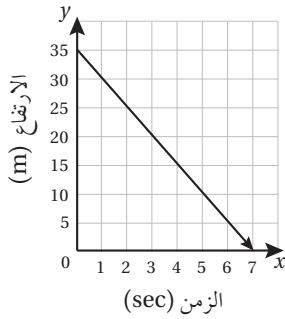
أبين أي العبارات الآتية صحيحة وأيها خطأ:

7 جميع المستقيمات الأفقية لها الميل نفسه.

8 إذا كان ميل المستقيم 1، فإنه يمرّ بنقطة الأصل.

9 معدل التغير يكون إما سالبًا وإما موجبًا.

10 إذا كان لنقطتين الإحداثي x نفسه فهما تقعان على المستقيم الرأسى نفسه.

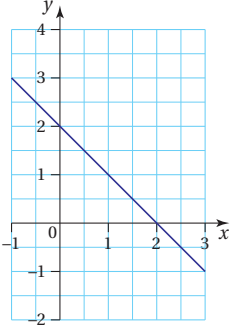


يبين الشكل المجاور العلاقة بين ارتفاع طائرة عمودية بالأمتار والزمن اللازم لوصولها إلى سطح الأرض.

11 بعد كم ثانية تصل الطائرة إلى سطح الأرض؟

12 بعد كم ثانية تكون الطائرة على ارتفاع 15 m؟

13 ما مدلول المقطع y في هذه الحالة؟



أجد الميل والمقطعين
الإحداثيين للمستقيم الممثل
في المستوى الإحداثي
المجاور.

21

تدريب على الاختبارات الدولية

ميل المستقيم المارّ بالنقطتين (a, b) و (c, d) هو:

22

a) $\frac{d-c}{b-a}$

b) $\frac{b-d}{a-c}$

c) $\frac{d-b}{a-c}$

d) $\frac{a-c}{b-d}$

مستقيم أفقي يمرّ بالنقطة $(5, 22)$ ، فأَيُّ النقاط الآتية
تقع على المستقيم؟

23

a) $(5, 2)$

b) $(0, 22)$

c) $(22, 5)$

d) $(0, 5)$

أَيُّ المعادلات الآتية تمثل معادلة مستقيم أفقي؟

24

a) $3x + 6y = 0$

b) $2x + 7 = 0$

c) $-3y = 29$

d) $x - 2y = 4$

أَيُّ المعادلات الآتية المقطع y لها لا يساوي 5؟

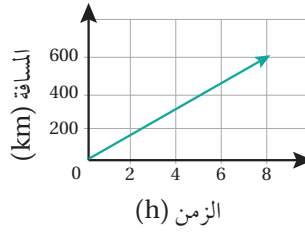
25

a) $2x = y - 5$

b) $3x + y = 5$

c) $y = x + 5$

d) $2x - y = 5$



بيّن التمثيل البياني
المجاور العلاقة بين
المسافة التي قطعها
شاحنة على طريق
مُنحدر والزمن الذي
استغرقته.

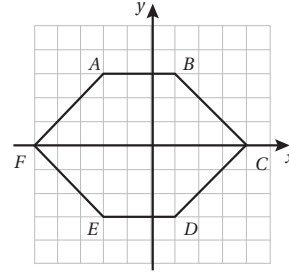
أجد المسافة التي قطعها الشاحنة بعد 4 ساعات من
انطلاقها.

14

هل تسير الشاحنة بسرعة ثابتة على الطريق؟ أبرّر إجابتي.

15

بيّن الشكل المجاور المضلع السداسي $ABCDEF$.



أجد ميل كلٍّ من:

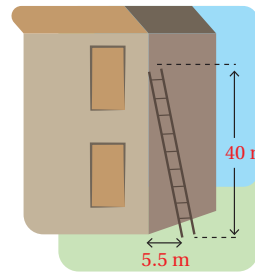
16

$\overline{AE}$, $\overline{AD}$

أجد معادلة كلٍّ من:

17

$\overline{AB}$, $\overline{DC}$, $\overline{AF}$



أجد ميل السُّلّم في
الشكل المجاور.

18

تمثّل المعادلة $y = 5x + k$ مستقيماً يمرّ بالنقطة
 $(2, 11)$.

أجد قيمة k .

19

أجد معادلة المستقيم الموازي للمستقيم في الفرع
السابق المارّ بالنقطة $(4, 11)$.

20

المثلثات المتطابقة

ما أهمية هذه الوحدة؟

تُستعمل المثلثات كثيرًا في التصميم الهندسية؛ لأنَّ خصائصها الهندسية تضيف قوة كبيرةً وجمالاً للتصميم؛ فأيُّ قوةٍ تؤثر في المثلث تتوزع بالتساوي على أضلاعه، لذلك نرى المثلثات كثيرًا في الجسور، والمباني، وأعمدة الكهرباء العالية، والرافعات.



سأتعلَّم في هذه الوحدة:

- إثبات تطابق مثلثين باستخدام حالات التطابق المتعددة.
- تعرّف خصائص المثلث المتطابق الضلعين والمتطابق الأضلاع.
- حلّ مسائل حياتية على تطابق المثلثات.

تعلمت سابقًا:

- ✓ تصنيف المثلثات بحسب أطوال أضلاعها وزواياها.
- ✓ تمييز المضلعات المتطابقة، وتحديد العناصر المتناظرة في مضلعين متطابقين.
- ✓ حلّ مسائل تعتمد على مفهوم التطابق.



مشروع الوحدة: أبني جسرًا



أستعدُّ ومجموعتي لتنفيذ مشروعنا الخاص، الذي سنوظف فيه ما تعلمه في هذه الوحدة حول تطابق المثلثات، لبناء جسر.

المواد والأدوات اللازمة:

- أعواد آيس كريم.
- سيليكون لاصق.

خطوات تنفيذ المشروع:

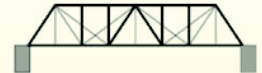
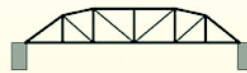
تُستعمل المثلثات المتطابقة كثيرًا في تصميم الجسور؛ لأنها توزع الأحمال بالتساوي بين أجزاء الجسر، مما يزيد من قدرته على تحمل الأثقال.

1

أبحث في شبكة الإنترنت عن تصاميم لجسور باستعمال أعواد الآيس كريم، مستعينًا بالكلمات المفتاحية الآتية: ice cream stick bridge, popsicle stick bridge.

2

أختار تصميمًا جميلًا وجاذبًا للجسر، ثم أرسّم مخططًا له على ورقة، وأحرص على استعمال المثلثات المتطابقة الضلعين والمتطابقة الأضلاع بشكل متماثل في تصميمي.



3

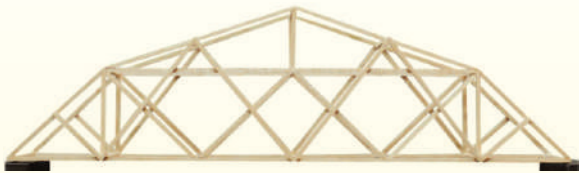
أبدأ تصميم الجسر، وإصاق الأعواد بشكل جيد؛ لضمان ثبات الجسر، ويمكنني البحث عن مقاطع فيديو تساعدني على تنفيذ التصميم باستعمال الكلمات المفتاحية أعلاه.

4

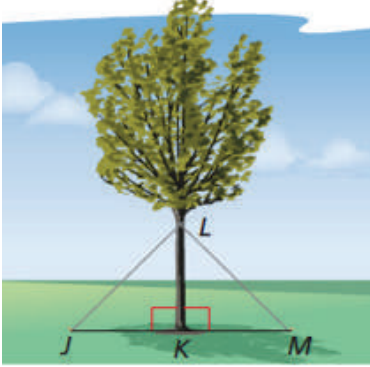
أعدُّ عرضًا تقديميًا يتضمن صور جسور معدنية عالمية استعملت المثلثات في تصميمها. أضيف بعض المعلومات حول كل جسر، مثل: الطول، والبلد الذي يقع فيه، وتاريخ الإنشاء.

عرض النتائج:

- أعرض جسري أمام الصف، وأحد المثلثات المتطابقة فيه.
- أقدم العرض التقديمي، وأتحدث بالتفصيل حول الجسور التي يحتويها.
- نصوّت لأجمل جسر.



أستكشف



يستعمل المزارعون طرائق مختلفة لدعم الأشجار الصغيرة والحد من تأثيرات الرياح، منها الطريقة المبينة في الشكل المجاور، حيث تثبت الشجرة بأسلاكٍ تصل بين جذعها وأوتادٍ في الأرض.

ما العلاقة بين $\triangle LKM$ و $\triangle LKJ$ لجعل الشجرة أكثر ثباتاً؟

فكرة الدرس

- أثبت تطابق مثلثين باستعمال حالتَي SSS و SAS.
- أثبت تطابق مثلثين قائمي الزاوية باستعمال حالة HL.

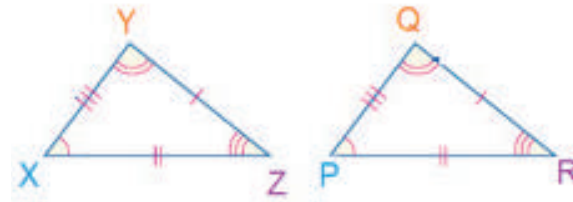
المصطلحات

البرهان السهمي، الزاوية المحصورة، البرهان ذو العمودين، المسلمة، النظرية.

أنعام

المسلمة (Postulate):
عبارة تعطي وصفاً لعلاقة أساسية بين المفاهيم الهندسية الأولية وتقبل على أنها صحيحة من دون برهان.

تعلمت سابقاً أنه إذا كانت الأضلاع المتناظرة في شكلين هندسيين متطابقة، وزواياهما المتناظرة متطابقة، فإن الشكلين متطابقين، فمثلاً المثلثان المجاوران متطابقان؛ لأن:

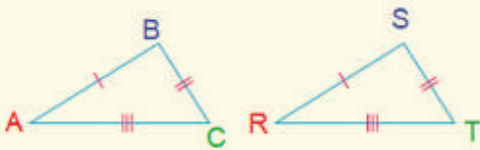


$$\begin{aligned} \overline{XZ} &\cong \overline{PR} & \angle Y &\cong \angle Q \\ \overline{XY} &\cong \overline{PQ} & \angle X &\cong \angle P \\ \overline{YZ} &\cong \overline{QR} & \angle Z &\cong \angle R \end{aligned}$$

لكن هذه المعلومات أكثر من كافية لإثبات تطابق مثلثين، إذ يمكن إثبات ذلك باستعمال تطابق الأضلاع المتناظرة فقط من دون الحاجة إلى بيان تطابق الأجزاء المتناظرة جميعها.

التطابق بثلاثة أضلاع (SSS)

مسلمة



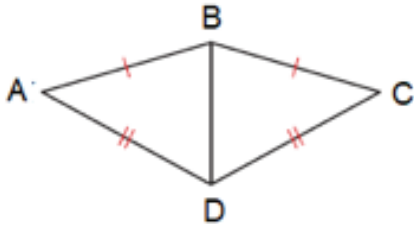
• **بالكلمات:** إذا تطابقت أضلاع مثلث مع الأضلاع المناظرة لها في مثلث آخر، فإن المثلثين متطابقان.

• **بالرموز:** إذا كان: $\overline{AB} \cong \overline{RS}$, $\overline{BC} \cong \overline{ST}$, $\overline{AC} \cong \overline{RT}$ فإن: $\triangle ABC \cong \triangle RST$

الوحدة 4

ويمكن استعمال البرهان السهمي (flow proof) لإثبات تطابق مثلثين، وهو برهان يُستعمل فيه عبارات مكتوبة في مستطيلات، وأسهم تبين التسلسل المنطقي لهذه العبارات، ويكتب أسفل كل مستطيل السبب الذي يبرر العبارة المكتوبة داخله.

مثال 1



أثبت أن المثلثين $\triangle ABD$ و $\triangle CBD$ المبيّنين في الشكل المجاور متطابقان باستعمال البرهان السهمي.

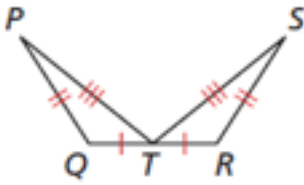
البرهان:

أُتَعَلَّمُ

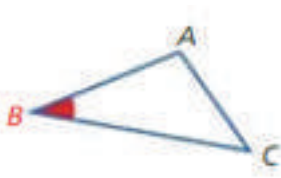
يمكن كتابة البرهان السهمي بصورة رأسية أو أفقية.



أتحقق من فهمي:



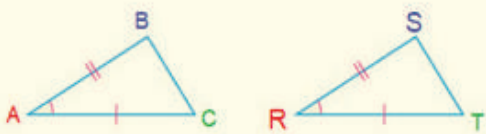
أثبت أن المثلثين $\triangle QPT$ و $\triangle RST$ المبيّنين في الشكل المجاور متطابقان باستعمال البرهان السهمي.



تُسمى الزاوية المتكوّنة من ضلعين متجاورين لمضلع **الزاوية المحصورة** (included angle)، ففي الشكل المجاور $\angle B$ زاوية محصورة بين الضلعين BA و BC .
ومثلما يمكن استعمال حالة (SSS) لإثبات تطابق مثلثين، يمكن أيضاً استعمال زوجين من الأضلاع المتطابقة والزاوية المحصورة بينهما لإثبات تطابقهما.

التطابق بضلعين وزاوية محصورة بينهما (SAS)

مسلمة

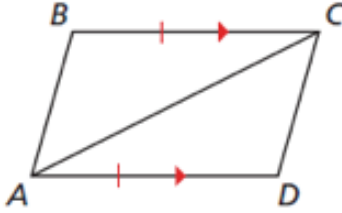


• **بالكلمات:** إذا تطابق ضلعان والزاوية المحصورة بينهما في مثلث مع نظائرها في مثلث آخر، فإن المثلثين متطابقان. وتختصر هذه الحالة بالرمز SAS.

• **بالرموز:** إذا كان: $\overline{AB} \cong \overline{RS}$, $\angle A \cong \angle R$, $\overline{AC} \cong \overline{RT}$ ، فإن: $\triangle ABC \cong \triangle RST$

ويمكن استعمال البرهان ذي العمودين (two-column proof) لإثبات تطابق مثلثين، وهو برهان تُكتب فيه العبارات مرتبة في عمود، والتبريرات في عمود مُوازٍ له.

مثال 2



أثبت أن $\triangle ABC$ و $\triangle ADC$ المبيّنين في الشكل المجاور متطابقان، باستعمال البرهان ذي العمودين.

البرهان:

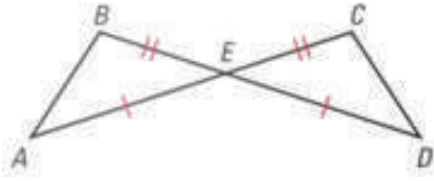
أتذكر

إذا قطع مستقيم مستقيمين متوازيين، فإن لكل زاويتين متبادلتين داخلياً القياس نفسه.

المبررات	العبارات
(1) معطى	(1) $\overline{BC} \cong \overline{DA}$
(2) معطى	(2) $\overline{BC} \parallel \overline{DA}$
(3) زاويتان متبادلتان داخلياً	(3) $\angle BCA \cong \angle DAC$
(4) ضلع مشترك	(4) $\overline{AC} \cong \overline{CA}$
(5) SAS	(5) $\triangle ABC \cong \triangle ADC$



أتحقق من فهمي:

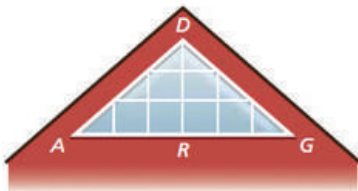


أثبت أن $\triangle ABE$ و $\triangle DCE$ المبيّنين في الشكل المجاور متطابقان، باستعمال البرهان ذي العمودين.

نحتاج في كثير من المسائل إلى تحديد حالة التطابق المناسبة لإثبات تطابق مثلثين، وفقاً للمعطيات المقدّمة في المسألة.



مثال 3: من الحياة



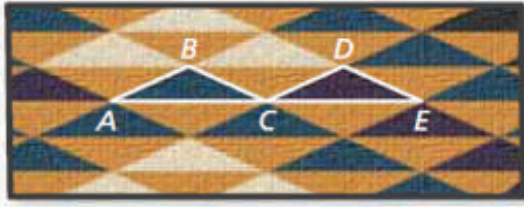
عمارة: صمّم مهندس معماري النافذة المجاورة. إذا كان $\overline{DA} \cong \overline{DG}$ و $\angle ADR \cong \angle GDR$ ، فأكتب برهاناً ذا عمودين؛ لإثبات أن $\triangle DRA \cong \triangle DRG$

البرهان:

المبررات	العبارات
(1) معطى	(1) $\overline{DA} \cong \overline{DG}$
(2) معطى	(2) $\angle ADR \cong \angle GDR$
(3) ضلع مشترك	(3) $\overline{DR} \cong \overline{DR}$
(4) SAS	(4) $\triangle DRA \cong \triangle DRG$

الوحدة 4

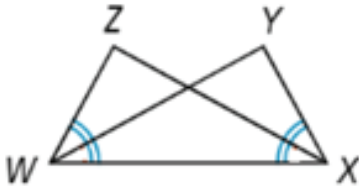
أتحقق من فهمي:



بساط: يبين الشكل المجاور بساطاً تقليدياً يستعمل الحائك في تصميمه انسحاباً لمثلث متطابق الضلعين. أثبت أن $\triangle ABE$ و $\triangle CDA$ المبيّنين في الشكل متطابقان باستعمال البرهان ذي العمودين.

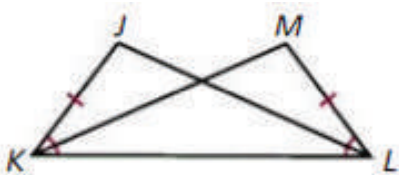
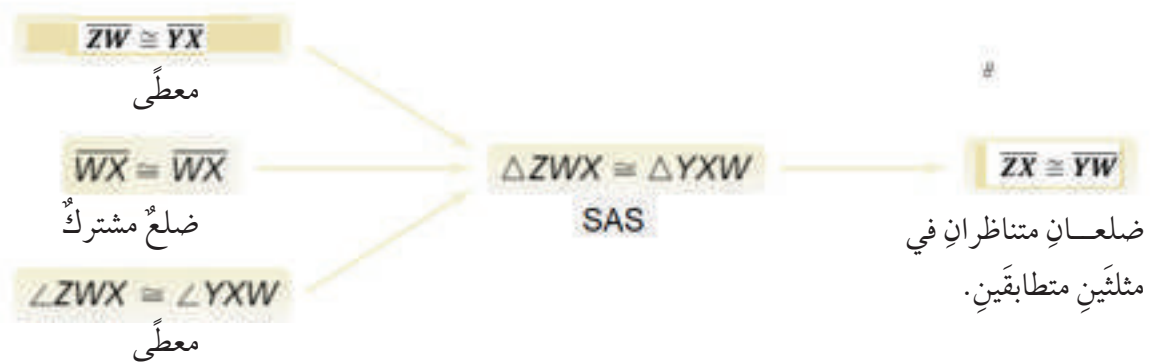
يمكن أحياناً استعمال الأجزاء المتطابقة من زوج من المثلثات المتطابقة في إثبات تطابق زوج آخر من المثلثات، وهذا ما يحدث غالباً في المثلثات المتداخلة، وبمجرد إثبات أن المثلثين متطابقان، فإن الأجزاء المتناظرة من المثلثين متطابقة أيضاً وفق التعريف.

مثال 4



في الشكل المجاور، إذا علمت أن $\angle ZWX \cong \angle YXW$ و $\overline{ZW} \cong \overline{YX}$ ، فاثبت أن $\overline{ZX} \cong \overline{YW}$ باستعمال البرهان السهمي.

البرهان:

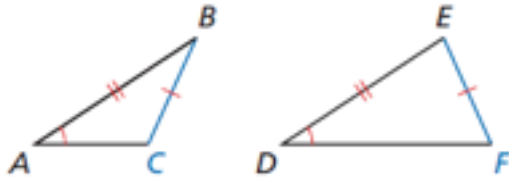


في الشكل المجاور، إذا علمت أن $\angle JKL \cong \angle MLK$ و $\overline{JK} \cong \overline{ML}$ ، فاثبت أن $\angle J \cong \angle M$ باستعمال البرهان السهمي.

أتحقق من فهمي:



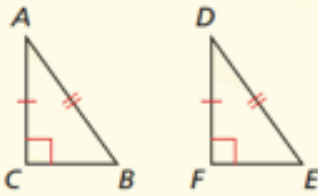
تعلّمتُ في الأمثلة السابقة أنّه يمكن استعمال حالتَي SSS و SAS في إثبات تطابق مثلثين. ولكن ماذا عن حالة ضلعين وزاوية غير محصورة بينهما؟



يبين الشكل المجاور مثلثين فيهما ضلعان متناظران متطابقان وزاوية غير محصورة تُطابق زاوية غير محصورة في المثلث الآخر. ولكن المثلثين غير متطابقين. ومن هنا يتبين أنّ حالة ضلعين وزاوية غير محصورة بينهما غير فعّالة، إلا أنّه يمكن استعمالها في إثبات تطابق مثلثين قائمي الزاوية؛ إذا تطابق الوتران، وتطابق ساقان في المثلثين.

تطابق المثلثات القائمة الزاوية بوتر وساق (HL)

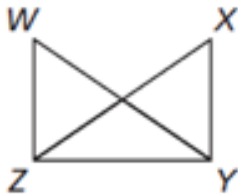
نظرية



• **بالكلمات:** إذا طابق وتر وساق في مثلث قائم الزاوية وترًا وساقًا في مثلث قائم آخر، فإن المثلثين متطابقان. وتُختصر هذه الحالة بالرمز HL.

• **بالرموز:** إذا كان: $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{AC} \cong \overline{DF}$, فإن: $\triangle ABC \cong \triangle DEF$

مثال 5



في الشكل المجاور، إذا علمت أنّ $\overline{WY} \cong \overline{XZ}$ و $\overline{WZ} \perp \overline{ZY}$ و $\overline{XY} \perp \overline{YZ}$ ، فأكتب برهانًا ذا عمودين؛ لإثبات أنّ $\triangle WYZ \cong \triangle XZY$

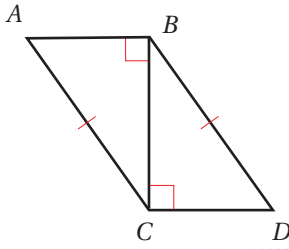
البرهان:

أُتعلّم

في حال إثبات صحة عبارة أو تخمين فإن المُثبت حينئذ يُسمّى **نظرية (theorem)**، ويمكن بعد ذلك استعماله في البراهين لتبرير صحة عبارات أخرى.

المبررات	العبارات
(1) معطى	(1) $\overline{WY} \cong \overline{XZ}$
(2) معطى	(2) $\overline{WZ} \perp \overline{ZY}$, $\overline{XY} \perp \overline{YZ}$
(3) تعريف المستقيمت المتعامدة	(3) $\angle WZY$, $\angle XYZ$ زاويتان قائمتان
(4) تعريف المثلث القائم الزاوية	(4) $\triangle WYZ$, $\triangle XZY$ مثلثان قائما الزاوية
(5) ضلع مشترك	(5) $\overline{ZY} \cong \overline{ZY}$
(6) HL	(6) $\triangle WYZ \cong \triangle XZW$

الوحدة 4



أتحقق من فهمي:



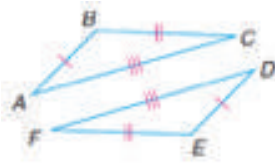
أستعمل المعلومات المعطاة في الشكل المجاور في كتابة برهانٍ ذي عمودين؛

لأثبت أن $\triangle ABC \cong \triangle DCB$

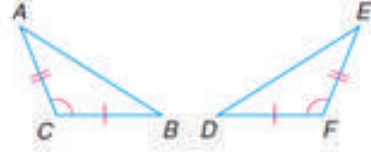
أبين أن كل زوج من المثلثات الآتية متطابق أم لا، مبرراً إجابتي:

أتحرب
وأحل المسائل

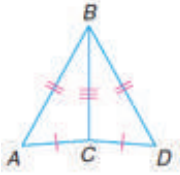
1



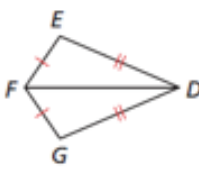
2



3



4

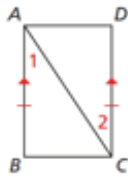


أستعمل المعلومات المعطاة

في الشكل الآتي لكتابة

برهانٍ ذي عمودين؛ لأثبت

أن $\triangle ABC \cong \triangle CDA$

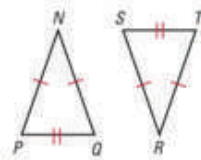


أستعمل المعلومات المعطاة

في الشكل الآتي لكتابة

برهانٍ ذي عمودين؛ لأثبت أن

$\triangle NPQ \cong \triangle RST$

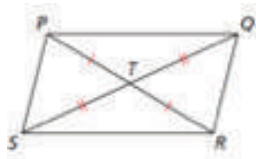


أستعمل المعلومات المعطاة

في الشكل الآتي، لكتابة

برهانٍ سهمي؛ لأثبت أن

$\triangle PQT \cong \triangle RST$



أستعمل المعلومات المعطاة

في الشكل الآتي، لكتابة

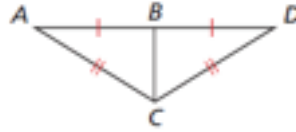
برهانٍ سهمي؛ لأثبت أن

$\triangle SPQ \cong \triangle TPQ$



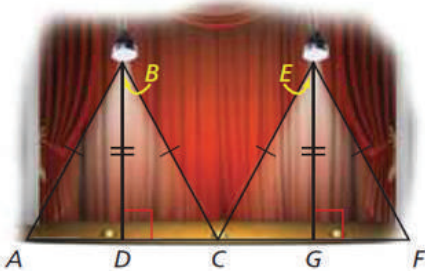
9

أستعملُ المعلوماتَ المعطاةَ
في الشكلِ الآتي لكتابةِ
برهانٍ ذي عمودين؛ لأثبتَ أنَّ
 $\angle A \cong \angle D$



10

أستعملُ المعلوماتَ المعطاةَ
في الشكلِ الآتي، لكتابةِ
برهانٍ سهميٍّ؛ لأثبتَ أنَّ
 $\overline{JM} \cong \overline{ML}$



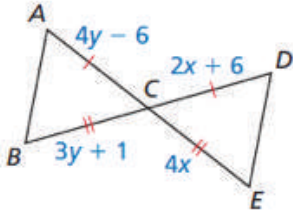
مصباح: يبينُ الشكلُ المجاورُ الضوءَ
الناشئَ عنَ مصباحينِ يبعدانِ المسافةَ
نفسها عنَ أرضيةِ مسرحٍ:

أثبتُ أنَّ $\triangle ABD \cong \triangle CBD$

11

12

هلِ المثلثاتُ الأربعةُ الموضَّحةُ في الشكلِ متطابقةٌ؟ أبرِّرْ إجابتي.



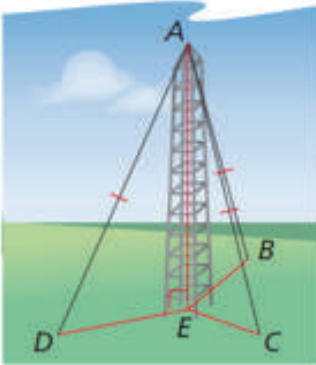
في الشكلِ المجاورِ المثلثينِ $\triangle ABC \cong \triangle DEC$:

أكتبُ برهاناً ذا عمودين؛ لأثبتَ أنَّ $\angle ABC \cong \angle DEC$

13

14

أجدُ قيمةَ كلِّ من x و y

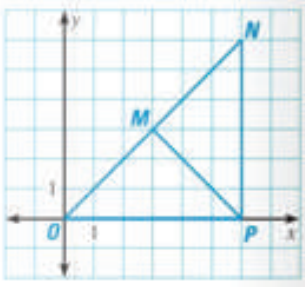


15

هوائيُّ تلفازٍ عموديٌّ على الأرضِ، يتصلُّ رأسُهُ
بكلِّ منَ النقطِ D و B و C عنَ طريقِ كابلاتٍ
لها الطولُ نفسه كما في الشكلِ المجاورِ. أثبتُ
أنَّ $\triangle AEB$ و $\triangle AEC$ و $\triangle AED$ متطابقةٌ.

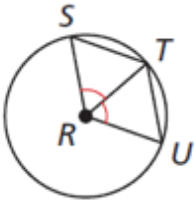
الوحدة 4

مهارات التفكير العليا



تحذّر: أثبت أن $\triangle PMO \cong \triangle PMN$ مستعملًا حالتَي SSS و SAS، علماً أنّه لا يمكنني استعمال المنقلة لقياس الزوايا.

16

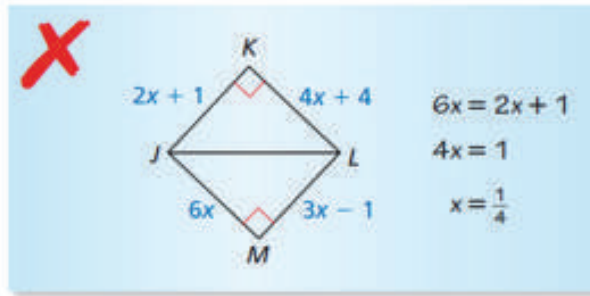


تبرير: في الشكل المجاور، إذا علمت أن $\angle SRT \cong \angle TRU$ ، و R مركز الدائرة، فأكتب برهانًا ذا عمودين؛ لإثبات أن $\triangle TRS \cong \triangle TRU$ ، مبررًا إجابتني.

17

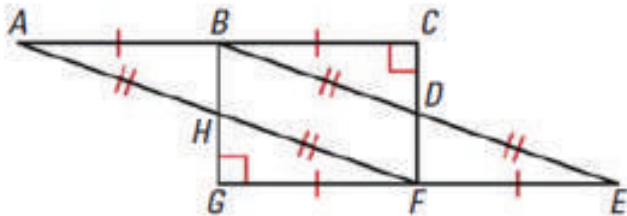
أكتشف الخطأ: أحدّد الخطأ في إيجاد قيمة x في الحل المجاور التي تجعل المثلثين متطابقين، وأصحّحه.

18



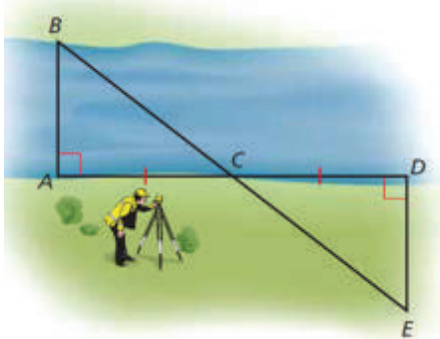
أستعمل المعلومات المعطاة في الشكل المجاور؛ لأثبت أن $\triangle ACF \cong \triangle EGB$

19



أكتب: كيف أتحقّق من تطابق مثلثين بثلاثة أضلاع، أو ضلعين وزاوية محصورة بينهما؟

20



أستكشف

يبيّن الشكل المجاور مساحاً
يقيس عرض نهر مستعملاً
تطابق المثلثات. أصف كيف
يمكنه ذلك؟

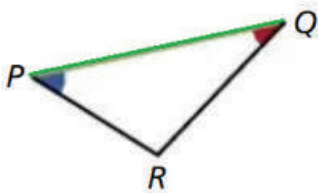
فكرة الدرس

أثبت تطابق مثلثين باستعمال
حالتَي ASA و AAS.

المصطلحات

الضلع المحصور.

تعلمت في الدرس السابق كيف أثبت تطابق مثلثين باستعمال ثلاثة أضلاع أو ضلعين وزاوية محصورة بينهما، وسأتعلم في هذا الدرس حالات أخرى لإثبات تطابق مثلثين.

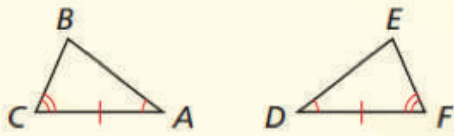


يسمى الضلع الواقع بين زاويتين متاليتين في مضلع الضلع المحصور (included side). ففي المثلث المجاور PQ هو الضلع المحصور بين $\angle P$ و $\angle Q$.

يمكن إثبات تطابق مثلثين باستعمال زوج من الأضلاع المتطابقة وزوجين من الزوايا المتطابقة في المثلثين.

التطابق بزائويتين وضلع محصور بينهما (ASA)

مسلمة



• **بالكلمات:** إذا طابقت زاويتان والضلع المحصور بينهما في مثلث نظائرهما في مثلث آخر، فإن المثلثين متطابقان. وتختصر هذه الحالة بالرمز ASA.

• **بالرموز:** إذا كان: $\angle A \cong \angle D$, $\overline{AC} \cong \overline{DF}$, $\angle C \cong \angle F$ ، فإن: $\triangle ABC \cong \triangle DEF$

مثال 1



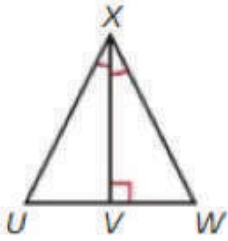
في الشكل المجاور، إذا علمت أن $\overline{NM} \cong \overline{NP}$ و $\angle M \cong \angle P$ ، فأثبت أن $\triangle NML \cong \triangle NPO$ باستعمال البرهان ذي العمودين.

الوحدة 4

البرهان:

المبررات	العبارات
(1) معطى	(1) $\overline{NM} \cong \overline{NP}$
(2) معطى	(2) $\angle M \cong \angle P$
(3) زاويتان متقابلتان بالرأس	(3) $\angle MNL \cong \angle PNO$
(4) ASA	(4) $\triangle NML \cong \triangle NPO$

أتحقق من فهمي:

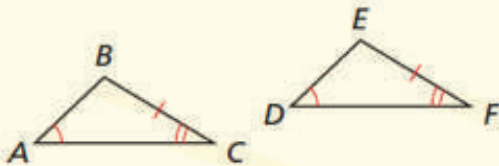


في الشكل المجاور، إذا علمت أن $\angle UXV \cong \angle WXV$ ، فأثبت أن $\triangle UXV \cong \triangle WXV$ باستعمال البرهان ذي العمودين.

ويمكن أيضًا إثبات تطابق مثلثين باستعمال زاويتين وضلع غير محصور بينهما.

التطابق بزائويتين وضلع غير محصور بينهما (AAS)

نظرية



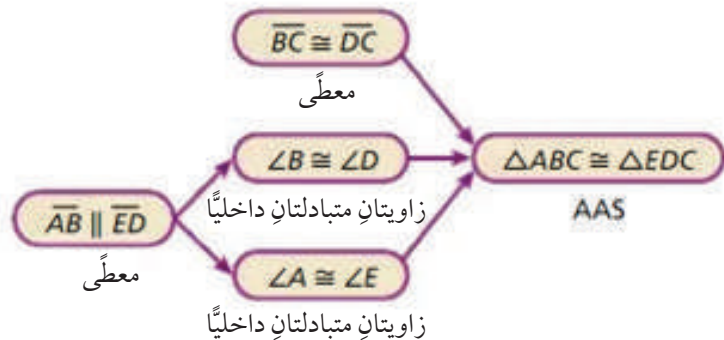
• **بالكلمات:** إذا طابقت زاويتان وضلع غير محصور بينهما في مثلث نظائرهما في مثلث آخر، فإن المثلثين متطابقان. وتختصر هذه الحالة بالرمز AAS.

• **بالرموز:** إذا كان: $\angle A \cong \angle D$, $\angle C \cong \angle F$, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ ، فإن: $\triangle ABC \cong \triangle DEF$

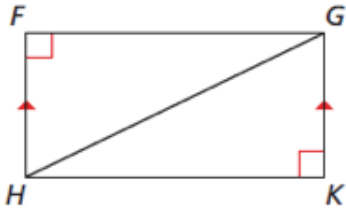
مثال 2



في الشكل المجاور، إذا علمت أن $\overline{BC} \cong \overline{DC}$ و $\overline{AB} \parallel \overline{ED}$ ، فأثبت أن $\triangle ABC \cong \triangle EDC$ باستعمال البرهان السهمي.



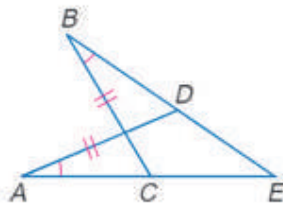
✓ أتتحقق من فهمي:



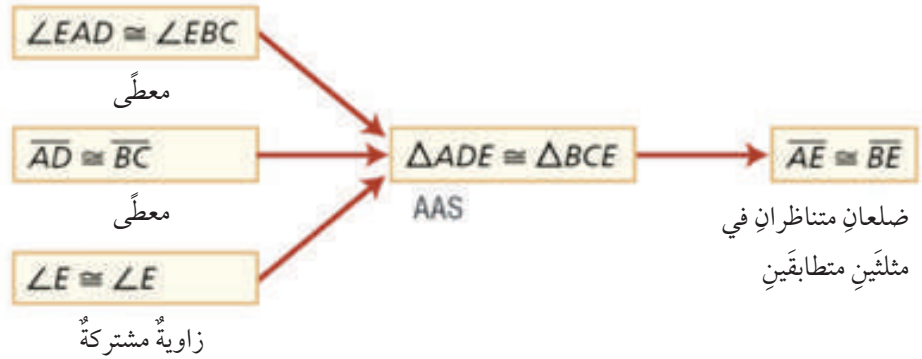
في الشكل المجاور، إذا علمتُ أن $\overline{HF} \parallel \overline{GK}$ ، وأن $\angle F$ و $\angle K$ زاويتان قائمتان، فأثبتُ أن $\triangle HFG \cong \triangle GKH$ باستعمال البرهان السهمي.

تعلمتُ في الدرس السابق أنه يمكن استعمال الأجزاء المتطابقة من زوج من المثلثات المتطابقة في إثبات تطابق زوج آخر من المثلثات في المثلثات المتداخلة، وأنه بمجرد إثبات أن المثلثين متطابقين، فإن الأجزاء المتناظرة من المثلثين متطابقة أيضًا وفق التعريف.

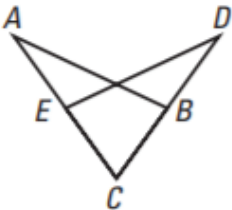
مثال 3



في الشكل المجاور، إذا علمتُ أن $\angle EAD \cong \angle EBC$ ، $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ ، فأثبتُ أن $\overline{AE} \cong \overline{BE}$ باستعمال البرهان السهمي.



✓ أتتحقق من فهمي:

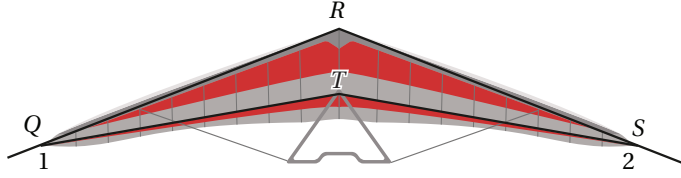


في الشكل المجاور، إذا علمتُ أن $\angle ABC \cong \angle DEC$ ، $\overline{CA} \cong \overline{CD}$ ، فأثبتُ أن $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ باستعمال البرهان ذي العمودين.

تُستعمل المثلثات المتطابقة في كثير من التصميمات؛ لِمَا لَهَا مِنْ أهمية في ضمان دعم الأشياء وتوازنها من حولنا.

الوحدة 4

مثال 4: من الحياة



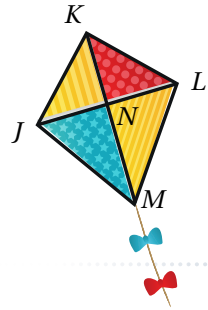
طائرة شراعية: يصمم جناح الطائرة الشراعية بحيث يبدو أنَّهُما مثلثان متطابقان كما في الشكل المجاور؛ لضمان توازن الطائرة في الجو.

إذا كانت $\angle 1 \cong \angle 2$ و $\angle RTQ \cong \angle RTS$ ، فأثبت أن $\overline{QT} \cong \overline{ST}$

لأثبت أن $\overline{QT} \cong \overline{ST}$ ، فلا بدّ أولاً إثبات أن $\triangle QRT \cong \triangle SRT$

المبررات	العبارات
(1) معطى	$\angle 1 \cong \angle 2$ (1)
(2) معطى	$\angle RTQ \cong \angle RTS$ (2)
(3) زاويتان متكاملتان مع الزاويتين المتطابقتين $\angle 1$ و $\angle 2$	$\angle RQT \cong \angle RST$ (3)
(4) ضلع مشترك	$\overline{RT} \cong \overline{RT}$ (4)
(5) AAS	$\triangle QRT, \triangle SRT$ (5)
(6) ضلعان متناظران في مثلثين متطابقين	$\overline{QT} \cong \overline{ST}$ (6)

أنتحقق من فهمي:



طائرة ورقية: إذا كانت N في الطائرة الورقية المجاورة نقطة منتصف $\overline{JL}$ ، و $\overline{KM} \perp \overline{JL}$

و $\angle KLN \cong \angle KJN$ ، فأثبت أن $\overline{KJ} \cong \overline{KL}$

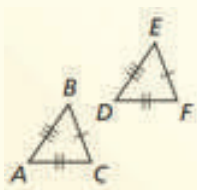
تعلمت طرائق عدة لإثبات تطابق المثلثات يمكن تلخيصها في الجدول الآتي:

إثبات تطابق المثلثات

ملخص المفهوم

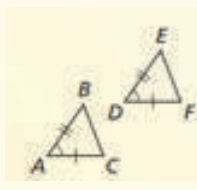


SSS



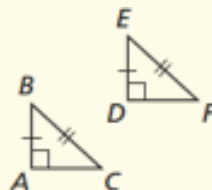
يتطابق مثلثان إذا طابقت ضلعان وزاوية محصورة بينهما في مثلث نظائرهما في مثلث آخر.

SAS



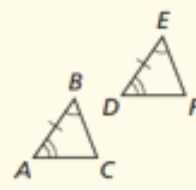
يتطابق مثلثان إذا كانت أضلاعهما المتناظرة متطابقة.

HL (مثلثات قائمة الزاوية فقط)



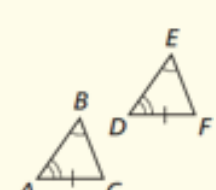
يتطابق مثلثان قائما الزاوية إذا طابقت وتر وساق في مثلث قائم الزاوية وتر وساقاً في مثلث قائم آخر.

ASA



يتطابق مثلثان إذا طابقت زاويتان وضلع محصور بينهما في مثلث نظائرهما في مثلث آخر.

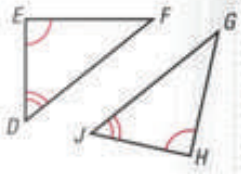
AAS



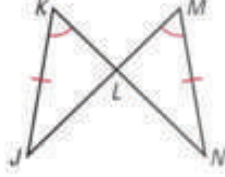
يتطابق مثلثان إذا طابقت زاويتان وضلع غير محصور بينهما في مثلث نظائرهما في مثلث آخر.

أحدّد أنّه يمكن إثبات تطابق كلّ زوجٍ مِنَ المثلثات الآتية أم لا، مبرراً إجابتي:

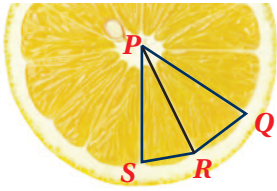
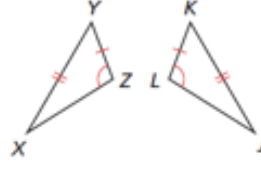
1 $\triangle DEF, \triangle JGH$



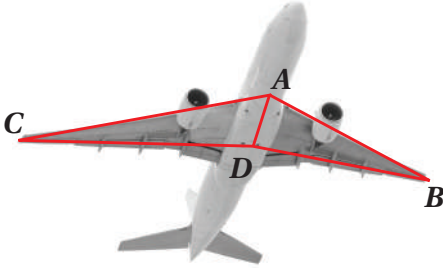
2 $\triangle JKL, \triangle NML$



3 $\triangle XYZ, \triangle JKL$

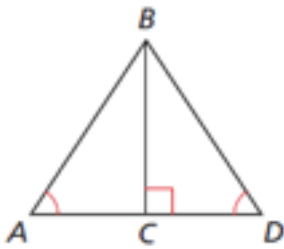


4 في الشكل المجاور، إذا علمتُ أنّ $\overline{PR}$ ينصف $\angle QPS$ ،
و $\angle QRP \cong \angle SRP$ ، فأثبتُ أنّ $\triangle QRP \cong \triangle SRP$

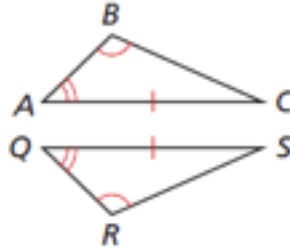


5 في الشكل المجاور، إذا علمتُ أنّ
 $\angle ADB \cong \angle ADC, \overline{DB} \cong \overline{DC}$
 $\angle ABD \cong \angle ACD$ ، فأثبتُ أنّ
 $\triangle ABD \cong \triangle ACD$

7 أستعملُ المعلوماتَ المعطاةَ في الشكلِ
الآتي لكتابةِ برهانٍ ذي عمودين؛ لأثبتَ
أنّ $\triangle ABC \cong \triangle DBC$



6 أستعملُ المعلوماتَ المعطاةَ في الشكلِ
الآتي لكتابةِ برهانٍ ذي عمودين؛ لأثبتَ
أنّ $\triangle ABC \cong \triangle QRS$



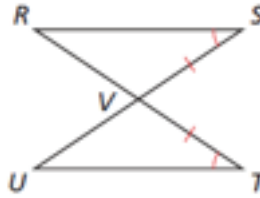
الوحدة 4

8

أستعملُ المعلوماتَ المعطاةَ في

الشكلَ الآتي، لكتابةِ برهانٍ سهميٍّ؛

لأثبتَ أنَّ $\Delta RSV \cong \Delta UTV$

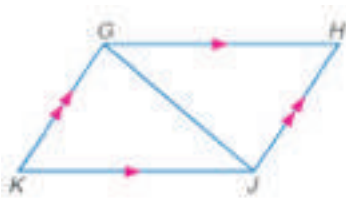


9

أستعملُ المعلوماتَ المعطاةَ في الشكلِ

الآتي، لكتابةِ برهانٍ سهميٍّ؛ لأثبتَ أنَّ

$\Delta GJK \cong \Delta JGH$

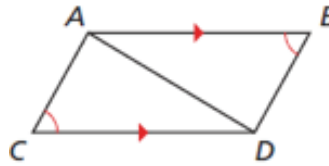


10

أستعملُ المعلوماتَ المعطاةَ في

الشكلَ الآتي، لكتابةِ برهانٍ سهميٍّ؛

لأثبتَ أنَّ $\overline{AC} \cong \overline{DB}$

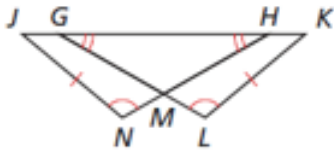


11

أستعملُ المعلوماتَ المعطاةَ في الشكلِ

الآتي، لكتابةِ برهانٍ سهميٍّ؛ لأثبتَ أنَّ

$\overline{GK} \cong \overline{HJ}$



12

مطلبة: يبينُ الشكلُ المجاورُ طائرةَ مظليّةٍ. إذا علمتُ أنَّ

$\angle L \cong \angle T$ ، و $\overline{ST} \cong \overline{ML}$ و $\angle S \cong \angle M$ فأثبتُ أنَّ

$\overline{RS} \cong \overline{KM}$ باستعمالِ البرهانِ ذي العمودين.



13

حديقة: تخططُ سالي لزراعةِ

حديقتهَا مستطيلةَ الشكلِ بأنواعِ

مختلفةٍ مِنَ الزهورِ في أربعةِ

أحواضٍ مثلثةِ الشكلِ كما في

الشكلِ المجاور. إذا علمتُ أنَّ

نقطةَ منتصفِ $\overline{DG}$ ، $\angle CDF \cong \angle FGH$ ، فأثبتُ أنَّ:



$\overline{CF} \cong \overline{HF}$

14

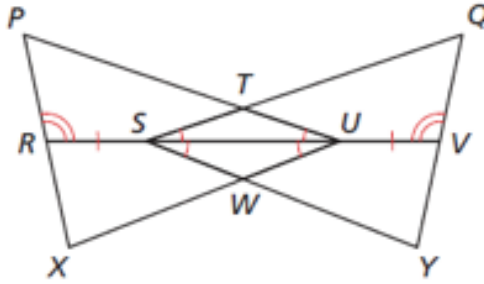
$\Delta CFD \cong \Delta HFG$

13

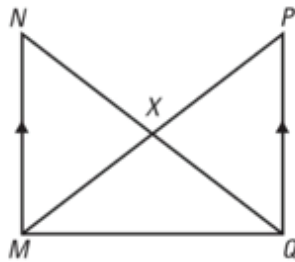
15 **نهج:** أعودُ إلى فقرة (أستكشف) بدايةً الدرس، وأثبت أن $\overline{AB} \cong \overline{DE}$

مهارات التفكير العليا

16 **تحذ:** أستمّل المعلومات المعطاة في الشكل المجاور لكتابة برهانٍ ذي عمودين؛
لأثبت أن $\triangle PUX \cong \triangle QSY$

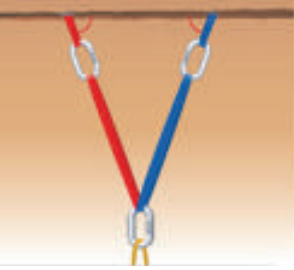


17 **تبرير:** هل يمكن إثبات تطابق $\triangle MNQ \cong \triangle QPM$ بالاعتماد على المعلومات المعطاة على الشكل؟ أبرّر إجابتي.



18 **أكتب:** كيف أتحقّق من تطابق مثلثين باستعمال زاويتين وضلعٍ محصورٍ بينهما؟

أستكشف



يبيّن الشكل المجاور مرستين باللونين الأحمر والأزرق لهما الطول نفسه، ثبتهما متسلّق في شقّ صخريّ في أثناء تسلّقه أحد الجبال. ما العلاقة بين الزاويتين المكوّنتين بين المرستين والشقّ الصخريّ؟

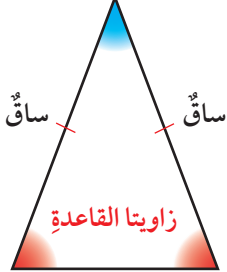
فكرة الدرس

- أستعمل خصائص المثلثات المتطابقة الضلعين.
- أستعمل خصائص المثلثات المتطابقة الأضلاع.

المصطلحات

الساقان، زاوية الرأس، القاعدة، زاويتا القاعدة، النتيجة.

زاوية الرأس

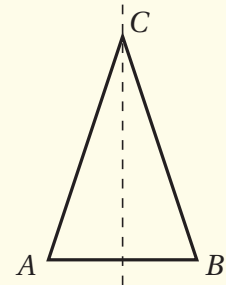


تعلمت سابقاً أنّ المثلث المتطابق الضلعين هو المثلث الذي فيه ضلعان متطابقان على الأقل. إنّ لأجزاء المثلث المتطابق الضلعين أسماء خاصة، إذ يسمّى الضلعان المتطابقان **الساقين** (legs)، وتسمّى الزاوية التي ضلعاها الساقان **زاوية الرأس** (vertex angle)، ويسمّى الضلع الثالث **القاعدة** (base). والزاويتان المكوّنتان من القاعدة والضلعين المتطابقين تسميان **زاويتي القاعدة** (base angles).

سأستكشف في هذا النشاط العلاقة بين زاويتي القاعدة والساقين في المثلث المتطابق الضلعين.

المثلثات المتطابقة الضلعين

نشاط هندسي



الإجراءات:

- 1 **الخطوة** أرسم مثلثاً متطابق الضلعين على ورقة شفافة، كما في الشكل المجاور، حيث $\overline{AC} \cong \overline{BC}$.
- 2 **الخطوة** أطوي المثلث حول الرأس C بحيث ينطبق الساقان على بعضهما تماماً.

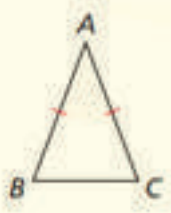
أحلّ النتائج:

- ماذا ألاحظ بالنسبة للزاويتين $\angle A$ و $\angle B$ ؟
- أرسم مثلثاً آخر متطابق الضلعين، وأقارن بين زاويتي القاعدة. ماذا أستنتج؟

يمكنني ملاحظة النظريات الآتية من النشاط الهندسي السابق:

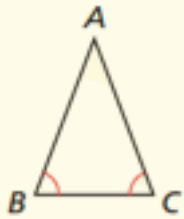
المثلث المتطابق الضلعين

نظريات



نظرية المثلث المتطابق الضلعين

- **بالكلمات:** إذا تطابق ضلعان في مثلث، فإن الزاويتين المقابلتين لهما متطابقتان.
- **بالرموز:** إذا كان $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ فإن $\angle B \cong \angle C$



عكس نظرية المثلث المتطابق الضلعين

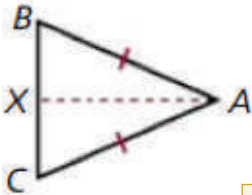
- **بالكلمات:** إذا تطابقت زاويتان في مثلث، فإن الضلعين المقابلين لهما متطابقان.
- **بالرموز:** إذا كان $\angle B \cong \angle C$ فإن $\overline{AB} \cong \overline{AC}$



منصف زاوية الرأس

- **بالكلمات:** يكون منصف زاوية الرأس عمودياً على القاعدة، وينصفها.
- **بالرموز:** إذا كان $\overline{BC} \cong \overline{AC}$ و $\overline{CD}$ ينصف $\angle ACB$ ، فإن $\overline{CD} \perp \overline{AB}$ و $\overline{AD} \cong \overline{BD}$

مثال 1

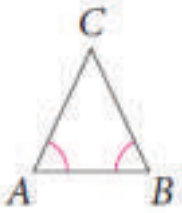


في $\triangle ABC$ ، إذا علمت أن $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ ، فأثبت أن $\angle B \cong \angle C$ باستعمال البرهان ذي العمودين.

المبررات	العبارات
(1) كل قطعة مستقيمة لها نقطة منتصف واحدة.	(1) افترض أن X نقطة منتصف $\overline{BC}$
(2) كل نقطتين تحددان مستقيماً.	(2) أرسم قطعة مساعدة $\overline{AX}$
(3) X نقطة منتصف $\overline{BC}$	(3) $\overline{BX} \cong \overline{CX}$
(4) معطى	(4) $\overline{AB} \cong \overline{AC}$
(5) ضلع مشترك	(5) $\overline{AX} \cong \overline{AX}$
(6) SSS	(6) $\triangle ABX \cong \triangle ACX$
(7) زاويتان متناظرتان في مثلثين متطابقين	(7) $\angle B \cong \angle C$

الوحدة 4

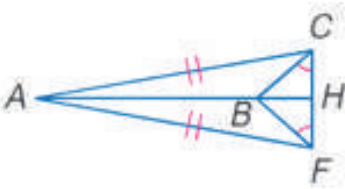
أتحقق من فهمي:



في $\triangle ABC$ ، إذا علمت أن $\angle A \cong \angle B$ ، فأثبت أن $\overline{CA} \cong \overline{CB}$ باستعمال البرهان ذي العمودين.

يمكنني استعمال نظريات المثلث المتطابق الضلعين في تحديد القطع المستقيمة المتطابقة والزوايا المتطابقة في أشكال هندسية تحتوي مثلثات متطابقة الضلعين.

مثال 2



1 أسمى زاويتين متطابقتين غير المشار إلي تطابقهما في الشكل:

$\angle AFC$ تقابل $\overline{AC}$ و $\angle ACF$ تقابل $\overline{AF}$ ؛ لذا فإن $\angle AFC \cong \angle ACF$

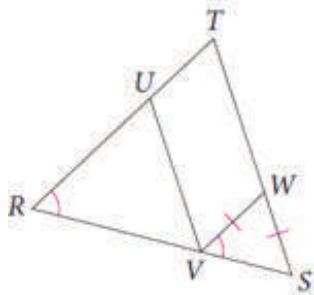
(نظرية المثلث المتطابق الضلعين)

2 أسمى قطعتين مستقيمتين متطابقتين غير المشار إلي تطابقهما في الشكل:

$\overline{BC}$ تقابل $\angle BFC$ و $\overline{BF}$ تقابل $\angle BCF$ ؛ لذا فإن $\overline{BC} \cong \overline{BF}$

(عكس نظرية المثلث المتطابق الضلعين)

أتحقق من فهمي:



3 أسمى زاويتين متطابقتين غير المشار إلي تطابقهما في الشكل.

4 أسمى قطعتين مستقيمتين متطابقتين غير المشار إلي تطابقهما في الشكل.

أنذكر

المثلث المتطابق
الأضلاع أضلاعه
الثلاثة متطابقة.

النتيجة (Corollary) هي نظرية يكون برهانها مبنياً على نظرية أخرى. ويمكن استعمال النتيجة كأى نظرية أخرى لتبرير خطوات برهان آخر، أو حل أسئلة ذات علاقة. وفي ما يأتي نتيجتان لنظرية المثلث المتطابق الضلعين، وعكس نظرية المثلث المتطابق الضلعين:

المثلث المتطابق الأضلاع

نتيجتان



• **بالكلمات:** يكون المثلث متطابق الأضلاع إذا وفقط إذا كان متطابق الزوايا.

• **بالرموز:** $\angle A \cong \angle B \cong \angle C$ إذا وفقط إذا $\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CA}$

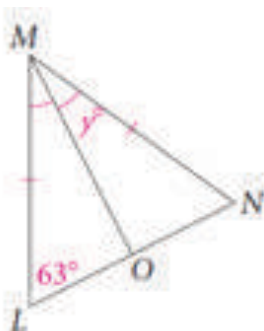


• **بالكلمات:** قياس كل زاوية في المثلث المتطابق الأضلاع 60° .

• **بالرموز:** إذا كان $\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CA}$ فإن $\angle A \cong \angle B \cong \angle C = 60^\circ$

يمكن استعمال خصائص المثلثات المتطابقة الضلعين والمتطابقة الأضلاع والجبر لإيجاد قيم مجهولة.

مثال 3



1 أجد قيمة المتغير في الشكل المجاور.

بما أن $\angle NMO \cong \angle LMO$ إذن $\overline{MO}$ منصف لزواية الرأس في مثلث متطابق الضلعين،

وبذلك فإن $\overline{MO} \perp \overline{LN}$ ، ومنه $m\angle MON = 90^\circ$.

وبما أن $\triangle MLN$ متطابق الضلعين، فإن $\angle N \cong \angle L$ ، ومنه فإن $m\angle N = 63^\circ$.

$$m\angle N + m\angle MON + y = 180^\circ$$

مجموع زوايا المثلث

$$63^\circ + 90^\circ + y = 180^\circ$$

$$m\angle N = 63^\circ, \angle MON = 90^\circ$$

$$153^\circ + y = 180^\circ$$

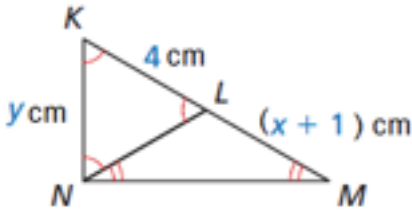
أجمع

$$y = 27^\circ$$

أطرح 153° من طرفي المعادلة

إذن، قيمة y تساوي 27°

الوحدة 4



2 أجد قيمة كلٍّ من المتغيرين في الشكل المجاور.

الخطوة 1 أجد قيمة y

بما أن $\angle KNL \cong \angle LNM \cong \angle LKN$ ، فإن $\triangle KLN$ متطابق الأضلاع،
ومنهُ فإن $y = 4$ cm.

الخطوة 2 أجد قيمة x

بما أن $\angle LNM \cong \angle LMN$ ، فإن $\overline{LN} \cong \overline{LM}$ ، ومنهُ فإن $\triangle LMN$ متطابق الضلعين.
وبما أن $\triangle KLN$ متطابق الأضلاع، فإن $LN = 4$.

$$LN = LM$$

$$4 = x + 1$$

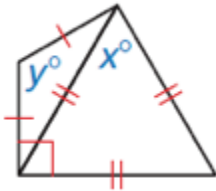
$$x = 3$$

قطعتان مستقيمتان متطابقتان

$$LN = 4, LM = x + 1$$

أطرح 1 من طرفي المعادلة

إذن، قيمة x تساوي 3



تحقق من فهمي: ✓

3 أجد قيمة كلٍّ من المتغيرين في الشكل المجاور.

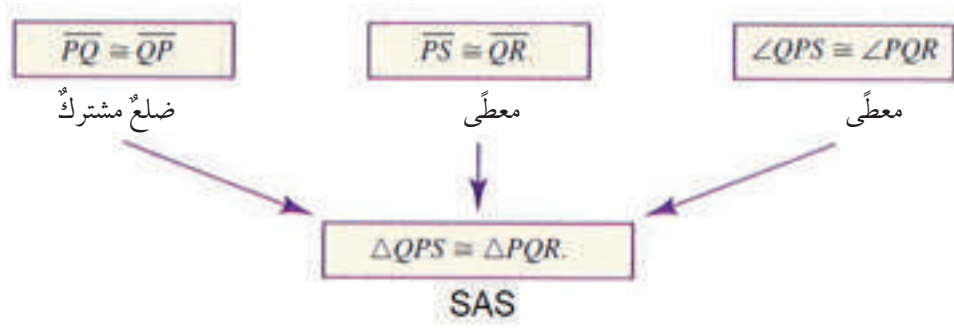
يمكن رؤية المثلثات المتطابقة الضلعين والمتطابقة الأضلاع في كثير من التصميمات والهيكل والجسور والمباني؛ لِمَا لها من أهمية في دعمها وجعلها أكثر ثباتاً.



مثال 4: من الحياة

برج المنقذ: في برج المنقذ المجاور، إذا علمتُ أن $\overline{PS} \cong \overline{QR}$ و $\angle QPS \cong \angle PQR$ ،
فأثبتُ أن:

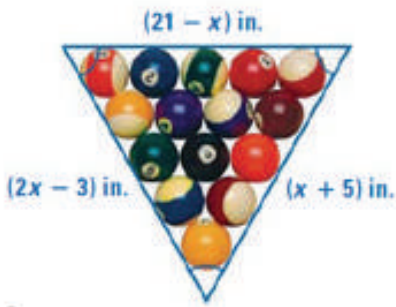
$$\triangle QPS \cong \triangle PQR$$



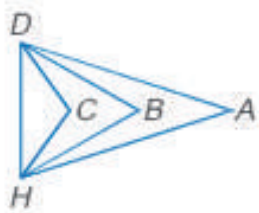
2 $\triangle QPT$ متطابق الضلعين.

المبررات	العبارات
(1) زاويتان متقابلتان بالرأس.	(1) $\angle PTS \cong \angle QTR$
(2) زاويتان متناظرتان في مثلثين متطابقين.	(2) $\angle PSQ \cong \angle QRP$
(3) معطى.	(3) $\overline{PS} \cong \overline{QR}$
(4) AAS.	(4) $\triangle QTR \cong \triangle PTS$
(5) ضلعان متناظران في مثلثين متطابقين.	(5) $\overline{PT} \cong \overline{QT}$
(6) تعريف المثلث متطابق الضلعين.	(6) $\triangle QPT$ متطابق الضلعين

✓ **أتحقق من فهمي:**



بلياردو: تُرتَّب كرات البلياردو على شكل مثلث متطابق الأضلاع كما في الشكل المجاور؛ لأنَّ شكل المثلث قادرٌ على نقل الطاقة الحركية من الكرة الأولى في الواجهة إلى غيرها من الكرات، فتتحرك كلها من ضربة واحدة. أجد قيمة المتغير x .



باستعمال الشكل المجاور، أجب عن الأسئلة الآتية:

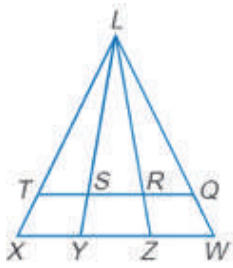
1 إذا كان $\overline{AD} \cong \overline{AH}$ ، فأسمي زاويتين متطابقتين.

2 إذا كان $\angle BDH \cong \angle BHD$ ، فأسمي قطعتين

مستقيمتين متطابقتين.

أدرب وأحل المسائل

الوحدة 4



باستعمال الشكل المجاور، أجب عن الأسئلة الآتية:

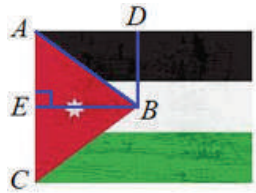
3 إذا كان $\overline{LT} \cong \overline{LQ}$ ، فأسمي زاويتين متطابقتين.

4 إذا كان $\overline{LX} \cong \overline{LW}$ ، فأسمي زاويتين متطابقتين.

5 إذا كان $\overline{LY} \cong \overline{LZ}$ ، فأسمي زاويتين متطابقتين.

6 إذا كان $\angle LXW \cong \angle LWX$ ، فأسمي قطعتين مستقيمتين متطابقتين.

7 إذا كان $\angle LSR \cong \angle LRS$ ، فأسمي قطعتين مستقيمتين متطابقتين.



8 **العلم الأردني:** العلم الأردني مستطيل طوله مثلاً عرضه، فيه مثلث متطابق الضلعين لونه أحمر، وارتفاع المثلث $\overline{BE}$ يساوي نصف طول العلم. أثبت أن $\triangle DAB \cong \triangle EBA$

في الشكل الآتي، إذا علمت أن $\triangle XKF$

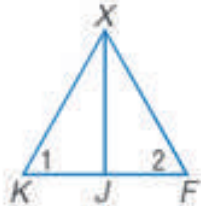
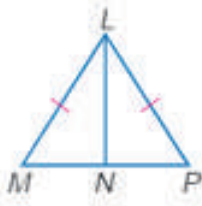
متطابق الأضلاع، و $\overline{XJ}$ ينصف $\angle X$ ، فأكتب برهاناً ذا عمودين؛ لإثبات أن J نقطة منتصف $\overline{KF}$.

في الشكل الآتي، إذا علمت أن $\triangle MLP$

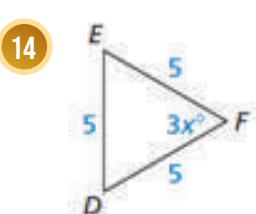
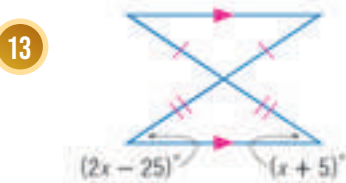
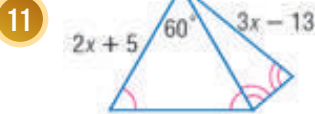
متطابق الضلعين، و N نقطة منتصف

$\overline{MP}$ ، فأكتب برهاناً سهماً؛ لإثبات أن

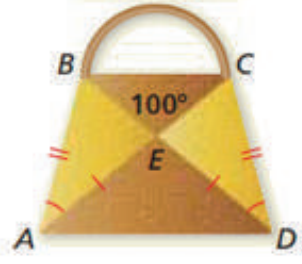
$$\overline{LN} \perp \overline{MP}$$



أجد قيمة x في كل مما يأتي:



حقيبة: يبين الشكل المجاور تصميمًا لحقيبة قماشية:



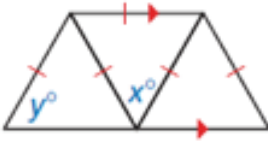
أثبت أن $\triangle ABE \cong \triangle DCE$

أسمي المثلثات المتطابقة الضلعين في الحقيبة.

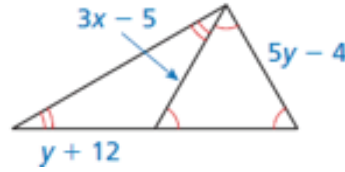
أسمي ثلاث زوايا تتطابق مع $\angle EAD$

أجد قيمة x و y في كل مما يأتي:

18

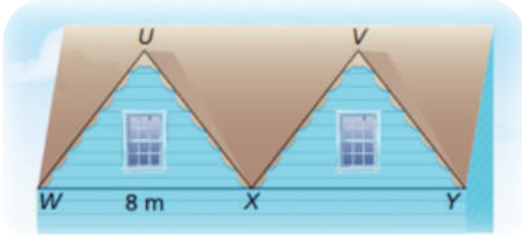


19



مهارات التفكير العليا

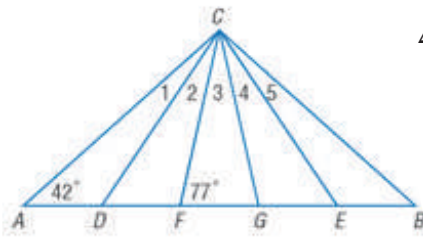
تبرير: يبين الشكل المجاور
الواجهة الأمامية لمنزل على
شكل مثلثين متطابقين الضلعين
متطابقين رأساهما U و V :



أسمي زاويتين متطابقتين مع $\angle WUX$ ، مبررًا إجابتي.

أجد المسافة بين الرأسين U و V .

في الشكل المجاور، إذا علمت أن $\triangle ABC$
متطابق الضلعين، و $\triangle DCE$ متطابق
الأضلاع، و $\triangle FCG$ متطابق الضلعين،
فأجد قياسات الزوايا 1 و 2 و 3 و 4 و 5.



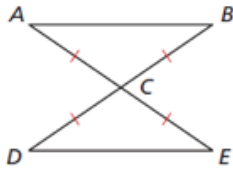
أكتب: كيف أثبت أن قياس كل زاوية من زوايا المثلث المتطابق الأضلاع 60° ؟

اختبار الوحدة

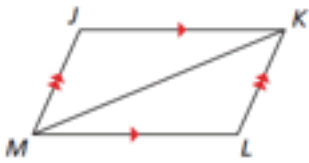
إذا كان $\triangle ABC \cong \triangle XYZ$ ، وكان $m\angle A = 47.1^\circ$ و $m\angle C = 13.8^\circ$ ، فإن $m\angle Y$ يساوي:

- a) 13.8° b) 76.2°
c) 60.9° d) 119.1°

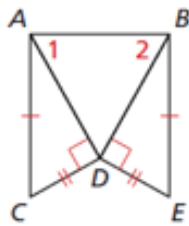
أستعمل المعلومات المعطاة على الشكل الآتي
لكتابة برهانٍ سهميٍّ؛ لأثبت أن $\triangle ABC \cong \triangle EDC$



أستعمل المعلومات
المعطاة في الشكل
المجاور لكتابة
برهانٍ ذي عمودينٍّ؛ لأثبت أن $\triangle MJK \cong \triangle KLM$



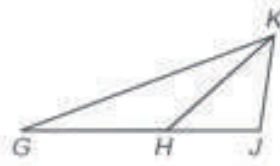
أستعمل المعلومات المعطاة على الشكل الآتي؛
لأثبت أن $\angle 1 \cong \angle 2$



أختار رمزَ الإجابة الصحيحة في كلِّ ممَّا يأتي:

إذا كان $\triangle ABC \cong \triangle XYZ$ فأَيُّ الجملِ الآتية
صحيحةٌ؟

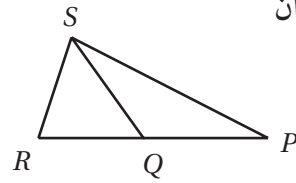
- a) $\overline{BC} \cong \overline{ZX}$ b) $\overline{AC} \cong \overline{XZ}$
c) $\overline{AB} \cong \overline{YZ}$ d) $\overline{AC} \cong \overline{XY}$



في الشكل المجاور،
إذا كان $\overline{GH} \cong \overline{HK}$
و $\overline{HJ} \cong \overline{JK}$

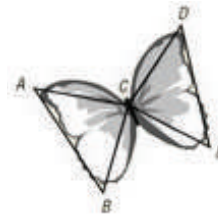
و $m\angle GJK = 100^\circ$ ، فما قياس $\angle GKH$ ؟

- a) 10° b) 15° c) 20° d) 25°



في الشكل المجاور، إذا كان
 $\overline{PQ} \cong \overline{QS}$ و $\overline{QR} \cong \overline{RS}$ ،
و $m\angle PRS = 72^\circ$ ،
فما قياس $\angle QPS$ ؟

- a) 27° b) 54° c) 63° d) 72°

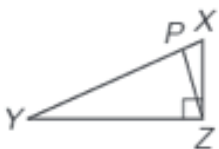


تبدو أجنحة بعض الفراشات
على شكل مثلثات متطابقة
كما في الشكل المجاور.
إذا كان $\overline{AC} \cong \overline{DC}$

و $\angle ACB \cong \angle ECD$ ، فما العبارة الإضافية التي
أحتاج إليها؛ لأثبت أن $\triangle ACB \cong \triangle ECD$ ؟

- a) $\overline{BC} \cong \overline{CE}$ b) $\overline{AB} \cong \overline{ED}$
c) $\angle BAC \cong \angle CED$ d) $\angle ABC \cong \angle CDE$

تدريب على الاختبارات الدولية



13 في الشكل المجاور
 $\triangle XZY$ قائم الزاوية،
 فيه $\overline{YP} \cong \overline{YZ}$

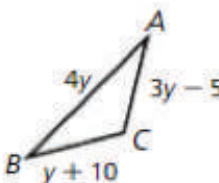
$m\angle PYZ = 26^\circ$ ، ما قياس $\angle XZP$ ؟

- a) 13° b) 26° c) 32° d) 64°



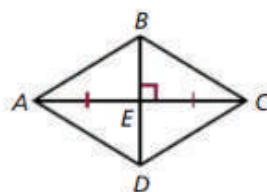
14 أي النظريات أو المسلمات
 يمكن بها إثبات تطابق
 $\triangle VUT$ و $\triangle STU$ ؟

- a) ASA b) HL c) SSS d) SAS



15 قيمة y بالوحدات التي
 تجعل $\triangle ABC$ المجاور
 متطابق الضلعين تساوي:

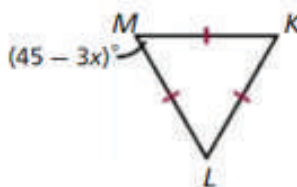
- a) $1\frac{1}{4}$ b) $7\frac{1}{2}$ c) $2\frac{1}{2}$ d) $15\frac{1}{2}$



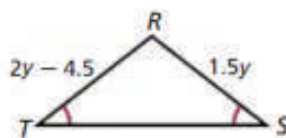
16 أي جمل التتبع
 الآتي يمكن إثباتها
 بالمعلومات المعطاة
 في الشكل المجاور؟

- a) $\triangle AEB \cong \triangle CED$ b) $\triangle ABD \cong \triangle BCA$
 c) $\triangle BAC \cong \triangle DAC$ d) $\triangle DEC \cong \triangle DEA$

أجد قيمة المتغير في كل من الأشكال الآتية:



9



10

11 في الشكل الآتي، إذا علمت أن

$GJ = GH = GL = GK = 20$ cm، فأثبت أن

$$\triangle JGK \cong \triangle LGH$$



12 في الشكل الآتي، إذا علمت أن $\overline{DF}$ ينصف $\angle CDE$ ،

و $\overline{CE} \perp \overline{DF}$ ، فأكتب برهاناً سهماً؛ لاثبت أن

$$\triangle DGC \cong \triangle DGE$$

